arXiv:2611.29013v1 [math.MG] 21 Nov 2026

Eco对数凹测度的帽覆盖

Minas Pafis

摘要

设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度。记其半空间深度为 q_μ，湿部分为 $W_t = \{q_\mu \leqslant t\}$，并令 $w_\mu(t) = \mu(W_t)$。对于充分小的 t，我们构造一个由半空间组成的 W_t 覆盖，使每个半空间的测度至多为 $A_n t$，且覆盖的基数有如下界：

$$D_n \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t},$$

其中常数仅依赖于 n。对于每个 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，我们还构造一个由半空间组成的覆盖，使每个半空间的测度至多为 $(1+\varepsilon)t$，且覆盖的基数有如下界：

$$B_n \varepsilon^{-(n-1)/2} \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t}.$$

高斯例子表明，指数 $(n-1)/2$ 对于 $n \geqslant 2$ 是最优的。我们还建立了任意维数下半空间的包含覆盖：存在一个由 $O_n(w_\mu(t)/t)$ 个博雷尔覆盖集组成的族，每个覆盖集的 μ-测度为 $O_n(t)$，使得每个测度至多为 t 的半空间都包含于某个覆盖集中。我们还得到了指数 $2/(n+1)$ 最优的相对湿部分估计，以及一个反向倍增不等式。

1 引言

在本文中，我们将 B´ar´any 和 Larman [10]针对凸体上的均匀测度所证明的经济帽覆盖定理推广到对数凹概率测度。我们从这一经典结果及其若干应用开始。

若 A 和 B 的上下界均为正的常数倍，且这些常数仅依赖于 m，则记作 $A \approx_m B$。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，并以 μ_K 表示其上的归一化勒贝格测度。K 的帽是一个交集 $C = K \cap H$，其中 H 是一个闭半空间。对于每个 $x \in K$，我们定义

$$v_K(x) = \inf\{\mu_K(K \cap H) : H \text{ is a closed half-space containing } x\}.$$

K 在 t 层的湿部分为

$$U_t(K) = \{x \in K : v_K(x) \leqslant t\},$$

而其在 K 中的补集是 K 在 t层的凸浮体的内部（见引理2.3）。

Macbeath 的中心对称区域 [25], 与装填论证在这一领域发挥着核心作用。Ewald、Larman 和 Rogers [21] 利用相关区域，为内平行体得出了一个经济覆盖定理。B´ar´any 和 Larman [10, 定理 6] 将该方法应用于浮体，证明了以下结果。

定理1.1. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体。对每个 $0 < t < t_n$，其中 t_n 仅取决于 n，存在帽 C_1、…、C_m 以及互不相交的博雷尔集 $C_i' \subseteq C_i$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{m} C_i' \subseteq U_t(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} C_i, \qquad a_n t \leqslant \mu_K(C_i') \leqslant \mu_K(C_i) \leqslant A_n t, \tag{1.1}$$

其中 a_n、$A_n > 0$ 是仅依赖于 n 的常数。

C_i' 互不相交这一事实意味着

$$m \leqslant \frac{1}{a_n t}\, \mu_K(U_t(K)). \tag{1.2}$$

反过来，任何用相对体积至多为 $U_t(K$ 的帽覆盖 $A_n t$，其基数至少为$\mu_K(U_t(K))/(A_n t)$。关于 M-区域方法及其改进和其他应用，综述见 [7, 8]。

定理 1.1有重要的应用。B´ar´any 和 Larman 最初的研究动机，是用随机点的凸包逼近一个凸体。若 $X_1, \dots, X_N$是独立且均匀分布于 K，并且 $P_N = \operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$，则定理 1.1 意味着

$$\mathbb{E}\, \mu_K(K \setminus P_N) \approx_n \mu_K(U_{1/N}(K)) \tag{1.3}$$

当 N 相对于 n 足够大时。该结果将随机逼近问题与一个确定性几何量联系起来，并且这一联系对所有凸体都一致成立。这一联系源于 R´enyi 和 Sulanke 关于平面内随机点凸包的研究 [29]，以及 Efron 的恒等式 [20], ，后者将随机多胞体顶点数的期望与期望缺失体积联系起来。B´ar´any [5] 得到了随机多胞体面数期望的估计。关于光滑凸体的进一步结果由 B´ar´any [6]，得出，他获得了期望缺失体积和拟曲面积分的渐近估计。更多背景信息请参阅综述 [7, 28]。

湿部分的几何性质也体现出对边界行为的依赖。对于每个凸体K in $\mathbb{R}^n$，都有

$$\mu_K(U_t(K)) \leqslant C_n t^{2/(n+1)} \tag{1.4}$$

只要 t 足够小。欧几里得球的例子表明，指数 $2/(n+1)$ 是最优的。另一方面，对于固定的 n 维多胞体 P，有 $\mu_P(U_t(P)) \approx_P t(\log(1/t))^{n-1}$，当 $t \to 0^+$ 时。对于具有正曲率的光滑凸体，其渐近行为与欧几里得球相同，并可通过仿射表面积来表示。关于浮体、仿射表面积和随机多胞体的相关结果，参见 [10, 9, 30, 28, 32]。

第二条主要应用方向涉及多胞体的确定性近似以及计算几何中的算法。Dudley [19] 以及 Bronshteyn和Ivanov [17] 的经典结果估计了在Hausdorff距离下用外接多胞体近似凸体所需的超面数或顶点数。换一种表述，Macbeath装填和经济覆盖可用于控制多胞体近似的复杂度。例如，Arya、da Fonseca和Mount关于 ε-核、经济凸覆盖和Banach–Mazur逼近[1, 3], 的研究，以及他们的面积敏感多胞体逼近定理 [4]，都体现了这一观点；另见 [2]。其他应用涉及近似直径和宽度、最近邻搜索，以及最近向量问题

[1, 3]。

主要结果。 我们将经济帽覆盖理论扩展到 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。对于这样的测度 μ，相应的帽是测度 μ 较小的半空间。

对于 $x \in \mathbb{R}^n$，定义 μ 的半空间深度函数如下：

$$q_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \text{ is a closed half-space containing } x\}.$$

这一概念最初由 Tukey 在多元数据分析的研究中提出 [31]，后来成为稳健统计中的核心工具；参见 Donoho 和 Gasko [18]，以及 Zuo 和 Serfling [33]。Nagy、Sch¨utt 和 Werner 的综述文章 [26] 介绍了它与浮体及凸几何之间的联系。Besau、Ludwig 和 Werner [12] 也研究了凸体上的加权浮体和密度逼近。Brazitikos、Giannopoulos 与作者 [14, 15] 研究了对数凹测度中相关的深度和随机多胞体问题；另请参见 [24]。

对于每个 $t > 0$，令

$$K_t = \{x : q_\mu(x) \geqslant t\}, \qquad W_t = \{x : q_\mu(x) \leqslant t\}, \qquad w_\mu(t) = \mu(W_t),$$

并记为 $q_* = \sup_x q_\mu(x)$。若 $\mu = \mu_K$ 是凸体 K 上的均匀概率测度，则$q_\mu|_K = v_K$，且 $w_\mu(t) = \mu_K(U_t(K))$。一般而言， K_t 是凸的，而 W_t 是测度论湿部。我们将每个 $0 < t < q_*$ 称为一个可容许层级。

我们的出发点是 B´ar´any、Fradelizi、Goaoc、Hubard 和 Rote [11] 的工作，他们证明了式（1.3）中的经典湿部下界对任意分布仍然成立。另一方面，他们给出了一个例子，表明对数损失在一般情况下无法消除，并提出了一个问题：经典的双边估计对于对数凹概率测度这一类是否成立。

对于 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，令 $N_\mu(t, \varepsilon)$ 表示覆盖 W_t 所需的 μ-测度不超过 $(1+\varepsilon)t$ 的闭半空间的最小数量。我们还将使用凸深度区域的麦克比斯区域

$$M_K(x) = x + ((K - x) \cap (x - K)), \qquad M_K^\lambda(x) = x + \lambda((K - x) \cap (x - K))$$

K_t。

定理 1.2。 存在仅依赖于 n 的 a_n、$t_n \in (0, 1)$ 以及 A_n、$D_n > 0$，使得对于每个$0 < t < t_n$，我们都可以选取半空间 C_1、……、C_N，满足

$$W_t \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{int}(C_i) \subseteq \{q_\mu \leqslant A_n t\}, \quad \mu(C_i) \leqslant A_n t,$$

and

$$N \leqslant D_n \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t}.$$

定理 1.2 的证明见第 3 节（详见定理 3.1 的详细版本）。这表明 B´ar´any–Larman 覆盖原理对数凹测度成立，且覆盖集为半空间。

定理 1.3。该 存在 $a_n, t_n \in (0,1)$ 以及 $B_n > 0$，它们仅取决于 n，使得对于 $0 < t < t_n$ 和

$0 < \varepsilon \leqslant 1$ 我们可以找到半空间 $C_1, \ldots, C_N$，用它们覆盖 W_t

$$\mu(C_i) \leqslant (1+\varepsilon)t, \quad N \leqslant B_n \varepsilon^{-(n-1)/2} \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t}.$$

对于 $n \geqslant 2$，指数 $(n-1)/2$ 在所有对数凹概率测度中一致地是最优的。

定理 1.3 的证明见第 3 节（参见定理 3.16）。高斯测度的情形表明，指数 $(n-1)/2$ 无法进一步改进（参见定理 3.21）。

前述定理讨论的是对 W_t 的覆盖。一种不同且更强的断言要求将每个小半空间包含在一族固定的、小测度的博雷尔集中。

定理 1.4。对于每个 $n \geqslant 1$，都存在一个常数 $C_n > 0$，它仅依赖于 n，使得对于每个$0 < t < q_*$，都可以找到博雷尔集 A_1、…、$A_J \subseteq \mathbb{R}^n$，满足

$$J \leqslant C_n \frac{w_\mu(t)}{t}, \quad \mu(A_i) \leqslant C_n t,$$

使得每个测度至多为 t 的闭半空间 H 都包含在集合 A_i 之一中。更一般地，如果$\mathcal{H}$ 是一个由测度相同的半空间组成的族 t，且$\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ 是一个博雷尔集，那么我们可以选取

$$J \leqslant C_n \frac{\mu\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right)}{t}.$$

定理 1.4 的证明见第 4 (参见定理 4.4)。我们将对数凹测度表示为紧凸体上的均匀测度的像，其中 $\mathbb{R}^{n+1}$。半空间对应于凸体的帽，因此我们可以应用 Arya、da Fonseca 和 Mount 的覆盖引理 [4,引理 4。3] 然后将所得覆盖集投影回 $\mathbb{R}^n$。

我们还比较了不同深度层级下的湿部（参见定理 5.5）。

定理 1.5。存在仅依赖于 n 的常数 $C_n, t_n > 0$，使得

$$w_\mu(s) \leqslant C_n \left(\frac{s}{t}\right)^{2/(n+1)} w_\mu(t), \quad 0 < s \leqslant t < t_n.$$

指数 $2/(n+1)$ 对于对数凹概率测度而言是最优的。

这以相对形式恢复了凸体情形中出现的特征指数。该指数的锐性可由欧几里得球上的归一化体积这一例子得出。

本工作有两篇姊妹论文。在 [23] 中，我们证明存在一个绝对常数$C > 0$，使得对于任意定义在 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度 μ，$n \geqslant 2$,

$$w_\mu(t) \leqslant C^n \frac{t}{s} \left(1 + \frac{\log(t/s)}{n-1}\right)^{n-1} w_\mu(s), \quad 0 < s < t < 1. \tag{1.5}$$

在一维中，精确公式为 $w_\mu(t) = \min\{2t, 1\}$ 当 $t > 0$时。定理 1.5 从上界估计比值$w_\mu(s)/w_\mu(t)$ 为 s/t的某个幂。因此，这两个结果为湿部的测度提供了互补的双侧信息。在 [27] 中，我们结合这两类界来研究凸包$P_N = \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\}$，其中独立随机点服从 μ的分布，并比较其期望

其面数与 $Nw_\mu(1/N)$ 的关系。更准确地说，在 [27] 中，我们将推论 4.8中关于随机超平面的界（该界由推论4.7中的覆盖结果推出）与 [23]的倍增估计相结合，从而得到

$$\mathbb{E}f_k(P_N) \approx_{n,k} Nw_\mu(1/N)$$

对于 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 以及所有充分大的 N。

本文结构安排如下。在第2 节中，我们介绍基本符号和定义，并建立全文所需的半空间深度主要估计。在第 3节中，我们证明半空间覆盖定理 1.2 和 1.3，并通过考察高斯情形说明这些定理是尖锐的。在第 4节中，我们证明定理1.4。最后，在第5 节中，我们证明定理1.5及其关于反向倍增、深度矩和覆盖基数的推论。

2 符号与深度估计

我们先介绍基本符号和定义。我们在 $\mathbb{R}^n$中进行研究，该空间配备标准内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。对应的欧几里得范数记为 $\|\cdot\|_2$，欧几里得单位球记为 B_2^n，单位球面记为 S^{n-1}。$\mathbb{R}^n$ 中的体积记为 vol_n。对于正量 a，b，每当我们写作 $a \approx b$ 时，均表示存在绝对常数 c_1，$c_2 > 0$ 使得 $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$。带下标 n 的数值常数仅依赖于维数 n，并且可能逐行变化。

$\mathbb{R}^n$ 中的凸体是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧致凸子集 K，且其内部非空。若 $K = -K$，则称 K 是对称的。对于凸体 K、点 $x \in K$ 以及任意 $\lambda > 0$，我们定义麦克比斯区域

$$M_K(x) = x + ((K-x) \cap (x-K)), \qquad M_K^\lambda(x) = x + \lambda((K-x) \cap (x-K)).$$

这些是紧致凸集，关于 x中心对称。若 $x \in \mathrm{int}(K)$，则它们是凸体。

若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的博雷尔概率测度，且 T 是可逆仿射变换，则用$T_\#\mu$ 表示相应的推前测度。若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的博雷尔概率测度，则称其为对数凹的，若它是满维的，即对于 $\mathbb{R}^n$中的任意超平面 H，都有 $\mu(H) < 1$，并且

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一对紧集 A，B 以及任意 $\lambda \in (0,\ 1)$。Borell [13] 已证明，在这些假设下，μ 具有对数凹密度 f。布伦-明可夫斯基不等式意味着，若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，则其上的均匀概率测度记为 μ_K，它是对数凹的。

在全文中，若 μ 是对数凹的，我们将用 f 表示其密度，该密度是对数凹且上半连续的。在 μ的凸支撑的内部，f 为正且连续，而在支撑集之外则为零。由于 f 的积分有限且为正，可以验证存在常数 $a, b > 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $f(x) \leqslant ae^{-b\|x\|_2}$（见 [16, 引理 2.2。1]）。

若 μ 是对数凹的且 $u \in S^{n-1}$，令

$$S_u(r) = \mu(\{z : \langle z, u\rangle \geqslant r\}).$$

由于 μ 的每个一维边缘分布都是对数凹的，我们有 S_u 是对数凹的。对于 $0 < s < 1$，S_u 的上 s 分位数是实数 $r_s(u)$，其选取满足 $S_u(r_s(u)) = s$。

μ 的 Tukey 半空间深度函数定义为

$$q_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \text{ is a closed half-space containing } x\},$$

并记

$$K_t = \{x : q_\mu(x) \geqslant t\}, \qquad W_t = \{x : q_\mu(x) \leqslant t\}$$

表示 t中心区域和 μ 在 t水平上的湿部分，分别记为。我们还令$w_\mu(t) = \mu(W_t)$.

接下来的结果给出q_μ的一些基本性质。

定理 2.1。 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。那么q_μ 是对数凹的：对任意 x、 $y \in \mathbb{R}^n$和 $\lambda \in (0,1)$，

$$q_\mu((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant q_\mu(x)^{1-\lambda} q_\mu(y)^\lambda. \tag{2.1}$$

证明。 设 $u \in S^{n-1}$ 并令

$$F_u(x) = S_u(\langle x, u\rangle).$$

函数 F_u 是对数凹的，因为 S_u 是对数凹的，且 $x \mapsto \langle x,\ u\rangle$ 是仿射的。此外，

$$q_\mu(x) = \inf_{u \in S^{n-1}} F_u(x).$$

这是由以下观察得出的：对于任意 $u \in S^{n-1}$，在包含 x 的形如 $\{z : \langle z,\ u\rangle \geqslant r\}$ 的闭半空间中，当 x 属于半空间的边界时，测度最小。因此，允许所有 u 后，我们考虑所有包含 x 的半空间。

现在，对每个 u，

$$F_u((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant F_u(x)^{1-\lambda} F_u(y)^\lambda \geqslant q_\mu(x)^{1-\lambda} q_\mu(y)^\lambda.$$

对 u 取下确界，即得所述结论。 □

注 2.2. 对于任意概率测度，半空间深度是拟凹的，因为它的超水平集是凸集。

引理 2.3. 令 $q_* = \sup_x q_\mu(x)$。函数 q_μ 连续，其定义中的下确界可以取到，并且对于每个 $t > 0$， K_t 都是紧致的。对于每个 $0 < t < q_*$，

$$\operatorname{int}(K_t) = \{q_\mu > t\}, \quad \mu(\{q_\mu = t\}) = 0. \tag{2.2}$$

因此，对于 $0 < a < 1$，

$$\mu(K_{at} \setminus \operatorname{int}(K_t)) = w_\mu(t) - w_\mu(at). \tag{2.3}$$

我们称这些层级 $0 < t < q_*$ 可容许。

证明。 对于 $u \in S^{n-1}$集 $F(u,x) = \mu(\{z : \langle u, z-x\rangle \geqslant 0\})$。由于 μ具有密度，仿射超平面的测度为零；应用控制收敛定理可知， F 是联合连续的。

此外，$q_\mu(x)$ =是 $_{u\in S^{n-1}}$ $F(u,x)$ 的最小值，因此由球面的紧致性可知 q_μ 连续且最小值能够取到。若 $x\neq 0$ 且 $u=x/\|x\|_2$，则

$$q_\mu(x)\leqslant \mu(\{z:\langle z,u\rangle \geqslant \|x\|_2\})\leqslant \mu(\{z:\|z\|_2\geqslant \|x\|_2\}),$$

当 $\|x\|_2\to\infty$ 时趋于零。因此， q_* 可以取到，且每个满足 $t>0$ 的 K_t 都有界，因而是紧致的。

固定 $0<t<q_*$，并选取满足 $q_\mu(y)>t$ 的 y。由连续性可知，我们有 $\{q_\mu>t\}\subseteq \mathrm{int}(K_t)$。若 $x\in \mathrm{int}(K_t)$ 且 $q_\mu(x)=t$，那么当 $\varepsilon>0$ 充分小时，点 $z=x-\varepsilon(y-x)$ 属于 K_t，并且

$$x=\frac{1}{1+\varepsilon}z+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}y.$$

由定理 2.1 可得 $q_\mu(x)>t$，这就产生了矛盾。因此，$\mathrm{int}(K_t)=\{q_\mu>t\}$ 且 $\partial K_t=\{q_\mu=t\}$。由于 q_μ 是连续的，对每个 $0<t<q_*$，凸体 K_t 都有非空内部，因此其边界的勒贝格测度为零。于是， μ的绝对连续性证明了第二个断言，并可推出等式（2.3）。

□

注 2.4。 若 T 是可逆仿射变换且 $\nu=T_\#\mu$，则对每个$x\in\mathbb{R}^n$，都有 $q_\nu(x)=q_\mu(T^{-1}x)$。特别地，

$$K_t^\nu=TK_t^\mu,\quad M^\lambda_{K_t^\nu}(Tx)=TM^\lambda_{K_t^\mu}(x),$$

对每个 $\lambda>0$， $t\in(0,\ q_*)$ 和 $x\in K_t^\mu$。

本节余下部分将用于证明下面的定理。

定理 2.5。 对每个整数 $n\geqslant 1$，存在常数 $a_n\in(0,\ 1/6)$ $c_n\in(0,\ 1)$ 和 $L_n\geqslant 1$，它们仅依赖于 n，并且满足以下结论。设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。假设$q_\mu(x)=t>0$，且 H_x 是 x处的极小半空间，因此 $\mu(H_x)=t$。那么

$$\mu\big(H_x\cap M^{L_n}_{K_{a_nt}}(x)\big)\geqslant c_nt.$$

我们需要以下两个引理。

引理 2.6. 取 $\delta\in(0,1)$ 和 $a\in(0,\delta/3)$。设 ρ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 的一个一维或二维仿射子空间上的对数凹概率测度，其坐标为 (s,w)，并假设 s-边缘分布是非退化的。假设

$$q_\rho(0)=\rho\big(\{(s,w):s\geqslant 0\}\big)=t>0$$

and

$$\rho\big(\{(s,w):s\geqslant 0,\ w\leqslant -1\}\big)\geqslant \delta t.$$

If

$$0<\varepsilon<\frac{\log(1+(\delta-a)/2)}{\log(1/a)},$$

then

$$\rho\big(\{(s,w):w\geqslant\varepsilon\}\big)\geqslant\frac{\delta-a}{2}\,t>at.$$

证明。设 r 是 s-边缘分布的上 at-分位数，则

$$\rho\big(\{(s,w): s \geqslant r\}\big) = at.$$

由于 $\rho\big(\{(s,w)\colon\ s \geqslant 0\}\big) = t$，我们有 $r > 0$。去掉满足 $\{(s,w)\colon\ s \geqslant r\}$ 的部分后，得到

$$\rho\big(\{(s,w): 0 \leqslant s < r,\ w \leqslant -1\}\big) \geqslant (\delta - a)t.$$

半平面 $\{(s,w)\colon\ s \geqslant 0\}$ 在所有经过原点的半平面中取最小值。因此，与旋转半平面 $\{(s,w)\colon\ s + rw \geqslant 0\}$ 比较可得

$$\rho\big(\{(s,w): s < 0,\ s + rw \geqslant 0\}\big) \geqslant \rho\big(\{(s,w): s \geqslant 0,\ s + rw < 0\}\big).$$

事实是

$$\{(s,w): 0 \leqslant s < r,\ w \leqslant -1\} \subseteq \{(s,w): s \geqslant 0,\ s + rw < 0\}$$

这意味着

$$\rho\big(\{(s,w): s < 0,\ w \geqslant -s/r\}\big) \geqslant (\delta - a)t.$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$ ，我们得到

$$\rho\big(\{(s,w): w \geqslant \varepsilon\}\big) + \rho\big(\{(s,w): -\varepsilon r < s < 0\}\big) \geqslant (\delta - a)t.$$

假设第一项小于 $(\delta - a)t/2$。如果

$$T(x) = \rho\big(\{(s,w): s \geqslant x\}\big),$$

then

$$T(-\varepsilon r) \geqslant \left(1 + \frac{\delta - a}{2}\right) t.$$

尾函数 T 是对数凹的，而 $T(0) = t$ 且 $T(r) = at$。于是，根据对数凹性，我们得到 t

$$T(-\varepsilon r) \leqslant t a^{-\varepsilon}.$$

我们对 ε 的选择使这两个不等式互不相容。因此

$$\rho\big(\{(s,w): w \geqslant \varepsilon\}\big) \geqslant \frac{\delta - a}{2} t.$$

由于 $a < \delta/3$，最后一个量严格大于 at。 □

引理 2.7。取定 $\delta \in (0、1)$ 和 $a \in (0、\ \delta/3)$。假设 $C = C(a、\ \delta)$ 满足

$$C > \frac{\log(1/a)}{\log(1 + (\delta - a)/2)}.$$

那么以下结论成立：设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，满足

$$q_\mu(0) = \mu(H) = t > 0$$

对于经过原点的半空间 H，并设

$$\nu = \mu(\cdot \mid H).$$

Then

$$z \in K_\delta^\nu \quad \Longrightarrow \quad -\frac{z}{C} \in K_{at}^\mu.$$

证明。在引理 $\varepsilon = 1/C$ 中选取 2.6。反设 $z \in K_\delta^\nu$ 但 $-z/C \notin K_{at}^\mu$。那么存在一个线性泛函 ℓ 使得:

$$\mu(\{x : \ell(x) \geqslant \ell(-z/C)\}) < at.$$

由于每个包含原点的半空间的测度都至少为 t，我们得出 $\ell(z) < 0$。令 $L = -\ell(z) > 0$。最后一个不等式变为

$$\mu(\{x : \ell(x) \geqslant L/C\}) < at.$$

另一方面，半空间 $\{x : \ell(x) \leqslant -L\}$ 包含 z。由于 $q_\nu(z) \geqslant \delta$,

$$\mu(\{x : x \in H,\ \ell(x) \leqslant -L\}) \geqslant \delta t.$$

记 $H = \{x : \langle x,\ v\rangle \geqslant 0\}$ 并通过以下映射将 μ 推前

$$x \longmapsto \left(\langle x, v\rangle, \frac{\ell(x)}{L}\right).$$

所得测度 ρ 在其仿射支撑集上是对数凹的，其维数为一或二。其 s-边缘分布是非退化的，因为 $\rho\big(\{(s,\ w) : s \geqslant 0\}\big) = t \in (0,\ 1)$。每个经过 0 的半平面都对应一个经过 0 的半空间，因此 $q_\rho(0) \geqslant t$，而 $\rho\big(\{(s,\ w) : s \geqslant 0\}\big) = t$；故 $q_\rho(0) = t$。此外

$$\rho\big(\{(s,w) : s \geqslant 0, w \leqslant -1\}\big) \geqslant \delta t, \quad \rho\big(\{(s,w) : w \geqslant 1/C\}\big) < at.$$

根据引理 2.6，这就产生了矛盾。 □

现在我们转而证明定理 2.5。

定理 2。5 的证明。将 x 平移到原点，并令 $\nu = \mu(\cdot \mid H_x)$。条件测度仍然是对数凹的。根据 [14,定理 1。3], 中证明的对数凹测度的期望半空间深度下界，存在一个绝对常数 $b > 0$ 使得

$$\int q_\nu(z)\, d\nu(z) \geqslant e^{-bn}.$$

设 $\zeta_n = e^{-bn}$ 和 $\delta_n = \zeta_n/2$。由于 $0 \leqslant q_\nu \leqslant 1$,

$$\nu(K_{\delta_n}^\nu) \geqslant \zeta_n - \delta_n = \frac{\zeta_n}{2}.$$

取 $a_n \in (0,\ \delta_n/3)$ 并令 $L_n = C(a_n,\ \delta_n)$ 由引理 2.7给出 $z \in K^{\nu}_{\delta_n}$，那么每个包含 z 的半空间，其 μ-测度至少等于其在 H_x内的测度，而该测度至少为 $\delta_n t$。因此

$$z \in K^{\mu}_{\delta_n t} \subseteq K^{\mu}_{a_n t}.$$

由于 $0 \in K^{\mu}_{a_n t}$ 且 t 该集合是凸的，因此我们还有 $z/L_n \in K^{\mu}_{a_n t}$。引理 2.7 给出 $-z/L_n \in K^{\mu}_{a_n t}$。因此

$$z \in L_n\big(K^{\mu}_{a_n t} \cap (-K^{\mu}_{a_n t})\big) = M^{L_n}_{K^{\mu}_{a_n t}}(0).$$

由此可得

$$\mu\big(H_x \cap M^{L_n}_{K_{a_n t}}(0)\big) = t\,\nu\big(M^{L_n}_{K_{a_n t}}(0)\big) \geqslant t\nu(K^{\nu}_{\delta_n}) \geqslant \frac{\zeta_n}{2}\,t.$$

因此我们可以取 $c_n = \zeta_n/2$。 □

注 2.8。 定理 2.5 允许对麦克比斯区域作固定幅度的扩张。在第 3 节中，我们利用推论3.6收缩该区域，而该推论3.5由定理得出。

3 经济型半空间覆盖

本节的第一个主要结果是关于对数凹测度的以下经济覆盖定理。

定理 3.1。 存在常数 $0 < a_n, t_n < 1$ 和 $A_n, D_n > 0$，它们仅取决于 n；使得对于 $\mathbb{R}^n$ 上的任意对数凹概率测度 μ 以及任意 $0 < t < t_n$，都存在闭半空间 $C_1, \ldots, C_N$，满足

$$W_t \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{int}(C_i) \subseteq \{q_\mu \leqslant A_n t\}, \quad \mu(C_i) \leqslant A_n t, \tag{3.1}$$

and

$$N \leqslant D_n \frac{\mu\big(K_{a_n t} \setminus \operatorname{int}(K_t)\big)}{t} = D_n \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t}. \tag{3.2}$$

特别地，

$$N \leqslant D_n \frac{w_\mu(t)}{t}.$$

证明需要若干中间结果。

引理 3.2。 设 $f:\ \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ 是一个对数凹且上半连续的密度。如果 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空且为闭集，那么 f 在 F上达到其上确界。此外， f 的每个边缘分布也都是对数凹且上半连续的。

证明。 由于 f是对数凹的，存在 a，$b > 0$ 使得对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(x) \leqslant ae^{-b\|x\|_2}$。因此， f有界。设

$$M_F = \sup_{x \in F} f(x).$$

若 $M_F = 0$，则 F 中的每个点都是一个极大值点。因此，我们可以假设 $M_F > 0$。f 的指数衰减意味着，对某个 $R > 0$，对每个 $\|x\|_2 > R$ 都有 $f(x) < M_F/2$。因此，

$$M_F = \sup_{x \in F \cap RB_2^n} f(x) = \max_{x \in F \cap RB_2^n} f(x).$$

最后一个等式成立，是因为上半连续函数会在非空紧集上取得其最大值。现在，对于 $1 \leqslant d \leqslant n-1$，函数

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-d}} f(x,y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

根据 Pr´ekopa 定理是对数凹的。利用反向法图引理，并以 f 的指数衰减作为可积的控制界，可得其上半连续性。 □

命题 3.3。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的、密度为 f 的对数凹概率测度。设 $x \in \mathbb{R}^n$，并假设 $\mu(H_x) = q_\mu(x) > 0$，其中 $H_x = \{z : \langle u, z - x\rangle \geqslant 0\}$，对于某个 $u \in S^{n-1}$。则

$$\int_{u^\perp} y f(x+y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0. \tag{3.3}$$

换言之，x 是截面 $x + u^\perp$ 的 $f\, d\mathcal{H}^{n-1}$-加权重心。

证明。将 x 平移到原点，并固定 $v \in u^\perp$。令 $\varepsilon > 0$，并考虑半空间 $H(\varepsilon) = \{z : \langle z, u + \varepsilon v\rangle \geqslant 0\}$，该半空间经过原点。通过变量替换可知，相应的半空间测度为

$$M(\varepsilon) = \int_{u^\perp} \int_{-\varepsilon\langle v,y\rangle}^{\infty} f(su+y)\, ds\, dy.$$

由于 $\varepsilon = 0$ 使 M 达到最小值，若导数在 0 处存在，则 $M'(0) = 0$。令

$$F(\varepsilon, y) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon\langle v,y\rangle}^{0} f(su+y)\, ds, \quad \varepsilon \neq 0,\ y \in u^\perp.$$

设 $K = \mathrm{supp}(\mu)$。由于 $q_\mu(0) > 0$，我们有 $0 \in \mathrm{int}(K)$，这意味着 $\partial_{u^\perp}(K \cap u^\perp) = \partial K \cap u^\perp$。因此，$K \cap u^\perp$ 是一个具有非空相对内部的凸集，故其相对边界的 $\mathcal{H}^{n-1}$-测度为零。因此，由于 f 在 ∂K 之外连续，其在 $u^\perp$ 上的限制在超平面上几乎处处连续。于是，

$$F(\varepsilon, y) \to \langle v, y\rangle f(y), \quad \varepsilon \to 0,$$

对几乎所有 $y \in u^\perp$ 都成立。由于 f 是对数凹密度，存在常数 $A,\ b > 0$，使得 $f(z) \leqslant Ae^{-b\|z\|_2}$。若 ε 非零，则 $|F(\varepsilon, y)|$ 受 $C\|y\|_2 e^{-b\|y\|_2}$ 控制，而后者在 $u^\perp$ 上可积。应用控制收敛定理，得到

$$M'(0) = \int_{u^\perp} \langle v, y\rangle f(y)\, dy.$$

由于对于每个 $v \in u^\perp$，该导数都为零，因此我们得到（3.3）。 □

引理 3.4。 设 h 是 $\mathbb{R}$ 上的对数凹概率密度，并假设

$$t = \int_0^\infty h(s)\,ds \in (0,1).$$

Then

$$\max_{s\geqslant 0} h(s) \leqslant \frac{h(0)}{1-t}. \tag{3.4}$$

因此，对于 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 和 $s \geqslant 0$,

$$h(\lambda s) \geqslant (1-t)^{1-\lambda} h(s). \tag{3.5}$$

证明。 我们令 $h_0 = h(0)$。我们有， h 是一个对数凹密度，因此 h 是单峰的。如果 h 在 $[0,\infty)$ 上是非增的，或其最大值位于 0，则无需证明。否则，存在 $s_0 > 0$使得

$$\max_{s\geqslant 0} h(s) = h(s_0) > h_0.$$

令 $R = h(s_0)/h_0 > 1$ 和 $a = (\log R)/s_0$。由对数凹性可得

$$h(s) \leqslant h_0 e^{as} \quad (s \leqslant 0), \quad h(s) \geqslant h_0 e^{as} \quad (0 \leqslant s \leqslant s_0).$$

因此

$$1 - t \leqslant \frac{h_0}{a}, \quad t \geqslant \frac{h_0}{a}(R-1),$$

所以 $R \leqslant (1-t)^{-1}$，这就是（3.4）。最后，由对数凹性可知

$$h(\lambda s) \geqslant h(0)^{1-\lambda} h(s)^\lambda \geqslant (1-t)^{1-\lambda} h(s).$$

证明完毕。 □

定理 3.5。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，其密度为 f。假设 $q_\mu(x) = t > 0$，并且

$$H_x = \{z : \langle u, z-x\rangle \geqslant 0\}, \quad \mu(H_x) = t,$$

在 x处取最小值。那么 $t \leqslant 1/2$ 且

$$\max_{z\in H_x} f(z) \leqslant R_n f(x), \quad R_1 = 2, \quad R_n = 4^n \quad (n \geqslant 2). \tag{3.6}$$

证明。 将 x 平移至原点，并旋转使得 $u = e_1$。由于超平面的 μ-测度为零，经过原点的两个相反半空间的测度之和为 1，因此 $t \leqslant 1/2$。

对于 $n = 1$，引理 3.4 给出所述结论。设 $n \geqslant 2$ 并令 $d = n-1$。对于 $s \in \mathbb{R}$， $y \in \mathbb{R}^d$，我们记

$$g_s(y) = f(s,y), \quad h(s) = \int_{\mathbb{R}^d} g_s(y)\,dy, \quad m(s) = \max_{y\in\mathbb{R}^d} g_s(y).$$

根据 Pr´ekopa 定理， h 是一个对数凹密度，并且 $\int_0^\infty h = t$。由命题3.3 可知， g_0 的重心为零。固定 $s \geqslant 0$和 $0 < \theta < 1$。选取 y_s 使其为 g_s 的最大值点，并利用

对数凹性，可得

$$g_{\theta s}((1-\theta)z+\theta y_s) \geqslant g_0(z)^{1-\theta} g_s(y_s)^{\theta}.$$

经过积分和仿射变量变换后，

$$h(\theta s) \geqslant (1-\theta)^d g_s(y_s)^{\theta} \int_{\mathbb{R}^d} g_0(z)^{1-\theta}\, dz.$$

函数 $p = g_0/h(0)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、重心为 0 的对数凹概率密度。因此，对于某个 A，$b > 0$，有 $p(y) \leqslant Ae^{-b\|y\|_2}$。特别地，$p$ 有界，具有有限的一阶矩，并且对每个 $r > 0$ 都有 $\int p^r < \infty$。对定义在凸集 $\{p > 0\}$ 上的凸函数 $p^{-\theta}$ 应用詹森不等式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} p^{1-\theta}\, dy \geqslant p(0)^{-\theta}. \tag{3.7}$$

等价地，

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_0^{1-\theta} \geqslant h(0) f(0)^{-\theta}.$$

因此，我们看到

$$\left(\frac{m(s)}{f(0)}\right)^{\theta} \leqslant \frac{h(\theta s)}{h(0)}(1-\theta)^{-d}.$$

引理 3.4 将右侧的第一个比值界定为 $(1-t)^{-1} \leqslant 2$。取 $\theta = 1/2$ 可得

$$\left(\frac{m(s)}{f(0)}\right)^{1/2} \leqslant 2^{d+1} = 2^n.$$

因此，对每个 $s \geqslant 0$，都有 $m(s) \leqslant 4^n f(0)$，如所需。 □

推论 3.6。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。若 $q_\mu(x) = t > 0$ 且 H_x 是一个极小半空间，则对每个 *Borel* $E \subseteq H_x$ 以及每个 $0 < \lambda \leqslant 1$,

$$\mu(x + \lambda(E-x)) \geqslant \lambda^n R_n^{-(1-\lambda)} \mu(E). \tag{3.8}$$

证明。对于 $z \in H_x$，由对数凹性和定理 3.5 可得

$$f(x+\lambda(z-x)) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(z)^{\lambda} \geqslant R_n^{-(1-\lambda)} f(z).$$

然后，我们对 E 积分，并使用雅可比行列式 λ^n。 □

定理 3.7。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。设 a_n、c_n、L_n 为定理 2。5中的常数。对每个固定的 $0 < \lambda \leqslant 1$，存在一个常数 $c_{n,\,\lambda} > 0$，使得只要 $q_\mu(x) = t > 0$且 H_x 是经过 x的一个极小 t-半空间，

$$\mu\big(H_x \cap M^{\lambda}_{K_{a_n t}}(x)\big) \geqslant c_{n,\lambda} t. \tag{3.9}$$

证明。令 $K = K_{a_n t}$且 $B_x = H_x \cap M_K^{L_n}(x)$。由定理 2.5可知 $\mu(B_x) \geqslant c_n t$。令 $\eta = \lambda/L_n$。

由于 H_x 是凸集，且 x 位于其边界上，根据麦克比斯区域的定义，我们可以看出

$$x + \eta(B_x - x) \subseteq H_x \cap M_K^\lambda(x).$$

推论3.6 表明

$$\mu(H_x \cap M_K^\lambda(x)) \geqslant \eta^n R_n^{-(1-\eta)} \mu(B_x) \geqslant c_n t \left(\frac{\lambda}{L_n}\right)^n R_n^{-(1-\lambda/L_n)},$$

定理得证。 □

引理 3.8。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度。假设 $q_\mu(x) = t > 0$ 且 $H_x = \{z : \langle u, z\rangle \geqslant r\}$，其中 $r = \langle u, x\rangle$ 是一个半空间，且 $\mu(H_x) = t$。则

$$K_t \subseteq \{z : \langle u, z\rangle \leqslant r\}, \quad H_x \cap \operatorname{int}(K_t) = \varnothing. \tag{3.10}$$

证明。设 $T(s) = \mu(\{z : \langle u, z\rangle \geqslant s\})$。由于 $q_\mu(x) > 0$，我们看到 r 位于 $\langle u, X\rangle$ 的支撑集内部。注意到 T 在此区间内严格递减。这意味着，如果 y 属于 μ 的支撑集且 $\langle u, y\rangle > r$，那么

$$q_\mu(y) \leqslant T(\langle u, y\rangle) < T(r) = t.$$

在支撑集之外，$q_\mu(y) = 0$。由此可得 $K_t \subseteq \{z : \langle u, z\rangle \leqslant r\}$，并且 K_t 仅在超平面 $\{z : \langle u, z\rangle = r\}$ 上与 H_x 相交。这就证明了该引理。 □

以下引理引自 [1, 引理 2.4]。为完整起见，我们给出证明。

引理 3.9. 设 K 是一个凸体，x、$y \in K$和 $0 < \lambda \leqslant 1/5$。如果

$$M_K^\lambda(x) \cap M_K^\lambda(y) \neq \varnothing,$$

then

$$M_K^\lambda(y) \subseteq M_K^{4\lambda}(x). \tag{3.11}$$

特别地 $y \in M_K^{4\lambda}(x)$。

证明。我们定义

$$A_p := (K - p) \cap (p - K), \quad M_K^\eta(p) = p + \eta A_p.$$

我们首先证明，若对于某个 $0 \leqslant \eta < 1$有 $q \in M_K^\eta(p)$，则

$$(1 - \eta)A_p \subseteq A_q \subseteq (1 + \eta)A_p. \tag{3.12}$$

确实，假设对于某个 $a \in A_p$，有 $q = p + \eta a$。那么，对于每个 $v \in A_p$，点 $q \pm (1 - \eta)v$ 都是 $p + a$ 和 $p \pm v$ 的凸组合，这就证明了第一个包含关系。反过来，如果 $w \in A_q$，那么

$$p \pm \frac{w}{1 + \eta} = \frac{1}{1 + \eta}(q \pm w) + \frac{\eta}{1 + \eta}(p - a) \in K,$$

因此 $w \in (1+\eta)A_p$。

现在选择 $z \in M_K^\lambda(x) \cap M_K^\lambda(y)$。由于 $z - x \in \lambda A_x$且 A_y是对称的，先将 (3.12) 应用于$z \in M_K^\lambda(y)$，再应用于 $z \in M_K^\lambda(x)$，得到

$$y - x = (z - x) + (y - z) \in \lambda A_x + \frac{\lambda}{1-\lambda} A_z \subseteq \frac{2\lambda}{1-\lambda} A_x.$$

定义 $\alpha = 2\lambda/(1-\lambda)$。由于 $\lambda \leqslant 1/5$，我们有 $\alpha \leqslant 1/2$，因此 $y \in M_K^\alpha(x)$。再次应用 (3.12)，得到 $A_y \subseteq (1+\alpha)A_x$。因此

$$M_K^\lambda(y) \subseteq x + \big(\alpha + \lambda(1+\alpha)\big)A_x = x + \lambda\frac{3+\lambda}{1-\lambda} A_x \subseteq x + 4\lambda A_x = M_K^{4\lambda}(x),$$

因为 $5\lambda \leqslant 1$。这就证明了该引理。 □

命题 3.10. 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度。固定 $0 < a < 1$。令 $q_\mu(x) = t > 0$ 并且

$$H_x = \{z : \langle u, z\rangle \geqslant r\}, \quad \mu(H_x) = t,$$

在 x 处达到最小值。令 $K = K_{at}$，并令 $h = h_K(u)$。对于 $\beta \geqslant 1$，定义

$$H_x^{[\beta]} := \{z : \langle u, z\rangle \geqslant h - \beta(h - r)\}.$$

Then

$$\mu(H_x^{[\beta]}) \leqslant a^{-(\beta-1)}t. \tag{3.13}$$

证明。令 $T(s) = \mu(\{z\colon \langle u, z\rangle \geqslant s\})$，并令 r_a 为上 at分位数，因此 $T(r_a) = at$。由于 $K_{at} \subseteq \{z\colon\langle u, z\rangle \leqslant r_a\}$，我们有 $h \leqslant r_a$。记 $\varepsilon = \beta - 1$，且 $s_\beta = h - \beta(h-r) = r - \varepsilon(h-r)$，得到

$$s_\beta \geqslant r - \varepsilon(r_a - r).$$

一维对数凹密度的尾函数 T 是对数凹的。因此，将从 r 到 r_a 的割线外推可得

$$T(r - \varepsilon(r_a - r)) \leqslant a^{-\varepsilon}t.$$

由于 T 是递减的，故3.13成立。 □

引理 3.11。 令 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸体，U_1、…、U_N 为满足 $\partial K \subseteq \bigcup_i U_i$ 的开半空间。如果

$$P = \bigcap_{i=1}^N (\mathbb{R}^n \setminus U_i)$$

与 $\operatorname{int}(K)$ 相交，则 $P \subseteq \operatorname{int}(K)$。因此，$\mathbb{R}^n \setminus K \subseteq \bigcup_i U_i$。

证明。 P是凸集，且 $P \cap (\partial K) = \varnothing$。取 $b \in P \cap \operatorname{int}(K)$。若 $z \in P \setminus \operatorname{int}(K)$，则线段$[b, z] \subseteq P$与 ∂K相交，由此得到矛盾。 □

现在我们能够证明经济覆盖定理。

定理 3.1 的证明。 我们使用定理 a_n 中的常数 3.7 并固定 $\lambda = 1/5$。对于每个 $x \in \partial K_t$，我们选择一个半空间 H_x 使得 $x \in H_x$ 并且 $\mu(H_x) = t$，并设

$$D_x := H_x \cap M^{1/5}_{K_{a_n t}}(x).$$

由定理 3.7 可得 $\mu(D_x) \geqslant c'_n t$ ，而引理 3.8 表明

$$D_x \subseteq K_{a_n t} \setminus \operatorname{int}(K_t).$$

取一个极大不相交族 $D_{x_1}, \ldots, D_{x_N}$。该族是有限的，因为每个集合 D_x 的测度至少为 $c'_n t$。于是

$$N c'_n t \leqslant \mu\big(K_{a_n t} \setminus \operatorname{int}(K_t)\big),$$

由此得到基数估计。

对于 $y \in \partial K_t$，极大性表明 $D_y \cap D_{x_i} \neq \varnothing$ 对某个 i成立。因此，相应的 1/5-麦克比斯区域相交，而引理3.9 给出

$$y \in M^{4/5}_{K_{a_n t}}(x_i).$$

记

$$H_{x_i} = \{z : \langle u_i, z\rangle \geqslant r_i\}, \quad h_i = h_{K_{a_n t}}(u_i).$$

由于 $y \in M^{4/5}_{K_{a_n t}}(x_i)$，我们得到

$$\langle u_i, y\rangle \geqslant r_i - \frac{4}{5}(h_i - r_i).$$

由于 $q_\mu(x_i) = t > a_n t$，由引理 2.3 可知 $x_i \in \operatorname{int}(K_{a_n t})$，因此 $h_i - r_i > 0$。令 $\widetilde{\gamma} = 9/10$ 并定义

$$C_i := H^{[1+\widetilde{\gamma}]}_{x_i}.$$

于是 $\partial K_t \subseteq \bigcup_i \operatorname{int}(C_i)$，而命题 3.10 给出

$$\mu(C_i) \leqslant a_n^{-9/10} t.$$

最后令

$$P := \bigcap_i \big(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(C_i)\big), \quad A_n = a_n^{-9/10}.$$

取一个常数 $B_n > A_n$。若 b_μ 是 μ的重心，则 Gr¨unbaum 不等式给出 $q_\mu(b_\mu) \geqslant e^{-1}$ （例如参见 [22]）。因此，固定 $t_n < 1/(eB_n)$ 后，对于每个 $0 < t < t_n$，体 $K_{B_n t}$ 都非空。它包含于 P 中，因为 $\operatorname{int}(C_i)$ 中的每一点的深度均为 $< B_n t$。因此， P 包含一个属于 $\operatorname{int}(K_t)$ 的点，而$P \cap \partial K_t = \varnothing$。将引理 3.11 应用于 $K = K_t$，可得 $P \subseteq \operatorname{int}(K_t)$ 和 $W_t \subseteq \bigcup_i \operatorname{int}(C_i)$。由于每个 C_i 都是测度至多为 $A_n t$ 的半空间，因此每个 $z \in C_i$ 都满足 $q_\mu(z) \leqslant A_n t$。这给出了 (3.1) 中的第二个包含关系。

（3.2）中的等式由引理2.3得出。 □

注 3.12. 采用定理 2.5 中的符号

$$\zeta_n = e^{-bn}, \quad \delta_n = \zeta_n/2, \quad a_n = \zeta_n/12, \quad L_n = \frac{2\log(1/a_n)}{\log(1 + (\delta_n - a_n)/2)}, \quad c_n = \zeta_n/2.$$

定理 3.7 中的下界 $\lambda = 1/5$ 给出了常数

$$D_n = \frac{R_n}{c_n}(5L_n)^n.$$

由于 $R_n \leqslant 4^n$ 和 $L_n \leqslant e^{dn}$ 对某个 $d > 0$成立，我们得到

$$D_n \leqslant e^{cn^2}$$

对某个绝对常数 $c > 0$成立。

推论 3.13. 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。取定理3.1中的常数，则存在 $c_n > 0$ 使得，对 $0 < t < t_n$,

$$w_\mu(a_n t) \leqslant (1 - c_n)w_\mu(t).$$

证明. 该覆盖及其测度和基数界给出

$$w_\mu(t) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu(C_i) \leqslant A_n t N \leqslant A_n D_n \big(w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)\big).$$

重新整理后即可完成证明，其中 $c_n = \min\{1/2,(A_n D_n)^{-1}\}$。 □

引理 3.14. 设 B是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体，设 $R \geqslant 1$，并设 $S \subseteq \partial B \cap [-R, R]^n$。对每个 $y \in S$，选取b_y作为 B 的向内单位支撑法向量。那么，对每个 $0 < \delta \leqslant 1$，都存在点 y^1、.....、 $y^m \in S$，使得

$$m \leqslant Q_n(R)\delta^{-(n-1)}, \quad Q_n(R) := 2n\big(1 + 2n(R+1)\big)^{n-1},$$

并且对每个 $y \in S$，存在某个 k 满足

$$0 \leqslant \langle b_{y^k}, y - y^k \rangle \leqslant \delta^2/2.$$

证明。 令 $v_y = -b_y$，并令 $p_y = y + v_y$。每个 p_y 都属于具有向外支撑法向量 v_y的 $\partial(B + B_2^n)$，且 $p_y \in [-R-1, R+1]^n$。我们将点 p_y 划分为至多 $2n$ 组，选择一个坐标 i 和一个符号，使得$|v_{y,i}| \geqslant n^{-1/2}$。在每组内， p_y， p_z 处的支撑不等式推出

$$|p_{y,i} - p_{z,i}| \leqslant \sqrt{n-1}\|(p_y - p_z)_{\widehat{i}}\|_2. \tag{3.14}$$

为说明这一点，注意这两个支撑不等式分别从上方和下方界定了带符号的 i 阶坐标差，且 $\|(v_y)_{\widehat{i}}\|_2/|v_{y,i}| \leqslant \sqrt{n-1}$，对于 z 也同样如此。我们将其余坐标划分为边长为 δ/n的单元，并在每组中每个被占据的单元内选取一个代表点。代表点至多有 $Q_n(R)\delta^{-(n-1)}$ 个。由（3.14）可知，同一单元中的任意两点之间的距离为$\|p_y - p_z\|_2 \leqslant \delta$。

对于与 y 相关联的代表元 z， B 的支撑不等式给出 $\langle v_z, y - z\rangle \leqslant 0$ 和$\langle v_y, y - z\rangle \geqslant 0$。因此

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle b_z, y - z\rangle &\leqslant \langle v_y - v_z, y - z\rangle \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\big(\|y - z\|_2^2 + \|v_y - v_z\|_2^2\big) \leqslant \tfrac{1}{2}\|p_y - p_z\|_2^2 \leqslant \delta^2/2. \end{aligned}$$

对于倒数第二个不等式，我们使用了 $\langle v_y - v_z,\ y - z\rangle \geqslant 0$。这就证明了引理。 □

接下来的归一化引理是约翰椭球定理的直接推论（见 [16, 定理 1.5。7]）。

引理 3.15。若 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的对称凸体，则存在一个可逆线性映射 T，使得

$$B_2^n \subseteq TA \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$

现在我们可以证明近乎最小覆盖定理。

定理 3.16。设 a_n、c_n和 L_n 为定理 2.5中的常数。存在一个常数 $B_n > 0$，它仅依赖于 n，使得对于 $0 < t < 1/(4e)$ 以及 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，存在有限个闭半空间 C_1、.. . 、C_N，满足

$$W_t \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \operatorname{int}(C_j) \subseteq \{q_\mu \leqslant (1+\varepsilon)t\}, \qquad \mu(C_j) \leqslant (1+\varepsilon)t, \tag{3.15}$$

and

$$N \leqslant B_n \varepsilon^{-(n-1)/2}\, \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t}. \tag{3.16}$$

事实上，覆盖半空间的测度至多为 $\sqrt{1+\varepsilon}\, t$。对于 $n \geqslant 2$，指数$(n-1)/2$ 无法在所有对数凹测度上统一降低。

证明。记 $a = a_n$、$K = K_{at}$和 $A_x = (K-x) \cap (x-K)$。每个 $x \in \partial K_t$都属于 $\operatorname{int}(K)$，因为 $t > at$，所以 A_x是一个对称凸体。对于 $x \in \partial K_t$，取一个极小半空间 H_x，并设 $D_x = H_x \cap M_K^{1/5}(x)$。定理3.7 给出

$$\mu(D_x) \geqslant c_n' t.$$

每个 D_x 都包含于 $K_{at} \setminus \operatorname{int}(K_t)$ 中。与定理3.1的证明一样，我们选取一个极大两两不交族D_{x_1}，.....，D_{x_J}。该族必为有限族，并且

$$J \leqslant D_n \frac{w_\mu(t) - w_\mu(at)}{t}. \tag{3.17}$$

由于该族是极大的，根据引理3.9 可得

$$\partial K_t \subseteq \bigcup_{i=1}^{J} \big(x_i + \tfrac{4}{5} A_{x_i}\big).$$

固定 i。利用引理3.15 我们选取一个仿射映射 $F_i(z) = T_i(z - x_i)$，使得

$$B_2^n \subseteq A^{(i)} := T_i A_{x_i} \subseteq \sqrt{n}\, B_2^n.$$

写出 $\mu_i = (F_i)_{\#}\mu$、$K^{(i)} = F_i K$ 和 $B^{(i)} = F_i K_t$。然后 $A^{(i)} \subseteq K^{(i)}$ 以及集合

$$S_i = F_i\big(\partial K_t \cap (x_i + \tfrac{4}{5} A_{x_i})\big)$$

包含于 $\partial B^{(i)} \cap [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]^n$ 中。对于每个 $y \in S_i$，相对于 μ_i 选取一个极小半空间，并将其写成如下形式

$$H_y = \{z : \langle u_y, z\rangle \geqslant r_y\}, \quad \|u_y\|_2 = 1, \quad r_y = \langle u_y, y\rangle.$$

由于半空间深度在可逆仿射映射下保持不变，我们有 $K^{(i)} = K_{at}^{\mu_i}$ and $B^{(i)} = K_t^{\mu_i}$。其内法向量 $b_y = -u_y$ 支撑 $B^{(i)}$。由于 $y \in (4/5)A^{(i)}$ and $B_2^n \subseteq A^{(i)}$，它相对于 $K^{(i)}$ 的高度满足

$$d_y := h_{K^{(i)}}(u_y) - r_y \geqslant h_{A^{(i)}}(u_y) - \tfrac{4}{5} h_{A^{(i)}}(u_y) \geqslant \tfrac{1}{5}. \tag{3.18}$$

取

$$\delta^2 = \frac{\log(1+\varepsilon)}{10\log(1/a)}.$$

由于 $a < 1/6$ 以及 $\varepsilon \leqslant 1$，我们有 $0 < \delta < 1$。由引理 3.14，取 $R = \sqrt{n}$，我们选取至多 $Q_n(\sqrt{n})\, \delta^{-(n-1)}$ 个 S_i 点。在每个选定点 z 处，我们将 H_z 替换为扩大的

$$\widetilde{C}_z = \{v : \langle u_z, v\rangle \geqslant r_z - \delta^2\}.$$

对于每个 $y \in S_i$，选定的 z 满足 $0 \leqslant r_z - \langle u_z,\ y\rangle \leqslant \delta^2/2$，因此 y 位于 $\widetilde{C}_z$ 的内部。对于这个族，我们可以将命题 3.10 应用于 $\beta = 1 + \delta^2/d_z$。因此，(3.18) 给出

$$\mu_i(\widetilde{C}_z) \leqslant a^{-\delta^2/d_z} t \leqslant a^{-5\delta^2} t = \sqrt{1+\varepsilon}\, t.$$

我们通过 F_i 取这些半空间的逆像，并对所有归一化边界区域重复相同的过程。它们的内部覆盖 ∂K_t，其数量至多为

$$J Q_n(\sqrt{n}) \delta^{-(n-1)} \leqslant J Q_n(\sqrt{n}) \big(20\log(1/a)\big)^{(n-1)/2} \varepsilon^{-(n-1)/2},$$

如果将 $\log(1+\varepsilon) \geqslant \varepsilon/2$ 考虑在内，则结合 (3.17) 即可证明所述的基数上界。

最后，令 $P = \bigcap_j \big(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(C_j)\big)$。每个 $\mathrm{int}(C_j)$ 的测度都小于 $2t$，因此 $K_{4t} \subseteq P$。由于 $t < 1/(4e)$，我们可以在 K_{4t} 中找到一个点，而该点位于 $\mathrm{int}(K_t)$ 中。另一方面，$P \cap \partial K_t = \varnothing$。由引理 3.11 可知，$P \subseteq \mathrm{int}(K_t)$，这意味着开半空间覆盖 W_t。定理的右侧包含关系源于以下事实：$\mu(C_j) \leqslant (1+\varepsilon)t$。紧性断言源于高斯情形（见定理 3.21）。

□

注 3.17。若 D_n 是定理 3.1 中的常数，则

$$B_n = D_n Q_n(\sqrt{n}) \big(20\log(1/a_n)\big)^{(n-1)/2}.$$

结合注记 3.12 以及以下事实 $Q_n(\sqrt{n}) \leqslant n^{dn}$ 对于某个 $d > 0$，可得

$$B_n \leqslant e^{Cn^2},$$

其中 $C > 0$ 是一个绝对常数。

定理 3.16中的近极小界与一个初等的覆盖下界相结合，确定了近极小半空间的最小数量 $N_\mu(t,\ \varepsilon)$，精确到依赖于维数以及相对测度参数 ε 的常数，其中湿部测度除以深度尺度。

推论 3.18。 存在一个常数 $B_n > 0$，仅依赖于 n，使得对于每个对数凹概率测度 μ，以及任意 $0 < t < 1/(4e)$和 $0 < \varepsilon \leqslant 1$,

$$\frac{w_\mu(t)}{(1+\varepsilon)t} \leqslant N_\mu(t,\varepsilon) \leqslant B_n \varepsilon^{-(n-1)/2} \frac{w_\mu(t)}{t}. \tag{3.19}$$

特别地，对于每个 $\varepsilon \in (0,1]$，都有 $N_\mu(t,\varepsilon) \approx_{n,\varepsilon} w_\mu(t)/t$。

证明。 考虑由 $\{H_1, \dots, H_J\}$ 个半空间组成的覆盖，每个半空间的测度至多为 $(1+\varepsilon)t$。于是 $w_\mu(t) \leqslant J(1+\varepsilon)t$。上界由定理 3.16 以及不等式 $w_\mu(t) - w_\mu(a_n t) \leqslant w_\mu(t)$ 得出。 □

推论 3.19。 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的一个对数凹概率测度。对于任意 $0 < t < 1/(4e)$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，存在一个多胞体 $P_{t,\varepsilon}$，使得

$$K_{(1+\varepsilon)t} \subseteq P_{t,\varepsilon} \subseteq \operatorname{int}(K_t),$$

至多有

$$B_n \varepsilon^{-(n-1)/2} \frac{w_\mu(t) - w_\mu(a_n t)}{t}$$

个超面。此外，

$$\mu(K_t \setminus P_{t,\varepsilon}) \leqslant w_\mu((1+\varepsilon)t) - w_\mu(t).$$

证明。 我们考虑定理 3.16 中的覆盖半空间，并令 $P_{t,\varepsilon} = \bigcap_j \left(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(C_j)\right)$。由定理 3.16 的证明可知，$P_{t,\varepsilon} \subseteq \operatorname{int}(K_t)$。每个覆盖半空间的测度至多为$\sqrt{1+\varepsilon}\, t < (1+\varepsilon)t$，因此它不可能包含 $K_{(1+\varepsilon)t}$中的任何点。这表明 $K_{(1+\varepsilon)t} \subseteq P_{t,\varepsilon}$。此外，它的内部非空，因为 $(1+\varepsilon)t < 1/(2e) < q_*$。集合 $P_{t,\varepsilon}$ 是至多 N 个闭半空间的有界交集，因此是一个至多有 N 个超面的满维多胞体。最后，$K_t \setminus P_{t,\varepsilon} \subseteq K_t \setminus K_{(1+\varepsilon)t}$，根据测度的定义，我们得到最后一个不等式。

□

在本节的最后部分，我们将验证定理$n-1$中的关于$/2$ 依赖于 ε 的指数3.16 是最优的，并计算高斯测度所对应的壳复杂度。

令 γ_n 表示定义在 $\mathbb{R}^n$上的标准高斯概率测度。记 $\phi(r) = (2\pi)^{-1/2} e^{-r^2/2}$、 $\Phi(r) = \int_r^\infty \phi(s)\, ds$以及 $r_t = \Phi^{-1}(t)$ 为 $0 < t < 1/2$。以 $u \in S^{n-1}$ 为中心、角半径为 θ 的闭测地帽是集合

$$C(u,\theta) = \{v \in S^{n-1} : \langle v, u \rangle \geqslant \cos\theta\}.$$

引理 3.20。 令 $n \geqslant 2$，并记 $\mathcal{N}_n(\theta)$ 为覆盖 S^{n-1}所需的角半径为θ 的闭测地帽的最小数量。存在 c_n、$C_n > 0$ 使得

$$c_n \theta^{-(n-1)} \leqslant \mathcal{N}_n(\theta) \leqslant C_n \theta^{-(n-1)}, \quad 0 < \theta \leqslant 1.$$

证明。 令 $n \geqslant 3$。我们在 $[0,\theta]$上对 $(\sin s)^{n-2}$ 进行积分，并利用 $\sin s \approx s$ 在此区间内这一事实，可知半径为 $\theta \leqslant 1$ 的帽的曲面测度与 θ^{n-1} 相当，其间的常数仅依赖于维数。$n = 2$ 的情形由弧长公式得到。次可加性给出了下界。接下来，我们选取一个极大的中心集，使任意两个中心之间的角距离大于 θ。半径为 $\theta/2$ 的帽具有互不相交的内部，因此利用相同的面积估计可知，中心的数量有界于 $C_n \theta^{-(n-1)}$。由极大性可知，半径为 θ 的帽覆盖球面，从而得到上界。

□

定理 3.21。 对于每个 $n \geqslant 2$，存在常数 c_n、C_n、$t_0 > 0$，使得

$$c_n \varepsilon^{-(n-1)/2} (\log(1/t))^{(n-1)/2} \leqslant N_{\gamma_n}(t, \varepsilon) \leqslant C_n \varepsilon^{-(n-1)/2} (\log(1/t))^{(n-1)/2}$$

对于每个 $0 < t < t_0$ 和 $0 < \varepsilon \leqslant 1$。此外，

$$w_{\gamma_n}(t)/t \approx_n (\log(1/t))^{(n-1)/2},$$

对于每个 $a \in (0,1)$，

$$\frac{w_{\gamma_n}(t) - w_{\gamma_n}(at)}{t} \approx_{n,a} (\log(1/t))^{(n-1)/2} \quad (t \to 0^+).$$

证明。令 $X \sim \gamma_n$。对于每个 $u \in S^{n-1}$，我们有 $\langle u, X \rangle$ 是一个标准正态随机变量。对所有 u 取最小值得

$$q_{\gamma_n}(x) = \overline{\Phi}(\|x\|_2), \quad K_t = r_t B_2^n.$$

我们令 $b = r_t$、$a_t = r_{(1+\varepsilon)t}$ 和 $t_0 = \overline{\Phi}(2)/2$。注意，$b \geqslant a_t > 2$。每个高斯测度至多为 $(1+\varepsilon)t$ 的半空间都可写成如下形式：$\{x : \langle u, x \rangle \geqslant h\}$，其中 $\|u\|_2 = 1$ 且 $h \geqslant a_t$。我们考虑更大的半空间 $\{x : \langle u, x \rangle \geqslant a_t\}$，其测度也至多为 $(1+\varepsilon)t$。它与 bS^{n-1} 的交集是一个角半径为

$$\theta = \arccos(a_t/b).$$

对于任意一组这样的半空间，当且仅当这些半空间与 bS^{n-1} 的交集覆盖 bS^{n-1} 时，它们构成 $W_t = \{\|x\|_2 \geqslant b\}$ 的覆盖：这是因为沿着每条向外射线，所选的正内积只会增大。由此可得

$$N_{\gamma_n}(t, \varepsilon) = \mathcal{N}_n\big(\arccos(a_t/b)\big). \tag{3.20}$$

分部积分表明

$$\frac{r}{r^2+1}\phi(r) \leqslant \overline{\Phi}(r) \leqslant \frac{\phi(r)}{r}, \qquad r > 0.$$

因此，函数 $h(r) = \phi(r)/\Phi(r)$ 满足 $r \leqslant h(r) \leqslant r + 1/r$。令 $\eta = \log(1+\varepsilon)$。于是

$$\eta = \int_{a_t}^{b} h(r)\, dr, \quad \frac{b^2 - a_t^2}{2} \leqslant \eta \leqslant \log 2.$$

由于 $a_t > 2$，这意味着 $b/a_t \leqslant \sqrt{1 + (\log 2)/2}$。因此，在 $[a_t, b]$ 上，$h(r)$ 与 b 相当，差一个绝对常数因子。由此可得

$$b - a_t \approx \eta/b, \quad 1 - a_t/b \approx \eta/b^2.$$

相同的比值界表明，$0 < \theta < 1$。事实上，由 $1 - \cos\theta \approx \theta^2$ 以及 $\varepsilon/2 \leqslant \eta \leqslant \varepsilon$ 这一事实，我们得到

$$\theta \approx \frac{\sqrt{\varepsilon}}{b}.$$

尾部界还给出 $b \sim \sqrt{2\log(1/t)}$ 为 $t \to 0^+$。将引理 3.20 应用于（3.20）可得覆盖估计。

最后，极坐标积分给出

$$w_{\gamma_n}(t) = d_n \int_b^\infty r^{n-1} e^{-r^2/2}\, dr \sim d_n b^{n-2} e^{-b^2/2},$$

其中 $d_n > 0$ 仅取决于 n。由于 $b \sim \sqrt{2\log(1/t)}$，可知存在一个常数 $d_n' > 0$，使得

$$w_{\gamma_n}(t) \sim d_n' t (\log(1/t))^{(n-1)/2} \quad (t \to 0^+)$$

固定 $a \in (0,1)$，在 at 和 t 处应用最后一个等价关系，得到 $w_{\gamma_n}(at)/w_{\gamma_n}(t) \to a$，由此证明了壳层估计。□

注 3.22。高斯锐性论证独立于一般的近乎最小覆盖定理。对于任意固定的、充分小的 t，当$\varepsilon \to 0^+$时，它给出 $\varepsilon^{-(n-1)/2}$ 的一个正倍数作为下界$\varepsilon \to 0^+$。因此，在定理 3.16中，ε^{-1} 的较小指数都不能取代 $(n-1)/2$，即使将壳层因子替换为 $w_\mu(t)/t$。由仿射不变性，同样的结论对每个非退化高斯测度都成立。在一维情形下，对于所有充分小的 t，两个尾部便已足够且不可或缺，因此相应的指数为零。

4 小半空间的最优包含覆盖

用小测度半空间覆盖湿部分，并不意味着每个完整的小半空间都包含在覆盖中的某个成员内。尽管如此，整个半空间包含问题仍有一种经济的解法（定理 4.4 和推论 4.7）。

在本节中，若 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度，我们用 f 表示其对数凹且上半连续的密度。令 $d = n+1$，并考虑函数 $g = f^{-1/d}$，将其在集合 $\{f > 0\}$之外延拓为$+\infty$。

引理 4.1. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。那么 g 是凸的，且

$$\mathcal{K}_f = \overline{\{(y,r) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : r g(y/r) \leqslant 1\}} \tag{4.1}$$

是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸体，其中 $0 \in \mathcal{K}_f$，且体积$_d(\mathcal{K}_f) = 1/d$。此外，对于任意博雷尔集 $B \subseteq \mathbb{R}^n$，有

$$\mu(B) = \frac{\mathrm{vol}_d\big(\{(y,r) \in \mathcal{K}_f : r > 0,\ y/r \in B\}\big)}{\mathrm{vol}_d(\mathcal{K}_f)}. \tag{4.2}$$

证明。由于 f是对数凹且上半连续的，因此函数 $g = \exp((-\log f)/d)$ 是凸且下半连续的。因此，映射 $(y, r) \mapsto r g(y/r)$ 是凸且下半连续的。它在 (4.1) 中的次水平集是凸的，且在 $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 中相对闭。由此可知，其闭包 $\mathcal{K}_f$ 是凸的，且只在 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 上增加点；该集合的 d维勒贝格测度为零。

选择 x_0，使得 $f(x_0) > 0$。那么，对于每个 $0 < r \leqslant f(x_0)^{1/d}$，$(rx_0, r)$ 都属于定义集合，并令 $r \to 0^+$，我们得到 $0 \in \mathcal{K}_f$。

对于博雷尔集 $B \subseteq \mathbb{R}^n$，托内利定理给出

$$\mu(B) = d \int_B \int_0^{f(x)^{1/d}} r^n \, dr \, dx.$$

$(x, r) \mapsto (y, r) = (rx, r)$ 的雅可比行列式为 r^n。由于取闭包时不会添加满足 $r > 0$ 的点，我们得到

$$\frac{1}{d}\mu(B) = \mathrm{vol}_d\big(\{(y, r) \in \mathcal{K}_f : r > 0,\ y/r \in B\}\big).$$

取 $B = \mathbb{R}^n$，我们得到体积$_d(\mathcal{K}_f) = 1/d$。因此，前面的恒等式也证明了（4.2）。最后，由于 $\mathcal{K}_f$是闭的凸集，且体积有限且为正，因此它是一个凸体。 □

每个闭半空间 $H = \{x : \langle u, x\rangle \geqslant a\}$ 都对应于帽

$$C_H = \mathcal{K}_f \cap \{(y, r) : \langle u, y\rangle \geqslant ar\}.$$

引理4.1 于是得到

$$\mu(H) = \frac{\mathrm{vol}_d(C_H)}{\mathrm{vol}_d(\mathcal{K}_f)}. \tag{4.3}$$

引理 4.2。 设 $R \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含原点的闭凸集，并设

$$r_x = f(x)^{1/(n+1)}, \quad p(x) = (r_x x, r_x) \quad (f(x) > 0),$$

$$A(R) = \{x : f(x) > 0,\ p(x) \in R\} \cup \{x : f(x) = 0\}.$$

于是 $A(R)$ 是一个博雷尔集，并且

$$\mu(A(R)) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_{n+1}(\mathcal{K}_f \cap R)}{\mathrm{vol}_{n+1}(\mathcal{K}_f)}. \tag{4.4}$$

此外，如果 $C_H \subseteq R$ 对应于闭半空间 H 的帽，那么 $H \subseteq A(R)$。

证明。 密度 f 是博雷尔可测的，因此 $A(R)$ 是一个博雷尔集。集合 $\{f = 0\}$ 的 μ-测度为零。根据引理 4.1， $\mu(A(R))$ 等于满足条件 $y, r) \in \mathcal{K}_f$的点 $r > 0$, $f(y/r) > 0$，且 $p(y/r) \in R$的归一化体积。

对于任意这样的点，令 $x = y/r$。那么 $0 < rg(x) \leqslant 1$ 并且

$$p(x) = \left(\frac{x}{g(x)}, \frac{1}{g(x)}\right), \qquad (y, r) = rg(x)\, p(x).$$

由于 R 是凸的，且包含 0 和 $p(x)$，我们有 $(y, r) \in R$。比较体积可得 (4.4)。

最后，如果 $C_H \subseteq R$ 且 $x \in H$ 满足 $f(x) > 0$，那么 $p(x) \in C_H \subseteq R$，因此 $x \in A(R)$。根据定义， H 中满足$f(x) = 0$ 的点属于 $A(R)$。因此 $H \subseteq A(R)$。 □

我们还将使用以下结果。这是 Arya、da Fonseca 和 Mount 的帽覆盖引理 [4,引理 4.3]。

引理 4.3. 对于 $d \geqslant 2$，设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个凸体，且 $\mathcal{C}$ 为任意一族正体积帽 $C = K \cap H$。存在两两不相交的凸体 $M_i \subseteq K$、与之对应的凸体 $R_i \subseteq \mathbb{R}^d$，满足 $M_i \subseteq R_i$，以及一个常数 $c_d > 0$，该常数仅依赖于 d，使得

$$\operatorname{vol}_d(R_i) \leqslant c_d \operatorname{vol}_d(M_i)$$

并且，对于每个 $C \in \mathcal{C}$，都存在一个指标 i，满足

$$M_i \subseteq C \subseteq R_i.$$

定理 4.4。对于每个 $n \geqslant 1$，都存在一个常数 $C_n > 0$，使得以下性质成立。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度，$0 < t < q_*$，且 $\mathcal{H}$ 是由闭半空间构成的任意族，所有闭半空间的 μ-测度均为t。若 $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ 是一个博雷尔集，则存在博雷尔集 $A_1, \ldots, A_J$，满足

$$J \leqslant C_n \frac{\mu\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right)}{t}, \quad \mu(A_i) \leqslant C_n t, \tag{4.5}$$

使得每个 $H \in \mathcal{H}$ 都包含于某个 A_i中。

证明。令 $K = \mathcal{K}_f$并将每个 $H \in \mathcal{H}$提升为帽 C_H。应用 4.3 引理，在维数 $d = n+1$ 下得到配对 (M_i, R_i)。仅保留以下指标

$$I := \{i : \text{there exists } H \in \mathcal{H} \text{ with } M_i \subseteq C_H \subseteq R_i\}.$$

对每个 $i \in I$ 选取一个半空间 $H_i \in \mathcal{H}$，使得 $M_i \subseteq C_{H_i} \subseteq R_i$。利用 (4.3) 和 4.3 引理可得

$$\frac{t}{c_d} \operatorname{vol}_d(K) \leqslant \operatorname{vol}_d(M_i) \leqslant t \operatorname{vol}_d(K), \qquad \operatorname{vol}_d(R_i) \leqslant c_d t \operatorname{vol}_d(K).$$

由于它们是 K 的两两不相交子集，因此只有有限多个集合 M_i。将它们重新标记为 M_1、……、M_J。利用（4.2），我们得到

$$J \frac{t}{c_d} \operatorname{vol}_d(K) \leqslant \sum_{i=1}^{J} \operatorname{vol}_d(M_i) \leqslant \operatorname{vol}_d\Big(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} C_H\Big) = \operatorname{vol}_d(K) \mu\Big(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\Big).$$

这就证明了基数估计。

每个帽 C_H 都包含原点，因为 $0 \in K$。特别地，$C_{H_i} \subseteq R_i$ 意味着 $0 \in R_i$ 对每个$i \in I$都成立。利用引理 $A_i = A(R_i)$，定义 4.2。然后应用（4.4）：

$$\mu(A_i) \leqslant \frac{\operatorname{vol}_d(K \cap R_i)}{\operatorname{vol}_d(K)} \leqslant c_d t.$$

最后，令 $H \in \mathcal{H}$。存在一个指标 $1 \leqslant i \leqslant J$ 使得 $M_i \subseteq C_H \subseteq R_i$。于是引理 4.2 给出$H \subseteq A(R_i) = A_i$。这就证明了对每个 $H \in \mathcal{H}$ 的包含关系。 □

注记 4.5。基数上界在维数常数意义下是最优的。事实上，任意有限族

博雷尔集 A_1，……， A_J满足 $\mu(A_i) \leqslant C_n t$，且在某个 A_i中包含 $\mathcal{H}$的每个成员，都满足

$$\mu\Big(\bigcup_{H\in\mathcal{H}} H\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{J} \mu(A_i) \leqslant JC_n t.$$

注记 4.6. 在定理 4.4 的证明中，我们只用到了 $g = f^{-1/(n+1)}$ 是凸的这一事实，以及 (4.1) 中的透视体是紧致的。对于这类密度，定理 4.4 仍然成立，且常数不变。标准柯西密度 $f(x) \propto (1+\|x\|_2^2)^{-(n+1)/2}$就是一个例子：我们有$g(x)$ 与 $\sqrt{1+\|x\|_2^2}$ 成正比，其透视体是欧几里得球的上半部分。

推论 4.7. 设 C_n 为定理4.4中的常数。对于每个对数凹概率测度 μ在$\mathbb{R}^n$ 上，以及任意 $0 < t < q_*$，存在博雷尔集 A_1，……， A_J使得

$$J \leqslant C_n \frac{w_\mu(t)}{t}, \quad \mu(A_i) \leqslant C_n t, \tag{4.6}$$

并且，每个 μ-测度不超过 t 的闭半空间都包含于至少一个 A_i。

证明。 我们将定理 4.4 应用于 μ-测度恰为 t的所有闭半空间所构成的族， t因为根据一维边缘分布的连续性，任何测度较小的半空间都可以扩张为测度为 $\{q_\mu \leqslant t\}$的半空间。这些半空间的并等于 $w_\mu(t)$，它是一个博雷尔集，且其测度为 $w_\mu(t)$。 □

推论 4.8。 令 $n \geqslant 2$，并设 Y_1、…、Y_n 是具有对数凹概率分布 μ 的独立同分布随机向量，取值于 $\mathbb{R}^n$。几乎必然地，它们的仿射包是一个超平面 H_Y。记 H_Y^+、H_Y^- 为其两个闭侧，并定义

$$G_\mu(t) = \mathbb{P}\big(\min\{\mu(H_Y^+), \mu(H_Y^-)\} \leqslant t\big).$$

存在一个常数 $c_n > 0$，它仅依赖于 n，使得

$$G_\mu(t) \leqslant c_n t^{n-1} w_\mu(t), \qquad 0 < t < q_*. \tag{4.7}$$

证明。 固定 t，使其取值范围属于推论 4.7，并令 A_1、…、A_J 为该推论陈述中的博雷尔集。若 $\min\{\mu(H_Y^+)\ \mu(H_Y^-)\} \leqslant t$，则 H_Y的两个闭侧之一包含于某个 A_i中。由于所有 Y_j都位于 H_Y上，这意味着 Y_1、…、 $Y_n \in A_i$。由此可得

$$G_\mu(t) \leqslant \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}(Y_1,\dots,Y_n \in A_i) = \sum_{i=1}^{J} \mu(A_i)^n \leqslant J(C_n t)^n \leqslant C_n^{n+1} t^{n-1} w_\mu(t),$$

其中 C_n 是（4.6）中的常数。 □

5 湿部估计

B´ar´any–Larman [10], 提出的凸体经典湿部分估计，由 B´ar´any 在 [9,推论 11.4], 中给出，其锐指数为 $2/(n+1)$。我们首先陈述精确的一维公式，并通过层饼积分将这一绝对界推广到对数凹测度。随后，我们将这一推广与经济覆盖定理结合，证明深度层级之间的相对比较，并推导出关于深度矩和覆盖数的结论。

命题 5.1. 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的对数凹概率测度。那么，对于 $0 < t < q_*$,

$$w_\mu(t) = 2t. \tag{5.1}$$

证明。令 F 为 μ的分布函数。由于 μ 具有密度， F 是连续的，且在一维

$$q_\mu(x) = \min\{F(x), 1 - F(x)\}.$$

因此 W_t 是两个测度均为 t的尾部的并集，这就证明了 (5.1)。 □

对于 $\mathbb{R}^n$中的凸体 K ，为将帽体积与引言中使用的归一化深度 v_K 区分开来，记

$$\mathrm{Wet}_K(\varepsilon) := \left\{x \in K : \inf_{H \ni x} \mathrm{vol}_n(K \cap H) \leqslant \varepsilon\right\} = U_{\varepsilon/\,\mathrm{vol}_n(K)}(K).$$

引理 5.2。 对于 $n \geqslant 2$，令 $\bar{b}_n$ 为满足下述条件的最小常数：对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个凸体 K 以及每个$\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{vol}_n\big(\mathrm{Wet}_K(\varepsilon)\big) \leqslant \bar{b}_n \,\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n+1}} \varepsilon^{\frac{2}{n+1}}. \tag{5.2}$$

则 $\bar{b_n} < \infty$。

证明。 上文提到的经典凸体结果（见 [10, 9]）给出了常数 $c_n > 0$ 和$\varepsilon_n > 0$，它们仅取决于 n，使得 $\mathbb{R}^n$ 中每个体积为 1 的凸体 K 都满足

$$\mathrm{vol}_n\big(\mathrm{Wet}_K(\varepsilon)\big) \leqslant c_n \varepsilon^{2/(n+1)} \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_n).$$

对于 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_n$，利用 1 作为上界，可将此估计推广为常数 $\widetilde{c}_n = \max\{c_n, \varepsilon_n^{-2/(n+1)}\}$。对于一般体积$V = \mathrm{vol}_n(K)$，我们将前一个估计应用于 $V^{-1/n}K$:

$$\mathrm{vol}_n\big(\mathrm{Wet}_K(\varepsilon)\big) = V \,\mathrm{vol}_n\big(\mathrm{Wet}_{V^{-1/n}K}(\varepsilon/V)\big) \leqslant \widetilde{c}_n V^{(n-1)/(n+1)} \varepsilon^{2/(n+1)}.$$

因此，$\bar{b_n} \leqslant \widetilde{c}_n < \infty$。 □

定理 5.3。 对于每个 $n \geqslant 1$ ，都存在 $D_n > 0$ ，使得每个定义在$\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度 μ 都满足

$$w_\mu(t) \leqslant D_n t^{\frac{2}{n+1}}, \quad t > 0. \tag{5.3}$$

指数 $2/(n+1)$ 无法在所有此类测度上一致地增大。

证明。 情形 $n = 1$ 由命题 5.1 得出。假设 $n \geqslant 2$ 并令

$$\alpha := \frac{2}{n+1}.$$

该陈述是仿射 具有 nely 不变性，因此我们可以假设 μ 的密度 f 满足 $\|f\|_\infty = 1$。对于 r

$0 < s < 1$，令

$$L_s := \{x : f(x) \geqslant s\}.$$

这些集合是有界凸体，并且

$$1 = \int_0^1 \mathrm{vol}_n(L_s)\, ds. \tag{5.4}$$

固定 $x \in W_t \cap L_s$。存在一个半空间 H，包含 x，且 $\mu(H) \leqslant t$。由于对于 $0 < r < s$，$L_s \subseteq L_r$，我们有

$$s\,\mathrm{vol}_n(H \cap L_s) \leqslant \int_0^s \mathrm{vol}_n(H \cap L_r)\, dr \leqslant \mu(H) \leqslant t.$$

由此可得

$$W_t \cap L_s \subseteq \mathrm{Wet}_{L_s}(t/s). \tag{5.5}$$

利用引理 5.2，我们可以写成

$$w_\mu(t) \leqslant \bar{b}_n t^\alpha \int_0^1 s^{-\alpha}\,\mathrm{vol}_n(L_s)^{1-\alpha}\, ds, \tag{5.6}$$

剩下只需对最后一个积分进行估计。令

$$\beta := 1 - \alpha = \frac{n-1}{n+1}, \quad \varphi(r) := \mathrm{vol}_n(L_{e^{-r}})^{1/n}.$$

由 f 的对数凹性和布伦-明可夫斯基不等式，函数 φ 单调不减且为凹函数。此外，

$$\int_0^\infty e^{-r}\varphi(r)^n\, dr = 1. \tag{5.7}$$

由于 φ 是凹的，我们有

$$\varphi(u/\beta) \leqslant \beta^{-1}\varphi(u), \quad u \geqslant 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 s^{-\alpha}|L_s|^{1-\alpha}\, ds &= \int_0^\infty e^{-\beta r}\varphi(r)^{n\beta}\, dr \\ &\leqslant \beta^{-1-n\beta}\int_0^\infty e^{-u}\varphi(u)^{n\beta}\, du \\ &\leqslant \beta^{-1-n\beta}.\end{aligned}$$

对于最后一个不等式，我们使用（5.7）以及概率测度 L_p 下范数的单调性 $e^{-u}\, du$。取

$$D_n = \bar{b}_n\, \beta^{-1-n\beta}, \tag{5.8}$$

我们得到（5.3）。对于欧几里得球，我们有 $w(t) \approx_n t^{2/(n+1)}$，这表明指数

是最优的。 □

推论 5.4. 设 $n \geqslant 2$，并记 D_n 为满足下述条件的最小常数

$$w_\mu(t) \leqslant \overline{D}_n t^{2/(n+1)}$$

对定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的每个对数凹概率测度 μ 以及每个 $t > 0$，条件均成立。那么，

$$\overline{b}_n \leqslant \overline{D}_n \leqslant \beta^{-1-n\beta}\overline{b}_n, \tag{5.9}$$

其中 $\beta = (n-1)/(n+1)$。特别地，b_n 与 D_n 在绝对常数因子范围内可比。

证明. 上界由 (5.8) 得出。对于下界，我们将定理 5.3 应用于凸体上的均匀测度。注意到

$$(1+n\beta)\log(1/\beta) \leqslant \frac{2n}{n-1} \leqslant 4,$$

因此 $\beta^{-1-n\beta}$ 一致有界于 $n \geqslant 2$ 中。 □

定理 5.5. 对于每个整数 $n \geqslant 1$，都存在常数 $B_n > 0$ 和 $t_n > 0$，使得对定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的每个对数凹概率测度 μ，

$$w_\mu(s) \leqslant B_n \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{2}{n+1}} w_\mu(t), \quad 0 < s \leqslant t < t_n. \tag{5.10}$$

该指数是最优的。

证明。令 $\alpha = 2/(n+1)$，并应用定理 3.1 得到半空间 $C_1, \dots, C_N$ 使得 t

$$W_t \subseteq \bigcup_{i=1}^N C_i, \quad m_i := \mu(C_i) \leqslant A_n t, \quad N \leqslant D_n \frac{w_\mu(t)}{t}.$$

若 $m_i > 0$，则定义

$$\nu_i = \frac{\mu(\cdot \cap C_i)}{m_i}.$$

注意，ν_i 是一个对数凹概率测度。若 $x \in W_s \cap C_i$，则包含 x 且满足$\mu(H) \leqslant s$ 的半空间 H 满足

$$\nu_i(H) \leqslant \frac{\mu(H)}{m_i} \leqslant \frac{s}{m_i}.$$

由此可得

$$W_s \cap C_i \subseteq W_{s/m_i}^{\nu_i}.$$

接着，定理 5.3表明

$$\mu(W_s \cap C_i) \leqslant D_n' s^\alpha m_i^{1-\alpha} \leqslant D_n' A_n^{1-\alpha} s^\alpha t^{1-\alpha}.$$

最后一个不等式 al 因此，对那些带有 i $m_i = 0$ 的情形也成立。由于 $W_s \subseteq W_t$，对覆盖半空间求和 s

我们得到

$$w_\mu(s) \leqslant D_n' A_n^{1-\alpha} N s^\alpha t^{1-\alpha} \leqslant B_n \left(\frac{s}{t}\right)^\alpha w_\mu(t).$$

欧几里得球上的均匀测度再次表明，定理 5.5 中的指数无法提高。

□

推论 5.6。 令 μ 为 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度。若 $\alpha = 2/(n+1)$ 且 $0 < p < \alpha$，则 n

$$\mathbb{E}_\mu\left[q_\mu^{-p}\right] \leqslant 1 + \frac{pD_n}{\alpha - p}, \tag{5.11}$$

其中 $D_n > 0$为某个维数常数。对数凹概率测度范围内一致成立的最优范围为 $p < 2/(n+1)$。

证明。 定理 5.3 中的绝对湿部分界给出 $w_\mu(r) \leqslant D_n r^\alpha$。由于 $q_\mu \leqslant 1$，对分布函数积分可得

$$\mathbb{E}_\mu\left[q_\mu^{-p}\right] = 1 + p\int_1^\infty u^{p-1} w_\mu(u^{-1})\, du \leqslant 1 + \frac{pD_n}{\alpha - p}.$$

For 欧几里得球上的均匀测度为 $w_\mu(r) \approx_n r^\alpha$，因此对 $p \geqslant \alpha$有 $\mathbb{E}_\mu\left[q_\mu^{-p}\right] = \infty$。 □

推论 5.7。 对于每个对数凹概率测度 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 以及每个 $0 < t < t_n$，定理 3.1中的覆盖半空间可以选取为满足

$$N \leqslant D_n t^{-\frac{n-1}{n+1}}. \tag{5.12}$$

对于所有对数凹概率测度而言，该指数是最优的。

证明。 上界可由定理 3.1与定理5.3结合得到。为证明其尖锐性，设 μ为欧几里得球上的均匀概率测度。则 $w_\mu(t) \approx_n t^{2/(n+1)}$ 当 $t \to 0^+$ 时。任何由 N个测度至多为 $A_n t$的半空间构成的覆盖都必须满足

$$w_\mu(t) \leqslant \sum_{i=1}^N \mu(C_i) \leqslant N A_n t,$$

因此

$$N \geqslant \frac{w_\mu(t)}{A_n t} \geqslant c_n t^{-(n-1)/(n+1)}$$

对于所有充分小的 t 均成立。在一维情形下，同样的论证使用 $w_\mu(t) = 2t$，并给出一个正的常数下界，这正是指数为零时所需的结果。 □

致谢。 我谨此感谢 A. Giannopoulos 的宝贵讨论 s.

AI 使用声明。 作者感谢 ChatGPT（OpenAI）在本手稿准备的最后阶段提供的帮助，包括证明核查、修改以及对呈现方式提出建议。作者对手稿的内容和正确性承担全部责任。

参考文献

[1] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount, *Optimal approximate polytope membership*, 《第28届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集》（2017），270–288。[2] R. Arya、S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount, *Optimal bound on the combinatorial complexity ofapproximating polytopes*, 《ACM 算法汇刊》18（2022），第35篇文章。[3] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount, *Economical convex coverings and applications*, 《SIAM 计算学杂志》53（2024），1002–1038。[4] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount, *Optimal area-sensitive bounds for polytope approximation*, 《离散与计算几何》75（2026），709–746。[5] I. B´ar´any, *Intrinsic volumes and f-vectors of random polytopes*, 《数学年刊》285（1989），671–699。[6] I. B´ar´any, *Random polytopes in smooth convex bodies*, 《Mathematika》39（1992），81–92。[7] I. B´ar´any, *The technique of M-regions and cap-coverings: a survey*, 《巴勒莫数学学会汇刊》（第2辑）增刊65（2000），21–38。[8] I. B´ar´any, *Random points and lattice points in convex bodies*, 综述笔记，2007年，https://users.renyi.hu/~barany/cikkek/rsurv.pdf。[9] I. B´ar´any, *Random points and lattice points in convex bodies*, 讲义，2008年，https://www.renyi.hu/~barany/cikkek/lect.pdf。[10] I. B´ar´any 和 D. G. Larman, *Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes*, 《Mathematika》35（1988），274–291。[11] I. B´ar´any、M. Fradelizi、X. Goaoc、A. Hubard 和 G. Rote, *Random polytopes and the wet part for arbitraryprobability distributions*, 《Henri Lebesgue 年刊》3（2020），701–715。[12] F. Besau、M. Ludwig 和 E. M. Werner, *Weighted floating bodies and polytopal approximation*, 《美国数学会汇刊》370（2018），7129–7148。[13] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, 《Arkiv för Matematik》12（1974），239–252。[14] S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 M. Pafis, *Half-space depth of log-concave probability measures*, 《概率论及相关领域》188（2024），309–336。[15] S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 M. Pafis, *Threshold for the expected measure of random polytopes*, 《数学年刊》388（2024），2991–3024。[16] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B.-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, 《数学调查与专著》，第196卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年。xx+594页。[17] E. M. Bronshteyn 和 L. D. Ivanov, *The approximation of convex sets by polyhedra*, 《西伯利亚数学杂志》16（1975），852–853。[18] D. L. Donoho 和 M. Gasko, *Breakdown properties of location estimates based on halfspace depth and projected outlyingness*, 《统计年刊》20（1992），1803–1827。[19] R. M.Dudley, *Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries*, 《逼近论杂志》10（1974），227–236。[20] B. Efron, *The convex hull of a random set of points*, 《生物统计学》52（1965），331–343。[21] G. Ewald、D. G. Larman 和 C. A. Rogers, *The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in Euclidean space*, 《Mathematika》17（1970），1–20。[22] M. Fradelizi、D. Langharst、J. Liu、F. Mar´ín Sola 和 S. Tang, *Grünbaum's inequality for Gaussian and convex probability measures*, 《纯粹与应用数学杂志》213（2026），103938。

[23] A. Giannopoulos 和 M. Pafis, *Wet-part doubling for log-concave probability measures*, 预印本（2026年）。[24] S. Hayakawa、T. Lyons 和 H. Oberhauser, *Estimating the probability that a given vector is in the convex hullof a random sample*, 《概率论及相关领域》185（2023年），705–746。[25] A. M. Macbeath, *A theorem on non-homogeneous lattices*, 《数学年刊》（第2辑）56（1952年），269–293。[26] S. Nagy、C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, *Halfspace depth and floating body*, 《统计学综述》13（2019年），52–118。[27] M. Pafis, *Random polytopes under wet-part doubling*, 预印本（2026年）。[28] M. Reitzner, *Random polytopes*, 载于 *New Perspectives in Stochastic Geometry*, 牛津大学出版社，牛津，2010年，45–76。[29] A. R´enyi 和 R. Sulanke, *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten*, 《概率论及相关领域》2（1963年），75–84。[30] C. Sch¨utt 和 E. Werner, *The convex floating body*, 《斯堪的纳维亚数学》66（1990年），275–290。[31] J. W. Tukey, *Mathematics and the picturing of data*, 载于 *Proceedings of the International Congress of Mathemati-cians, Vancouver 1974*, 第2卷，加拿大数学大会，1975年，523–531。[32] E.M.Werner, *Floating bodies and approximation of convex bodies by polytopes*, 《概率调查》19（2022年），113–128。[33] Y. Zuo 和 R. Serfling, *General notions of statistical depth function*, 《统计年刊》28（2000年），461–482。

2020年数学主题分类。主要分类 52A20、52C17；次要分类 52A22、52A27、60D05。

关键词。对数凹测度、经济帽覆盖、Tukey 半空间深度、湿部、浮体、麦克比斯区域、包含覆盖、随机多胞体。

MINAS PAFIS：雅典国立卡波蒂斯特里亚大学数学系，大学城 157-84，希腊雅典。*E-mail:* mipafis@math.uoa.gr