arXiv:2611.29033v1 [math.AG] 21 Nov 2026

有理数域上奇素数次数塞韦里–布劳尔簇的自同构群

RAISA VADIMOVNA SEROVA 和 ANASTASIA VADIMOVNA VIKULOVA

Abstract. 我们证明，奇素数次数为 p 的非平凡塞韦里–布劳尔簇的自同构群中，唯一的非平凡有限子群是 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Introduction

定义 1.1. 一个 n 维簇 V，定义在域 $\mathbf{F}$ 上，称为次数为 塞韦里–布劳尔簇 $n+1$，如果

$$V \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{F})} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{F}}) \simeq \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbf{F}}},$$

其中$\mathbf{F}$ 是$\mathbf{F}$的代数闭包。 若该簇不与 $\mathbb{P}^n_{\mathbf{F}}$. 同构，则称其为非平凡的 V

关于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上塞韦里–布劳尔曲面的有限自同构群，以下结果已在 [10]中得到证明。

定理 1.2 ([10, 定理 1.3])。 设 V 是域 $\mathbb{Q}$ 上的非平凡塞韦里–布劳尔曲面，且 G 是一个有限群。那么，当且仅当 $G \subseteq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 时， G 同构于 $\mathrm{Aut}(V)$ 的一个子群

本文旨在将定理 1.2 推广到任意奇素数次的塞韦里–布劳尔簇。

定理 1.3。 设 V 是域 $\mathbb{Q}$ 上次数为奇素数 p 的非平凡塞韦里–布劳尔簇，且 G 是一个有限群。那么，当且仅当 $G \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 时， G 同构于 $\mathrm{Aut}(V)$ 的一个子群

注 1.4。 注意，当 $p = 2$. 时，定理 1.3 不成立。 C事实上，考虑由方程 $x^2+y^2+z^2 = 0$ 在 $\mathbb{P}^2$. 上定义的一个非平凡塞韦里–布劳尔曲线 C $\mathbb{Q}$。于是，对称群 $\mathfrak{S}_3$ 包含于 Aut(C)。

本文的安排如下。我们在第 2 节证明一些补充引理。在第 3 节，我们汇集关于塞韦里–布劳尔簇的一些基本事实，并研究其自同构群的有限子群。在第 4 节，我们证明定理 1.3。

致谢。 作者谨向 Ivan Cheltsov 和 Constantin Shramov 致以诚挚谢意，感谢他们给予的启发、持续的支持以及源源不断的奇思妙想。

第一作者获得 Simons Collaboration 资助的项目 *Moduli of vari-eties* 支持。第二作者获得项目 SERI REF-1131-552105 的支持。

2. Preliminaries

本节汇总一些辅助性事实。

引理 2.1. 设 p 是一个奇素数。那么 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \not\subset \mathrm{GL}_p(\mathbb{Q})$。

证明。 假设 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ 在线性空间 $\mathbb{Q}^p$. 上有一个线性作用。由于该群是阿贝尔群，因此表示群中元素的矩阵可以在 $\mathbb{Q}$ 上同时对角化。因此，该群的元素共轭于

$$\begin{pmatrix} \zeta_p^{a_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_p^{a_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_p^{a_{p-1}} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 ζ_p 是一个非平凡的 p 次单位根，且 $a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$.。注意，这些矩阵的行列式和迹属于 $\mathbb{Q}$.。因此，这些矩阵必须满足以下条件：

$$a_0 + \cdots + a_{p-1} \equiv 0 \mod p; \tag{2.2}$$

$$\zeta_p^{a_0} + \cdots + \zeta_p^{a_{p-1}} \in \mathbb{Q}. \tag{2.3}$$

设 $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ 是与矩阵 (2.1) 相关联的元组。满足 (2.2) 和 (2.3) 的元组有 $p! + 1$ 个，即 $(0,0,\cdots,0)$ 以及元组 $(0,1,2,\cdots,p-1)$ 的所有排列。设 α 和 β 是 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. 的两个生成元。不失一般性，我们可以假设 α 和 β 分别与元组 $(0,1,\cdots,p-1)$ 和 $(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1})$ 相关联，且一个矩阵不是另一个矩阵的幂。将这两个矩阵相乘，得到具有如下元组的矩阵 (2.1)

$$(a_0, 1 + a_1, \cdots, p - 1 + a_{p-1}).$$

假设 $a_0 \neq 0$，那么对于某个 i， $a_i = 0$，乘法结果如下：

$$(a_0, 1 + a_1, \cdots, i, \cdots, p - 1 + a_{p-1}).$$

继续将结果与元组为（a_0， a_1， $\cdots$， a_{p-1}）的矩阵相乘，我们得到

$$(i, a_1', \cdots, i, \cdots, a_1').$$

该矩阵不满足（2.3）。如果 $a_0 = 0$，同样进行运算可得一个元组为的矩阵，其中有两个零，这同样不满足（2.3）。因此，要么是平凡群，要么是由元组为的矩阵生成的阶为 p 的群

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}).$$

□

引理 2.2。 考虑域扩张 $\mathbb{Q} \subset \mathbf{L}$，它是由元素 $\bar{x} \in \mathbf{L}$ 生成的奇素数次数 p扩张，满足 $\bar{x}^p - \alpha = 0$，其中 $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. 。考虑元素 $\bar{y} \in \mathbf{L}$，满足 $\bar{y}^p - \beta = 0$，其中 $\beta \in \mathbb{Q}^*$. 。那么，对于 $c \in \mathbb{Q}^*$， $\bar{y} = c\bar{x}^i$，其中 $0 \leqslant i \leqslant p - 1$.为某个整数

证明。 首先，假设 $\beta \in (\mathbb{Q}^*)^p$. 那么 $\bar{y}$ 是 $\mathbb{Q}$. 中的一个元素。因此，我们可以假设 $\beta \notin (\mathbb{Q}^*)^p$，于是元素 $\bar{y}$ 生成一个次数为 p. 的域扩张。这意味着 $\mathbf{1}, \bar{y}, \cdots, \bar{y}^{p-1}$ 是$\mathbf{L}$的基。

我们有

$$\bar{y} = u_0 + u_1\bar{x} + \cdots + u_{p-1}\bar{x}^{p-1}$$

对于 $u_i \in \mathbb{Q}.$ ，考虑元素 $\bar{y}.$ 的乘法的迹。注意，所有元素 $\bar{x}^i$ 的迹都为零，这可以在基 $1, \bar{x}, \cdots, \bar{x}^{p-1}.$ 下轻易算出。因此，一方面，乘以 $\bar{y}$的迹等于 $pu_0.$；另一方面，若在基 $1, \bar{y}, \cdots, \bar{y}^{p-1},$ 下考虑乘以元素 $\bar{y}$，则其迹等于零。由此得到

$$\bar{y} = u_1\bar{x} + \cdots + u_{p-1}\bar{x}^{p-1}.$$

设 i 是满足 $u_i \neq 0$的最小指标，则可写成 $\bar{y} = \bar{x}^i\bar{z}$，其中

$$\bar{z} = u_i + u_{i+1}\bar{x} + \cdots + u_{p-1}\bar{x}^{p-1-i}.$$

如果对所有 $j \neq i$都有 $u_j = 0$，那么 $\bar{z} = u_i$ ，结论成立。假设存在系数 $u_j \neq 0$ 满足 $j > i$，则可将处理 $\bar{y}$ 的方法同样应用于 $\bar{z}$。事实上，考虑乘以元素 $\bar{z}$的迹。一方面它为零，另一方面它等于 pu_i 且 $u_i = 0$，这就产生了矛盾。因此得到 $\bar{y} = u_i\bar{x}^i,$ ，如所求。

□

3. Severi–Brauer varieties

本节研究塞韦里–布劳尔簇自同构群的有限子群。先提及塞韦里–布劳尔簇的一些性质（更多细节参见例如 [3] and [4]）。若 V 是域 $\mathbf{F},$ 上的塞韦里–布劳尔簇，则 V非平凡当且仅当 $V(\mathbf{F}) = \varnothing$ (参见 [3, 定理 5.1.3])。域$\mathbf{F}$上维数为 n的塞韦里–布劳尔簇与 $\mathbf{F}$ 上的维数为（$n+1$）^{2} 的中心单代数之间存在双射（例如参见 [3, §5.2]）。

定理 3.1 ([3, 定理 2.1.3 和5.2。1])**.** 设 V是一个次数为素数 $p.$的非平凡塞韦里–布劳尔簇。与 V相关联的中心单代数 A 是一个除代数。

下述定理描述了塞韦里–布劳尔簇的自同构群。

定理 3.2 (例如，参见 [2, 第 266]或 [8, 引理4。1])。 若中心单代数 A 对应于域 $\mathbf{F}$ 上的塞韦里–布劳尔簇 V ，则有 $\mathrm{Aut}(V) \simeq A^*/\mathbf{F}^*.$

定理 3.2 使我们能够对塞韦里–布劳尔簇的自同构的阶加以限制。

引理 3.3 (参见 [7, 引理 5。2])。 设 V 是域 $\mathbb{Q}.$ 上的一个非平凡、次数为奇素数 p 的塞韦里–布劳尔簇，则$\mathrm{Aut}(V)$ 不含有素数阶 $l > p.$的元素

证明。 设存在一个素数阶为 $l > p.$ 的元素 $x \in$ Aut(V)。令 A 为域 $\mathbb{Q}$ 上的、维数为 p^2 且对应于簇 V的中心单代数。由定理 3.2，存在一个元素 $\bar{x} \in A^*$ ，使得 $\bar{x} \notin \mathbb{Q}^*$ 且 $\bar{x}^l = a \in \mathbb{Q}^*.$

由于 V是非平凡的塞韦里–布劳尔簇，根据定理 3.1，中心单代数 A是除代数。因此，x 生成一个子域 $B \subset A$。由于

$$\dim_{\mathbb{Q}} A = \dim_B A \cdot \dim_{\mathbb{Q}} B,$$

我们得到 $\dim_{\mathbb{Q}} B = p$，因为 $\dim_{\mathbb{Q}} B = p^2$ 是不可能的，因为 B 是交换代数，而 A不是。

设 $f(t)$ 是 $\bar{x}$ 在 $\mathbb{Q}$. 上的最小多项式。其次数等于 $p.$。此外，多项式 $f(t)$ 整除 $t^l - a.$。特别地，多项式 $t^l - a$ 在 $\mathbb{Q}$. 上可约。因此，根据 [5, 定理 VI.9.1]，存在某个 $c \in \mathbb{Q}^*$. 使得 $a = c^l$。我们得到，多项式 $f(ct)$ 整除第 l 个分圆多项式 $\Phi_l(t)$，但后者在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。由此矛盾可得引理的结论。

□

引理 3.4. 设 V 是 $\mathbb{Q}$. 上一个次数为奇素数 p 的非平凡塞韦里–布劳尔簇。设 G 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 中的一个有限子群。那么 $G \subseteq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

证明。 根据 [6,定理 1.4]（另见 [9, 第 1] 节），我们得到

$$G \subseteq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

其中， n 是一个正整数，使得每个整除 n 的素数 q 都模 p.同余于 1。由引理 3.3可得 $n = 1.$。因此，我们得到 $G \subseteq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

□

回顾循环代数的定义，它是中心单代数中最简单的例子之一。

定义 3.5. 设$\mathbf{F}$ 是一个域。设$\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ 是一个伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群同构于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，其中 $n \geqslant 2.$ 为整数。考虑元素 $a \in \mathbf{F}^*$ 以及 Gal(**L**/**F**)的生成元 σ 。 那么，可以将中心单代数 A 与 a 和 σ 相关联，它是$\mathbf{F}$ 上的代数，由$\mathbf{L}$ 和元素 α 生成，满足

$$\alpha^n = a \ \text{ and } \ \lambda\alpha = \alpha\sigma(\lambda) \ \text{ for } \ \lambda \in \mathbf{L}.$$

这样的中心单代数 A 称为循环代数。

以下关于 $\mathbb{Q}$ 上的中心单除代数的古老结果，由代数领域的巨擘 Richard Brauer、Emmy Noether 和 Helmut Hasse 于 1932年证明。

定理 3.6 ([1,主定理])。 设 A 是 $\mathbb{Q}$. 上的一个中心单代数。假设 A 是一个除代数。那么 A 是一个循环代数。

现在我们将研究奇素数次数 p的塞韦里–布劳尔簇的自同构群中的 p-子群。首先，我们证明群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$在 $\mathbb{Q}$.上的每个非平凡素数次数塞韦里–布劳尔簇 p上都忠实作用

引理 3.7。 设 V 是域 $\mathbb{Q}$. 上的一个非平凡素数次数塞韦里–布劳尔簇 p。那么 自同构 (V) 包含一个与 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.同构的子群

证明。 由定理 3.1，塞韦里–布劳尔簇 V 对应于除代数 A；由定理 3.6，该代数是循环代数。根据命题 2.5， [3, 该代数 A 由一个次数为 p 的伽罗瓦扩张 $\mathbb{Q} \subset \mathbf{L}$ 和一个元素 $\alpha \in A$ 生成，使得 $\alpha \notin \mathbb{Q}^*$ 并且 $\alpha^p \in \mathbb{Q}^*$. 此外，对于所有 $\lambda \in \mathbf{L}$, 都有 $\alpha\lambda = \sigma(\lambda)\alpha$，其中 σ 是伽罗瓦群 Gal(**L**/$\mathbb{Q}$) 的生成元。由定理 3.2，元素 α 给出一个阶为 $p.$ 的自同构。因此，我们得到

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(V).$$

□

引理 3.8. 设 A是一个维数为 p^2 、定义在 $\mathbb{Q}$.上的中心单代数。考虑元素 $x \in A$, 满足 $x^p = 1$ 且 $x \notin \mathbb{Q}$. 。那么 A 是一个矩阵代数。

证明。 假设 A 不是矩阵代数。由定理 3.1 可知， A是一个除代数。我们有

$$0 = x^p - 1 = (x-1)\sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

$_{n-1}$由于 $x \notin \mathbb{Q}$ 且 A 是一个除代数，因此我们得到 $\sum x^i = 0$。所以我们有一个$_{i=0}$扩张 $\mathbb{Q} \subset \mathbf{K}$, 其在 A 中的次数为 $p-1$, 由 x. 生成。这意味着

$$p^2 = \dim_{\mathbb{Q}} A = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{K} \cdot \dim_{\mathbf{K}} A = (p-1)\dim_{\mathbf{K}} A,$$

这就构成了矛盾。

□

引理 3.9。 设 A 是一个在 $\mathbb{Q}$. 上的维数为 p^2 的中心单代数。假设

$$\widehat{T} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \subset A^*/\mathbb{Q}^*,$$

$\widehat{}$并令 x 和 y 为 T. 的生成元。若 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别是自然同态 $A^* \to A^*/\mathbb{Q}^*$下 x 和 y 的任意原像，则

$$\bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1} = \zeta_p \bar{y},$$

其中 ζ_p 是一个非平凡的 p次单位根。

证明。 由于 x 和 y 彼此交换，因此 $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ 属于 $A^*/\mathbb{Q}^*$, 。于是我们得到

$$\bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1} = a\bar{y} \tag{3.1}$$

对某个 $a \in \mathbb{Q}^*$. 成立。由于 $\bar{x}^p \in \mathbb{Q}^*$, ，我们得出 $\bar{x}^p$ 与 $\bar{y}$交换, ，因此由 (3.1) 得

$$\bar{y} = \bar{x}^p \bar{y} \bar{x}^{-p} = a^p \bar{y}.$$

因此，我们有 $a^p = 1$.

反设 $a = 1$. 。因此，元素 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 彼此交换。假设 $\bar{x}^p$ 和 $\bar{y}^p$ 属于 $(\mathbb{Q}^*)^p$. 。不失一般性，我们可以取 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别为 x 和 y的原像，使得 $\bar{x}^p = \bar{y}^p = 1$、 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 也彼此交换。这意味着 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \subset A^*$. 。由引理 3.8 可知 A 是一个矩阵代数。因此由引理 2.1 可知

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \not\subset A^*.$$

因此，在这种情况下 $a \neq 1$.

现在假设 $\bar{x}^p \notin (\mathbb{Q}^*)^p$. 考虑由以下元素生成的 A 的子代数 B

$$1, \bar{x}^i, \bar{y}^j, \bar{x}^i\bar{y}^j,\ i,j \in \{1, \cdots, p-1\}. \tag{3.2}$$

让我们证明这些元素在 $\mathbb{Q}$. 上线性无关。首先，注意到元素 1、 $\bar{x}$、 $\cdots$、 $\bar{x}^{p-1}$在 $\mathbb{Q}$. 上线性无关。事实上，考虑由这些 p 元素生成的代数 B' 。由方程

$$\dim_{B'} A \cdot \dim_{\mathbb{Q}} B' = \dim_{\mathbb{Q}} A$$

我们得到 $\dim_{\mathbb{Q}} B'$ 只能是 1，或 $p.$。然而，根据假设，元素 $\bar{x}$ 不属于 $\mathbb{Q}.$。由于

$$A \supseteq B \supseteq B',$$

我们得到 $\dim_{\mathbb{Q}} B$ 为 p、或 $p^2.$。因此，只需证明 $B' \neq B$，以排除 $\dim_{\mathbb{Q}} B = p.$ 的情形。为证明这一点，只需证明 $\bar{y}$ 不属于 $B'.$。反设成立。由引理 2.2，元素 $\bar{y}$ 等于 $c\bar{x}^i$，其中 $c \in \mathbb{Q}^*$ 且 $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$。这与 x 和 y 生成群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. 这一事实矛盾。

这给出 $\dim_{\mathbb{Q}} B = p^2 = \dim_{\mathbb{Q}} A.$。但是， A 是中心单代数，而 B 是交换代数。这个矛盾说明 a 是一个非平凡的 p 次单位根。

□

引理 3.10. 设 V 是一个次数为奇素数的非平凡塞韦里–布劳尔簇 $p,$ 定义在有理数域 $\mathbb{Q}.$ 上。那么 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ 不是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的子群。

证明。设 A 是与 Severi–Brauer 簇 $V.$ 对应的中心单代数。由定理 3.2 可得 Aut(V) $\simeq A^*/\mathbb{Q}^*.$。假设

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \subset A^*/\mathbb{Q}^*.$$

设 x 和 y 是 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2.$ 的生成元。设 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别是 x 和 y 在自然同态 $A^* \to A^*/\mathbb{Q}^*,$ 下的任意原像。由引理 3.9 可得

$$\bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1} = \zeta_p \bar{y}$$

其中 ζ_p 是一个非平凡的 p 次单位根。然而，域 $\mathbb{Q}$ 不含非平凡的 p 次单位根。这一矛盾给出

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \not\subset \mathrm{Aut}(V).$$

□

4. Proof of Theorem 1.3

本节证明定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。设 $G \subset$ Aut(V) 是自同构群 Aut($V.$) 的一个有限子群。由引理 3.4 可得 $G \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2.$。因此，由引理 3.10，群 G 包含于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ；由引理 3.7，群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 包含于 Aut(V)。

□

References

[1] R. Brauer, E. Noether, H. Hasse, *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, 《J. Reine Angew. Math.》**167** （1932年），399–404。[2] F.Chˆatelet, *Variations sur un thème de H. Poincaré*, 《Ann. Sci. ´EcoleNorm. Sup.》**61** （1944），第3期，249–300。[3] Ph. Gille，T. Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, 《Cambridge Studies in Advanced Mathematics》，**165** （2017）。[4] J. Koll´ar, *Severi–Brauer varieties; a geometric treatment*, arXiv:1606.04368 [数学.AG] （2016）。[5] S. Lang, *Algebra*, 《Graduate Texts in Mathematics》，Springer New York，NY（2002）。[6] A. Savelyeva, *Finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties*, arXiv:2503.20514 [数学.AG] （2025）。[7] C. A. Shramov, *Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces*, 《European Journal of Math- ematics》，**7** （2021），591–612。

[8] C. A. Shramov, V. A. Vologodsky, *Boundedness for finite subgroups of linear algebraic groups*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》**374**（2021），9029–9046。

[9] A. 素尼娜, *Finite subgroups of prime-degree, arXiv:2508.03916* [数学.AG] (2025)。

[10] A. V. 维尼洛娃, *Birational automorphism groups of Severi*《国际数学研究通知》**2024**，第24期（2024），14638–14654。

Raisa V. Serova
School of Mathematics, The University of Edinburgh, Edinburgh EH9 3JZ, UK
Email address: serova.r@yandex.ru

Anastasia V. Vikulova Department of Mathematics and Computer Science, University of Basel, Spiegelgasse 1, 4051 Basel, Switzerland

Email address: vikulovaav@gmail.com