Supp在不使可激发振子静默的情况下抑制混沌

Zixuan Fu纽约大学坦登工程学院电气与计算机工程系，纽约州布鲁克林 *Jay Street 370*号，邮编 *11201*，美国 *zf2375@nyu.edu*

Unnikrishna Pillai纽约大学坦登工程学院电气与计算机工程系，纽约州布鲁克林 *Jay Street 370*号，邮编*11201*，美国 *up240@nyu.edu*

arXiv:2611.29022v1 [eess.SY] 21 Nov 2026

对于控制可激发振子而言，负李雅普诺夫指数并非充分目标。增益可能通过消除模型本应保留的激发来消除混沌。本文研究了三种模型中的这种失效模式：受迫 FitzHugh–Nagumo 神经元、受迫 Aliev–Panfilov 心肌细胞，以及自主 Hindmarsh–Rose 神经元。混沌由最大状态李雅普诺夫指数衡量。激发则通过阈值穿越、快变量的偏移量以及放电率来衡量。本文在相同的混沌状态下比较了恢复阻尼、不稳定周期轨道跟踪、Pyragas 延迟反馈以及快时间尺度的改变。在受迫模型中，较大的阻尼和较大的速率变化通过使细胞静默来实现规则化，而跟踪和延迟反馈则能保持放电。在自治模型中，恢复阻尼反而使放电率提高数倍。经典矩阵测度界将这些结果与增益作用的通道联系起来。只有在跟踪控制下，常度量收缩证书才能与显著的放电并存，因为跟踪控制会从快方向中减去一个增益。

关键词：混沌控制；可激发系统；FitzHugh–Nagumo模型；Aliev–Panfilov模型；Hindmarsh–Rose模型；李雅普诺夫指数；收缩分析；Pyragas控制。

1. 引言

本文表明，在可激发振子中，抑制混沌与维持激发是两个不同的目标，而反馈增益作用的通道决定了能否同时实现这两个目标。可激发模型具有激活阈值和较大的偏移量，即尖峰或动作电位。增益可以通过使轨迹远离该偏移量，让最大的李雅普诺夫指数变为负值。此时，受控细胞虽然变得规则，却可能处于静默、去极化状态，或仅呈现小幅振荡。耦合导致振荡丧失的现象称为振幅死亡或振荡死亡 [Koseska等， 2013]。本文将规则性与维持激发视为两个目标，并对两者进行测量。四种干预措施是

在受迫 FitzHugh–Nagumo模型神经元、受迫 Aliev–Panfilov 心脏细胞和自主 Hindmarsh–Rose 神经元的相同混沌状态下进行比较，并始终采用相同的测量指标。

兴奋指数、偏移比和放电率比与 Lyapunov 指数并列呈现。根据这些指标构建的增益和驱动图，将持续放电的规则响应与通过静默产生的规则响应区分开来。在两个受迫模型中，较大的恢复阻尼和较大的速率

缩放通过使细胞静默实现规则性。轨道跟踪和 Pyragas 延迟反馈则能在细胞持续放电的同时实现规则性。在自治模型中，恢复阻尼在任何扫描增益下都不会使细胞静默，反而会使放电速率提高数倍。

阈值计算解释了这一比较。在 FitzHugh–Nagumo模型中，恢复阻尼使阈值线上在任何增益下都存在正的冻结增长率。快变量跟踪则会在超过某个明确增益后消除这一增长率。对于自治闭环，一项已知的收缩性质以逐轨迹形式表述。沿有界轨迹的常度量证书会迫使系统收敛到平衡点。因此，在 Hindmarsh–Rose模型中，恢复阻尼或速率缩放下的证书不可能与放电并存。从数值结果来看，只有在跟踪条件下，常度量收缩证书才会与显著放电并存。在 Aliev–Panfilov模型中，速率缩放下的常度量收缩证书会与偏移量较小的阈值穿越并存。这些控制律都不是新的，矩阵测度界也是经典结果。本文的贡献在于激发度量、对共同状态区域的比较，以及解释这一比较的阈值计算。

可激发振子是心脏细胞和神经细胞的低阶模型。在周期强迫下，它们会表现出相位锁定、倍周期分岔和混沌 [Guevara 等，1981；Glass，2001；Strogatz， 2015]。周期强迫的 Bonhoeffer–van der Pol 振子是 FitzHugh–Nagumo模型的一种形式，它们仍不断呈现新的高阶混合模态振荡 [Sekikawa 等， 2026]。Hindmarsh–Rose 神经元无需任何强迫即可产生簇发 [Hindmarsh 与 Rose， 1984], , 其混沌状态已有充分记录 [Barrio 等， 2014]。通过局部活性忆阻器与 Hopfield 神经元耦合的二维 Hindmarsh–Rose 神经元也会呈现混沌簇发 [Huang 等， 2024]。混沌控制是一项经典研究主题。OGY 控制通过小幅参数变化稳定不稳定周期轨道 [Ott 等， 1990]。Pyragas控制采用一种在目标轨道上为零的延迟反馈 [Pyragas， 1992]。相关综述和著作涵盖了这一领域 [Chen 与 Dong，1998年；Sch¨oll 与 Schuster， 2008]。

采用单一增益的线性状态反馈并非一种新的控制原理。研究者曾通过一个非零增益控制受迫 Duffing 振子，使其跟踪固有的不稳定周期轨道 [Chen 与 Dong, 1993]。该研究采用了加权能量泛函和高增益论证。下文使用的跟踪律正是这一控制律，并将其应用于可激发模型。它将作为基准。

可激发系统中的混沌控制也早已得到研究。实验中实现了对心脏混沌的控制[Garfinkel 等人，1992], , 并通过动态控制抑制了心脏交替现象 [Hall 等人，1997]。针对可激发生理系统，人们开发了一种与模型无关的技术 [Christini 与 Collins, 1997]。研究者比较了 FitzHugh–Nagumo 方程中的非反馈方法 [Rajasekar等人, 1997]。延迟反馈稳定了受起搏的 FitzHugh–Nagumo 振子中的规则行为 [Bleich 与 Socolar, 2000]。该研究还稳定了快速起搏状态下的非尖峰放电轨道。因此，在延迟反馈研究中，尖峰放电与非尖峰放电的受控轨道早已被区分开来。滤波反馈和相位反馈控制了尖峰放电和非尖峰放电状态下的受驱动 FitzHugh–Nagumo 电路 [Ciszak 等人, 2012; Meucci等人,2012]。相位反馈研究将尖峰幅度维持在无控制信号的几个百分点以内[Meucci 等人， 2012]。Hindmarsh–Rose模型中的混沌通过状态反馈 [Sabbagh,2000]以及延迟自反馈得到控制 [Yu 与 Tong, 2009]。空间扩展 Aliev–Panfilov 模型中的螺旋混沌则通过周期强迫消除 [Sakaguchi 与 Fujimoto, 2003]。研究者还在心脏组织的二维可激发介质模型中研究了反馈定时起搏 [Suth等人, 2024]。

混沌是指有界的非周期动力学，且最大状态李雅普诺夫指数为正。对于受迫模型，该指数取决于指定的受迫相位。对于自治模型，它是通常的状态指数。仅凭复杂的相图并不足以判定。规则性是指该指数在规定的数值容差范围内不为正。放电是指反复向上穿越激活阈值。静默是指此类穿越停止。单次穿越并不能证明出现了全幅度尖峰，因此还会同时报告偏移量和放电率。

2. 模型、干预措施与测量

令 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ 表示状态，其中 m 为状态维数， x_1 为快变量。下标 s 表示最慢恢复分量 x_s。加性控制输入分别以 $c_1(t)$ 和 $c_s(t)$ 的形式进入快变量方程和最慢恢复方程。受强迫的 FitzHugh–Nagumo模型 [FitzHugh, 1961]

其状态为 $\boldsymbol{x} = (v,\ w)^\top$，其中 $x_1 = v$ 和 $x_s = w$。符号 A 和 ω 分别表示强迫幅度和角频率。符号 ε、a 和 b 为模型参数。方程为

$$\dot{v} = v - \tfrac{1}{3}v^3 - w + A\cos(\omega t) + c_1, \tag{1}$$
$$\dot{w} = \varepsilon\,(v + a - bw) + c_s. \tag{2}$$

参考参数集为

$$(\varepsilon, a, b, \omega, A) = (0.1, 0.7, 0.8, 1.15, 1.30). \tag{3}$$

这些数值定义了参考混沌状态。

受迫Aliev–Panfilov模型 [Aliev 与 Panfilov, 1996] 具有状态 $\boldsymbol{x} = (u,\ q)^\top$，其中 $x_1 = u$ 和 $x_s = q$。符号 F 和 ω 表示强迫幅度和角频率。符号 K、α、ϵ_0、μ_1 和 μ_2 表示模型参数。方程为

$$\dot{u} = -Ku(u-\alpha)(u-1) - uq + F\cos(\omega t) + c_1, \tag{4}$$
$$\dot{q} = \epsilon(u,q)\,\big(-q - Ku(u-\alpha-1)\big) + c_s, \tag{5}$$
$$\epsilon(u,q) = \epsilon_0 + \frac{\mu_1 q}{u+\mu_2}. \tag{6}$$

参考参数集为

$$(K, \alpha, \epsilon_0, \mu_1, \mu_2, \omega, F) = (8, 0.12, 0.01, 0.2, 0.3, 1.8, 0.40). \tag{7}$$

两个受迫模型的强迫周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{8}$$

Hindmarsh–Rose模型 [Hindmarsh 与 Rose, 1984] 的状态为 $\boldsymbol{x} = (x,\ y,\ z)^\top$，其中 $x_1 = x$ 和 $x_s = z$。符号 I 和 β 分别表示外加电流和快变量参数。符号 r 和 x_R分别表示适应速率和参考水平。方程为

$$\dot{x} = y - x^3 + \beta x^2 - z + I + c_1, \tag{9}$$
$$\dot{y} = 1 - 5x^2 - y, \tag{10}$$
$$\dot{z} = r\,\big(4(x - x_R) - z\big) + c_s. \tag{11}$$

参考参数集为

$$(r, x_R, \beta, I) = (0.01, -1.6, 2.90, 3.60). \tag{12}$$

该模型没有强迫。变量 z 是其最慢恢复变量。

每种干预都会修改快方程或最慢恢复方程。令 $f_1(\boldsymbol{x},\ t)$表示快方程无控制时的右端项。恢复阻尼 使用 $c_s = -kx_s$，增益为 $k \ge 0$，且$c_1 = 0$。速率缩放 将快方程除以 $1+\gamma$，其中 $\gamma \ge 0$。它会改变快变量与慢变量之间的时间尺度比。这是参数变化，而非反馈律。其控制代价通过等效加性输入 $c_1 = -\gamma f_1/(1+\gamma)$来衡量。

跟踪 使用 $c_1 = -\kappa\,\big(x_1 - \bar{x}_1(t)\big)$，增益为 $\kappa \ge 0$，并采用 $c_s = 0$。这里，$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$是无控制模型的不稳定周期轨道，通过对返回映射进行牛顿迭代求得。对于受迫模型，返回映射就是频闪映射。对于欣德马什–罗斯模型，它是 z连续极大值之间的映射。该控制律来自 [Chen 与 Dong, 1993]。该研究改用谐波平衡来近似轨道。

对于Pyragas控制，令 j 表示受控分量，令 τ 表示时滞。在FitzHugh–Nagumo模型中，选择 $j = s$；在另外两个模型中，选择 $j = 1$。*Pyragas*控制 采用$c_j = \eta\,\big(x_j(t-\tau) - x_j(t)\big)$，增益为 $\eta \ge 0$ [Pyragas, 1992]。在受迫模型中，时滞为 $\tau = T$。在Hindmarsh–Rose模型中，$\tau = T_u$，其中 T_u 是目标轨道的周期。

目标轨道如下。FitzHugh–Nagumo模型的目标轨道是周期1轨道，每个强迫周期发放一次。Aliev–Panfilov目标轨道是周期2轨道，每两个强迫周期发放一次。欣德马什–罗斯目标轨道每个周期有一个尖峰 T_u。每个目标轨道都位于其模型的混沌吸引子内。

混沌程度以最大状态李雅普诺夫指数衡量。对于常微分方程情形，扰动满足 $\delta\boldsymbol{x} = A_c(t)\,\delta\boldsymbol{x}$，其中 $A_c(t)$ 是沿轨迹的闭环雅可比矩阵。在Pyragas控制下，切向方程还包含延迟扰动，并在相应的历史空间上演化。令 $\mathcal{U}(t,0)$ 表示切向演化算子。在常微分方程情形下，它退化为基本矩阵。最大状态李雅普诺夫指数为

$$\lambda_1 = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{U}(t,0)\|, \tag{13}$$

其中，$\|\cdot\|$ 是相容算子范数。使用 Benettin算法 [Benettin 等人，1980]计算该指数。在受迫模型中，该指数是给定受迫相位下的条件指数，而规则性表示 $\lambda_1 < 0$。在自主Hindmarsh–Rose模型中，它是通常的状态指数。除非时变输入破坏时间平移对称性，否则周期轨道沿流动方向的 $\lambda_1 = 0$ 为。定义

$$\lambda_\epsilon = 10^{-3}. \tag{14}$$

在自治模型中，规则性表示 $\lambda_1 \le \lambda_\epsilon$。容差约为无控制指数的百分之六。

放电阈值 θ 是零恢复变量和零驱动下快速非线性函数的中间零点。它在FitzHugh–Nagumo模型和Hindmarsh–Rose模型中给出$\theta = 0$，在Aliev–Panfilov模型中给出 $\theta = \alpha$。这是一条可复现的分类规则，并非生物物理常数。令 T_w 为参考窗口，在受迫模型中等于 T，在Hindmarsh–Rose模型中等于 T_u。令 N_w 为观测窗口的数量。对于每个窗口 $n = 1$，……，N_w，定义

$$\chi_n = \begin{cases} 1, & x_1 \text{ crosses } \theta \text{ upward during window } n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{15}$$

兴奋指数为

$$E = \frac{1}{N_w} \sum_{n=1}^{N_w} \chi_n. \tag{16}$$

高于阈值的细胞具有 $E = 0$。令 $x_1^0(t)$ 表示相同驱动下未受控的快变量。偏移比为

$$R = \frac{\max_t x_1 - \min_t x_1}{\max_t x_1^0 - \min_t x_1^0}. \tag{17}$$

具有 $R \ge 1/2$ 的放电称为显著放电。在观测区间 $[t_a, t_b]$ 上，令 $N_\uparrow$ 和 $N_\uparrow^0$ 分别表示受控系统和未受控系统的向上穿越次数。放电率比为

$$S = \frac{N_\uparrow}{N_\uparrow^0}. \tag{18}$$

令 $c(t)$ 表示加性控制输入。对于速率缩放，$c(t)$ 是上文定义的等效输入 $c_1(t)$，义。均方根 n 平方的工作量是

$$Q = \left[\frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} c^2(t)\, dt \right]^{1/2}. \tag{19}$$

指数可能随增益呈非单调变化。当扫描结束于一个连续规则区间时，g_{on}表示该区间的下边界。Aliev–Panfilov Pyragas控制不存在这样的区间。在这种情况下，g_{on} 表示主要低增益规则带的下边界，该规则带在 $\eta = 1.60$ 处结束，随后是交替窄带。静默增益 g_s 是满足以下条件的最小扫描增益：从该增益开始，所有更大的扫描增益都会产生 $E = 0$。

所有运行均采用四阶龙格–库塔法。令 h 表示积分步长。数值为

$$h = \begin{cases} T/300, & \text{FitzHugh–Nagumo}, \\ T/350, & \text{Aliev–Panfilov}, \\ \text{approximately } 0.05, & \text{Hindmarsh–Rose}. \end{cases} \tag{20}$$

对于Hindmarsh–罗斯模型， h 经过调整，以使每个 T_u包含整数个步数。暂态被舍弃。令 T_o 表示观测长度。取值为

$$T_o = \begin{cases} 200T, & \text{forced models}, \\ 30\,000, & \text{Hindmarsh–Rose}. \end{cases} \tag{21}$$

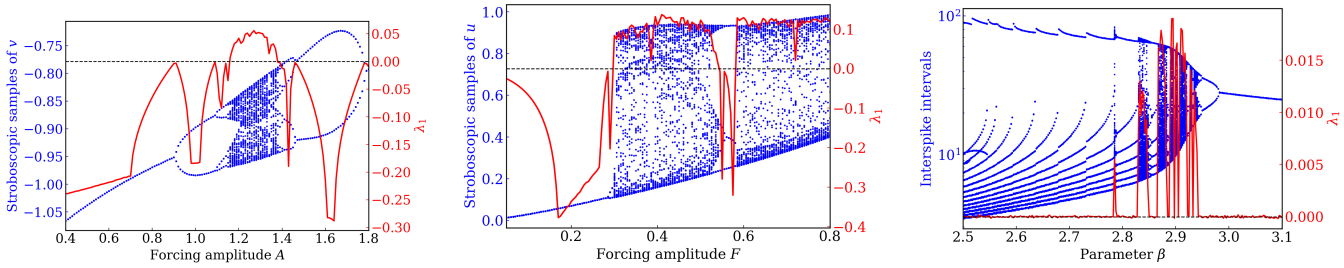
跟踪目标以半步为间隔采样。Pyragas 历史项在半步处采用线性插值。阈值增益来自采用细增益步长的一维扫描。

3. 增益和驱动下的混沌状态与静默

图1(a)显示了无控制的FitzHugh–Nagumo模型。频闪分支在$A \approx 0.9$附近发生倍周期分岔，指数在 $A = 1.3$附近的一段区间内变为正值。反向序列使该区间闭合。附近的周期响应在相平面中仍可能显得十分复杂。因此， λ_1 的符号与频闪剖面结合使用。

图1(b)显示了无控制的 Aliev–Panfilov模型。在较小的强迫下，响应为周期1。随后出现更高周期结构，且指数在 $F \approx 0.30$附近变为正值。 $F \approx 0.55$附近的混沌带被一个指数为负值的周期窗口打断。参考值 $F = 0.40$ 位于混沌区域内。

图1(c)显示了无控制的 Hindmarsh–Rose模型在 $I = 3.60$ 下，参数 β 变化时的情况。较小的 β 下，脉冲间期形成有序的周期性簇发分支；较大的β下，则形成单一的强直分支。只有在 $\beta = 2.9$附近的狭窄区间内，指数才为正，该区间包含周期窗口。参考值 $\beta = 2.90$ 位于该区间内。因此，工作点处的混沌很脆弱。仅改变 β 就能使其消失。



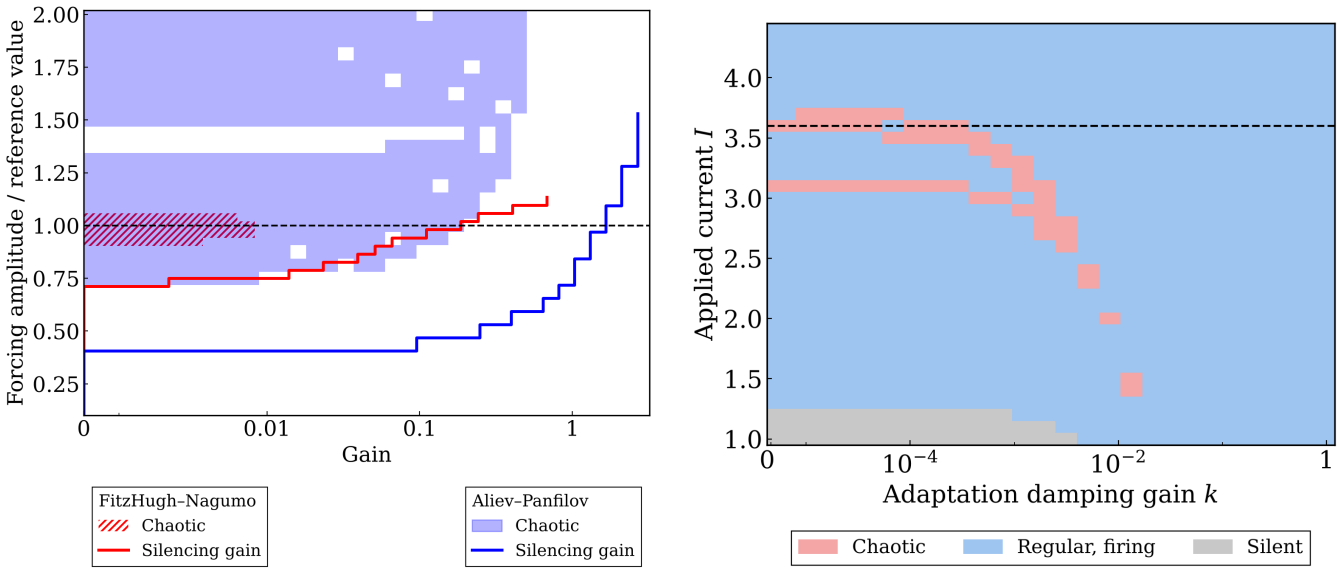
(a) (b) (c)

图1. 无控制的分岔图，叠加显示状态李雅普诺夫指数。蓝点表示快速动力学的采样值。红色曲线为 λ_1，虚线标示 λ_1=0。(a) FitzHugh–Nagumo模型： v 相对于强迫幅度 A的频闪采样。(b) Aliev–Panfilov模型： u 相对于强迫幅度 F的频闪采样。(c) Hindmarsh–Rose模型在 I=3.60下，脉冲间期相对于 β的关系，采用对数刻度。

图2(a)在一个面板中展示了两种受迫模型。它展示了FitzHugh–Nagumo模型中的恢复阻尼，以及Aliev–Panfilov模型中的速率缩放。横轴为增益， k 或 γ。纵轴为强迫幅度除以其参考值，因此虚线标示了两种参考状态。红色网纹和蓝色阴影单元格表示混沌。每条实线右侧的细胞处于静默状态。在混沌细胞与同色实线之间，细胞会在所述阈值下放电。偏移比决定这种放电是否显著。在FitzHugh–Nagumo模型中，混沌占据狭窄的强迫区间，并在增益低于0.01处结束。放电会持续到增益超过一个数量级

更高的位置。在Aliev–Panfilov模型中，混沌覆盖很宽的强迫范围，静默线位于很远的右侧。两条静默线的增益都会随着强迫幅度的增加而上升。

图2(b)展示了对适应变量施加恢复阻尼时的欣德马什–罗斯模型，其中外加电流 I 作为驱动。该图景不同于受迫模型。静默区域位于小电流和低增益处，阻尼会使其缩小。混沌细胞形成一条狭窄带，且随着增益增大向较低电流处移动。在参考电流下，零增益会使细胞进入静默状态。



(a) (b)

图2. 增益与驱动下的混沌、放电和静默区域。(a) 受迫模型。对于FitzHugh–Nagumo模型，增益为恢复阻尼 k；对于Aliev–Panfilov模型，增益为速率缩放 γ。强迫幅度除以其参考值。混沌细胞具有 $\lambda_1>0$。(b) 施加恢复阻尼 z时的Hindmarsh–Rose模型。混沌细胞具有 $\lambda_1>\lambda_\epsilon$。虚线标示参考状态。增益轴在零附近为线性，以上部分为对数刻度。

表1列出了四种干预措施在参考状态下的增益区间。在 FitzHugh–Nagumo模型中，恢复阻尼下的静默增益比规则带的起始增益高出一个数量级以上。在 Aliev–Panfilov模型中，恢复阻尼在同一扫描增益下同时消除了混沌和放电，此后细胞保持去极化状态，接近 $u \approx 1$。在该模型中采用速率缩放时，混沌最初在 $\gamma = 0.19$ 附近消失，在 $\gamma = 0.24$ 附近的狭窄区间内重新出现，而在所有更大的扫描增益下均不再出现。在 Hindmarsh–Rose模型中，扫描范围内没有任何干预措施能使细胞静默。跟踪和 Pyragas控制都不能使任何模型静默。

4. 针对相同混沌状态的四种干预措施

图3(a)显示了参考强迫下 FitzHugh–Nagumo模型的吸引轨道。灰色曲线为混沌吸引子。较强的恢复阻尼将 w 固定在零附近，并使 v 保持在静息分支上。较强的速率缩放会使轨道收缩成阈值以下的一个小环。跟踪和 Pyragas控制都收敛到同一个周期1轨道，该轨道位于混沌吸引子内部，并且每个周期都会穿越阈值。

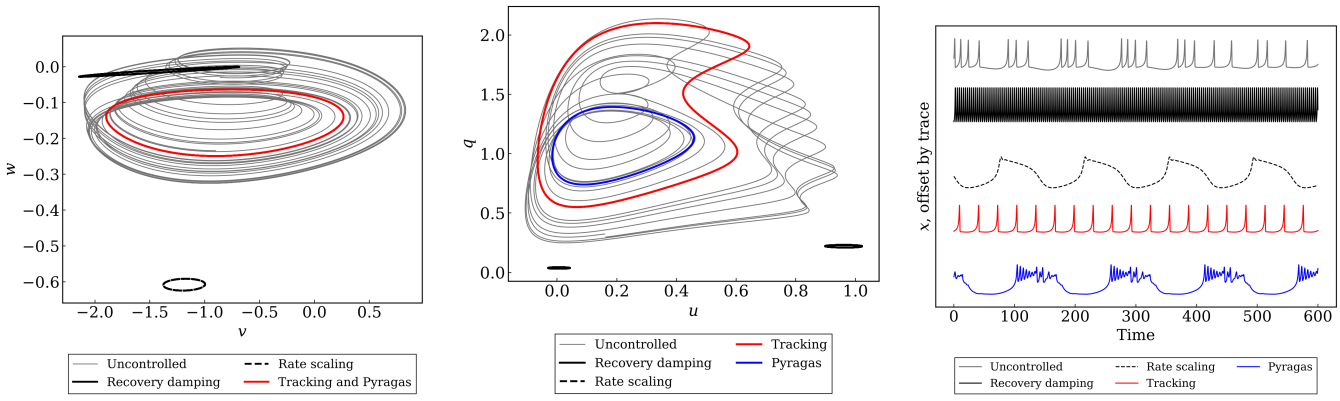
图3(b)展示了Aliev–Panfilov模型。恢复阻尼使细胞保持在$u \approx 1$附近的去极化状态。较大的速率缩放会在静息状态附近留下一个小环。跟踪收敛到周期2目标轨道。Pyragas控制收敛到周期1轨道。这两条轨道都嵌入混沌吸引子中，并穿过阈值。

图3(c)显示了欣德马什–罗斯快变量的时间序列。未受控细胞产生不规则爆发。恢复阻尼将其转变为密集的强直性尖峰序列。较大的速率缩放使慢波的

表1。参考状态下的增益阈值。 g_{on}：终端规则区间的起点。 g_s：静默增益。每个数值都是相邻扫描增益之间区间的上限。短横线表示没有任何扫描增益能使细胞静默。没有任何干预措施能使Hindmarsh–Rose 细胞静默，因此省略其 g_s 行。括号中的数值采用更严格的阈值 u=0.5。

	阻尼 k	速率 γ	跟踪 κ	Pyragas η
FitzHugh–Nagumo模型				
g_{on}	0.009	0.015	0.012	0.015
g_s	0.175	0.225	–	–
Aliev–Panfilov				
g_{on}	0.1825	0.25	0.32	0.22
g_s	0.1825	1.60 (0.27)	–	–
欣德马什–罗斯				
g_{on}	0.000375	0.1425	1.10	0.39

峰值仅偶尔越过阈值。跟踪使目标轨道的每个周期产生一个规则尖峰。Pyragas控制产生规则爆发，但并非目标轨道。



(a) (b) (c)

图3. 参考状态下的受控响应。灰色：无控制。黑色实线：恢复阻尼。黑色虚线：速率缩放。红色：跟踪。蓝色：Pyragas控制。(a) FitzHugh–Nagumo模型在 k=5、γ=5和 κ=1下的轨道。Pyragas控制使用 η=0.2 后达到红色轨道。(b) Aliev–Panfilov模型在 k=0.2、γ=5和 κ=1.5下的轨道，以及 η=0.4。(c) 欣德马什–罗斯模型的 x时间序列，为清晰起见进行了偏移，分别采用 k=0.1、 γ=5、 κ=1.5和 η=0.5。

图4(a)展示了 FitzHugh–Nagumo模型中四种干预措施的 λ_1 随增益的变化。实心标记表示放电，空心标记表示静默。每种干预措施都有一个规则带，而且对其中任何一种而言，指数都不会随增益单调变化。恢复阻尼达到最负的指数，但仅出现在静默范围内。图4(b)展示了偏移比。阻尼和速率缩放使偏移量持续缩小，标记也转为空心。在大部分增益范围内，跟踪和Pyragas控制将偏移量保持在目标轨道的值。

图4(c)展示了Aliev–Panfilov模型的指数。只有在细胞去极化后，恢复阻尼才会产生较大的负指数。速率缩放从 $\gamma \approx 0.25$起产生规则响应。Pyragas控制形成一个规则带，但在高于 $\eta \approx 1.6$时会分裂成狭窄片段。图4(d)展示了偏移比。在速率缩放作用下，偏移量降至无控制值的五分之一以下，之后细胞才进入静默状态。

图4(e)显示了Hindmarsh–Rose模型的指数。灰色带标示规则性容差。正如自治流的周期轨道所预期的那样，恢复阻尼、速率缩放和Pyragas控制在使细胞规则化后，均会 λ_1 保持在容差范围内。跟踪则会产生负指数，因为其参考信号使闭环随时间变化。图4(f)显示放电率比。

恢复阻尼会使放电率提高数倍。高增益下，速率缩放会将其降至约五分之一。跟踪会稳定在目标轨道的放电率。由于该模型中的尖峰幅度几乎不变，图4(f)使用 S 而非 R 。

表2比较了具有代表性增益时的干预措施。在某些模型中，阻尼和速率缩放各出现两次：一次在放电窗口内，另一次对应较大的增益。在受迫模型中，较大的增益$k = 5$ 和 $\gamma = 5$ 会使细胞陷入静默。跟踪和Pyragas控制则能维持放电。在受迫模型中，它们的稳态控制代价 Q 低于 10^{-7}，而该水平由目标轨道的数值精度决定。在Hindmarsh–Rose模型中，跟踪也能达到目标，其结果为 $Q = 6.0 \times 10^{-6}$。该模型中的Pyragas控制会产生规则放电，且$Q = 0.48$，因此最终收敛到目标以外的轨道。表中未列出Hindmarsh–Rose模型中较小的增益$k = 5 \times 10^{-4}$ 和 $\gamma = 0.2$。在这些增益下，细胞已处于规则放电状态，并会持续放电。恢复阻尼给出 $E = 1.00$、 $R = 0.85$和 $S = 1.01$。速率缩放给出 $E = 0.68$、 $R = 1.15$和 $S = 1.36$。

表2. 代表性增益下的干预措施。 λ_1：最大状态李雅普诺夫指数。 E：兴奋指数。R：偏移比。 S：放电率比。 ≈ 0：在规则性容差范围内。

干预措施与增益	λ_1	E	R	S
FitzHugh–Nagumo模型				
无控制	$+0.052$	0.60	1.00	1.00
阻尼， $k = 0.05$	-0.156	0.50	0.92	0.83
阻尼， $k = 5$	-1.487	0	0.50	0
速率， $\gamma = 0.2$	-0.141	1.00	0.63	1.65
速率， $\gamma = 5$	-0.076	0	0.13	0
跟踪， $\kappa = 1$	-0.284	1.00	0.74	1.65
Pyragas， $\eta = 0.2$	-0.120	1.00	0.74	1.65
Aliev–Panfilov				
无控制	$+0.107$	0.51	1.00	1.00
阻尼， $k = 0.2$	-0.039	0	0.12	0
速率， $\gamma = 0.3$	-0.202	1.00	0.34	1.98
速率， $\gamma = 5$	-0.041	0	0.07	0
跟踪， $\kappa = 1.5$	-0.328	0.50	0.68	0.99
Pyragas， $\eta = 0.4$	-0.115	1.00	0.45	1.98
欣德马什–罗斯				
无控制	$+0.016$	0.79	1.00	1.00
阻尼， $k = 0.1$	≈ 0	1.00	1.07	7.75
速率， $\gamma = 5$	≈ 0	0.23	0.97	0.19
跟踪， $\kappa = 1.5$	-0.024	1.00	0.84	0.83
Pyragas， $\eta = 0.5$	≈ 0	0.57	0.92	1.34

5. 收缩证书与激发

本节探讨收缩证书能否在细胞仍然放电时证明规则性。对于常矩阵 $P = P^\top \succ 0$和实方阵 M，定义 P 加权矩阵测度

$$\mu_P(M) = \text{largest eigenvalue of } \tfrac{1}{2}\big(B + B^\top\big), \qquad B = P^{1/2} M P^{-1/2}. \tag{22}$$

令 I 表示单位矩阵。单位度量 $P = \mathrm{I}$ 给出欧几里得测度 μ_{I}。沿着一条轨迹，定义时间平均值

$$\bar{\mu}_P = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mu_P\big(A_c(\sigma)\big)\, d\sigma. \tag{23}$$

下面的界是经典结果 [Lozinskiĭ，1958年；Desoer & Haneda，1972年；Lohmiller & Slotine， 1998]。

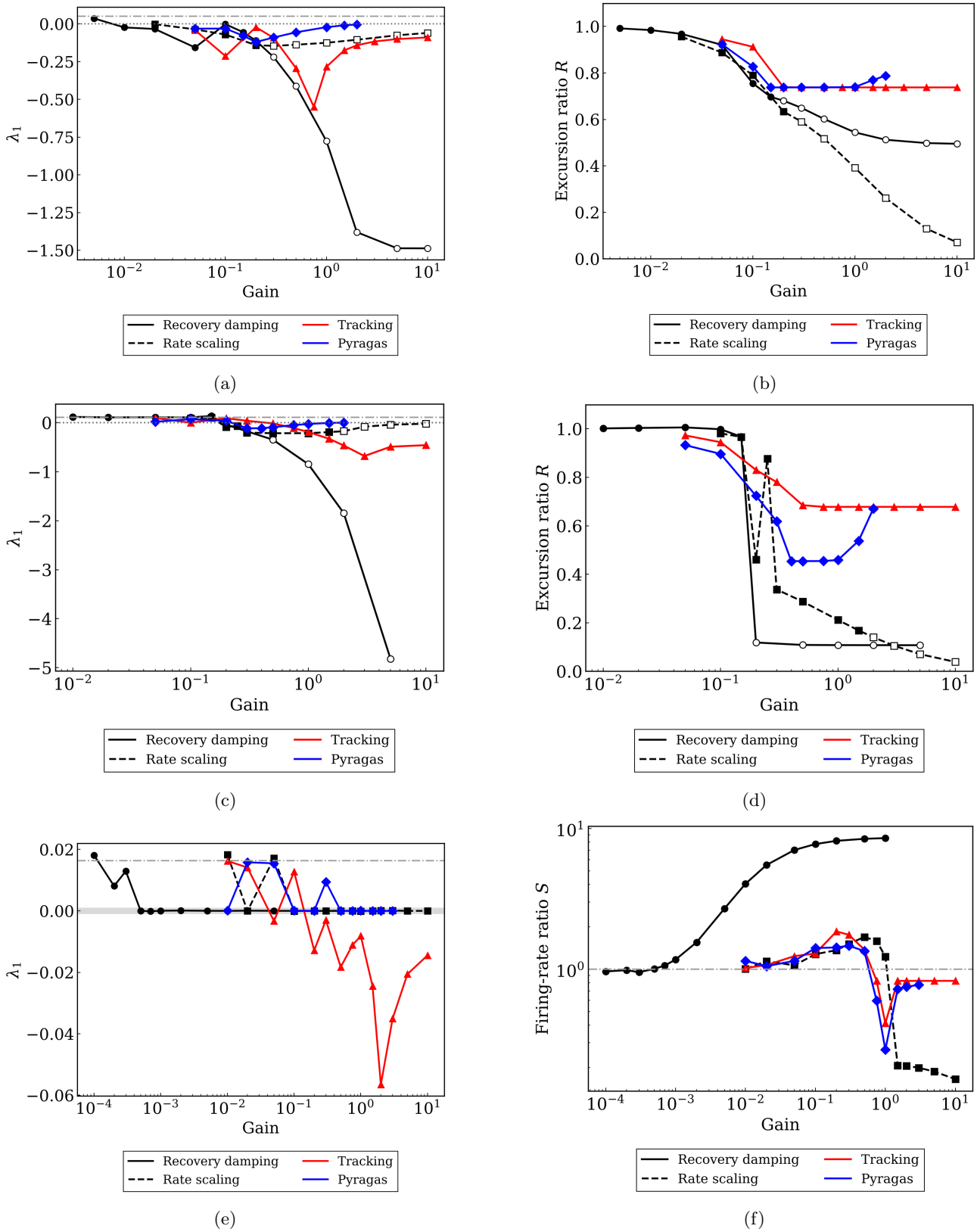


图4。参考状态下的增益扫描。实心标记：放电， $E>0$。空心标记：静默， $E=0$。在(a)、(c)、(e)和(f)中，点划线表示无控制值。(a) FitzHugh–Nagumo指数λ_1。(b) FitzHugh–Nagumo偏移比 R。(c) Aliev–Panfilov指数 λ_1。(d) Aliev–Panfilov偏移比 R。(e) 欣德马什–罗斯指数 λ_1，灰色带表示 $|\lambda_1|\leq\lambda_\epsilon$。(f) 欣德马什–罗斯放电率比 S，采用对数刻度。

定理 1 [矩阵测度界]。 *(i)* 对于每个常对称矩阵 $P \succ 0$，指数 (13) 满足 $\lambda_1 \le \bar{\mu}_P$。*(ii)* 假设 $A_c = J - kD$，其中 J 是不含增益项的雅可比矩阵，$k \ge 0$ 是增益，$D \succeq 0$ 是常对称矩阵。令 $\hat{\mu}(k)$ 为 $\mu_1\big(J(\boldsymbol{x},t) - kD\big)$ 在紧状态集和一个强迫周期上的上确界。则 $\hat{\mu}(k)$ 关于 k单调不增。

证明。(i) 令 $V = \delta\boldsymbol{x}^\top P\,\delta\boldsymbol{x}$。则 $\dot{V} = \delta\boldsymbol{x}^\top(PA_c + A_c^\top P)\,\delta\boldsymbol{x} \le 2\mu_P(A_c)\,V$。Gr¨onwall 不等式给出$V(t) \le V(0)\exp\big(2\int_0^t \mu_P(A_c(\sigma))\,d\sigma\big)$。由于 P为常矩阵，范数 $\|\cdot\|$和 $V^{1/2}$等价。取 t^{-1}对数并求上极限即可得到结论。(ii) 对固定的 $(\boldsymbol{x},t)$ 和 $k_2 > k_1$，在 k_2处的对称部分等于在 k_1 处的对称部分减去半正定矩阵 $(k_2-k_1)D$。根据韦尔不等式，最大特征值变小或保持不变，而取上确界仍保持这一序关系。$\blacksquare$

第(i)部分不使用 $D \succeq 0$。因此，它适用于全部四种干预措施，包括速率缩放。第(ii)部分只对$\hat{\mu}(k)$给出界。它并不能使 λ_1 单调，而图4(a)表明 λ_1 并非单调。对于振子雅可比矩阵，欧几里得测度可能过于保守；加权度量则能在欧几里得度量无法证明收缩的情况下证明收缩。这类加权能量泛函已用于经典反馈分析中 [Chen 与 Dong， 1993]。令 $\rho(M)$表示 M的特征值中实部的最大值。定义其沿轨迹的时间平均值为

$$\bar{\rho} = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \rho\big(A_c(\sigma)\big)\,d\sigma. \tag{24}$$

命题 1 [阈值失稳]。 *(i)* 对任意常数 $P \succ 0$ 和任意实方阵 M，$\mu_P(M) \ge \rho(M)$。因此，对任意常数 P，均有 $\bar{\mu}_P \ge \bar{\rho}$。*(ii)* 在带有$0 < b < 1$的 *FitzHugh–Nagumo*模型(1)–(2) 中，在阈值线 $v = 0$上计算闭环雅可比矩阵。在恢复阻尼下，对任意 $k \ge 0$，均有 $\rho > 0$。在速率缩放下，当且仅当 $\gamma < 1/(\varepsilon b) - 1$时，$\rho > 0$ 。在跟踪下，当且仅当 $\kappa < 1 - \varepsilon b$时， $\rho > 0$ 。

证明。（i）设 $M\boldsymbol{\xi} = \ell\boldsymbol{\xi}$，其中 $\boldsymbol{\xi}$复数且非零，并设 $\boldsymbol{\zeta} = P^{1/2}\boldsymbol{\xi}$。则 $B\boldsymbol{\zeta} = \ell\boldsymbol{\zeta}$，且 $\operatorname{Re}\,\ell = \operatorname{Re}(\boldsymbol{\zeta}^* B\boldsymbol{\zeta})/(\boldsymbol{\zeta}^*\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta}^*\tfrac{1}{2}(B + B^\top)\boldsymbol{\zeta}/(\boldsymbol{\zeta}^*\boldsymbol{\zeta}) \le \mu_P(M)$。星号表示共轭转置。该不等式是经典结果，见 Desoer & Vidyasagar， 1975]。（ii）关于 $v = 0$ ，雅可比矩阵不依赖于 w。实 2×2 矩阵在其行列式为负，或其行列式和迹均为正时具有 $\rho > 0$。在阻尼作用下，迹为 $1 - \varepsilon b - k$，行列式为 $\varepsilon(1-b) - k$。若 $k < \varepsilon(1-b)$，则行列式为正，且迹超过 $1 - \varepsilon > 0$。若 $k = \varepsilon(1-b)$，则一个特征值为零，另一个等于正的迹。若 $k > \varepsilon(1-b)$，则行列式为负。在速率缩放下，迹为 $1/(1+\gamma) - \varepsilon b$，行列式为 $\varepsilon(1-b)/(1+\gamma) > 0$，因此当且仅当迹为正时， $\rho > 0$ 。在跟踪作用下，迹为 $1 - \kappa - \varepsilon b$ ，行列式为 $\varepsilon(1 - b + \kappa b) > 0$，结论相同。$\blacksquare$

命题1有一个直接的解读。每个放电事件都会穿过直线 $v = 0$。在该直线附近，恢复阻尼在任意增益下都会留下正的冻结增长率。当穿越是横截的，连续性会使 ρ 在其附近的一个短时间区间内保持为正。于是，命题1(i)表明，在每一种常度量下，每个此类放电事件都会对$\bar{\mu}_P$ 产生正贡献。在证书成立之前，轨道的收缩区段必须抵消这些贡献。快速变量反馈直接作用于不稳定方向。超过 $\kappa = 1 - \varepsilon b$ 后，它会消除阈值处的正冻结增长率。速率缩放只有超过 $\gamma = 1/(\varepsilon b) - 1$后才能将其消除，这远远超出了放电窗口。在 Aliev–Panfilov模型中， $u = \alpha$ 处的 (1,1) 雅可比矩阵元素等于 $K\alpha(1-\alpha) - q$，当 q较小时为正。恢复阻尼不会改变它，速率缩放会将其除以 $1+\gamma$，而跟踪会减去 κ。相应的特征值结论经过了数值检验，但尚未证明。在 Hindmarsh–Rose模型中，(1,1) 元素为 $-3x^2 + 2\beta x$。其最大值为 $\beta^2/3$，在 $x = \beta/3$处达到。采用 $\kappa > \beta^2/3$ 进行跟踪后，对所有 x，该元素都为负，而恢复阻尼不会改变它。自治模型则允许得出更强的结论。恢复阻尼、速率缩放和无控制流都使 Hindmarsh–Rose闭环保持自治。跟踪则不同，因为 $\bar{x}_1(t)$取决于时间。

命题 2 [自主回路中的证书]。 设 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 满足 $\boldsymbol{G}$ 连续可微，且令 $\boldsymbol{x}(t)$ 为一条有界轨迹，其沿轨迹的雅可比矩阵为 $A_c(t)$。 若对于某个常数 $P \succ 0$有 $\bar{\mu}_P < 0$ ，则 $\boldsymbol{x}(t)$

收敛到一个平衡点。

证明。速度 $\boldsymbol{\nu}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t))$ 满足 $\dot{\boldsymbol{\nu}} = A_c(t)\,\boldsymbol{\nu}$。证明定理1中的 Gr¨onwall 步骤给出 $\|\boldsymbol{\nu}(t)\|_P \le \|\boldsymbol{\nu}(0)\|_P \exp\big(\int_0^t \mu_P(A_c(\sigma))\,d\sigma\big)$，其中 $\|\boldsymbol{\nu}\|_P = (\boldsymbol{\nu}^\top P \boldsymbol{\nu})^{1/2}$。由于 $\bar{\mu}_P < 0$，存在常数 $\Lambda > 0$ 和 $C > 0$，使得对所有 $t \ge 0$都有 $\|\boldsymbol{\nu}(t)\|_P \le Ce^{-\Lambda t}$。因此，速度可积，且 $\boldsymbol{x}(t)$ 收敛到某个点 $\boldsymbol{x}^*$。由连续性可得 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*) = \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{0}$。■

命题 2 是已知事实的逐轨迹形式：收缩自治系统会收敛到一个平衡点 [Lohmiller & Slotine, 1998]。应用于此，它表明，在 Hindmarsh–Rose模型中，恢复阻尼或速率缩放下，常度量证书无法与持续放电共存。收敛轨迹会停止跨越阈值，因此，这种回路中的证书证明的是一个静默细胞。只有跟踪之类的时变输入才能摆脱这一限制。该命题适用于常微分方程。Pyragas控制属于时滞系统，本文不予处理。

常度量沿每条计算得到的轨迹进行评估。定义观测区间上的均值闭环雅可比矩阵为

$$\bar{J} = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} A_c(t)\,dt. \tag{25}$$

¯当 J 为赫尔维茨稳定时，一个候选度量满足

$$\bar{J}^\top P + P\bar{J} = -\mathsf{I}. \tag{26}$$

其他候选度量来自对常数正定度量进行的多起点Nelder–Mead搜索，忽略无关的尺度因子。搜索采用 $P^{1/2}$的三角坐标。令 $\mathcal{P}$ 表示通过这些程序评估得到的有限候选度量集。报告值为

$$\bar{\mu}_\star = \min_{P\in\mathcal{P}} \bar{\mu}_P. \tag{27}$$

根据命题1(i)，$\bar{\mu}_\star \ge \bar{\rho}$。证书增益 g_c 是最小的扫描增益；从该增益开始，所有更大的扫描增益都会给出 $\bar{\mu}_\star < 0$。此处所有证书均为逐轨迹证书，均非针对某个状态集的统一界。

图5(a)显示了 FitzHugh–Nagumo模型中 $\bar{\mu}_\star$ 随增益的变化。在恢复阻尼和速率缩放条件下，曲线仅在标记为空心处穿过零点。阻尼条件下的证书增益为 $g_c \in (0.39, 0.40]$，速率缩放条件下为 $g_c \in (1.75, 1.80]$。二者均高于表1中的静默增益。因此，证书仅对静默细胞成立。在跟踪条件下，曲线在 $g_c \in (0.8125, 0.825]$处穿过零点，而细胞每个周期都会放电。该交点略低于 $\kappa = 1 - \varepsilon b$。因此，消除阈值失稳并非获得证书的必要条件。轨道快速穿过阈值线，因此增益接近该值便已足够。

图5(b)展示了 Aliev–Panfilov模型。在恢复阻尼下，证书在细胞发生去极化时对应的增益处成立，其中 $g_c \in (0.1800, 0.1825]$ 等于静默增益。在跟踪控制下，从 $g_c \in (1.300, 1.325]$ 开始证书成立，此时细胞以无控制速率放电，且无控制偏移量的三分之二被保留。在速率缩放下，从 $g_c \in (0.925, 0.950]$ 开始证书成立，此时细胞仍会越过 $u = \alpha$。在这些增益下，u 的峰值保持在 0.2 以下，偏移量约为无控制值的五分之一。当阈值设为 $u = 0.5$ 时，这些响应被视为静默，而证书再次仅在静默之后成立。

图5(c)展示了欣德马什–罗斯模型。在恢复阻尼和速率缩放下，$\bar{\mu}_\star$ 在每个测试增益处都保持为正值，正如命题 2 对放电细胞的要求。在跟踪控制下，$\bar{\mu}_\star$ 在 $g_c \in (2.0, 2.5]$ 处变为负值，此时细胞以目标轨道的速率放电。该交点低于 $\kappa = \beta^2/3$。

在这三个模型中，只有在跟踪控制下，证书才与显著放电并存。在恢复阻尼下，只有静默后证书才成立，否则永不成立。在速率缩放下，除 Aliev–Panfilov 模型外，也只有静默后证书才成立，否则永不成立。在 Aliev–Panfilov 模型中，即使细胞仍会穿越 $u = \alpha$，证书依然成立，且偏移量接近无控制值的五分之一。

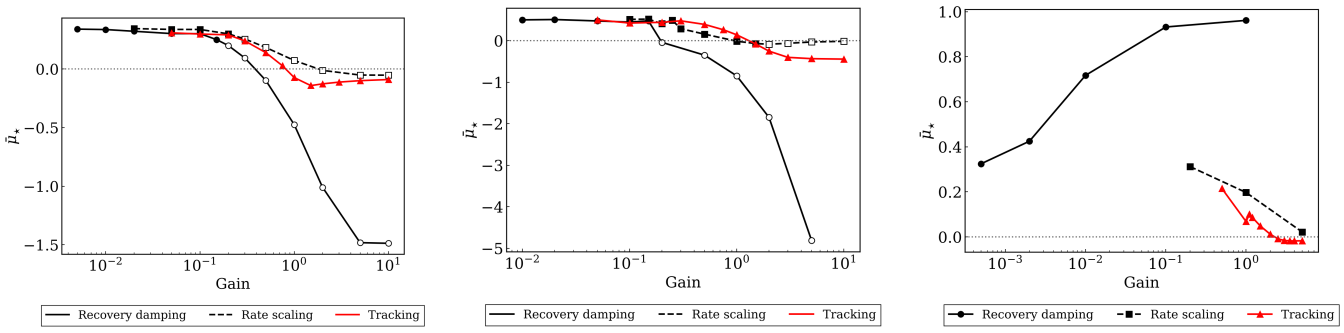


图5. 参考状态下最佳常度量证书 $\bar{\mu}_\star$ 随增益的变化。负值可证明$\lambda_1<0$ 在计算轨迹上成立。(a) Fitz Hugh–Nagumo模型。实心标记：放电。空心标记：静默。(b) Aliev–Panfilov模型，采用相同的标记。(c) 欣德马什–罗斯模型。细胞在所绘出的每个增益下都会放电。

6. 讨论

这些结果区分了消除激发的正则化与稳定放电轨道的正则化。较强的恢复阻尼和较大的速率缩放会消除混沌偏离。在受迫模型中，它们会产生负指数和简单的证书，但细胞不再放电，或者会停留在去极化状态。相比之下，跟踪控制和 Pyragas 控制能够稳定放电轨道。这些方法需要了解目标轨道或其周期，而且其稳态控制量可以趋于零。

自治模型表明，失效模式取决于模型。对 Hindmarsh–Rose适应变量施加恢复阻尼，在扫描的任何增益下都无法使细胞静默。它会消除终止爆发的适应过程，使细胞转为密集的紧张性放电。此时可达到负指数或零指数，但放电模式已被改写。放电率比揭示了这一变化，而偏移比则没有。速率缩放会降低放电率，使其在慢波上仅偶尔发生阈值穿越。Pyragas控制使细胞放电规律化，但最终稳定在不同于目标的轨道上，且稳态控制代价有限。因此，这些激发度量彼此互补，没有任何单一指标能够捕捉所有失效。

Chen 与 Dong 的高增益建议 [， 1993] 旨在使反馈强于强迫。在可兴奋细胞中，对恢复变量施加高增益会使细胞静默，或改写其放电模式。表1中的增益区间给出了有效增益的下限。静默或 S 发生大幅变化，则构成上限。

我们针对 Aliev–Panfilov模型，在 $F = 0.40$ 和 $\omega = 1.8$下审计了 λ_1 的数值符号。基准运行采用步长 $T/350$、50步的重归一化间隔、57个强迫周期的暂态、430个周期的观测窗口，以及初始条件（u， q）= (0。1，0。1)。每次审计运行只改变其中一项设置。初始条件还设为(0。5，0。2)和(0。05，1。0)。步长范围为$T/175$至 $T/700$，重归一化间隔为25至100步，暂态为29至115个周期，观测窗口为286至716个周期。无控制指数保持在 $+0.1005$至 $+0.1325$之间，基准值约为 $+0.1111$。每次运行中， $\gamma = 5$ 处的指数都等于 -0.0414 。因此，在所有这些变化下，符号均未改变。正指数的幅值在这些变化下最多约有百分之二十的波动。这种离散程度就是混沌指数的有限时间变异性。对 F 和 ω 中的强迫误差分别取 -15、0和 $+15$ 百分比，共九种组合，所得 $\gamma = 5$处的指数均保持在 -0.0704至 -0.0284之间。在 $A = 1.30$处对 A 和 ω施加相同误差时，在 $k = 5$的阻尼下，FitzHugh–Nagumo指数在 -1.730 至 -0.448的范围内均为负值。两项测试都针对高增益、静默状态。它们只是符号检查，并不能证明放电窗口对参数不确定性具有鲁棒性。

本研究存在局限。所有结果均为数值结果，且每个低阶模型只涵盖一个工作点。每个阈值的精度仅达到精细扫描的一个步长，而指数在一个步长内可能不止一次改变符号。如表1中 Aliev–Panfilov 的速率缩放条目所示，兴奋指数取决于所选阈值。欣德马什–罗斯的正则性检验依赖于对周期轨道零指数的容差。证书是逐轨迹的，且仅使用常度量。A

时变度量可能能够给出更多证书。命题1(ii)仅针对 FitzHugh–Nagumo模型得到了证明。跟踪需要目标轨道，而实际应用必须根据测量值对其进行估计。Pyragas控制需要周期。这里提出的干预措施均非治疗方案。

7. 结论

可激发振子的混沌控制有两个目标：规则性和保留放电。负的李雅普诺夫指数只能衡量第一个目标。在三个模型的相同混沌状态下，将激发度量与指数并列，可以区分这两种结果。在 FitzHugh–Nagumo模型中，恢复阻尼和速率缩放都留有一段增益范围，既能抑制混沌，又能维持放电。在 Aliev–Panfilov模型中，只有速率缩放留有这样的范围。恢复阻尼会在相同的扫描增益下同时消除混沌和放电。更大的增益则超出这一范围。在自治模型中，恢复阻尼能维持细胞放电，但会使其放电率成倍变化。轨道跟踪能在所有三个模型中抑制混沌并维持放电。Pyragas控制也能维持放电，但在欣德马什–罗斯模型中，系统最终稳定在一条不同于目标轨道的轨道上。将经典矩阵测度界应用于放电阈值处及自治回路，可以解释这种差异。只有在跟踪这一干预下，常度量证书才能与显著放电并存；它是唯一一种从雅可比矩阵的快方向项中减去增益的干预。因此，为可兴奋细胞选择增益时，除了指数之外，还需要考量激发度量。

致谢

人工智能工具用于编辑协助、校对和语言润色。所有理论发展、推导和图表均由作者完成。

数据可用性

未分析任何外部数据集。

参考文献

Aliev, R. R. & A. V. Panfilov [1996]“心脏兴奋的一个简单双变量模型”，《混沌、孤子& 与分形》**7**, 293–301. R. Barrio, Mart´ınez, M. A., S. Serrano & A. Shilnikov [2014] “簇发神经元 Hindmarsh–Rose模型中的宏观与微观混沌结构”，《混沌》**24**, 023128. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli & J.-M. Strelcyn [1980] “光滑动力系统与哈密顿系统的李雅普诺夫特征指数：一种计算所有指数的方法”，《力学》**15**, 9–30. M. E. Bleich & J. E. S. Socolar [2000] “起搏可激发振荡器的延迟反馈控制”，《分岔与混沌国际期刊》**10**, 603–609, doi:10.1142/S0218127400000414. G. Chen & X. Dong [1993] “混沌连续时间系统的反馈控制”，《*IEEE*电路与系统汇刊*I*：基础理论与应用》**40**,591–601, doi:10.1109/81.244908. G. Chen & X. Dong [1998]《从混沌到有序：方法、视角与应用》（世界科学出版社，新加坡）。Christini, D. J. & Collins, J. J. [1997] “可激发生理系统的混沌控制：几何分析”，《混沌》**7**, 544–549, doi:10.1063/1.166279. M. Ciszak, Euzzor, S., A. Geltrude, Al-Naimee, K., Arecchi, F. T. & Meucci, R. [2012] “利用滤波反馈控制受驱动 FitzHugh–Nagumo 电路中的混沌”，《控制论与物理学》**1**, 22–27. C. A. Desoer & H. Haneda [1972] “矩阵测度作为分析电路分析计算机算法的工具”，《*IEEE*电路理论汇刊》**19**, 480–486. C. A. Desoer & M. Vidyasagar [1975]《反馈系统：输入—输出特性》（学术出版社，纽约）。FitzHugh, R. [1961] “神经膜理论模型中的脉冲与生理状态”，*Biophys.J.***1**, 445–466。

Garfinkel, A., Spano, M. L., Ditto, W. L. & Weiss, J. N. [1992] “控制心脏混沌”, 《科学》257, 1230–1235. Glass, L. [2001] “生理学中的同步与节律过程”, 《自然》410, 277–284. Guevara, M. R., Glass, L. & Shrier, A. [1981] “周期性刺激的心脏细胞中的相位锁定、倍周期分岔与不规则动力学”, 《科学》214, 1350–1353. Hall, K., Christini, D. J., Tremblay, M., Collins, J. J., Glass, L. & Billette, J. [1997] “心脏交替现象的动态控制”, 《物理评论快报》78, 4518–4521. Hindmarsh, J. L. & Rose, R. M. [1984]“利用三个耦合一阶微分方程建立的神经元簇发模型”, 《伦敦皇家学会会刊B辑》221, 87–102. Huang, L., Wang, S., Lei, T., Huang, K. & Li, C. [2024] “具有局部活性忆阻器的耦合 HR–HNN 神经元”, 《分岔与混沌国际期刊》34, 2450022. Koseska, A., Volkov, E. & Kurths, J. [2013] “振荡淬灭机制：振幅死亡与振荡死亡”, 《物理学报告》531, 173–199. Lohmiller, W. & Slotine, J.-J. E. [1998] “非线性系统的收缩分析”, 《自动化》34, 683–696. Lozinskiĭ, S. M. [1958] “常微分方程数值积分的误差估计”, 《高等院校数学学报》, 52–90. Meucci, R., Euzzor, S., Geltrude, A., Al-Naimee, K., De Nicola, S. & Arecchi, F. T. [2012] “在 FitzHugh–Nagumo电路中利用‘相位反馈’进行尖峰控制”, 《物理快报A辑》376, 834–838. Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. [1990]“控制混沌”, 《物理评论快报》64, 1196–1199. Pyragas, K. [1992] “利用自控制反馈实现混沌的连续控制”, 《物理快报A辑》170, 421–428. Rajasekar, S., Murali, K. & Lakshmanan, M. [1997]“简单电子电路系统与 FitzHugh–Nagumo 方程中采用非反馈方法控制混沌”, 《混沌、孤子与分形》8, 1545– 1558, doi:10.1016/S0960-0779(96)00154-3. Sabbagh, H. [2000] “Hindmarsh–Rose方程混沌解的控制”, 《混沌、孤子与分形》11, 1213–1218. Sakaguchi, H. & Fujimoto, T. [2003] “利用周期力消除 Aliev–Panfilov模型中的螺旋混沌”, 《物理评论E辑》67, 067202. Sch¨oll, E. & Schuster, H. G.（编） [2008]《混沌控制手册》, 第2版（Wiley-VCH，魏恩海姆）。Sekikawa, M., Hayashi, S., Kousaka, T. & Inaba, N. [2026]“非自治 Bonhoeffer–van der Pol 振荡器中高阶嵌套混合模式振荡的分析”, 《分岔与混沌国际期刊》36, 2650034. Strogatz, S. H. [2015] 《非线性动力学与混沌》, 第2版（Westview出版社，科罗拉多州博尔德）。Suth, D., Luther, S. & Lilienkamp, T. [2024]“心脏动力学中的混沌控制：通过局部最小值起搏终止混沌状态”, 《网络生理学前沿》4, 1401661, doi:10.3389/fnetp. 2024.1401661. Yu, H.-J. & Tong, W.-J. [2009]“延迟自反馈控制欣德马什–罗斯神经元的混沌”, 《物理学报》58, 2977–2982。