arXiv:2611.29020v1 [math.PR] 21 Nov 2026

对数凹概率测度的湿部分倍增

Apostolos Giannopoulos 和 Minas Pafis

摘要

设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，$n \geqslant 2$。我们研究 $w_\mu(t) = \mu(\{x : q_\mu(x) \leqslant t\})$ 的增长，其中 q_μ 是 μ 的 Tukey 半空间深度函数。我们证明 w_μ 满足如下加倍界

$$w_\mu(\lambda t) \leqslant C^n \lambda \left(1 + \frac{\log \lambda}{n-1}\right)^{n-1} w_\mu(t)$$

对任意 $\lambda > 1$ 和 $0 < t < 1/\lambda$，其中 $C > 0$ 是一个绝对常数。因此，对任意 $\varepsilon > 0$，我们都可以写成 $w_\mu(\lambda t) \leqslant A_\varepsilon^n \lambda^{1+\varepsilon} w_\mu(t)$，其中 $A_\varepsilon > 0$ 为某个常数。我们构造了每个维数 $n \geqslant 2$ 下的一族对称对数凹测度，表明不存在一个依赖于维数的常数，使得线性加倍界在这一类测度上统一成立。加倍界的证明用到了半空间深度与 Cram´er 变换的逐点比较、对偶径向坐标，以及关于横向协方差行列式的相对熵估计。

1 引言

凸体的湿部是指能够通过体积相对较小的半空间从凸体中切除的部分。它是浮体理论、随机多胞体和多面体逼近中的基本对象。我们先介绍凸体的经典结果，然后提出对数凹概率测度的相应问题。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，并令 μ_K 表示 K 上的归一化勒贝格测度。定义

$$q_K(x) = \inf\{\mu_K(K \cap H) : \ H \text{ 是包含 } x\}, \qquad x \in K,$$

并设 $U_t(K) = \{x \in K : \ q_K(x) \leqslant t\}$ 且 $w_K(t) = \mu_K(U_t(K))$。湿部 $U_t(K)$ 的补集是 K 在水平 t 处的凸浮体的内部。关于浮体的基础参考文献包括 Sch¨utt 和 Werner [36],Nag y、Sch¨utt 和 Werner [26]，的文章，以及 Werner [38] 的综述。

该领域的一项基本结果是 B´ar´any 和 Larman [5, 的经济型帽覆盖定理 6] 。该定理指出，对于充分小的 t，存在帽 $C_1, \ldots, C_M$，其属于 K 且满足 $\mu_K(C_i) \leqslant A_n t$；并且存在互不相交的可测子集 $C_i' \subseteq C_i$，其测度至少为 $a_n t$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{M} C_i' \subseteq U_t(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} C_i.$$

特别地，$M \approx_n w_K(t)/t$。该定理的证明运用了 Macbeath 中心对称区域 [25]，并发展了 Ewald、Larman 和 Rogers 的经济型覆盖方法 [17]。经典理论还

证明了适当小的帽包含在扩大的覆盖区域中。该方法的介绍见 B´ar´any 的综述文章 [2]。

我们的工作起点是 B´ar´any 和 Larman 的湿部比较定理 [5, 定理 7]。对于 $n \geqslant 2$，对每个 $\lambda \geqslant 1$，当 $t > 0$ 充分小时以及任意 K 中的凸体 $\mathbb{R}^n$，都有

$$w_K(\lambda t) \leqslant C_n \lambda^n w_K(t), \tag{1.1}$$

其中常数仅依赖于维数。这是湿部增长的一个一致幂界，但指数 n 并非最优。在本文中，我们为更广泛的对数凹概率测度类建立了显著更精确的界。

w_K 的几何意义在其对随机多胞体的应用中尤为清晰。设 P_N为 N 个独立均匀点在 K中的凸包。B´ar´any 和 Larman 的缺失体积定理 [5, 定理 1]指出

$$\mathbb{E}\,\mu_K(K \setminus P_N) \approx_n w_K(1/N) \tag{1.2}$$

如果 N 足够大，且其大小仅取决于 n。Efron 的经典恒等式 [16] 断言，$\mathbb{E}f_0(P_N) = N\,\mathbb{E}\mu_K(K \setminus P_{N-1})$，因此同一个几何量也控制着 P_N的顶点数的期望。R´enyi 和 Sulanke 的早期工作 [33]研究了平面情形。B´ar´any [1] 随后研究了 P_N的内在体积和面数。B´ar´any 和 F¨uredi [4] 以及 Reitzner [31]进一步研究了随机凸包及其面的组合学。关于更多结果和参考文献，参见 B´ar´any [3] 和 Reitzner [32] 。

$w_K(t)$的行为反映了 K的边界几何。一般凸体的估计为$w_K(t) \leqslant C_n t^{2/(n+1)}$，当 t较小时成立；该指数由球和光滑凸体达到。另一方面，若 P 是一个 n维多面体，则

$$w_P(t) \approx_P t\big(\log(1/t)\big)^{n-1} \tag{1.3}$$

当 $t \to 0^+$时。关于 w_K 与浮体及仿射表面积之间的关系，请参阅 [5, 36, 3 8].

我们考虑对数凹概率测度这一类。Tukey半空间深度是 q_K的自然类比。对于对数凹概率测度 μ，我们定义

$$q_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \text{ is a closed half-space containing } x\}.$$

μ 的湿部及其测度为

$$W_\mu(t) = \{x : q_\mu(x) \leqslant t\}, \quad w_\mu(t) = \mu(W_\mu(t)).$$

因此，w_μ 是半空间深度在 μ下的分布函数。对于 $\mu = \mu_K$，它与 w_K一致。

半空间深度由 Tukey 于 [37], 提出，随后 Donoho、Gasko [15] 等人 [35, 23, 39]在稳健统计学中对其进行了进一步发展。

B´ar´any, Fradelizi, Goaoc, Hubardand Rote [6] 证明了，对于任意概率分布，(1.2) 中的下湿部分界仍然成立，但对于上界，一般需要对深度参数进行对数扩大。他们还给出了一个例子，说明这种损失无法避免。

他们还提出了这样一个问题：对于任意 $\lambda > 1$，对数凹概率测度是否都满足 $w_\mu(t)$ 与 $w_\mu(\lambda t)$ 之间的统一比较关系?

我们对这个问题给出了肯定且有力的回答。

定理 1.1. 存在一个绝对常数 $C \geqslant 1$，使得对于 $\mathbb{R}^n$ 上的每个对数凹概率测度μ $n \geqslant 2$，我们有

$$w_\mu(\lambda t) \leqslant C^n \lambda \left(1 + \frac{\log \lambda}{n-1}\right)^{n-1} w_\mu(t). \tag{1.4}$$

对于每个 $\lambda > 1$ 和每个 $0 < t < 1/\lambda$。因此，对于每个 $0 < \varepsilon \leqslant 1$,

$$w_\mu(\lambda t) \leqslant C_1^n \varepsilon^{-(n-1)} \lambda^{1+\varepsilon} w_\mu(t). \tag{1.5}$$

特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $A_\varepsilon > 0$，它与 n 无关，使得 $w_\mu(\lambda t) \leqslant A_\varepsilon^n \lambda^{1+\varepsilon} w_\mu(t)$。

即使允许常数依赖于 n，指数 1 也不能统一适用于所有对称对数凹概率测度。

定理 1.2. 设 $n \geqslant 2$。对于每个 $C_n > 0$，都存在一个定义在$\mathbb{R}^n$上的对称对数凹概率测度 μ，并且存在 $\lambda > 1$ 和 $0 < t < 1/\lambda$，使得

$$w_\mu(\lambda t) > C_n \lambda w_\mu(t).$$

为证明定理 1.2 我们构造对称对数凹分布 $\mu_{n,\,a}$ 以及满足以下条件的数对 $(\lambda_{n,\,a},\ t_{n,\,a})$:

$$\frac{w_{\mu_{n,a}}(\lambda_{n,a} t_{n,a})}{\lambda_{n,a} w_{\mu_{n,a}}(t_{n,a})} \geqslant c_n \left(\frac{a}{\log a}\right)^{n-1} \to \infty \quad (a \to \infty). \tag{1.6}$$

这些测度随 a 变化。这表明我们无法得到一致的线性界。不过，该构造并不能保证定理 1.1 中的对数修正是最优的。注意，若 $n = 1$，则简单计算可得 $w_\mu(t) = \min\{2t, 1\}$，因此线性增长成立。

定理的证明　　1.1 基于对数拉普拉斯变换及其勒让德变换。我们定义

$$\Lambda(\theta) = \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \theta, z \rangle}\, d\mu(z), \quad \Lambda^*(x) = \sup_\theta \{\langle \theta, x \rangle - \Lambda(\theta)\},$$

其中 $\Omega = \{\theta : \Lambda(\theta) < \infty\}$，对于 $\theta \in \Omega$，我们令

$$x(\theta) = \nabla \Lambda(\theta), \quad \Sigma(\theta) = \nabla^2 \Lambda(\theta), \quad F(\theta) = \Lambda^*(x(\theta)), \quad J(\theta) = \sqrt{\theta^T \Sigma(\theta) \theta}.$$

倾斜概率测度 $d\mu_\theta(z) = e^{\langle \theta,\ z \rangle - \Lambda(\theta)} d\mu(z)$ 的均值为 $x(\theta)$，协方差为 $\Sigma(\theta)$。下一个定理是我们的出发点。

定理 1.3。 存在绝对常数 $C_0 \geqslant c_0 > 0$，使得对于任意对数凹概率

测度 μ、任意 $\theta \in \Omega$ 以及任意 $x = \nabla\Lambda(\theta)$，

$$c_0 \frac{e^{-F(\theta)}}{1+J(\theta)} \leqslant q_\mu(x) \leqslant C_0 \frac{e^{-F(\theta)}}{1+J(\theta)}. \tag{1.7}$$

对于定理1.3 中的上界，我们考察法向量为 θ的半空间。对于下界，我们将经过 $x(\theta)$的任意支撑半空间与一个适当倾斜的半空间进行比较。相对熵同时控制速率函数 F 和一维方差因子的变化。

关于对数凹测度的半空间深度与随机多胞体期望测度阈值之间关系的估计，可见 [9, 10]。Brazitikos 和 Chasapis 的工作中给出了符合定理 1.3 精神的锐利估计 [8, 定理 1。1]他们证明，对于定义在 μ 上的每个对数凹概率测度 $\mathbb{R}^n$，以及每个 $\varepsilon \in (0,1)$，均有

$$\Lambda^*(x) \geqslant (1-\varepsilon)\log\frac{1}{q_\mu(x)} + \log\frac{\varepsilon}{2^{1-\varepsilon}} \tag{1.8}$$

对每个 $x \in \text{int}(\text{supp}(\mu))$ 均成立。此外，在 [27, 定理 1.1] 中，第二位署名作者针对凸体上的均匀分布得到了类似结果，其对维数的依赖关系是锐利的。

为证明定理1.1 ，我们转到对偶径向坐标 $\theta = ru$，并以 F 作为径向变量。我们使用 Klartag 和 Lehec 的切片定理 [21], ，该定理肯定地回答了 Bourgain 切片问题，并据此控制这一变量替换的归一化因子。定理1.3使我们能够将真实深度与 $\widetilde{q} = e^{-F}/(1+J)$进行比较。随后，我们利用两个倾斜测度之间的相对熵，界定横向协方差行列式的变化，从而得到定理1.1中的因子$\log\lambda/(n-1))^{n-1}$。

两篇姊妹论文将相同的半空间深度湿部用于不同目的，所得结果相辅相成。文章 [28] 建立了半空间覆盖结果，并证明了一个对族敏感的定理，指出测度较小的整个半空间都可以包含在测度相近的覆盖集中。在 [28] 中还证明了

$$w_\mu(s) \leqslant D_n \left(\frac{s}{t}\right)^{2/(n+1)} w_\mu(t), \quad 0 < s \leqslant t < t_n. \tag{1.9}$$

注意，应用定理1.1 以及 $\lambda = t/s$ ，我们得到反向比较

$$w_\mu(s) \geqslant C^{-n}\frac{s}{t}\left(1+\frac{\log(t/s)}{n-1}\right)^{-(n-1)} w_\mu(t), \quad 0 < s < t < 1. \tag{1.10}$$

本文 [29] 研究了 P_N 由 N 服从某个无原子概率测度 μ的独立随机点所生成的凸包。文中证明，湿部分倍增等价于 $E[1-\mu(P_N)] \approx^{w_\mu}(1/N)$。因此，对于对数凹测度，定理1.1 和 Efron 恒等式给出

$$\mathbb{E}[1-\mu(P_N)] \approx_n w_\mu(1/N), \quad \mathbb{E}f_0(P_N) \approx_n N w_\mu(1/N), \tag{1.11}$$

其中， $f_k(P_N)$ 表示对于每个 $0 \leqslant k \leqslant n-1$， P_N 的 k 维面的数量。 [28] 的结果提供了额外的几何工具，用于控制每个维度面的期望数量。结合

根据定理 1.1 可得

$$\mathbb{E} f_k(P_N) \approx_{n,k} N w_\mu(1/N), \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍基本记号，并推导对数凹测度所需的估计。在第 3 节中，我们证明深度比较定理 1.3。第 4节建立对偶径向表示。在第 5 节中，我们证明近线性定理 1.1。最后，在第 6 节中，我们证明定理 1.2中不可能存在关于线性的界。

2 预备知识

我们在 $\mathbb{R}^n$ 中工作，并在其上赋予标准内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。相应的欧几里得范数记为 $|\cdot|$，欧几里得单位球记为 B_2^n，其体积记为 ω_n，单位球面记为 S^{n-1}。令 σ 表示 S^{n-1} 上的表面积测度。对于 $n=1$，$S^0 = \{-1, 1\}$ 上的计数测度记为 σ。字母 c，c_j，C，C_j 等表示绝对正的常数，其值可能逐行变化。对于正实数 a，b，记号 $a \lesssim b$ 表示存在绝对常数 C 使得 $a \leqslant Cb$，而 $a \approx b$ 表示 $a \lesssim b$ 和 $b \lesssim a$ 同时成立。如果隐含常数还依赖于 ξ，我们也记作 $a \approx_\xi b$。

对于一个内部包含 0 的凸集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，我们将 A 的径向函数定义为 $\ell_A(u) = \sup\{r > 0 : ru \in A\} \in (0, \infty]$ 对每个 $u \in S^{n-1}$ 都成立。

博雷尔概率测度 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 上称为对数凹的，如果它是满维的，即对于 $\mathbb{R}^n$中的每个超平面 H，$\mu(H) < 1$，并且

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一对紧集 A，B 以及任意 $\lambda \in (0, 1)$。Borell [7] 已证明，在这些假设下，μ 具有一个对数凹密度 $f = e^{-V}$，其 V 凸，并且满足指数尾界$f(x) \leqslant ae^{-b|x|}$，其中 a，$b > 0$ 适当（见 [11, 引理 2.2。1]）。特别地，μ 具有任意阶的有限阶矩。根据 Pr´ekopa 定理 [30]，其一维边缘分布是对数凹的。在全文中，我们处理 μ 对数凹的情形。我们将其凸支撑集记为 K，并将其对数凹且上半连续的密度代表记为 f。因此，f 能达到其最大值。

如果一个对数凹概率测度 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的重心 $\mathrm{bar}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu(x)$ 位于原点，我们就称其为中心化的。此外，若对每个博雷尔子集 B，都有 μ 称 $\mu(-B) = \mu(B)$，则称 μ 为对称的。若 μ 具有密度 f，我们将协方差矩阵 $\mathrm{Cov}(\mu)$ 定义为其各项为

$$\mathrm{Cov}(\mu)_{ij} := \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\, dx.$$

μ 的各向同性常数定义为

$$L_\mu := \|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} \big(\det \mathrm{Cov}(\mu)\big)^{\frac{1}{2n}},$$

并且 μ 被称为各 向同性的，如果它是中心化的且 $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$。注意，若 μ 是各向同性的，则 $L_\mu = \|f_\mu\|_\infty^{1/n}$.

定理 2.1 (Kla rtag–Lehec)。 存在绝对常数 $0 < c \leqslant C < \infty$，使得对于每个对数 -

凹概率测度 μ 在 $\mathbb{R}^n$上

$$c \leqslant L_\mu \leqslant C.$$

下界很简单（见 [11, 命题 2.3。12]），而上界则是 Klartag 和 Lehec 对切片问题的肯定回答 [21]。

若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的博雷尔概率测度，且 $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ 是一个仿射函数，则我们用 $T_{\#}\mu$ 表示相应的推前测度。若 μ 是对数凹的，且 T 是满射的，则 $T_{\#}\mu$也是对数凹的。

对于 p 率测度 μ, ν，我们使用相对熵（或 Kullback–Leibler散度）

$$D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \log\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\mu$$

当 $\mu \ll \nu$时，否则为 $D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu) = +\infty$。注意，$D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu) \geqslant 0$，并且当且仅当 $\mu = \nu$时，$D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu) = 0$。此外，若 T是一个可测函数，则

$$D_{\mathrm{KL}}(T_{\#}\mu\|T_{\#}\nu) \leqslant D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu). \tag{2.1}$$

若 μ 具有密度，则我们将 μ 的微分熵定义为

$$h(\mu) = -\int f \log f.$$

定理 2.2。若 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，则

$$\frac{1}{2}\log\big(\det \mathrm{Cov}(\mu)\big) - n\log C \leqslant h(\mu) \leqslant \frac{1}{2}\log\big(\det \mathrm{Cov}(\mu)\big) + \frac{n}{2}\log(2\pi e),$$

其中 $C > 0$ 是定理 2.1中的绝对常数。

对于下界，我们使用不等式 $f \leqslant \|f\|_\infty$以及定理 2.1的上界；而上界则来自高斯最大熵不等式。关于信息论的更多背景，读者可参阅 [14, 19]。

对于 $u \in S^{n-1}$ 和 $a \in \mathbb{R}$，令

$$H^+(u, a) = \{z : \langle u, z\rangle \geqslant a\}.$$

若 $H^+(u,\ a)$ 包含 x，则 $a \leqslant \langle u,\ x\rangle$，并且用 $\langle u,\ x\rangle$ 替换 a只会减小该半空间的测度。因此，Tukey半空间深度可写为

$$q_\mu(x) = \inf_{u \in S^{n-1}} \mu\big(H^+(u, \langle u, x\rangle)\big), \tag{2.2}$$

因此，只需考虑边界包含 x的半空间。

如果 μ 是对数凹的，那么对于固定的 u，边缘分布 $\langle u,\ X\rangle$ 具有密度，因此其尾分布函数是连续的。因此，每个方向半空间概率关于 x都是连续的，而它们的下确界q_μ 是上半连续的。特别地，水平为 t的湿部

$$W_\mu(t) = \{x : q_\mu(x) \leqslant t\}$$

对每个 $t > 0$ 和 w_μ，$(t) = \mu(W_\mu(t))$ 都是一个博雷尔集。可以定义 $T(\ \nu = T_{\#}\mu)$。若 q_ν 是一个可逆仿射变换，且 x，则对每个 $= q_\mu$，$T^{-1}x(\ x \in \mathbb{R}^n)\ w_\mu(t)$。因此，对每个 $= w_\nu$，$t(\ t > 0)\ ()$。

我们还将使用以下界

$$w_\mu(t) \geqslant t, \quad 0 < t < 1, \tag{2.3}$$

对于每个对数凹概率测度。为证明（2.3），选取一个测度恰好等于 t 的半空间。那么，对于该半空间中的每个点 x，都有 $q_\mu(x) \leqslant t$。这样的半空间总是存在，因为每个边缘分布的尾分布函数都是连续的，且取值范围为 0 到 1。

给定一个凸函数 $g\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$，$g$ 的勒让德–芬切尔变换 g^* 定义为

$$g^*(x) := \sup_\theta \{\langle \theta, x\rangle - g(\theta)\}$$

它也是一个凸函数。现在设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的概率测度。其对数拉普拉斯变换定义为

$$\Lambda(\theta) = \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \theta, x\rangle}\, d\mu(x)$$

在其有效定义域 $\Omega = \{\theta : \Lambda(\theta) < \infty\}$ 上。克拉梅尔变换是 Λ 的勒让德–芬切尔变换，定义为

$$\Lambda^*(x) = \sup_\theta \{\langle \theta, x\rangle - \Lambda(\theta)\}.$$

Λ 和 Λ^* 都是凸的下半连续函数。关于勒让德对偶和指数族的标准参考文献为 [34, 12]。对于每个 $\theta \in \Omega$，我们定义指数倾斜

$$d\mu_\theta(z) = e^{\langle \theta, z\rangle - \Lambda(\theta)}\, d\mu(z). \tag{2.4}$$

在下一个命题中，我们汇总 Λ 和 Λ^*的一些有用性质。

命题 2.3。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，且 $K = \mathrm{supp}(\mu)$。则：

(i) 集合 Ω 是开且凸的，并且 Λ 在 Ω上是 C^∞ 且严格凸的，其海森矩阵正定。

(ii) 函数 $\Lambda^* : \mathrm{int}(K) \to \mathbb{R}$ 是 C^∞。(iii) 映射 ∇

$$\Lambda : \Omega \to \mathrm{int}(K) \text{ 是从 } \Omega \text{ 到 } \mathrm{int}(K) \text{ 的光滑微分同胚，并且 } (\nabla\Lambda)^{-1} = \nabla\Lambda^*。$$

(iv) *For every* $x \in \mathrm{int}(K)$ *we have* $\Lambda^*(x) = \langle x, \theta\rangle - \Lambda(\theta)$ *if and only if* $x = \nabla\Lambda(\theta)$.

(v) 对于 Ω中的每个 θ ：

$$\mathbb{E}_{\mu_\theta}(X) = \nabla\Lambda(\theta), \quad \mathrm{Cov}_{\mu_\theta}(X) = \nabla^2\Lambda(\theta) =: \Sigma(\theta).$$

证明。由 H¨older 不等式可知，有效定义域 Ω 是凸集且包含 0。它也是开集：对任意$\theta_0 \in\Omega$，倾斜分布 μ_{θ_0} 仍是对数凹概率测度，因此其密度有界于某个 $ae^{-b|z|}$，其中 $a, b > 0$。由此可知，只要 $|h| < b$，就有 $\mathbb{E}_{\mu_{\theta_0}} e^{\langle h, X\rangle} < \infty$，进而 $\Lambda(\theta_0 + h) < \infty$。因此，我们可以在 Ω 上对积分号下求导，这就证明了光滑性以及 (v) 中的恒等式。

协方差矩阵是正定的，因为 μ_θ 是满维的，这意味着它不支撑在任何超平面上。因此 Λ 是严格凸的。

我们直接证明满射性。固定 $x \in \mathrm{int}(K)$，并考虑函数 $\phi_x(\theta) = \Lambda(\theta) - \langle \theta, x\rangle$ 在整个 $\mathbb{R}^n$ 上定义，并在 Ω 外取值 $+\infty$。它是适当的且下半连续。选取 $r > 0$ 使得$B(x, 2r) \subseteq \mathrm{int}(K)$。如果 f 是 μ 的对数凹密度，那么 f 在 $\mathrm{int}(K)$ 上严格为正且连续。

特别地，存在 $m > 0$ 使得 $f \geqslant m$ 在 $B(x,\ 2r)$ 上成立。对于每个 $\theta \neq 0$，我们令 $e = \theta/|\theta|$，并在 $B(x + re,\ r/2)$ 上积分，得到

$$\phi_x(\theta) = \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \theta, z-x\rangle} f(z)\, dz \geqslant \frac{r}{2}|\theta| + \log\big(m \operatorname{vol}_n(\tfrac{r}{2}B_2^n)\big). \tag{2.5}$$

这表明 ϕ_x 在 $\mathbb{R}^n$ 上是强制的，并且由于它是下半连续的，ϕ_x 能取到其最小值。由于$\phi_x(0) = 0$，每个极小点的函数值都有限，因此属于开集 Ω。严格凸性意味着该极小点 θ_x 是唯一的；在此点求导可得 $\nabla\Lambda(\theta_x) = x$。

反过来，对于每个 $\theta \in \Omega$，$\nabla\Lambda(\theta)$都属于 int(K)，因为它等于 μ_θ的重心，而 μ_θ是一个支撑集位于 K上的对数凹概率测度。由反函数定理和正定海森矩阵可知，$\nabla\Lambda$ 是到 int(K)上的光滑微分同胚。根据 Fenchel 恒等式，其逆函数为 $\nabla\Lambda^*$；这也证明了 (ii)。

□

相关的一般凸分析表述可见于 [12, 34]。对于 $\theta \in \Omega$ 和 $v \in \mathbb{R}^n$，我们记作

$$\|v\|_\theta^2 = v^T \Sigma(\theta) v, \quad J(\theta) = \|\theta\|_\theta. \tag{2.6}$$

注意到

$$\|v\|_\theta^2 = \operatorname{Var}_{\mu_\theta}\langle v, X\rangle.$$

接下来列出一些下文将用到的一维估计。

引理 2.4. 设 Z 是一个方差为 $\sigma^2 > 0$ 、密度为 g 的中心化一维对数凹随机变量。则存在绝对常数 c、C、$\delta > 0$，使得

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{C}{\sigma} \quad \textit{and} \quad g(s) \geqslant \frac{c}{\sigma} \quad \textit{for } 0 \leqslant s \leqslant \delta\sigma. \tag{2.7}$$

因此，

$$\mathbb{E}[e^{-Z}\mathbb{1}_{\{Z\geqslant 0\}}] \approx \frac{1}{1+\sigma}. \tag{2.8}$$

证明. 经过缩放后，不妨设 $\sigma = 1$。对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的各向同性密度 g，Lov´asz 和 Vempala [24] 的定理 5.14(a)、(d)、(e) 给出以下不等式：

$$g(t) \geqslant 2^{-9|t|} g(0) \quad (|t| \leqslant 1/9), \quad g(0) \geqslant 2^{-7}, \quad \|g\|_\infty \leqslant 2^8.$$

特别地，对于 $0 \leqslant t \leqslant 1/9$，有 $g(t) \geqslant 2^{-8}$。对于一般的方差 σ^2，通过重新缩放可得

$$g(t) \geqslant \frac{2^{-8}}{\sigma} \quad (0 \leqslant t \leqslant \sigma/9), \quad \|g\|_\infty \leqslant \frac{2^8}{\sigma}.$$

因此（2.7）成立，其中 $c = 2^{-8}$，$C = 2^8$ 以及 $\delta = 1/9$。

接下来我们证明（2.8）。对于上界，我们写作

$$\mathbb{E}[e^{-Z}\mathbb{1}_{\{Z\geqslant 0\}}] \leqslant \min\left\{1, \int_0^\infty e^{-s}\|g\|_\infty\, ds\right\} \lesssim \min\{1, \sigma^{-1}\}.$$

对于下界，我们在 $[0, \eta \min\{1, \sigma\}]$ 上积分，选择 $\eta > 0$，使得该区间包含于 $[0, \delta\sigma]$。在这个区间上，我们有 $e^{-s} \gtrsim 1$ 和 $g(s) \gtrsim \sigma^{-1}$，由此得到

$$\mathbb{E}[e^{-Z} \mathbb{1}_{\{Z \geqslant 0\}}] \gtrsim \min\{1, \sigma^{-1}\}.$$

由于 $\min\{1, \sigma^{-1}\} \approx (1+\sigma)^{-1}$，结论得证。 □

我们将使用以下形式的 Gr¨unbaum 不等式：若 Z 是一维对数凹随机变量，则

$$\mathbb{P}(Z \geqslant \mathbb{E}Z) \geqslant e^{-1}, \quad \mathbb{P}(Z \leqslant \mathbb{E}Z) \geqslant e^{-1}. \tag{2.9}$$

这是 Gr¨unbaum 质心半空间不等式 [20]的一维情形；另见 [24]。

我们还将使用以下三阶矩估计（此类三阶导数估计出现在自协调理论中；参见 [13, 22]）。

引理 2.5。设 Z 是一个对数凹的一维随机变量。那么，

$$\left|\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^3\right| \leqslant 2 \operatorname{Var}(Z)^{3/2}. \tag{2.10}$$

证明。对 Z 作平移，使得 $\mathbb{E}Z = 0$。根据 Bubeck 和 Eldan 的引理 2 [13]，我们有

$$\mathbb{E}Z^3 \leqslant 2(\mathbb{E}Z^2)^{3/2}.$$

将同一不等式应用于 $-Z$，我们得到下界。这就证明了（2.10） . □

最后，我们需要一维方差的相对熵比较。

引理 2.6。设 μ、ν 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，满足 $D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu) < \infty$，并设 $v \in \mathbb{R}^n$。则，

$$\sqrt{\operatorname{Var}_\nu\langle v, X\rangle} \leqslant C e^{D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu)} \sqrt{\operatorname{Var}_\mu\langle v, X\rangle}, \tag{2.11}$$

其中 $C > 0$ 是一个绝对常数。

证明。情形 $v = 0$ 是平凡的，因此我们可以假设 $v \neq 0$。令 $D = D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu) < \infty$，并令 $T_{v\#}\mu, T_{v\#}\nu$为在 $T_v(x) = \langle v, x\rangle$下的推前测度。由于 μ 和 ν 是满维的，两个投影的方差均严格为正。由（2.1）可得

$$D_{\mathrm{KL}}(T_{v\#}\mu\|T_{v\#}\nu) \leqslant D.$$

投影 $T_{v\#}\mu$，$T_{v\#}\nu$具有一维对数凹密度 p_v，q_v。我们将它们的标准差记为 σ_{p_v}，σ_{q_v}。利用维数 1 中的定理 2.2可得

$$h(T_{v\#}\mu) \leqslant \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma_{p_v}^2).$$

将引理 2.4应用于 q_v 的中心平移，我们可推得

$$\|q_v\|_\infty \leqslant C_1 \sigma_{q_v}^{-1}.$$

由于 $\log q \leqslant \log \|q\|_\infty$，我们得到

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{KL}}(T_{v\#}\mu \| T_{v\#}\nu) &= -h(T_{v\#}\mu) - \int p_v \log q_v \geqslant -\frac{1}{2}\log(2\pi e \sigma_{p_v}^2) - \log \|q_v\|_\infty \\ &\geqslant \log \frac{\sigma_{q_v}}{\sigma_{p_v}} - C_1. \end{aligned}$$

因此， $\sigma_{q_v} \leqslant e^{C_1} e^D \sigma_{p_v}$。这证明了（2.11）。 □

3 半空间深度

我们沿用 第2节的记号。特别地， $x(\theta)$ 和 $\Sigma(\theta)$ 分别是 μ的均值和协方差 $_\theta$.

3.1 半空间概率

固定 $u \in S^{n-1}$, $x \in \mathrm{int}(K)$，并设 $a = \langle u, x\rangle$。令

$$H = H^+(u,a) = \{z : \langle u, z\rangle \geqslant a\}.$$

定义一维边缘分布 $Y = \langle u, X\rangle$ 的对数拉普拉斯变换为

$$\psi(s) = \Lambda(su).$$

由于 x 位于满维支撑集 K的内部，因此存在 $\delta > 0$ 使得 $x + su \in K$ 对所有$|s| < \delta$均成立。由此可知， Y 的支撑区间包含 $(a-\delta, a+\delta)$，因此 a属于其内部。应用命题 2.3的一维形式可知，存在唯一的 $\tau \in \mathrm{dom}(\psi)$ 使得

$$\psi'(\tau) = a. \tag{3.1}$$

现在假设 $\mu(H) < e^{-1}$。由 (2.9)，我们推得 $a > \mathbb{E}Y$。由于 ψ 是严格凸的，因此有ψ' 严格递增。因此，由于 $\psi'(0) = \mathbb{E}Y$，由 (τ 3.1) 定义的参数为正。令

$$\zeta = \tau u, \quad I_\zeta = \tau a - \Lambda(\zeta), \quad J(\zeta)^2 = \zeta^T \Sigma(\zeta)\zeta.$$

注意， $\mathbb{E}_{\mu_\zeta} Y = \psi'(\tau) = a$，因此 $S = \tau(Y - a)$ 是中心化的。它也是对数凹的，其方差等于

$$\mathrm{Var}_{\mu_\zeta}(S) = \tau^2 \psi''(\tau) = J(\zeta)^2.$$

由于 $d\mu(x) = e^{-\langle \zeta, x\rangle + \Lambda(\zeta)} d\mu_\zeta(x)$，我们得到

$$\mu(H) = e^{-I_\zeta} \mathbb{E}_{\mu_\zeta}[e^{-S} \mathbb{1}_{\{S \geqslant 0\}}]. \tag{3.2}$$

应用引理 2.4可得

$$\mu(H) \approx \frac{e^{-I_\zeta}}{1+J(\zeta)}. \tag{3.3}$$

下一个引理用于比较指数倾斜。其作用是将相对熵代价转化为线段端点处协方差范数的一个上界。关键观察是，二阶导数的倒数平方根是 1-Lipschitz 的。

引理 3.1. 设 $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 为 C^3，其中 $g(0)=g'(0)=0$ 且 $g''>0$。假设

$$|g'''(s)| \leqslant 2g''(s)^{3/2} \quad (0\leqslant s\leqslant 1). \tag{3.4}$$

若 $D=g(1)$ 且 $\gamma=\sqrt{g''(1)}$，则

$$D \geqslant \log(1+\gamma) - \frac{\gamma}{1+\gamma}, \tag{3.5}$$

特别是

$$\gamma \leqslant e^{D+1}. \tag{3.6}$$

证明。令 $a(s)=\sqrt{g''(s)}$。对 a^{-1} 求导并使用（3.4），得到

$$\left|\frac{d}{ds}\frac{1}{a(s)}\right| = \frac{|g'''(s)|}{2g''(s)^{3/2}} \leqslant 1.$$

由于 $\gamma=a(1)$，将该不等式从 s 积分到 1，得到

$$\frac{1}{a(s)} \leqslant \frac{1}{\gamma} + 1 - s.$$

因此，当 $g''(s)=a(s)^2$ 时，我们有

$$g''(s) \geqslant \frac{\gamma^2}{(1+\gamma(1-s))^2}.$$

利用 $g(0)=g'(0)=0$ 并进行分部积分，我们得到

$$D=g(1)=\int_0^1 (1-s)g''(s)\,ds \geqslant \int_0^1 \frac{(1-s)\gamma^2}{(1+\gamma(1-s))^2}\,ds = \log(1+\gamma)-\frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

由于 $\gamma/(1+\gamma)\leqslant 1$，由此可得（3.6）。 □

3.2 方向比较

在本子小节中，我们证明定理 1.3。上界使用一个显式的半空间。对于下界，我们将任意半空间倾斜与均值为 x 的倾斜进行比较。前者的速率优势恰好是相对熵 D。下面的论证表明，其方差因子的代价至多为 e^D。这两个因子相互抵消。

定理 1.3的证明。我们首先考虑 $\theta=0$的情形。于是 $x=\mathbb{E}X$。根据格¨鲍姆不等式，我们

有 $q_\mu(x) \geqslant e^{-1}$。另一方面，经过 x 的两个相反半空间中，至少有一个的测度不超过 $1/2$。由于 $F(0) = J(0) = 0$，式（1.7）得证。

从现在起，我们假设 $\theta \neq 0$。根据（2.2），只需考虑经过 x的半空间。

上界。考虑半空间

$$H_\theta = \{z : \langle \theta, z\rangle \geqslant \langle \theta, x\rangle\}.$$

随机变量 $S_\theta = \langle \theta,\ X - x\rangle$ 是中心化的，且相对于 μ_θ 的方差为 $J(\theta)^2$。由此可得

$$\mu(H_\theta) = e^{-F(\theta)}\mathbb{E}_{\mu_\theta}[e^{-S_\theta}\mathbb{1}_{\{S_\theta \geqslant 0\}}].$$

因此，利用引理2.4 可得

$$q_\mu(x) \leqslant \mu(H_\theta) \lesssim \frac{e^{-F(\theta)}}{1 + J(\theta)}.$$

下界。令 $H = H^+(u, \langle u, x\rangle)$为任意一个经过 x的半空间。如果 $\mu(H) \geqslant e^{-1}$，那么只要将隐式绝对常数取得足够小，下界便成立，因为 $F \geqslant 0$ 且 $(1 + J(\theta))^{-1} \leqslant 1$。因此，我们可以假设 $\mu(H) < e^{-1}$。我们按照（$\zeta = \tau u$ 3.1）构造其鞍点倾斜。根据（3.3），

$$\mu(H) \approx \frac{e^{-I_\zeta}}{1 + J(\zeta)}. \tag{3.7}$$

μ_θ 和 μ_ζ 相对于 μ 都具有正密度，因此二者相互绝对连续。由于

$$\log \frac{d\mu_\theta}{d\mu_\zeta}(z) = \langle z, \theta - \zeta\rangle - \Lambda(\theta) + \Lambda(\zeta)$$

且 μ_θ 的均值为 x，直接积分可得

$$D := D_{\mathrm{KL}}(\mu_\theta \| \mu_\zeta) = \langle x, \theta - \zeta\rangle - \Lambda(\theta) + \Lambda(\zeta) = F(\theta) - I_\zeta. \tag{3.8}$$

接下来，我们控制 $J(\zeta) = \|\zeta\|_\zeta$。应用引理 2.6 沿方向 θ 可得

$$\|\theta\|_\zeta \leqslant Ce^D\|\theta\|_\theta = Ce^D J(\theta). \tag{3.9}$$

设 $h = \zeta - \theta$ 并注意到 $\theta + sh \in$ 对每个 $s \in [0, 1]$，都有 Ω。若 $h = 0$，则下文的（3.10）显然成立。因此，我们假设 $h \neq 0$ 并定义

$$g(s) = \Lambda(\theta + sh) - \Lambda(\theta) - s\langle h, x\rangle, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

于是 $g(0) = g'(0) = 0$，$g(1) = D$，且

$$g''(s) = h^T\Sigma(\theta + sh)h.$$

此外，$g'''(s)$ 是 $\langle h$ 在 $X\rangle$ 倾斜下的三阶中心矩，$\mu_{\theta+sh}$。倾斜分布仍然是对数凹的，因此引理 2.5给出

$$|g'''(s)| \leqslant 2g''(s)^{3/2}.$$

应用引理 3.1，我们得到

$$\|h\|_\zeta = \sqrt{g''(1)} \leqslant e^{D+1}. \tag{3.10}$$

结合（3.9）和（3.10，可得

$$1 + J(\zeta) = 1 + \|\zeta\|_\zeta \leqslant 1 + \|\theta\|_\zeta + \|h\|_\zeta \leqslant Ce^D(1 + J(\theta)), \tag{3.11}$$

因为 $D \geqslant 0$。最后，由（3.7）、（3.8）和（3.11可得

$$\mu(H) \gtrsim \frac{e^{-F(\theta)+D}}{e^D(1 + J(\theta))} = \frac{e^{-F(\theta)}}{1 + J(\theta)}.$$

该界对所有经过 H 的半空间 x均一致成立。对 u 取下确界，即完成定理的证明。

□

注 3.2. 下面的例子说明了修正因子的必要性。设 μ 是密度为 $\frac{1}{2}e^{-|y|}$的一维拉普拉斯概率测度。对于每个 $r \geqslant 0$,

$$q_\mu(r) = \frac{1}{2}e^{-r}, \quad \Lambda(\theta) = -\log(1 - \theta^2).$$

非负鞍点 θ_r 满足方程

$$r = \Lambda'(\theta_r) = \frac{2\theta_r}{1 - \theta_r^2},$$

so

$$\theta_r = \frac{r}{1 + \sqrt{1 + r^2}}, \quad r \geqslant 0.$$

注意

$$F(\theta_r) = r - \log r + O(1) \quad \text{and} \quad J(\theta_r) = r + O(1)$$

如 $r \to \infty$。因此

$$\frac{e^{-F(\theta_r)}}{1 + J(\theta_r)} \approx e^{-r} \approx q_\mu(r).$$

这里 $q_\mu(r)e^{F(\theta_r)} \approx r^{-1}$。注意，在此示例中，用仅依赖于维数的因子代替 $1 + J$无法给出双侧逐点估计。

4 对偶坐标与径向正则性

现在，我们从逐点深度估计转向比较湿部测度。主要任务是控制测度沿倾斜域 Ω 中一条射线的变化方式。

4.1 对偶坐标

我们的目标是先用 μ 倾斜坐标表示，再用极坐标表示，最后用速率坐标 F表示。我们首先验证，沿着每条射线， F 都取遍 (0， ∞) 中的所有值。下一个引理描述了

位于 int(K) 的紧子集之外。

引理 4.1。 当 $|x| \to \infty$ 时， $\Lambda^*(x) \to \infty$ ，并且对于每个 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(K)$，当 x 时， $\Lambda^*(x) = \infty$ 。特别地，对于每个 $u \in S^{n-1}$,

$$\lim_{r \to \ell_\Omega(u)^-} \Lambda^*(\nabla \Lambda(ru)) = \infty.$$

证明。 对于第一个断言，由于 Ω 是开集且包含 0，根据 Λ 的连续性，存在 m， $M > 0$使得对每个 $\theta \in mB_2^n$， $\Lambda(\theta) \leqslant M$ 。令 $x \neq 0$ ，并设 $\theta = mx/|x|$。于是,

$$\Lambda^*(x) \geqslant \langle x, \theta \rangle - \Lambda(\theta) \geqslant m|x| - M.$$

取 $|x| \to \infty$ ，即可得到结论。

对于第二个断言，令 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(K)$。那么我们可以找到某个 $v \in S^{n-1}$，使得对每个 $z \in K$， $\langle v, z \rangle \leqslant \langle v, x \rangle$。由于 μ 绝对连续且 $v \neq 0$，我们有 $\mu(\{z : \langle v, z \rangle = \langle v, x \rangle\}) = 0$。因此，由控制收敛定理可得

$$\exp(\Lambda(tv) - t\langle v, x \rangle) = \mathbb{E}\left[e^{t\langle v, X - x \rangle}\right] \to 0,$$

当 $t \to \infty$ 时。因此,

$$\langle x, tv \rangle - \Lambda(tv) \to +\infty,$$

如 $t \to \infty$，这意味着 $\Lambda^*(x) = +\infty$。

为证明最后一个断言，注意对每个 $M > 0$ ，水平集

$$B_M(\mu) = \{x : \Lambda^*(x) \leqslant M\}$$

是 int(K) 的紧子集，因为根据下半连续性，它是闭集；又根据证明的第一部分，它是有界的。由第二部分可知，它包含于 int(K)。

最后一个结论源于这样一个事实： ru 最终会逃离 dom(Λ) 的每个紧子集，因为$r \to \ell_{\operatorname{dom}(\Lambda)}(u)^-$，再结合命题 2.3 (iii)。 □

现在提醒一下，对于某个 $\theta \in \Omega$，倾斜密度为

$$f_\theta(x) = e^{\langle \theta, x \rangle - \Lambda(\theta)} f(x).$$

在 μ_θ 的重心 $x(\theta)$ 处，我们有

$$f_\theta(x(\theta)) = e^{F(\theta)} f(x(\theta)). \tag{4.1}$$

定义

$$b(\theta) = f_\theta(x(\theta)) \sqrt{\det \Sigma(\theta)}. \tag{4.2}$$

命题 4.2. 对于每个 $\theta \in \Omega$,

$$d\mu(x(\theta)) = e^{-F(\theta)} b(\theta) \sqrt{\det \Sigma(\theta)}\, d\theta. \tag{4.3}$$

对于 $\theta = ru$、 $r > 0$、 $u \in S^{n-1}$，令

$$a(r,u) = u^T \Sigma(ru) u \quad and \quad J(r,u) = r\sqrt{a(r,u)}. \tag{4.4}$$

Then

$$\frac{d}{dr} F(ru) = r a(r,u). \tag{4.5}$$

对每个 $n \geqslant 1$，定义

$$\kappa_n(r,u) = \frac{\sqrt{\det \Sigma(ru)}\, r^{n-2}}{a(r,u)}, \tag{4.6}$$

当 $n = 1$ 时，它简化为 $\kappa_1(r,u) = 1/J(r,u)$。对于每个非负博雷尔可测函数 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, d\mu(x) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \Phi(x(r(F,u)u)) p_u(F)\, dF\, d\sigma(u), \tag{4.7}$$

其中 $r = r(F,u)$ 是 $r \mapsto F(ru)$ 的逆函数，并且

$$p_u(F) = b(r(F,u)u)\rho_u(F), \quad \rho_u(F) = e^{-F}\kappa_n(r(F,u),u). \tag{4.8}$$

特别地，我们有

$$c_1^n \rho_u(F) \leqslant p_u(F) \leqslant c_2^n \rho_u(F), \tag{4.9}$$

其中 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$ 是绝对常数。

证明。由于 $x(\theta) = \nabla\Lambda(\theta)$，其导数为 $\Sigma(\theta)$，且其雅可比行列式为正。这表明 th at

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega \Phi(x(\theta)) f(x(\theta)) \det \Sigma(\theta)\, d\theta.$$

由 (4.1) 以及 (b 在 (4.2) 中的定义可知

$$f(x(\theta)) \det \Sigma(\theta) = e^{-F(\theta)} \left[f_\theta(x(\theta)) \sqrt{\det \Sigma(\theta)} \right] \sqrt{\det \Sigma(\theta)}.$$

这就证明了 (4.3)。

对于任意固定方向 u，我们有

$$F(ru) = r\langle u, \nabla\Lambda(ru)\rangle - \Lambda(ru), \quad 0 < r < \ell_\Omega(u),$$

对其求导可得

$$\frac{dF(ru)}{dr} = r\, a(r,u) > 0.$$

由于 $a(r,\ u) > 0$，函数 $r \mapsto F(ru)$ 严格递增。根据引理 4.1，它将 $(0,\ \ell_\Omega(u))$ 映射到 $(0,\ \infty)$。因此，对每个 $r(F,\ u$，逆函数 $F > 0$ 均存在，且其导数为 $dr/dF = [ra(r,\ u)]^{-1}$。

极坐标给出 $d\theta = r^{n-1}dr\,d\sigma(u)$，而

$$dr\,d\sigma(u) = \frac{dF\,d\sigma(u)}{ra(r,u)}.$$

代入（4.3），得到（4.7）。在一维情况下，极坐标公式是对 $u \in \{-1,1\}$求和。因此，$\det \Sigma(ru) = a(r,u)$ 且 $r^{n-2} = r^{-1}$，由此可得 $\kappa_1(r,u) = 1/J(r,u)$。

最后，由于 $\mathrm{bar}(\mu_\theta) = x(\theta)$，Fradelizi 不等式（见 [11, 定理 2.2.2]）给出

$$f_\theta(x_\theta) \leqslant \|f_\theta\|_\infty \leqslant e^n f_\theta(x_\theta).$$

因此，由于 $\mathrm{Cov}(\mu_\theta) = \Sigma(\theta)$，我们可以写成

$$e^{-n} L_{\mu_\theta}^n \leqslant b(\theta) \leqslant L_{\mu_\theta}^n.$$

应用定理 2.1，得到（4.9）。 □

我们定义

$$\widetilde{q}(x(ru)) = \frac{e^{-F(ru)}}{1+J(r,u)}, \quad u \in S^{n-1},\ 0 < r < \ell_\Omega(u). \tag{4.10}$$

在重心处，我们定义 $\widetilde{q}(x(0)) = 1$。由对偶微分同胚，这在 $\mathrm{int}(K)$ 上定义了 $\widetilde{q}$。我们将 $\widetilde{q}$ 延拓到 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(K)$ 上，令 $\widetilde{q}(x) = 0$。那里的实际半空间深度也为零：对于 K 外部的点，这可由分离论证得到；而在边界点处，某个支撑半空间的 μ-测度为零，因为 μ 是绝对连续的。因此，定理 1.3 表明 $c_0\widetilde{q} \leqslant q_\mu \leqslant C_0\widetilde{q}$，且绝对常数相同。对于每个 $t > 0$，我们记

$$\widetilde{w}_\mu(t) = \mu(\{x : \widetilde{q}(x) \leqslant t\}). \tag{4.11}$$

我们还设

$$G(r,u) = -\log \widetilde{q}(x(ru)) = F(ru) + \log(1 + J(r,u)). \tag{4.12}$$

4.2 径向导数

我们将使用两个事实： G 沿每条射线递增，且若 $G \geqslant 1$，则 dG/dF 有上下界 .

我们固定 u，并在没有歧义时省略它。我们用 $a_r = da/dr$ 表示关于原始半径的导数，而 $J' = dJ/dF$ 和 $G' = dG/dF$ 表示关于速率坐标的导数。由（4.5）可知

$$\frac{d}{dF} = \frac{1}{ra}\frac{d}{dr}.$$

对 $a(r) = u^T\Sigma(ru)u$求导，得到

$$a_r(r) = D^3\Lambda(ru)[u,u,u].$$

这是关于 μ_{ru} 的 $\langle u, X\rangle$ 三阶中心矩，而 $a(r)$ 是其方差。于是，由

引理2.5 可得

$$|a_r(r)| \leqslant 2a(r)^{3/2}. \tag{4.13}$$

记

$$\varepsilon(r,u) = \frac{a_r(r,u)}{2a(r,u)^{3/2}}, \quad |\varepsilon| \leqslant 1. \tag{4.14}$$

由于 $J = r\sqrt{a}$ 和 $dF/dr = ra$，可知

$$\frac{d\log J}{dF} = \frac{1}{J^2} + \frac{\varepsilon}{J}, \tag{4.15}$$

事实上，$-\frac{d}{dr}$ 对数 $J = r^{-1} + a_r/(2a)$。两边除以 ra，得到（4.15），因为 $r^2a = J^2$ 且 $a_r = 2\varepsilon a^{3/2}$。由此可得 $J' = J^{-1} + \varepsilon$，因此

$$G' = 1 + \frac{1/J + \varepsilon}{1 + J}. \tag{4.16}$$

由于 $\varepsilon \geqslant -1$，我们有

$$G' \geqslant \frac{J^2 + 1}{J(J+1)} \geqslant 2(\sqrt{2} - 1) =: c_0 > 0. \tag{4.17}$$

特别地， G 沿每条对偶射线严格递增。

此外，当 $r \to 0$时， $G \to 0$；而在另一个端点处， $G \geqslant F \to \infty$。因此， G 将每条射线映射到 $(0, \infty)$，故其逆函数在每个正水平值处都有定义。

若 $J \geqslant 1/2$，则当 $\varepsilon \leqslant 1$ 时，我们得到

$$G' \leqslant 1 + \frac{1/J + 1}{1 + J} = 1 + \frac{1}{J} \leqslant 3. \tag{4.18}$$

我们证明 $G \geqslant 1$ 蕴含 $J \geqslant 1/2$。由于

$$\frac{dJ}{d\log r} = J(1 + \varepsilon J),$$

只要 $J < 1$，J 就严格递增。这表明，随着 r 增大，水平 $1/2$ 只能被向上穿越：若在某个 $r > 0$ 处， $J(r) \leqslant 1/2$，则对所有 $0 < s \leqslant r$，都有 $J(s) \leqslant 1/2$。此外，

$$\frac{dF}{d\log r} = J^2.$$

因此，当 $J \leqslant 1/2$，

$$\frac{dF}{dJ} = \frac{J}{1 + \varepsilon J} \leqslant \frac{J}{1 - J}. \tag{4.19}$$

由于 $r \to 0$， F 和 J 都趋于零。对（4.19）积分可得

$$F \leqslant -J - \log(1-J) \quad (J \leqslant 1/2). \tag{4.20}$$

因此，

$$G = F + \log(1+J) \leqslant -J - \log(1-J) + \log(1+J).$$

对于 $J \in [0, 1/2]$，右侧是一个递增函数，并且在 $J = 1/2$ 处变为 $-1/2 + \log\ 3 < 1$。因此

$$G \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad J \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4.21}$$

结合（4.17）、（4.18）和（4.21），在整个尾部 $G \geqslant 1$ 上，我们有

$$c_0 \leqslant G' \leqslant 3.$$

我们将本子小节的主要结果总结为以下引理。

引理 4.3. 固定 $u \in S^{n-1}$。我们有， G 作为 F 的函数严格递增，并将 $(0, \infty)$ 映射到$(0, \infty)$。此外，在 $G \geqslant 1$

$$c_0 \leqslant G' \leqslant 3, \quad J \geqslant \frac{1}{2},$$

其中 $c_0 > 0$ 是一个绝对常数。

5 近线性倍增

我们通过比较同一条对偶射线上的两个指数倾斜来证明定理 1.1 。为此，我们首先需要适当地控制它们的协方差矩阵行列式之比。

5.1 通过相对熵控制协方差行列式

Lem引理 5.1。 若 μ, ν 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，且满足 $D = D(\mu\|\nu) < \infty$，则 n

$$h(\mu) - h(\nu) \leqslant 2n + n \log(1 + D/n). \tag{5.1}$$

因此，存在一个绝对常数 $C > 0$ ，使得

$$\sqrt{\frac{\det \mathrm{Cov}(\mu)}{\det \mathrm{Cov}(\nu)}} \leqslant C^n (1 + D/n)^n. \tag{5.2}$$

证明。 如果 $D = 0$，则两个概率测度相等，结论显然成立。因此我们假设$D > 0$。我们写作 $f_\nu = Me^{-V}$，其中 $M = \|f_\nu\|_\infty$ 且 $V \geqslant 0$ 是凸的。我们采用密度的上半连续对数凹代表，使其在某个 x_0 处取得最大值，且 $V(x_0) = 0$。对于$0 < s < 1$，由凸性可得 $V(x_0 + s(x - x_0)) \leqslant sV(x)$。作变量替换后，我们得到

$$Z_s := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-sV(x)} dx \leqslant s^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-V(x)} dx = s^{-n}/M. \tag{5.3}$$

如果 ν_s 是密度为 $Z_s^{-1}e^{-sV}$ 的对数凹概率测度，那么

$$0 \leqslant D_{\mathrm{KL}}(\mu\|\nu_s) = -h(\mu) + s\mathbb{E}_\mu V + \log Z_s.$$

这里所有量都是有限的，因为 $h(\mu) \in \mathbb{R}$ 根据定理 2.2，而 D 的有限性意味着$\mathbb{E}_\mu V < +\infty$。因此，

$$h(\mu) \leqslant s\mathbb{E}_\mu V + \log Z_s.$$

令 $H = h(\mu) + \log M$。由于 $D = \mathbb{E}_\mu V - H$，利用（5.3）可得

$$(1-s)H \leqslant sD - n\log s.$$

选择 $s = (1 + D/n)^{-1}$ 并令 $x = D/n$。于是

$$H \leqslant n + n(1+x^{-1})\log(1+x) \leqslant 2n + n\log(1+x),$$

利用 $\log(1+x) \leqslant x$。由于 $f_\nu \leqslant M$，我们有 $h(\nu) + \log M \geqslant 0$，这就证明了（5.1）。

应用 定理 2.2 的下界到 $h(\mu)$，并将上界应用于 $h(\nu)$，得到（5.2 ）. □

在本子小节的余下部分，我们固定 $u \in S^{n-1}$，并在对偶射线 $\theta = ru$、 $r > 0$ 上进行讨论。令 $d = n - 1$。

引理 5.2。 如果 $0 < r_1 < r_2$，我们可以写成

$$\det \Sigma(r_i u) = a(r_i, u)\det S_i, \quad i = 1, 2, \tag{5.4}$$

其中 S_1 和 S_2 是满足以下条件的 $d \times d$ 协方差矩阵

$$\sqrt{\frac{\det S_1}{\det S_2}} \leqslant C^d \left(1 + \frac{D_{\mathrm{KL}}(\mu_{r_1 u}\|\mu_{r_2 u})}{d}\right)^d.$$

证明。 对于 $i = 1$, 2, 令 X_i 服从分布 $\mu_{r_i u}$，并令 $a_i = a(r_i,\ u)$。将 u 扩展为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\{u, u_1, \ldots, u_d\}$ 后，存在一个正交变换 U，使得

$$\widetilde{X}_i = UX_i = (Z_i, Y_i), \quad Z_i = \langle u, X_i\rangle.$$

于是， X_i 的协方差矩阵为

$$H_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i^T \\ c_i & B_i \end{pmatrix}.$$

如果我们写成

$$S_i = B_i - \frac{c_i c_i^T}{a_i}$$

对于 $Y_i - (c_i/a_i)\ Z_i$的协方差矩阵，舒尔分块补公式给出 $\det H_i = a_i \det S_i$。由于行列式在正交变换下保持不变，这正是（5.4）。我们使用满射线性映射

$$T(z, y) = y - \frac{c_2}{a_2}z, \quad z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^d$$

~并令 ν_i 为 TX_i的分布。它们的协方差矩阵满足

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\nu_2) &= S_2,\\ \operatorname{Cov}(\nu_1) &= S_1 + a_1\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{c_2}{a_2}\right)\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{c_2}{a_2}\right)^T \succeq S_1.\end{aligned}$$

测度 ν_i 是 $\mu_{r_i u}$ 在满射线性映射 $T\circ U$ 下的推前测度，因此是定义在 $\mathbb{R}^d$上的对数凹概率测度。利用（2.1），可得

$$D(\nu_1\|\nu_2) \leqslant D(\mu_{r_1 u}\|\mu_{r_2 u}).$$

我们应用引理 5.1在维数为 d的情形。由于正定矩阵序蕴含行列式序，

$$\sqrt{\frac{\det S_1}{\det S_2}} \leqslant \sqrt{\frac{\det \operatorname{Cov}(\nu_1)}{\det \operatorname{Cov}(\nu_2)}} \leqslant C^d\left(1+\frac{D(\mu_{r_1 u}\|\mu_{r_2 u})}{d}\right)^d. \tag{5.5}$$

证明至此完成。 □

按照引理 5.2 中的记号，我们有如下结论：

引理 5.3。若 $0<r_1<r_2$ 则

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^d\sqrt{\frac{\det S_1}{\det S_2}} \leqslant C^d\left(1+\frac{\Delta}{d}\right)^d,$$

其中 $\Delta = F(r_2u) - F(r_1u)$，且 $C>0$ 是一个绝对常数。

证明。令

$$m(r) = \langle \nabla\Lambda(ru), u\rangle = \mathbb{E}_{\mu_{ru}}\langle u, X\rangle, \quad r>0$$

则 $m'(r) = a(r,u)$。还需指出，$\frac{dF_{(ru)\,dr}}{} = ra(r,u)$。直接计算相对熵并进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}D(\mu_{r_1 u}\|\mu_{r_2 u}) &= \Lambda(r_2u) - \Lambda(r_1u) - (r_2-r_1)m(r_1)\\ &= \int_{r_1}^{r_2}(r_2-s)a(s,u)\,ds\\ &\leqslant \left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)\int_{r_1}^{r_2} sa(s,u)\,ds = \left(\gamma^{-1}-1\right)\Delta,\end{aligned}$$

其中 $\gamma = r_1/r_2$。结合引理 5.2 可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^d\sqrt{\frac{\det S_1}{\det S_2}} &\leqslant C^d\left[\gamma+(1-\gamma)\frac{\Delta}{d}\right]^d\\ &\leqslant C^d(1+\Delta/d)^d,\end{aligned}$$

因为 $0<\gamma<1$。 □

5.2 射线密度与尾部的比较

在本子小节中，我们证明定理 1.1。我们首先证明修正湿部的相应结果$\sim^{w_\mu}$。

命题 5.4。如果 $\lambda > 1$ 且 $0 < t \leqslant e^{-1}/\lambda$ 则

$$\widetilde{w}_\mu(\lambda t) \leqslant C^n \lambda \left(1 + \frac{\log \lambda}{n-1}\right)^{n-1} \widetilde{w}_\mu(t),$$

其中， $C > 0$ 是一个绝对常数。

证明。 回顾命题 4.2 并固定 $u \in S^{n-1}$。根据引理 4.3 ， 我们可以将 $F_u(g)$ 定义为 $G(F, u)$ 的逆函数。我们作变量替换 $G(F, u) = g$，得到

$$dF = \frac{dg}{G'(F_u(g), u)}.$$

注意，对每个 $T > 0$

$$\widetilde{w}_\mu(e^{-T}) = \int_{S^{n-1}} M_u(T)\, d\sigma(u), \quad M_u(T) = \int_T^\infty k_u(g)\, dg, \quad k_u(g) = \frac{p_u(F_u(g))}{G'(F_u(g), u)}. \tag{5.6}$$

令 $G_2 > G_1 \geqslant 1$。那么我们可以找到 $0 < r_1 < r_2 < \ell_\Omega(u)$，使得若令 $F_i = F(r_i u)$，则有$G(F_i, u) = G_i$对 $i = 1,2$ 成立。令 $h = G_2 - G_1$ 且 $\Delta = F_2 - F_1$。利用引理 5.2 在公式（4.6）、（4.8）和（4.12）中的分解，我们得到

$$e^{G_i} \rho(F_i) = r_i^{n-1} \sqrt{\det S_i} \left(1 + \frac{1}{J(r_i, u)}\right), \quad i = 1, 2.$$

由于 G_1， $G_2 \geqslant 1$，引理 4.3 给出

$$\frac{1 + 1/J(r_1, u)}{1 + 1/J(r_2, u)} \leqslant 3.$$

应用引理 5.3可推得

$$\frac{e^{G_1} \rho(F_1)}{e^{G_2} \rho(F_2)} \leqslant 3C^{n-1}(1 + \Delta/(n-1))^{n-1}.$$

由于 $h \geqslant c_0 \Delta$ 根据引理 G' 中的下界 4.3，最后一个方程得出

$$\rho(F_1) \leqslant C_1^n e^h \left(1 + \frac{h}{n-1}\right)^{n-1} \rho(F_2).$$

现在令 $g \geqslant 1$ 且 $h > 0$。考虑到（4.9）以及引理 G' 中的界 4.3，我们可以得出

$$k_u(g) \leqslant C_2^n e^h \left(1 + \frac{h}{n-1}\right)^{n-1} k_u(g + h).$$

若 $T - h \geqslant 1$，对 $g \geqslant T - h$ 积分可得

$$M_u(T - h) \leqslant C_2^n e^h \left(1 + \frac{h}{n-1}\right)^{n-1} M_u(T)$$

因此，根据公式（5.6）

$$\widetilde{w}_\mu\big(e^{-(T-h)}\big) \leqslant C_2^n e^h \left(1+\frac{h}{n-1}\right)^{n-1} \widetilde{w}_\mu\big(e^{-T}\big).$$

令 $T=-\log t$ 和 $h=\log\lambda$，即可完成证明。 □

定理 1.1. 定理 1.3给出

$$c_1\widetilde{q} \leqslant q_\mu \leqslant C_1\widetilde{q}$$

其中某些绝对常数为 $C_1 \geqslant c_1 > 0$。若 $\lambda t/c_1 > e^{-1}$，则我们使用 $w_\mu(t) \geqslant t$，得到

$$w_\mu(\lambda t) \leqslant 1 \leqslant \frac{e}{c_1}\lambda t \leqslant \frac{e}{c_1}\lambda w_\mu(t),$$

这比所需的估计更强。因此，我们可以假设 $\lambda t/c_1 \leqslant e^{-1}$。令 $K = C_1/c_1$ 并在 5.4 中于 $T = t/C_1$ 使用乘子 $L = K\lambda$:

$$\begin{aligned} w_\mu(\lambda t) &\leqslant \widetilde{w}_\mu(\lambda t/c_1) = \widetilde{w}_\mu(LT) \leqslant C^n L\left(1+\frac{\log L}{n-1}\right)^{n-1} \widetilde{w}_\mu(T) \\ &\leqslant C^n L\left(1+\frac{\log L}{n-1}\right)^{n-1} w_\mu(C_1 T) \\ &\leqslant C_2^n \lambda\left(1+\frac{\log K+\log\lambda}{n-1}\right)^{n-1} w_\mu(t). \end{aligned}$$

不等式

$$\left(1+\frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant e^x\left(1+\frac{y}{n-1}\right)^{n-1}, \quad x,y\geqslant 0$$

完成了（1.4）的证明。现在令 $\varepsilon \in (0,1)$。由于

$$\sup_{x\geqslant 0}(1+x)e^{-\varepsilon x} = \frac{e^{-(1-\varepsilon)}}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

令 $x=\log\lambda/(n-1)$，得到

$$\left(1+\frac{\log\lambda}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \varepsilon^{-(n-1)}\lambda^{\varepsilon}.$$

将其代入（1.4），证明完毕。 □

6 指数为一时的反例

在本节中，我们证明定理 λ 中的因子 1.1 不能替换为常数。令$n \geqslant 2$。我们取 $a \geqslant a_n$，其中常数 $a_n > 0$充分大。为简化记号，在本节中我们省略函数和测度对 n的依赖。常数 A_n、B_n、C_n 等等。

仅依赖于 n，且其取值可能随行而变。定义

$$\psi_a(p) = \begin{cases} \max\{|p|^2/2,\, na\|p\|_\infty - na^2/2\} & ,\ p \in [-a,a]^n \\ +\infty & ,\ \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意到 ψ_a 是凸函数，并令 $V_a = \psi_a^*$，它也是凸的。

引理 6.1. 对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$

$$\max\{a\|x\|_1 - na^2/2,\, H_a(x)\} \leqslant V_a(x) \leqslant \frac{|x|^2}{2}, \tag{6.1}$$

其中

$$H_a(x) = \begin{cases} \frac{|x|^2}{2} & ,\ |x| \leqslant a/2 \\ \frac{a}{2}|x| - \frac{a^2}{8} & ,\ |x| \geqslant a/2. \end{cases}$$

此外，我们有

$$V_a(x) = a\|x\|_1 - \frac{na^2}{2}, \quad \|x\|_1 \geqslant na. \tag{6.2}$$

证明。 如果 $x \in \mathbb{R}^n$，我们可以看到

$$V_a(x) \leqslant \sup_{p\in[-a,a]^n} \{\langle p,x\rangle - |p|^2/2\} \leqslant \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \{\langle p,x\rangle - |p|^2/2\} = \frac{|x|^2}{2}.$$

另一方面，令 $p_x \in \{-a,a\}^n$ 的 j 个坐标等于 a （若 $x_j \geqslant 0$），否则等于 $-a$。于是 $\psi_a(p_x) = na^2/2$，并且

$$V_a(x) \geqslant \langle p_x, x\rangle - \psi_a(p_x) = a\|x\|_1 - na^2/2.$$

对于另一个下界，若 $|x| \leqslant a/2$，则 $\|x\|_\infty \leqslant a/2$，因此

$$V_a(x) \geqslant \sup_{p\in[-a/2,a/2]^n} \{\langle p,x\rangle - \psi_a(p)\} = \sup_{p\in[-a/2,a/2]^n} \{\langle p,x\rangle - |p|^2/2\} = \frac{|x|^2}{2}.$$

若 $|x| \geqslant a/2$ 且 $p_x = \frac{a}{2}\frac{x}{|x|}$ 则 $\|p_x\|_\infty \leqslant a/2$，并且

$$V_a(x) \geqslant \langle p_x, x\rangle - \psi_a(p_x) = \frac{a}{2}|x| - \frac{a^2}{8}.$$

总之，若 $\|x\|_1 \geqslant na$，则

$$\begin{aligned} V_a(x) &\leqslant \sup_{p\in[-a,a]^n} \{\langle p,x\rangle - na\|p\|_\infty + na^2/2\} \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant m\leqslant a} \{m(\|x\|_1 - na) + na^2/2\} = a\|x\|_1 - na^2/2. \end{aligned}$$

将此结果与相应的下界结合，即可证明（6.2）。 □

现在令

$$Z_a = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-V_a(x)}\,dx, \quad f_a = \frac{1}{Z_a} e^{-V_a}$$

那么 f_a 是 $\mathbb{R}^n$上的对数凹密度。我们将密度为f_a的对数凹概率测度记为 μ_a。注意，由于 ψ_a 是偶函数， μ_a 是对称的。另记 $\phi(r) = (2\pi)^{-1/2} e^{-r^2/2}$ 以及 $\Phi(r) = \int_r^\infty \phi(s)\,ds$。

引理 6.2. 如果 a 足够大，那么

$$(2\pi)^{n/2} \leqslant Z_a \leqslant (2\pi)^{n/2} + C_n a^{n-2} e^{-a^2/8}, \tag{6.3}$$

其中 $C_n > 0$是某个常数。特别地，

$$Z_a \approx_n 1. \tag{6.4}$$

此外，如果 $B_a = \frac{a}{2} B_2^n$，那么

$$\mu_a(B_a^c) \leqslant \overline{\Phi}(a/4). \tag{6.5}$$

证明。 (6.1)中的上界给出不等式 $Z_a \geqslant (2\pi)^{n/2}$，而相应的下界则给出

$$Z_a \leqslant (2\pi)^{n/2} + e^{a^2/8} \int_{B_a^c} e^{-a|x|/2}\,dx.$$

使用极坐标并进行变量替换 $t = ar/2$，可得

$$\int_{B_a^c} e^{-a|x|/2}\,dx = n\omega_n \int_{a/2}^\infty r^{n-1} e^{-ar/2}\,dr = n\omega_n \left(\frac{2}{a}\right)^n \int_{a^2/4}^\infty t^{n-1} e^{-t}\,dt.$$

事实是，$\int_x^\infty t^{n-1} e^{-t}\,dt \sim x^{n-1} e^{-x}$，正如 $x \to \infty$，这意味着

$$Z_a \leqslant (2\pi)^{n/2} + C_n a^{n-2} e^{-a^2/8},$$

当 a 足够大时。最后的计算结合 Z_a 的下界可得

$$\mu_a(B_a^c) \leqslant A_n a^{n-2} e^{-a^2/8},$$

而分部积分给出

$$\frac{r}{r^2+1}\phi(r) \leqslant \overline{\Phi}(r) \leqslant \frac{\phi(r)}{r}, \quad r > 0. \tag{6.6}$$

因此，如果 a 足够大，我们有

$$\frac{\mu_a(B_a^c)}{\overline{\Phi}(a/4)} \leqslant D_n a^{n-1} e^{-3a^2/32} < 1.$$

□

引理 6.3. 令 $r_a = a/4$ 和 $s_a = 2\Phi(r_a)$。那么我们有

$$\frac{w_{\mu_a}(s_a)}{s_a} \geqslant c_n a^{n-1}.$$

证明。我们首先证明

$$\{x : |x| \geqslant r_a\} \subseteq \{x : q_{\mu_a}(x) \leqslant s_a\}. \tag{6.7}$$

事实上，如果 $|x| \geqslant r_a$ 我们设 $u = x/|x|$ 并考虑半空间 $H_x = \{z : \langle z, u\rangle \geqslant r_a\}$ 该半空间包含 x。于是，

$$q_{\mu_a}(x) \leqslant \mu_a(H_x).$$

利用（6.5）可得

$$\mu_a(H_x) \leqslant \mu_a(H_x \cap B_a) + \mu_a(B_a^c) \leqslant \mu_a(H_x \cap B_a) + \overline{\Phi}(r_a),$$

而（6.1）和（6.3）的下界给出

$$\mu_a(H_x \cap B_a) \leqslant \gamma_n(H_x) = \overline{\Phi}(r_a),$$

其中 γ_n 是 $\mathbb{R}^n$中的标准高斯测度。最后一个等式由 γ_n的旋转不变性得出。因此，

$$q_{\mu_a}(x) \leqslant s_a.$$

对（6.7）取测度可得

$$\mu_a(\{x : |x| \geqslant r_a\}) \leqslant w_{\mu_a}(s_a).$$

利用（6.1）和（6.4）中的上界，以及极坐标，可得

$$\begin{aligned}\mu_a(\{x : |x| \geqslant r_a\}) &\geqslant A_n \int_{r_a}^{r_a + \frac{1}{r_a}} r^{n-1} e^{-r^2/2}\, dr \geqslant A_n r_a^{n-2} e^{-(r_a + 1/r_a)^2/2} \\ &\geqslant B_n r_a^{n-2} e^{-r_a^2/2} = C_n a^{n-2} e^{-a^2/32},\end{aligned}$$

当 a 足够大时。（6.6）中的上界完成了证明。 □

设 ν_a 是具有如下密度的对数凹概率测度

$$g_a(x) = \left(\frac{a}{2}\right)^n e^{-a\|x\|_1}.$$

注意到 ν_a 是一个乘积测度。下面的引理直接由（6.1）和（6.2）).

引理 6.4。 存在一个常数 $C_{a,n} > 0$ 使得 $f_a \leqslant C_{a,n} g_a$ 并且

$$f_a(x) = C_{a,n} g_a(x), \quad \|x\|_1 \geqslant na.$$

特别地，

$$C_{a,n} = \left(\frac{2}{a}\right)^n \frac{e^{a^2 n/2}}{Z_a}.$$

引理 6.5。 如果 a 足够大且 $\|x\|_\infty \geqslant 2na$ ， 那么

$$q_{\mu_a}(x) = C_{a,n} q_{\nu_a}(x).$$

证明。 经过归一化后，对于任意概率测度 μ ， 我们可以写成

$$q_\mu(x) = \inf_{\|u\|_\infty = 1} \mu(\{z : \langle z, u\rangle \geqslant \langle x, u\rangle\}).$$

我们首先声称，只需将范围限制在满足 $\langle u,\ x\rangle \geqslant na$ 的半空间内。若 $\|u\|_\infty = 1$，我们将得到相对于 μ_a 和 ν_a， $H = \{z$ 的测度的一个适当下界： $\langle z,\ u\rangle \geqslant na\}$。取一个满足 $|u_j| = 1$ 的坐标 j。考虑矩形 R , 其

$$\begin{cases} -\frac{1}{2n} \leqslant z_i \leqslant \frac{1}{2n} & , i \neq j \\ na + 1 \leqslant \mathrm{sgn}(u_j) z_j \leqslant na + 2 & , i = j. \end{cases}$$

每个点 $z \in R$ 都满足

$$\|z\|_1 \geqslant \langle u, z\rangle \geqslant na + 1 - \frac{n-1}{2n} > na.$$

因此， R 位于半空间 $\{z :\ \langle u,\ z\rangle \geqslant na\}$ 且

$$\nu_a(R) = \frac{1}{2}(1 - e^{-a})(1 - e^{-a/(2n)})^{n-1} e^{-na^2 - a}.$$

根据引理 6.4，如果 a 足够大，我们便可推出

$$\nu_a(H) \geqslant \frac{1}{4} e^{-na^2 - a}, \quad \mu_a(H) \geqslant \frac{C_{a,n}}{4} e^{-na^2 - a}. \tag{6.8}$$

若 $|x_j| = \|x\|_\infty$ ， 则坐标半空间 $H_j = \{z : \mathrm{sgn}(x_j) z_j \geqslant \|x\|_\infty\}$ 经过 x ， 且具有$\nu_a(H_j) = \frac{1}{2} e^{-a\|x\|_\infty}$ 和 $\mu_a(H_j) = {}^{-C_a}{}_{2}{}^{n} e^{-a\|x\|_\infty}$。 因此， ——

$$q_{\nu_a}(x) \leqslant \frac{1}{2} e^{-2na^2}, \qquad q_{\mu_a}(x) \leqslant \frac{C_{a,n}}{2} e^{-2na^2}.$$

当 a足够大时，这些上界小于（6.8）中的下界，这就推出了所述结论。证明现由引理 6.4得出，因为每个这样的半空间都包含于 $\{z :\ \|z\|_1 \geqslant na\}$。 □

引理 6.6. 存在一个常数 $A_n > 0$ ， 使得

$$\inf_{\|x\|_\infty \leqslant 2na} q_{\mu_a}(x) \geqslant e^{-A_n a^2}, \qquad \inf_{\|x\|_\infty \leqslant 2na} q_{\nu_a}(x) \geqslant e^{-A_n a^2},$$

如果 a 足够大。

证明。 如果 H 是一个半 -空间经过 x，它包含以 x为中心的单位球的一半。如果 y 是一个

这个球上的点，那么

$$|y| \leqslant 2n^{3/2}a + 1 \leqslant 3n^{3/2}a.$$

因此，6.1）和（6.4）的上界给出

$$f_a(y) \geqslant c_n e^{-C_n a^2}.$$

不等式 $\|y\|_1 \leqslant \sqrt{n}|y|$ 给出了下界

$$g_a(y) \geqslant d_n e^{-B_n a^2}.$$

Int对该半球上的密度积分，并对 u 取下确界，即可完成证明 f. □

现在令 $D_n = 2\max\{A_n, 1\}$，其中 A_n 是引理 6.6 中的常数，并定义

$$t_a = e^{-D_n a^2}, \quad \tau_a = \frac{t_a}{C_{a,n}}. \tag{6.9}$$

引理 6.7。若 a 足够大，则

$$\frac{w_{\mu_a}(t_a)}{t_a} \leqslant \frac{w_{\nu_a}(\tau_a)}{\tau_a}.$$

证明。若 a 足够大，则引理 6.6 以及 D_n 的定义迫使

$$W_{\mu_a}(t_a) \subseteq \{x : \|x\|_\infty \geqslant 2na\}.$$

因此，引理 6.4 和引理 6.5 给出

$$w_{\mu_a}(t_a) = \int_{\{x: q_{\mu_a}(x) \leqslant t_a\}} f_a(x)\,dx \leqslant C_{a,n} \int_{\{x: q_{\nu_a}(x) \leqslant \tau_a\}} g_a(x)\,dx = C_{a,n} w_{\nu_a}(\tau_a).$$

除以 t_a 后即得证明。 □

现在我们将对充分小的 $t > 0$，估计 $w_{\nu_a}(t)$。

引理 6.8。存在 存在一个常数 $t_0 \in (0,1)$，使得对每个 $a > 0$ 和每个 $0 < t < t_0$，都有 t

$$w_{\nu_a}(t) \leqslant \nu_1(\{x : \Lambda^*_{\nu_1}(x) \geqslant b(t)\}),$$

其中 $b(t)$ 是一个满足以下条件的函数

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{t} \leqslant b(t) \leqslant \log\frac{1}{t}, \quad e^{-b(t)} \leqslant 2et\log\frac{1}{t} \tag{6.10}$$

对每个 $0 < t < t_0$。

证明。由仿射不变性可知 $w_{\nu_a}(t) = w_{\nu_1}(t)$ 对每个 a，$t > 0$。令 $0 < t < e^{-1}$。利用 1.8) 对 $x \in W_{\nu_1}(t)$ 以及 $\varepsilon = 1/\log(1/t)$ 得到

$$\Lambda^*_{\nu_1}(x) \geqslant b(t),$$

其中

$$b(t) = \log(1/t) - \log\log(1/t) - 1 - \log 2 + \log 2/\log(1/t).$$

对于 $0 < t < e^{-1}$，我们有 $\log(1/t) > 1$，这意味着

$$\log(1/t) - \log\log(1/t) - 1 - \log 2 < b(t) < \log(1/t).$$

将左侧不等式与指数函数复合，即可得到（6.10）的右侧不等式。对于 b（t）的下界，则由以下事实可得：b（t）$/\log(1/t) \to 1$，因为 $t \to 0^+$。 □

引理 6.9。存在常数 T_n、$B_n > 0$，使得对于每个 $t \geqslant T_n$，都有

$$\nu_1(\{x : \Lambda^*_{\nu_1}(x) \geqslant t\}) \leqslant B_n e^{-t} \frac{(\log t)^{n-1}}{t}.$$

证明。L 令 ν 为 ν_1的一维边缘分布。由于 ν_1 是乘积测度，我们有 t

$$\Lambda^*_{\nu_1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda^*_{\nu}(x_i).$$

直接计算可得

$$\Lambda^*_{\nu}(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 + \log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x^2}}\right), \quad (\Lambda^*_{\nu})'(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}},$$

对于每个 $x \in \mathbb{R}$。注意到 Λ^*_{ν} 是偶函数，并且在 $(0, \infty)$ 上存在逆函数。若 X 是服从 ν分布的随机变量，则非负随机变量 $Y = \Lambda^*_{\nu}(X)$ 的密度为

$$f_Y(y) = \frac{e^{-x}}{(\Lambda^*_{\nu})'(x)} = e^{-x}\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad x = (\Lambda^*_{\nu})^{-1}(y), \quad y > 0.$$

由于 $(\Lambda^*_{\nu})'(x) \leqslant \frac{x}{1+x^2}$从 0 积分到 x 得

$$\Lambda^*_{\nu}(x) \leqslant x - \log(1+x).$$

Thus

$$e^{-x}(1+x) \leqslant e^{-\Lambda^*_{\nu}(x)}. \tag{6.11}$$

利用（6.11）和不等式

$$1 + \sqrt{1+x^2} \leqslant 2(1+x)$$

我们得到

$$f_Y(y) \leqslant 2e^{-x}\frac{1+x}{x} \leqslant \frac{2e^{-\Lambda^*_{\nu}(x)}}{x} = \frac{2e^{-y}}{x}.$$

现在我们将证明

$$\Lambda^*_{\nu}(x)(1+\Lambda^*_{\nu}(x)) \leqslant 2x^2$$

对每个 $x \geqslant 0$ 都成立，这意味着

$$f_Y(y) \leqslant 2\sqrt{2}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y(y+1)}}, \quad y > 0. \tag{6.12}$$

事实上，若 $0 \leqslant x \leqslant 1$，则 $(\Lambda_\nu^*)'(x) \leqslant \frac{x}{2}$，从 0 积分到 x 可得 $\Lambda_\nu^*(x) \leqslant \frac{x^2}{4}$。所需的不等式由此得证。对于 $x \geqslant 1$，我们使用显然的不等式 $(\Lambda_\nu^*)'(x) \leqslant 1$，这意味着 $\Lambda_\nu^*(x) \leqslant x$。因此，由于$x \geqslant 1$

$$\Lambda_\nu^*(x)(\Lambda_\nu^*(x)+1) \leqslant x(x+1) \leqslant 2x^2.$$

若 $X_1, \ldots, X_n$ 是服从 ν 的独立同分布随机变量，则卷积公式表明，$S_n = \sum_{i=1}^n \Lambda_\nu^*(X_i)$ 的密度满足

$$f_{S_n}(s) \leqslant C^n e^{-s} h^{*n}(s), \quad s > 0, \tag{6.13}$$

其中 $C = 2\sqrt{2}$ 且

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y+1)}}, \quad y > 0.$$

我们将通过归纳法证明

$$h^{*n}(s) \leqslant C_n \frac{(\log s)^{n-1}}{s}, \quad s \geqslant s_n, \tag{6.14}$$

对于某个 $s_n \geqslant 1$。首先，显然当 $s > 0$ 时，有 $h(s) \leqslant 1/s$。假设对于某个 k，有

$$h^{*k}(s) \leqslant C_k \frac{(\log s)^{k-1}}{s}, \quad s \geqslant s_k,$$

其中 $s_k \geqslant 1$。令 $s \geqslant 2s_k$，并写作

$$h^{*(k+1)}(s) = \int_0^{s/2} h^{*k}(u)h(s-u)\,du + \int_{s/2}^s h^{*k}(u)h(s-u)\,du.$$

对于第一个积分，$s - u \geqslant s/2$ 蕴含 $h(s-u) \leqslant 2/s$。根据归纳假设，

$$\int_0^{s/2} h^{*k}(u)h(s-u)\,du \leqslant \frac{2}{s}\left[D_k + C_k \int_{s_k}^{s/2} \frac{(\log u)^{k-1}}{u}\,du\right] \leqslant A_k \frac{(\log s)^k}{s},$$

这里我们用到了这样一个事实：h^{*k} 在 $[0, s_k]$上可积，因为 h 在同一区间上可积且非负。对于第二个积分，由归纳法假设，再经过变量替换，可得

$$\int_{s/2}^s h^{*k}(u)h(s-u)\,du \leqslant \frac{2C_k(\log s)^{k-1}}{s} \int_0^{s/2} h(u)\,du \leqslant B_k \frac{(\log s)^k}{s},$$

因为

$$\int_0^{s/2} h(u)\,du \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du + \int_1^{s/2} \frac{1}{u}\,du \leqslant C \log s.$$

这两个估计给出了所需的上界。

由于函数

$$s \longrightarrow \frac{(\log s)^{n-1}}{s}$$

在 $s \geqslant e^{n-1}$ 上递减，对 $t \geqslant$ 取最大值$\{e^{n-1}, s_n\}$，结合不等式（6.13）和（6.14），即可完成证明。

□

引理 6.10. 存在常数 t_n、$C_n>0$，使得对于每个 $0<t<t_n$ 和每个 $a>0$

$$\frac{w_{\nu_a}(t)}{t}\leqslant C_n\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{n-1}. \tag{6.15}$$

特别地，如果 a 足够大，那么

$$\frac{w_{\mu_a}(t_a)}{t_a}\leqslant K_n(\log a)^{n-1},$$

对于某个常数 $K_n>0$。

证明。由引理 6.8 可找到 $t_n\in(0,t_0)$，使得对每个 $0<t<t_n$ 都有 $b(t)>T_n$。因此，引理6.8 和引理 6.9 推出

$$\frac{w_{\nu_a}(t)}{t}\leqslant B_n\frac{e^{-b(t)}}{tb(t)}(\log b(t))^{n-1}.$$

(6.10)中的不等式给出

$$\frac{e^{-b(t)}}{tb(t)}(\log b(t))^{n-1}\leqslant 4e\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{n-1}.$$

这就证明了 (6.15)。结合 (6.9) 以及 $C_{a,n}$ 在引理 6.4中的定义可知，若 a 足够大，则 $\tau_a<t_n$ 并且

$$\tau_a\geqslant e^{-L_n a^2}$$

对于某个常数 $L_n>0$。然后由引理 6.7 和 (6.15) 得证。 □

定理 1.2的证明。当 a 充分大时，上文构造的对称对数凹测度 μ_a 满足 $0<t_a<s_a<1$，根据引理 6.3 和（6.9），以及（6.6）。令 $\lambda_a=s_a/t_a$。则 $\lambda_a>1$ 且 $0<t_a<1/\lambda_a$。引理 6.3 和 6.10 给出

$$\frac{w_{\mu_a}(\lambda_a t_a)}{\lambda_a w_{\mu_a}(t_a)}=\frac{w_{\mu_a}(s_a)/s_a}{w_{\mu_a}(t_a)/t_a}\geqslant\frac{c_n}{K_n}\left(\frac{a}{\log a}\right)^{n-1}\longrightarrow\infty\qquad(a\to\infty).$$

对于任意 $C_n>0$，取 a 充分大即可证明该定理。 □

人工智能使用声明。作者感谢 ChatGPT（OpenAI）在本工作的准备最终阶段提供的帮助：包括检查证明、修正错误以及对表述方式提出建议。

参考文献

[1] I. B´ar´any, *Intrinsic volumes and f-vectors of random polytopes*, Math. Ann. 285（1989），671–699。

[2] I. B´ar´any, *The technique of M-regions and cap-coverings: a survey*, Rend. Circ. Mat. Palermo（2）Suppl. 65（2000），21–38。

[3] I. B´ar´any, *Random points and lattice points in convex bodies*, 《美国数学会通报》(新系列) 45 (2008), 339–365。

[4] I. B´ar´any 和 Z. F¨uredi, *On the shape of the convex hull of random points*, 《概率论及相关领域》77 (1988), 231–240。[5] I. B´ar´any 和 D.G. Larman, *Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes*, Mathematika 35(1988), 274–291。[6] I. B´ar´any、M. Fradelizi、X. Goaoc、A. Hubard 和 G. Rote, *Random polytopes and the wet part for arbitraryprobability distributions*, Henri Lebesgue年刊 3 (2020), 701–715。[7] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. 12 (1974), 239–252。[8] S. Brazitikos 和 G. Chasapis, *Sharp estimates for the Cramér transform of log-concave measures and geometricapplications*, Adv. Math. 478 (2025), 110407。[9] S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 M. Pafis, *Half-space depth of log-concave probability measures*, 《概率论及相关领域》188 (2024), 309–336。[10] S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 M. Pafis, *Threshold for the expected measure of random polytopes*, Math. Ann. 388 (2024), 2991–3024。[11] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B.-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, 数学调查与专著丛书第196卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年。xx+594页。[12] L. D. Brown, *Fundamentals of statistical exponential families with applications in statistical decision theory*, 数理统计学会讲义—专著丛书第9卷。数理统计学会，海沃德，加利福尼亚州，1986年。x+283 页。[13] S. Bubeck 和 R. Eldan, *The entropic barrier: exponential families, log-concave geometry, and self-concordance*, Math. Oper. Res. 44 (2019), 264–276。[14] T. M. Cover 和 J. A. Thomas, *Elements of information theory*, 第二版。Wiley-Interscience，霍博肯，新泽西州，2006年。xxiv+748 页。[15] D. L. Donoho 和 M. Gasko, *Breakdown properties of location estimates based on halfspace depth and projectedoutlyingness*, Ann. Statist. 20 (1992), 1803–1827。[16] B. Efron, *The convex hull of a random set of points*, Biometrika 52 (1965), 331–343。[17] G. Ewald、D. G. Larman 和 C. A. Rogers, *The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in Euclidean space*, Mathematika 17 (1970), 1–20。[18] A. Giannopoulos 和 N. Tziotziou, *Moments of the Cramér transform of log-concave probability measures*, J. Funct. Anal. 290 (2026), 第10期, 111423。[19] R. M. Gray, *Entropy and Information Theory*, 第二版。施普林格，纽约，2011年。xxviii+409 页。[20] B. Gr¨unbaum, *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes*, Pacific J. Math. 10 (1960), 1257–1261。[21] B. Klartag 和 J. Lehec, *Affirmative resolution of Bourgain's slicing problem using Guan's bound*, Geom. Funct. Anal. 35 (2025), 1147–1168。[22] Y. T. Lee 和 M.-C. Yue, *Universal barrier is n-self-concordant*, Math. Oper. Res. 46 (2021), 1129–1148。[23] R. Y. Liu、J. M. Parelius 和 K. Singh, *Multivariate analysis by data depth: descriptive statistics, graphics andinference*, Ann. Statist. 27 (1999), 783–858。[24] L. Lov´asz 和 S. Vempala, *The geometry of logconcave functions and sampling algorithms*, Random Structures Algorithms 30 (2007), 307–358。[25] A. M. Macbeath, *A theorem on non-homogeneous lattices*, Ann. of Math. (2) 56 (1952), 269–293。[26] S. Nagy、C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, *Halfspace depth and floating body*, Stat. Surv. 13 (2019), 52–118。

[27] M. Pafis, *Cramér transform, half-space depth and threshold phenomena for convex bodies*, arXiv:2608.29972（2026）。[28] M. Pafis, *Economic cap coverings for log-concave measures*, 预印本（2026）。[29] M. Pafis, *Random polytopes under wet-part doubling*, 预印本（2026）。[30] A. Pr´ekopa, *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) 34（1973），335–343。[31] M. Reitzner, *The combinatorial structure of random polytopes*, Adv. Math. 191（2005），178–208。[32] M. Reitzner, *Random polytopes*, 收录于 *New Perspectives in Stochastic Geometry*, W. S. Kendall 和 I. Molchanov（编），牛津大学出版社，牛津，2010年，第45–76页。[33] A. R´enyi 和 R. Sulanke, *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 2（1963），75–84。[34] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, 1970年原版重印。普林斯顿数学经典丛书。普林斯顿平装书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1997年。xviii+451 页。[35] P. J. Rousseeuw 和 I. Ruts, *The depth function of a population distribution*, Metrika 49（1999），213–244。[36] C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, *The convex floating body*, Math. Scand. 66（1990），275–290。[37] J. W. Tukey, *Mathematics and the picturing of data*, 收录于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974)*，第2卷，加拿大数学大会，蒙特利尔，1975年，第523–531页。[38] E. M. Werner, *Floating bodies and approximation of convex bodies by polytopes*, Probab. Surveys 19（2022），113–128。[39] Y. Zuo 和 R. Serfling, *General notions of statistical depth function*, Ann. Statist. 28（2000），461–482。2020年数学学科分类。主分类 60D05、52A23；次分类 52A22、60E15、52A40、94A17。关键词：对数凹概率测度、Tukey半空间深度、湿部分倍增、Cram´er变换、指数倾斜、相对熵、协方差行列式、随机多胞体。
Apostolos Giannopoulos应用数学与物理科学学院，雅典国立技术大学，数学系，Zografou校区，希腊雅典 GR-157 80。*E-mail:* apgiannop@math.ntua.grMinas Pafis数学系，雅典国立卡波季斯特里亚大学，Panepistimioupolis 157-84，希腊雅典。*E-mail:* mipafis@math.uoa.gr