arXiv:2611.29047v1 [math.GM] 21 Nov 2026

具有变系数和索宁核的线性和非线性积分微分方程

˜SEBASTIAN NUNEZ 和 JOEL E. RESTREPO

Abstract.我们研究具有索宁核和绝对连续核、且系数为可积函数或连续函数的线性和非线性积分-微分方程。在线性情形下，对于所有情况，唯一解都可由一个显式的收敛无穷级数给出，该级数涉及核与变系数的卷积复合。文中给出了许多例子。对于非线性情形，在非线性项满足适当条件的情况下，证明了解的存在唯一性。解析解由通过逐次逼近法得到的迭代序列的极限给出。通过计算逼近解的迭代序列，可以得到若干问题的精确解析表达式。

1. Introduction

以下具有变系数的常微分方程的研究是一个经典课题：

$$v^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)v^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)v^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1(t)v'(t) = g(t),\ t \in [0, T],$$

其中变系数 $a_i(t)$（$i = 1, \ldots\ldots, n$）可以是可积函数、连续函数、H¨older函数或其他类型的函数。近期研究通过采用非局部算子，考察了导数的局部行为发生改变的类似方程。特别是，可以使用分数阶微分算子。这些算子与分数阶微积分和分数阶微分方程（FDEs）的研究密切相关 [26, 33, 41]。这些背景下的应用可见于 [24, 31]。

已经针对若干类具有变系数的线性分数阶微分方程构造出显式解。所采用的方法包括格林函数 [27, 34], 、巴拿赫不动点定理 [10, 35], 、幂级数方法 [25, 40], 、Volterra积分方程[4, 5, 7], 等。

本文采用一种经典方法，将原始积分微分方程转化为等价的积分方程。因此，可以应用巴拿赫不动点定理和逐次逼近法来证明解的存在唯一性。对于线性分数阶微分方程，使用后一种方法论的先驱性工作似乎是 [36]。这种方法已被

2010 数学主题分类。15A06, 33E12, 26A33, 34A08, 15A06。

关键词和短语。 线性和非线性积分-微分方程、索宁核、变系数、巴拿赫不动点定理、逐次逼近、级数解、米塔格-莱夫勒函数。本文已被《Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation》接受发表。

成功应用于许多研究中，例如 [2, 3, 7, 10, 27, 29, 35]。所得解由一致收敛无穷级数组成，其中涉及不同类型的分数阶积分与乘子函数的嵌套复合。

其他类型的积分微分算子也被用于研究具有变系数的线性分数阶微分方程。例如，关于函数 [37] 的分数阶微积分，以及采用 Mittag-Leffler核的算子 [9, 11]。

对具有变系数的分数阶微分方程的研究，为波动型和热传导型偏积分微分方程中的新研究与应用开辟了可能性[12, 38]。此外，一些研究人员还定义了带有时间变系数的新类时间分数阶Dirac型算子，并将其应用于分数阶Clifford分析 [8, 39]。

需要强调的是，据我们所知，具有变系数的分数阶微分方程的非线性情形仍在研究之中。对此，我们提及近期的一篇论文 [30], ，其中构造了一个格林函数来求解该问题。在我们的研究中，我们也采用不同的方法，为非线性情形的研究作出了贡献。

为涵盖广泛的含奇异核的积分-微分方程，我们接下来考虑以下线性（分别为非线性）问题:

$$(\kappa_0 * v)'(t) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * v)'(t) = g(t)\big(\text{or} \quad g(t, v(t))\big), \quad t \in [0, T],$$

在初始条件

$$(\kappa_0 * v)(0) = a \quad \text{or} \quad v(0) = a,$$

其中， v 是未知函数， κ_0 是一个索宁核， $a \in \mathbb{R}$ 和 $\kappa_i \in AC[0,T]$对于 $i = 1, \ldots, m.$。变系数和源函数分别属于两个不同的函数空间：i) σ_i, $g \in L^1[0,T]$; ii) σ_i, $g \in C[0,T]$.

值得指出的是，形如（$\kappa_0 * v$）′（t）的表达式与所谓的广义分数阶微积分算子 [18, 19, 20, 21, 22, 28] 及其参考文献有关。这一思想至少可以追溯到 [28]。

我们的方程可直接应用于分数阶动力学模型 [23]、黏弹性 [17, 32], 和介电弛豫 [13]。索宁核在我们的方法中发挥着核心作用，因为它们涵盖了经典的分数幂型以及其他一些更一般的类型。

本研究的一个重要发现是，我们的方法和技术无法将所有 $\kappa_i's$ 都视为索宁核。或许，解所涉及的函数空间需要改进。我们在证明中清楚地表明，这些核必须属于 $AC[0,T]$，并满足正则化条件。特别是，在 $L^1[0,T]$ 中求上述方程的解时，为了估计表达式（$\kappa_i * v$）′（t），我们需要对核施加更强的正则性要求。这一点将在第 3 节详细讨论。

本文的组织如下：在第2节中，我们回顾全文将要使用的所有必要概念、基础结果、函数空间、算子及其他相关内容。在第3 节和第5节中，我们研究具有可积函数（分别为连续）变系数的线性积分-微分方程，并在空间 L^{κ_0} 和 C^{κ_0}. 中给出存在性、唯一性及显式解。而第

4 节和第 6 节则专门讨论非线性情形。全文中还给出了多个示例，以展示我们结果的实用性。

2. Preliminaries

2.1. **基本函数空间**。现在我们来介绍以下众所周知的集合：

$$L^1[0,T]=\left\{f:[0,T]\to\mathbb{R}\ :\ \|f\|_{L^1[0,T]}:=\int_0^T|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty\right\};$$
$$AC[0,T]=\{f\colon\ [0,T]\to\mathbb{R}\colon\ f\text{在 }[0,T]\text{上绝对连续};$$
$$AC^n[0,T]=\left\{f\colon\ [0,T]\to\mathbb{R}\colon\ f^{(n-1)}\text{存在且属于 }AC[0,T]\right\},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

回忆一下，$L^1[0,T]$ 关于其范数 $\|\cdot\|_{L^1[0,T]}$是一个巴拿赫空间，而$AC[0,T]$ 关于以下范数是一个巴拿赫空间：

$$\|f\|_{AC[0,T]}=|f(0)|+\|f'\|_{L^1[0,T]}.$$

接下来，我们将证明一个基本结果，稍后会在分析中用到。

命题 2.1。如果 $f\in L^1[0,T]$ 且 $v\in C[0,T]$，则 $f*v\in C[0,T]$.

证明。不妨设 $t_0<t$，于是

$$\begin{aligned}|(f*v)(t)-(f*v)(t_0)|&=\left|\int_0^t v(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t_0}v(t_0-s)f(s)\,\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\int_0^{t_0}\left(|v(t-s)-v(t_0-s)|\right)|f(s)|\,\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t|v(t-s)|\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\\&=\int_0^{t_0}|v(t-s)-v(t_0-s)\|f(s)|\,\mathrm{d}s+\|v\|_\infty\int_{t_0}^t|f(u)|\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由于 $f\in L^1[0,T]$，我们有 $\lim_{t\to t_0}\int_{t_0}^t|f(u)|\,\mathrm{d}u=0$. 根据勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{t\to t_0}\int_0^{t_0}|v(t-s)-v(t_0-s)||f(s)|\,\mathrm{d}s=0.$$

因此

$$\lim_{t\to t_0}|(f*v)(t)-(f*v)(t_0)|=0,\quad\text{so}\quad f*v\in C[0,T].$$

□

2.2. **分数阶积分-微分算子**。我们首先回顾黎曼-刘维尔型的分数阶积分和导数 [6, 41]。

定义 2.2。阶数为 $\beta\in\mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Re}(\beta)>0$ 的黎曼–刘维尔分数阶积分定义如下 [41, 第 2.3 节和第 2.4] 节：

$${}^{RL}I_0^\beta f(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}f(s)\,\mathrm{d}s,\qquad f\in L^1[0,T].$$

The 阶数为 $\beta \in \mathbb{C}$ （Re(β) $\geqslant 0$）的 Riemann–Liouville 分数阶导数定义为 b y:

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\beta} f(t) &= D^n \, {}^{RL}I_0^{n-\beta} f(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\beta-1} f(s)\, \mathrm{d}s, \quad f \in AC^n[0,T],
\end{aligned}
$$

其中 $n := \lfloor$实数集 $\beta \rfloor + 1$.

2.3. **索宁核。**

定义 2.3. [42, 定义 2.1] 若核 $\kappa \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 存在一个核 $\tilde{\kappa} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$，使得

$$
(\kappa * \tilde{\kappa})(t) = \int_0^t \kappa(t-s)\tilde{\kappa}(s)\, \mathrm{d}s = 1, \quad \text{for almost all} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}
$$

关系 (2.1) 是对称的，因此 $\tilde{\kappa}$ 也是索宁核。如 [42, 第 2],页所述，两个核 κ 和 $\tilde{\kappa}$ 必然都是无界的，当 $t \to 0^+$。

下面给出几个索宁核的例子。下一个例子见[18,第 5]页。考虑以下函数:

$$
h(t) = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}, \quad \ell(t) = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}, \quad t > 0.
$$

为验证条件 (2.1)，我们计算

$$
\begin{aligned}
(h * \ell)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{-1/2} s^{-1/2}}{\pi} \mathrm{d}s = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-u)^{-1/2} u^{-1/2}\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi} B(1/2, 1/2) = \frac{\pi}{\pi} = 1,
\end{aligned}
$$

其中 $B(\cdot,\cdot)$ 表示贝塔函数。因此，(h, ℓ) 构成一对索宁核。

一般而言，我们可以利用拉普拉斯变换 $\mathcal{L}$，来验证一对函数 (f, g) 是否构成一对索宁核。该变换定义为 $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$，对任意 Re($s$) > 0. 均成立。事实上，根据卷积性质，我们知道

$$
\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\, \mathcal{L}\{g\}(s).
$$

要使 (f, g) 成为一对索宁核，只需其卷积满足条件 (2.1)，或等价地满足

$$
s\, \mathcal{L}\{f\}(s)\, \mathcal{L}\{g\}(s) = 1,
$$

前提是它们的拉普拉斯变换存在。

现在我们再介绍另一对 [42, p. 19]:

$$
f(t) = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}, \quad g(t) = \frac{\cosh(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}.
$$

它们的拉普拉斯变换为

$$
\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{e^{-1/s}}{\sqrt{s}}, \quad \mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{e^{1/s}}{\sqrt{s}}.
$$

由此可得

$$s\,\mathcal{L}\{f\}(s)\,\mathcal{L}\{g\}(s) = s\cdot\left(\frac{e^{-1/s}}{\sqrt{s}}\cdot\frac{e^{1/s}}{\sqrt{s}}\right) = 1.$$

另一个有趣的例子 [42, 见第 20]页

$$\varphi(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}},\quad \phi(t) = \lambda^{\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}}{\tau^{\alpha+1}}\mathrm{d}\tau,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad \lambda\geqslant 0.$$

容易验证

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = \frac{1}{(\lambda+s)^{\alpha}},\quad \mathcal{L}\{\phi\}(s) = \frac{(\lambda+s)^{\alpha}}{s},$$

因此

$$s\,\mathcal{L}\{\varphi\}(s)\,\mathcal{L}\{\phi\}(s) = s\left(\frac{1}{(\lambda+s)^{\alpha}}\cdot\frac{(\lambda+s)^{\alpha}}{s}\right) = 1.$$

2.4. 特殊函数空间。我们引入一些将用于分析这些方程的解的空间。

2.4.1. L^1的子空间。

定义 2.4. 设 κ_0 是一个索宁核。定义

$$L^{\kappa_0} := \{v\in L^1[0,T] : \kappa_0 * v \in AC[0,T]\}$$

赋予范数

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^{\kappa_0}} &= \|v\|_{L^1[0,T]} + \|\kappa_0 * v\|_{AC[0,T]}\\ &= \|v\|_{L^1[0,T]} + \|(\kappa_0 * v)'\|_{L^1[0,T]} + |(\kappa_0 * v)(0)|.\end{aligned}$$

接下来，我们证明 L^{κ_0} 在范数 $\|\cdot\|_{L^{\kappa_0}}$下是一个巴拿赫空间。

定理 2.5. 空间 $(L^{\kappa_0}, \|\cdot\|_{L^{\kappa_0}})$ 是一个巴拿赫空间。

证明. 我们证明 L^{κ_0} 中的每个柯西序列都收敛到 L^{κ_0}中的一个极限。设$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 L^{κ_0}中的一个柯西序列，那么，对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对所有 $m,\ n>N$，我们有 $\|v_n - v_m\|_{L^{\kappa_0}} < \varepsilon$，或者等价地

$$\|v_n - v_m\|_{L^1[0,T]} + \|(\kappa_0 * v_n)' - (\kappa_0 * v_m)'\|_{L^1[0,T]} + |(\kappa_0 * v_n)(0) - (\kappa_0 * v_m)(0)| < \varepsilon.$$

由上述不等式可知：

i) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $L^1[0,T]$中的柯西序列；ii) $\{(\kappa_0 * v_n)'\}_{n=1}^{\infty}$是 $L^1[0,T]$中的柯西序列；iii) $\{(\kappa_0 * v_n)(0)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$中的柯西序列。

由于 $L^1[0,T]$ 和 $\mathbb{R}$ 都是巴拿赫空间，这些序列分别收敛于各自空间中的极限：

i') 存在 $v\in L^1[0,T]$，使得 $v_n\to v$ 属于 $L^1[0,T]$；ii') 存在 $f\in L^1[0,T]$，使得 $(\kappa_0 * v_n)'\to f$ 属于 $L^1[0,T]$；iii') 存在 $c\in\mathbb{R}$，使得 $(\kappa_0 * v_n)(0)\to c$。

我们验证候选极限 v 属于 L^{κ_0}。我们已经知道 $v \in L^1[0,T]$；接下来只需证明 $\kappa_0 * v \in AC[0,T]$。定义 $h_n(t) = (\kappa_0 * v_n)(t)$。由于$h_n \in AC[0,T]$,

$$h_n(t) = (\kappa_0 * v_n)(0) + \int_0^t (\kappa_0 * v_n)'(s)\,\mathrm{d}s.$$

定义 $h(t) := c + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. 显然， $h \in AC[0,T]$, $h' = f$ 几乎处处成立，且 $h(0) = c$。我们想要证明 $h_n \to h$ 一致收敛。事实上，对于任意 $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
|h_n(t) - h(t)| &= \left|(\kappa_0 * v_n)(0) + \int_0^t (\kappa_0 * v_n)'(s)\,\mathrm{d}s - \left(c + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\right| \\
&\leqslant |(\kappa_0 * v_n)(0) - c| + \int_0^t |(\kappa_0 * v_n)'(s) - f(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant |(\kappa_0 * v_n)(0) - c| + \|(\kappa_0 * v_n)' - f\|_{L^1[0,T]}.
\end{aligned}$$

右端的两项在 $n \to +\infty$ 时都趋于零，因此 $\|h_n - h\|_\infty \to 0$，即 $h_n \to h$ 一致收敛。这意味着 $h_n \to h$ 属于 $L^1[0,T]$。由于 $v_n \to v$ 属于 $L^1[0,T]$，$\kappa_0 \in L^1[0,T]$ 以及杨氏卷积不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|h_n - \kappa_0 * v\|_{L^1[0,T]} &= \|\kappa_0 * v_n - \kappa_0 * v\|_{L^1[0,T]} \\
&\leqslant \|\kappa_0\|_{L^1[0,T]} \cdot \|v_n - v\|_{L^1[0,T]} \to 0, \quad \text{as} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

由 L^1 中极限的唯一性，我们得出 $h = \kappa_0 * v$ 几乎处处成立。由于 $h \in AC[0,T]$, $\kappa_0 * v \in AC[0,T]$。因此， $v \in L^{\kappa_0}$。最后，我们只需证明 $v_n \to v$ 属于 L^{κ_0}范数空间。事实上，我们有

$$\|v_n - v\|_{L^{\kappa_0}} = \|v_n - v\|_{L^1[0,T]} + \|(\kappa_0 * v_n)' - (\kappa_0 * v)'\|_{L^1[0,T]} + |(\kappa_0 * v_n)(0) - (\kappa_0 * v)(0)|.$$

我们已知 $(\kappa_0 * v)'(t) = f(t)$，且 $(\kappa_0 * v)(0) = c$。因此

$$\|v_n - v\|_{L^{\kappa_0}} = \|v_n - v\|_{L^1[0,T]} + \|(\kappa_0 * v_n)' - f\|_{L^1[0,T]} + |(\kappa_0 * v_n)(0) - c|.$$

根据上述估计，当 $n \to +\infty$ 时，每一项都趋于零，因此 $\|v_n - v\|_{L^{\kappa_0}} \to 0$。我们已证明， L^{κ_0} 中的任意柯西序列都收敛于 L^{κ_0} 中的一个极限，且相对于 L^{κ_0}-范数而言。于是， L^{κ_0} 是一个巴拿赫空间。□

2.4.2. $C[0,T]$的子空间。

定义 2.6. 设 κ_0 是一个索宁核。定义

$$C^{\kappa_0} := \{v \in C[0,T] : \kappa_0 * v \in C^1[0,T]\},$$

赋予范数

$$\begin{aligned}
\|v\|_{C^{\kappa_0}} :=& \|v\|_\infty + \|\kappa_0 * v\|_{C^1[0,T]} \\
=& \|v\|_\infty + \|(\kappa_0 * v)'\|_\infty + \|\kappa_0 * v\|_\infty,
\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$是 $C[0,T]$.中的范数。回顾一下，在 $C[0,T]$,中，范数 $\|\cdot\|_{C[0,T]}$与 $\|\cdot\|_\infty$.一致

下面证明 C^{κ_0} 是一个巴拿赫空间。以下证明与定理2.5中的证明类似，因此我们只给出主要步骤。

定理 2.7。 空间 $(C^{\kappa_0}, \|\cdot\|_{C^{\kappa_0}})$ 是巴拿赫空间。

证明。 设 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C^{κ_0}中的柯西序列。根据定义，我们得出：$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $C[0,T]$中的柯西序列； $\{(\kappa_0 * v_n)'\}_{n=1}^{\infty}$是$C[0,T]$中的柯西序列； $\{\kappa_0 * v_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $C[0,T]$中的柯西序列。由于 $(C[0,T], \|\cdot\|_{C[0,T]})$ 是巴拿赫空间，因此有：存在 $v \in C[0,T]$，使得 $v_n \to v$属于 $C[0,T]$；存在 $g \in C[0,T]$，使得 $(\kappa_0 * v_n)' \to g$属于 $C[0,T]$；存在 $h \in C[0,T]$，使得$\kappa_0 * v_n \to h$ 属于 $C[0,T]$.

我们来看， $v \in C^{\kappa_0}$. 显然， $v \in C[0,T]$. 现在我们验证 $\kappa_0 * v \in C^1[0,T]$.首先，注意到 $\kappa_0 * v_n \to \kappa_0 * v$在 $C[0,T]$. 中。根据杨氏卷积不等式，

$$\|\kappa_0 * v_n - \kappa_0 * v\|_{\infty} \leqslant \|v_n - v\|_{\infty} \|\kappa_0\|_{L^1[0,T]} \to 0, \quad \text{as} \quad n \to +\infty.$$

由极限的唯一性， $h = \kappa_0 * v$。 由 $\kappa_0 * v_n \in C^1[0,T]$， 可得

$$(\kappa_0 * v_n)(t) = (\kappa_0 * v_n)(0) + \int_0^t (\kappa_0 * v_n)'(s)\,\mathrm{d}s.$$

每个 v_n 都是连续的，因此$(\kappa_0 * v_n)(0) = 0$. 此外，由该估计

$$|(\kappa_0 * v_n)'(t)| \leqslant \|(\kappa_0 * v_n)'\|_{\infty} \leqslant M < +\infty,$$

并根据勒贝格控制收敛定理，可得

$$(\kappa_0 * v)(t) = \lim_{n\to+\infty} (\kappa_0 * v_n)(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t (\kappa_0 * v_n)'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此， $\kappa_0 * v \in C^1[0,T]$ 且$(\kappa_0 * v)'(t) = g(t)$对每个 $t \in [0,T]$都成立。于是， $v \in C^{\kappa_0}$. 最后，我们证明 $v_n \to v$ 在 C^{κ_0}-范数下成立。事实上，考虑到 $h = \kappa_0 * v$ 且$(\kappa_0 * v)' = g$，我们有

$$\begin{aligned}\|v_n - v\|_{C^{\kappa_0}} &= \|v_n - v\|_{\infty} + \|(\kappa_0 * v_n)' - (\kappa_0 * v)'\|_{\infty} + \|\kappa_0 * v_n - \kappa_0 * v\|_{\infty} \\ &= \|v_n - v\|_{\infty} + \|(\kappa_0 * v_n)' - g\|_{\infty} + \|\kappa_0 * v_n - h\|_{\infty}.\end{aligned}$$

当 $n \to +\infty$ 时，每一项都趋于零，因此 $\|v_n - v\|_{C^{\kappa_0}} \to 0$。 □

3. Linear integro-differential equations with integrable variable coefficients

本节研究以下具有可积变系数的线性积分微分方程：

$$(\kappa_0 * v)'(t) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * v)'(t) = g(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.1}$$

在初始条件下

$$(\kappa_0 * v)(0) = a, \tag{3.2}$$

其中 v 是未知函数， $a \in \mathbb{R}$, κ_0 是索宁核， $\sigma_i, g \in L^1[0,T]$ 且$\kappa_i \in AC[0,T]$ 满足 $\kappa_i(0) = 0$，其中 $i = 1, \ldots, m$.

下文的主要目标是证明问题（3.1)-(3.2) 在空间 L^{κ_0}中的存在性、唯一性，并给出显式解。我们将作如下假设：

$$C := \sup_{s\in[0,T]} \sum_{i=1}^{m} \int_s^T |\sigma_i(t)|\,|(\kappa_i' * \tilde{\kappa}_0)(t-s)|\,\mathrm{d}t < 1. \tag{3.3}$$

本节的主要结果如下。

定理 3.1。 若 σ_i， $g \in L^1[0,T]$， $\kappa_i \in AC[0,T]$ 满足 $\kappa_i(0) = 0$ 对 $i = 1$，……， m成立，且假设（3.3）成立，则问题（3.1）-（3.2）有唯一解 $v \in L^{\kappa_0}$，并由下列在 L^{κ_0} 中收敛的无穷级数给出：

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Lambda^k \big((\tilde{\kappa}_0 * g) + a\tilde{\kappa}_0)\big)(t),$$

with

$$\Lambda f := \tilde{\kappa}_0 * \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t) \left(\kappa_i' * f\right) \right),$$

其中 $\Lambda^0 :=\mathrm{Id}$ 且 $\Lambda^k \, (k \geqslant 2)$ 是 Λ 的 k 重复复合。

证明。 其步骤是在 L^{κ_0} 中求解。首先，我们将带条件（3.1）的方程（3.2）转化为一个等价的积分方程，以便更容易求解。因此，对于作为（ $v \in L^{\kappa_0}$ 3.1）-（3.2）解的 $u(t)$: $= (\kappa_0 * v)'(t)$，显然属于 $L^1[0,T]$.。由（3.2），

$$Iu(t) := \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t (\kappa_0 * v)'(s)\,\mathrm{d}s = (\kappa_0 * v)(t) - (\kappa_0 * v)(0) = (\kappa_0 * v)(t) - a.$$

由索宁条件（$\tilde{\kappa}_0 * \kappa_0$） (t) $= 1$，可得（$\tilde{\kappa}_0 * Iu$） (t) $+ aI\tilde{\kappa}_0$ (t) $= Iv$ (t)，且 v (t) $=$ $(\tilde{\kappa}_0 * Iu)'$ (t) $+ a\tilde{\kappa}_0$ (t)。根据 [15, 推论 7.4], 我们得到

$$(\tilde{\kappa}_0 * Iu)'(t) = Iu(0)\tilde{\kappa}_0(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Iu(t-s)\tilde{\kappa}_0(s)\,\mathrm{d}s = (u * \tilde{\kappa}_0)(t),$$

即 $v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t)$。 此外 $(\kappa_i * v)'(t) = \big(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)'(t)$。 根据上述等式，方程 (3.1) 可改写为

$$u(t) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)'(t) = g(t). \tag{3.4}$$

我们已证明：若 $v \in L^{\kappa_0}$ 是 (3.1)-(3.2) 的一个解，则 $u \in L^1[0,T]$ 是 (3.4) 的一个解。

另一方面，设 $u \in L^1[0,T]$ 是 (3.4) 的一个解。因此，

$$(\tilde{\kappa}_0 * u)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t) + \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)'(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t).$$

令 $v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t)$。由此可得

$$v(t) + \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big(\kappa_i * v\big)'(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t),$$

这意味着

$$(\kappa_0 * v)(t) + \kappa_0 * \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * v)'(t) = \big(\kappa_0 * \tilde{\kappa}_0 * g\big)(t) + a(\kappa_0 * \tilde{\kappa}_0)(t).$$

根据杨氏卷积不等式， $v \in L^1[0,T]$. 此外 $(\kappa_0 * v)(t) = a + Iu(t)$ 。因此， $u(t) = (\kappa_0 * v)'(t)$ $u \in L^1[0,T]$ 且 $(\kappa_0 * v)(0) = a$，即 (3.2) 成立。因此， $\kappa_0 * v \in AC[0,T]$. 由 $(\kappa_0 * \tilde{\kappa}_0)(t) = 1$可得

$$(\kappa_0 * v)'(t) + \left(1 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * v)'(t)\right)' = (1 * g)'(t),$$

这等价于方程 (3.1) 。

现在的任务是证明 (3.4) 的解的存在唯一性。定义算子 T: $L^1[0,T] \to L^1[0,T]$ 如下:

$$Tu(t) := g(t) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)'(t).$$

(3.4) 显然可知 $Tu = u$. 利用 [15, 推论 7。4] 和 $\kappa_i(0) = 0$ $(i = 1, \ldots\ldots, m)$ ，可得

$$\begin{aligned}\big(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)'(t) &= \kappa_i(0)[(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0](t) + \big(\kappa_i' * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)(t) \\ &= (\kappa_i' * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0])(t) = ((\kappa_{i,0} * u) + a\kappa_{i,0})(t),\end{aligned}$$

其中 $\kappa_{i,\ 0} := \kappa_i' * \tilde{\kappa}_0$. 因此，我们可以将算子 T 改写如下:

$$Tu(t) = g(t) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big((\kappa_{i,0} * u) + a\kappa_{i,0}\big)(t).$$

接下来，我们可以看出 T 是一个压缩映射。事实上，对于 u_1， $u_2 \in L^1[0,T]$ 以及任意固定的 $t \in (0, T)$， 我们有

$$Tu_1(t) - Tu_2(t) = -\sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big(\kappa_{i,0} * (u_1 - u_2)\big)(t).$$

由 (3.3) ，注意到

$$\begin{aligned}\|Tu_1 - Tu_2\|_{L^1[0,T]} &= \int_0^T \left|\sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_{i,0} * (u_1 - u_2))(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |\sigma_i(t)| \int_0^t |\kappa_{i,0}(t-s)|\,|u_1(s) - u_2(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |u_1(s) - u_2(s)| \left(\int_s^T |\sigma_i(t)|\,|\kappa_{i,0}(t-s)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\|u_1 - u_2\|_{L^1[0,T]}.\end{aligned}$$

映射 T 是一个压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的点 $u \in L^1[0,T]$ ，使得 $Tu = u$。此外，我们可以找到 u ，其逼近序列如下:

$$\begin{aligned}u_0(t) &= g(t), \\ u_n(t) &= g(t) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big((\kappa_{i,0} * u_{n-1}) + a\kappa_{i,0}\big)(t), \quad n \geqslant 1,\end{aligned}$$

该序列关于 $\|\cdot\|_{L^1[0,T]}$ 收敛到 $L^1[0,T].$ 中的极限 u。此外，根据杨氏卷积不等式和 $\tilde{\kappa}_0 \in L^1[0,T]$，不难看出

$$\|\tilde{\kappa}_0 * u_n - \tilde{\kappa}_0 * u\|_{L^1[0,T]} \to 0, \quad \text{as} \quad n \to +\infty. \tag{3.5}$$

我们将这个新序列写成如下形式：

$$(\tilde{\kappa}_0 * u_0)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t),$$

$$(\tilde{\kappa}_0 * u_n)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)\big(\kappa_i' * [(\tilde{\kappa}_0 * u_{n-1}) + a\tilde{\kappa}_0]\big)(t).$$

记 $v_n(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u_n)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t)$ 对所有 n 成立，则可将上述序列改写为

$$\begin{aligned} v_0(t) &= (\tilde{\kappa}_0 * g)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t), \\ v_n(t) &= v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i' * v_{n-1})(t), \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

剩下要证明的是，$v_0 \in L^{\kappa_0}$ 且 $v_n \in L^{\kappa_0}$ 对任意 $n \geqslant 1.$ 均成立。回忆一下，对任意 $n \geqslant 1$，有 $u_n \in L^1[0,T]$，并且 $\tilde{\kappa}_0 \in L^1[0,T].$。杨氏卷积不等式给出

$$\|v_n\|_{L^1[0,T]} = \|\tilde{\kappa}_0 * u_n + a\tilde{\kappa}_0\|_{L^1[0,T]} \leqslant \|\tilde{\kappa}_0\|_{L^1[0,T]} \left(\|u_n\|_{L^1[0,T]} + |a|\right) < +\infty,$$

这意味着 $v_n \in L^1[0,T].$。当然，$v_0 \in L^1[0,T].$。由于 $(\kappa_0 * v_0)(t) = a + Ig(t)$，我们看到 $\kappa_0 * v_0 \in AC[0,T]$，即 $v_0 \in L^{\kappa_0}$。我们知道 $(\kappa_0 * v_n)(t) = a + Iu_n(t)$，因此 $\kappa_0 * v_n \in AC[0,T]$ 且 $v_n \in L^{\kappa_0}.$。注意，$v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(t) + a\tilde{\kappa}_0(t)$ 属于 L^{κ_0}。让我们验证 $v_n \to v$ 属于 $L^{\kappa_0}.$。由于 $(\kappa_0 * v_n)(t) = a + Iu_n$ 且 $(\kappa_0 * v)(t) = a + Iu$，我们计算得

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_{L^{\kappa_0}} &= \|v_n - v\|_{L^1[0,T]} + \|\kappa_0 * (v_n - v)\|_{AC[0,T]} \\ &= \|v_n - v\|_{L^1[0,T]} + \|I(u_n - u)\|_{AC[0,T]} \\ &= \|v_n - v\|_{L^1[0,T]} + \|u_n - u\|_{L^1[0,T]} \to 0, \quad \text{as} \quad n \to +\infty, \end{aligned}$$

其中我们使用了（3.5）以及 $u_n \to u$ 在 $L^1[0,T].$ 因此，极限函数v 是 L^{κ_0} 中方程（3.1）-（3.2）的唯一解。

接下来，我们利用递推关系构造显式解 v （3.6）。第一次近似为

$$v_1(t) = v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i' * v_0)(t) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \Lambda^k(v_0)(t).$$

第二次近似为

$$\begin{aligned}
v_2(t) &= v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i' * v_1)(t) \\
&= v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t) \left(\kappa_i' * \left[v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i' * v_0)(t) \right) \right] \right) \\
&= v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i' * v_0)(t) + \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t) \left[\kappa_i' * \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i' * v_0)(t) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \Lambda^k (v_0)(t).
\end{aligned}$$

通过归纳法，我们得到所有 $n \in \mathbb{N}$的第 n 次近似，即

$$v_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Lambda^k (v_0)(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Lambda^k \big((\tilde{\kappa}_0 * g) + a\tilde{\kappa}_0 \big)(t). \tag{3.7}$$

最后，解 v 可表示为

$$v(t) = \lim_{n \to +\infty} v_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Lambda^k \big((\tilde{\kappa}_0 * g) + a\tilde{\kappa}_0 \big)(t),$$

w这里的极限是在范数 $\|\cdot\|_{L^{\kappa_0}}$ 下取的，无穷级数也在该范数下收敛。 □

注3.2。 估计（3.3）最适合当前方法。如果我们想要找到另一个显式上界，就必须对核 κ_i. 施加额外条件。从定理 3.1 的证明中可以看出

$$\begin{aligned}
\|Tu_1 - Tu_2\|_{L^1[0,T]} &= \int_0^T \left| \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_{i,0} * (u_1 - u_2))(t) \right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |\sigma_i(t)| \int_0^t |\kappa_{i,0}(t-s)| \, |u_1(s) - u_2(s)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_0^T |u_1(s) - u_2(s)| \int_s^T |\sigma_i(t)| \, |\kappa_{i,0}(t-s)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} |\kappa_i'(T)| \int_0^T |u_1(s) - u_2(s)| \, \mathrm{d}s \int_0^T |\sigma_i(t)| \, \mathrm{d}t \int_0^T |\tilde{\kappa}_0(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} |\kappa_i'(T)| \, \|\sigma_i\|_{L^1[0,T]} \, \|\tilde{\kappa}_0\|_{L^1[0,T]} \right) \| u_1 - u_2\|_{L^1[0,T]},
\end{aligned}$$

这里我们需要假设 $|\kappa_i'|$ 是递增的。因此，增加一项假设后，我们可以得到如下更明确的条件：

$$\sum_{i=1}^{m} |\kappa_i'(T)| \, \|\sigma_i\|_{L^1[0,T]} \, \|\tilde{\kappa}_0\|_{L^1[0,T]} < 1.$$

常系数情形。 若 $\sigma_i(t) = b_i \in \mathbb{R}$ 对于 $i = 1, \dots, m$ 在问题（3.1）–（3.2）中，无需假设 $\kappa_i(0) = 0$，同样可以应用不动点论证。由于结论可按定理 3.1的步骤推出，我们不再给出证明。唯一的区别在于压缩估计，因为现在我们允许$\kappa_i(0) \neq 0$。

推论 3.3。 若 $\sigma_i(t) = b_i \in \mathbb{R}$, $g \in L^1[0,T]$ 且 $\kappa_i \in AC[0,T]$ 对于 $i = 1, \dots, m$。假设

$$\|\tilde{\kappa}_0\|_{L^1[0,T]} \sum_{i=1}^{m} |b_i| \left(|\kappa_i(0)| + \|\kappa_i'\|_{L^1[0,T]} \right) < 1.$$

则问题 *(3.1)–(3.2)* 有唯一解 $v \in L^{\kappa_0}$，其表达式为

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Lambda^k (\tilde{\kappa}_0 * g + a\tilde{\kappa}_0)(t),$$

其中级数在 L^{κ_0} 中收敛，且

$$\Lambda f := \tilde{\kappa}_0 * \left(\sum_{i=1}^{m} b_i (\kappa_i * f)' \right),$$

其中 Λ^0 ：=恒等算子 且 Λ^k $(k \geqslant 2)$ 是 Λ 的 k 重复复合。

下面给出一个例子，其中两个可积函数的卷积不为零，如 $t \to 0^+$.

例 3.4。 假设

$$f(t) = t^{\alpha-1}, \quad \kappa_0(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t \in (0,T), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Then

$$(f * \kappa_0)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha, \alpha).$$

利用恒等式 $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)\,\Gamma(x+y)$，我们得到

$$(f * \kappa_0)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\alpha)$$

以及 $\lim_{t \to 0^+} (f * \kappa_0)(t) = \Gamma(\alpha) \neq 0.$

注 3.5。 在定理3.1中，一个自然的问题是：我们能否保证问题（ v 在 L^{κ_0} 中的解的存在性，该问题满足初始条件 $v(0) = b \in \mathbb{R}$? 在这种情况下，我们的模型空间、方法论和策略无法对其进行讨论。下面说明这是不可能的。反设存在问题（ v 在 L^{κ_0} ）的一个解，其中 3.1满足 $v(0) = b$. 定义 $u(t) = (\kappa_0 * v)'(t)$。显然，$u \in L^1[0,T]$ 且

$$Iu(t) = \int_0^t (\kappa_0 * v)'(s) \, \mathrm{d}s = (\kappa_0 * v)(t) - (\kappa_0 * v)(0).$$

根据例 3.4，一般而言，$(\kappa_0 * v)(0) \neq 0$. 令 $(\kappa_0 * v)(0) = c$ 其中 $c \in \mathbb{R}$。由于 $(\tilde{\kappa}_0 * \kappa_0)(t) = 1$，我们计算得

$$(\tilde{\kappa}_0 * Iu)(t) = \big(\tilde{\kappa}_0 * (\kappa_0 * v)\big)(t) - (\tilde{\kappa}_0 * c)(t) = Iv(t) - cI\tilde{\kappa}_0,$$

因此 $v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * Iu)'(t) + c\tilde{\kappa}_0$。根据 [15, 推论 7.4], 可得

$$\big(\tilde{\kappa}_0 * Iu\big)'(t) = Iu(0)\tilde{\kappa}_0(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Iu(t-s)\tilde{\kappa}_0(s)\,\mathrm{d}s = (u * \tilde{\kappa}_0)(t),$$

即，$v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(t) + c\,\tilde{\kappa}_0(t)$。由于 $\tilde{\kappa}_0$ 是索宁核，当 $t \to 0^+$时无界。这意味着

$$v(0) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(0) + c\,\tilde{\kappa}_0(0) = \pm\infty,$$

这与初始条件 $v(0) = b$矛盾。

我们给出定理3.1的一个说明性示例。通过估计解的无穷级数，求得显式解。

例3.6. 考虑索宁核 $\kappa_0(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ 在 $\alpha \in (0,1)$上。令$\sigma_1(t) = 1/2\beta$ 当 $\beta > 1$, $\kappa_1(t) = t^{\beta}/\Gamma(\beta)$ 且 $g(t) = 1$. 方程（3.1）化为

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)'(t) + \frac{1}{2\beta}\left(\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta)} * v\right)'(t) = 1, \quad t \in [0,1], \tag{3.8}$$

在初始条件 $\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)(0) = 0$. 下，我们知道 $\tilde{\kappa}_0(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$，并且

$$\sum_{i=1}^{1}\int_s^1 \frac{1}{2\beta}\left|\left(\frac{\beta t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(t-s)\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_s^1 \frac{(t-s)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(1-s)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+\alpha)(\beta+\alpha)} \leqslant \frac{1}{2\Gamma(\beta+\alpha+1)} < 1,$$

这意味着条件 (3.3) 得到满足。根据定理3.1，方程 (3.8) 有唯一解 $v \in L^{t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)}$，其表示为

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Lambda^k\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * 1\right)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Lambda^k\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

B由 Riemann-Liouville 分数阶积分的半群性质，我们有

$$\Lambda f = \tilde{\kappa}_0 * \left(\sum_{i=1}^{1}\sigma_i[\kappa_i' * f]\right) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \left(\frac{t^{\beta-1}}{2\,\Gamma(\beta)} * f\right) = \frac{1}{2}\,{}^{RL}I_0^{\alpha}\,{}^{RL}I_0^{\beta} f = \frac{1}{2}\,{}^{RL}I_0^{\alpha+\beta} f.$$

因此，再次利用半群性质，该算子的第 k次迭代满足

$$\Lambda^k f = \left(\frac{1}{2}\right)^k {}^{RL}I_0^{k(\alpha+\beta)} f.$$

将上述表达式代入级数后，解变为

$$v(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k {}^{RL}I_0^{k(\alpha+\beta)}\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{t^{\alpha+k(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha+k(\alpha+\beta)+1)}$$
$$=t^\alpha\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2}t^{\alpha+\beta})^k}{\Gamma(\alpha+k(\alpha+\beta)+1)}=t^\alpha E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\left(-\frac{1}{2}t^{\alpha+\beta}\right).$$

因此 $v(0)=0$. 根据 [14, 公式 4.4。5], 我们得到

$${}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(t)={}^{RL}I_0^{1-\alpha}\left(t^\alpha E_{\beta+\alpha,1+\alpha}\left(-\frac{1}{2}t^{\alpha+\beta}\right)\right)=t\,E_{\beta+\alpha,2}\left(-\frac{1}{2}t^{\beta+\alpha}\right),$$

这意味着 ${}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(0)=0.$

或者，我们可以将（3.8）改写如下

$${}^{RL}D_0^\alpha v(t)+\frac{1}{2}{}^{RL}I_0^\beta v(t)=1. \tag{3.9}$$

我们直接求（3.9）的解。对（3.9）应用拉普拉斯变换，得

$$s^\alpha\mathcal{L}\{v\}(s)-{}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(0)+\frac{1}{2}s^{-\beta}\mathcal{L}\{v\}(s)=\frac{1}{s},\quad s>0.$$

因此

$$\mathcal{L}\{v\}(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s^\alpha+\frac{1}{2s^\beta}}=\frac{1}{s^{1+\alpha}}\frac{1}{1+\frac{1}{2s^{\beta+\alpha}}}.$$

根据 [1, 定理 2。3], 可得

$$v(t)=t^\alpha E_{\beta+\alpha,1+\alpha}\left(-\frac{1}{2}t^{\alpha+\beta}\right),$$

这与通过迭代构造的解一致。

例 3.7 （分数阶 Cole–Cole 模型）。Cole–Cole 介电弛豫模型在 [13, 方程 3.9], 中研究, 其形式如下:

$${}^{RL}D_0^\alpha\phi_{CC}(t)=-\frac{1}{\tau_*^\alpha}\phi_{CC}(t),\qquad 0<t<T, \tag{3.10}$$

其中， $0<\alpha<1, \tau_*>0$ 为参考弛豫时间， $\phi_{CC}(t)$为介电响应函数，满足初始条件

$$\left({}^{RL}I_0^{1-\alpha}\phi_{CC}\right)(0)=\frac{1}{\tau_*^\alpha}.$$

因此，方程（3.10）可改写为

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}*\phi_{CC}\right)'(t)+\frac{1}{\tau_*^\alpha}(1*\phi_{CC})'(t)=0,$$

满足初始条件

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}*\phi_{CC}\right)(0)=\frac{1}{\tau_*^\alpha}.$$

因此，$\kappa_0(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$，$\kappa_1(t) = 1$，$b_1 = 1/\tau_*^\alpha$，$g(t) = 0$。由于相应的索宁核为 $\tilde{\kappa}_0(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$，且已知 $\kappa_1(0) = 1$ 和 $\kappa_1'(t) = 0$，我们得到

$$K = \|\tilde{\kappa}_0\|_{L^1[0,T]}|b_1|\left(|\kappa_1(0)| + \|\kappa_1'\|_{L^1[0,T]}\right) = \frac{T^\alpha}{\tau_*^\alpha\Gamma(\alpha+1)}.$$

在假设 $T^\alpha < \tau_*^\alpha\Gamma(\alpha+1)$，即 $K < 1$ 的条件下，推论 3.3 证明了唯一解的存在性 $\phi_{CC} \in L^{\kappa_0}$. 算子 Λ 可表示为

$$\Lambda w = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \left(\frac{1}{\tau_*^\alpha}(1*w)'\right) = \frac{1}{\tau_*^\alpha}\,{}^{RL}I_0^\alpha w.$$

根据黎曼–刘维尔分数阶积分的半群性质，

$$\Lambda^k w = \frac{1}{\tau_*^{k\alpha}}{}^{RL}I_0^{k\alpha} w.$$

因此，解为

$$\begin{aligned}\phi_{CC}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Lambda^k(a\tilde{\kappa}_0)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\tau_*^\alpha}\right)^k {}^{RL}I_0^{k\alpha}\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\tau_*^\alpha\Gamma(\alpha)}\right)\\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\tau_*^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-t^\alpha/\tau_*^\alpha)^k}{\Gamma((k+1)\alpha)} = \frac{t^{\alpha-1}}{\tau_*^\alpha}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_*^\alpha}\right).\end{aligned}$$

下面验证初始条件满足：

$$\begin{aligned}\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \phi_{CC}\right)(t) &= {}^{RL}I_0^{1-\alpha}\phi_{CC}(t) = \frac{1}{\tau_*^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\tau_*^\alpha}\right)^k {}^{RL}I_0^{k\alpha+1-\alpha}\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\\ &= \frac{1}{\tau_*^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-t^\alpha/\tau_*^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} = \frac{1}{\tau_*^\alpha}E_\alpha\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_*^\alpha}\right).\end{aligned}$$

由于 $E_\alpha(0) = 1$，我们得出 $\left({}^{RL}I_0^{1-\alpha}\phi_{CC}\right)(0) = 1/\tau_*^\alpha$.

4. Nonlinear integro-differential equations with integrable variable coefficients

本节旨在研究方程（3.1）的一个非线性版本。我们考虑

$$(\kappa_0 * v)'(t) + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\,(\kappa_i * v)'(t) = g(t, v(t)), \quad t \in [0,T], \tag{4.1}$$

满足初始条件

$$(\kappa_0 * v)(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

我们假设 κ_0 是索宁核，$\sigma_i \in L^1[0,T]$ 和 $\kappa_i \in AC[0,T]$ 满足 $\kappa_i(0) = 0$，其中 $i = 1$、...、m，。设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ 为开集，并设 $g\colon [0,T]\times\Delta \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的可积函数

$$|g(t, v_1(t)) - g(t, v_2(t))| \leqslant \lambda|v_1(t) - v_2(t)|, \quad t \in [0,T], \quad v_1(t), v_2(t) \in \Delta, \tag{4.3}$$

对于某个常数 $\lambda > 0$.

In 为了得到非线性结果，有必要施加以下限制 n:

$$D := \sup_{s\in[0,T]} \left\{ \lambda \int_s^T |\tilde{\kappa}_0(t-s)|\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} \int_s^T |\sigma_i(t)||(\kappa_i' * \tilde{\kappa}_0)(t-s)|\,\mathrm{d}t \right\} < 1, \quad (4.4)$$

其中 λ 是（4.3）中的常数。

定理 4.1。假设 $\sigma_i \in L^1[0,T]$, $\kappa_i \in AC[0,T]$ 且 $\kappa_i(0) = 0$ 对 $i = 1,\ldots,m$，并且 g 在 $[0,T]\times\Delta$ 上可积。若条件（4.2）-（4.3）-（4.4）成立，则方程（4.1）存在唯一解 $v \in L^{\kappa_0}$。

证明。使用与定理 3.1证明第一部分中类似的论证，方程（ $v \in L^{\kappa_0}$ （4.1）-（4.2）的一个解可通过变换 $u(t) = (\kappa_0 * v)'(t) \in L^1[0,T]$ 转化为下列积分方程的一个解

$$u(t) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0])'(t) = g\big(t, [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0](t)\big). \quad (4.5)$$

Let ˜我们验证4.5）有解。设 T: $L^1[0,T] \to L^1[0,T]$ 满足

$$\widetilde{T}u(t) := g\big(t, [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0](t)\big) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0])'(t).$$

˜（4.5）表明 Tu（t） $= u$（t）。由 [15, 推论 7。4] 和 $\kappa_i(0) = 0$（$i = 1$，...， m），可得

$$\big(\kappa_i * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0]\big)'(t) = (\kappa_i' * [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0])(t) = ((\kappa_{i,0} * u) + a\kappa_{i,0}))(t),$$

˜其中 $\kappa_{i,\ 0} = \kappa_i' * \tilde{\kappa}_0$. 因此，算子 T 可以等价地表示为:

$$\widetilde{T}u(t) = g\big(t, [(\tilde{\kappa}_0 * u) + a\tilde{\kappa}_0](t)\big) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)((\kappa_{i,0} * u) + a\kappa_{i,0})(t).$$

˜我们将证明， T是 $L^1[0,T]$. 上的压缩映射。对于 u_1， $u_2 \in L^1[0,T]$ 我们有 e

$$\widetilde{T}u_1(t) - \widetilde{T}u_2(t) = g(t, [(\tilde{\kappa}_0 * u_1) + a\tilde{\kappa}_0](t)) - g(t, [(\tilde{\kappa}_0 * u_2) + a\tilde{\kappa}_0](t)) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_{i,0} * (u_1 - u_2))(t).$$

根据上述估计和（4.3），可得

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}u_1-\widetilde{T}u_2\|_{L^1[0,T]} &\leqslant \int_0^T |g(t,[(\tilde{\kappa}_0*u_1)+a\tilde{\kappa}_0](t))-g(t,[(\tilde{\kappa}_0*u_2)+a\tilde{\kappa}_0](t))|\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^T\left|\sum_{i=1}^m\sigma_i(t)\left[(\kappa_{i,0}*(u_1-u_2))(t)\right]\right|\mathrm{d}t\\
&\leqslant \lambda\int_0^T|(\tilde{\kappa}_0*u_1)(t)-(\tilde{\kappa}_0*u_2)(t)|\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^m\int_0^T|\sigma_i(t)||(\kappa_{i,0}*(u_1-u_2))(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \lambda\int_0^T\int_0^t|\tilde{\kappa}_0(t-s)||(u_1-u_2)(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{i=1}^m\int_0^T|\sigma_i(t)|\int_0^t|\kappa_{i,0}(t-s)|\,|(u_1-u_2)(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\
&=\lambda\int_0^T|(u_1-u_2)(s)|\int_s^T|\tilde{\kappa}_0(t-s)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\sum_{i=1}^m\int_0^T|(u_1-u_2)(s)|\int_s^T|\sigma_i(t)||\kappa_{i,0}(t-s)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\\
&=\int_0^T|u_1-u_2|\left(\lambda\int_s^T|\tilde{\kappa}_0(t-s)|\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^m\int_s^T|\sigma_i(t)||\kappa_{i,0}(t-s)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\\
&\leqslant D\|u_1-u_2\|_{L^1[0,T]},
\end{aligned}$$

其中 D 由（4.4）给出。最后，T 是一个压缩映射，根据巴拿赫不动点定理，存在唯一函数 $u\in L^1[0,T]$ 满足 $Tu=u$。因此，方程（4.5）存在唯一解。根据方程（4.1）与（4.5）之间已建立的等价关系，我们得出，原问题（4.1）连同条件（4.2）-（4.3）-（4.4）存在唯一解 $v\in L^{\kappa_0}$。□

注 4.2。 [解的近似] 根据定理 4.1，我们可以找到 u 具有如下逼近序列

$$\begin{aligned}
&u_0(t)=g(t,0),\\
&u_n(t)=g\big(t,[(\tilde{\kappa}_0*u_{n-1})+a\tilde{\kappa}_0](t)\big)-\sum_{i=1}^m\sigma_i(t)(\kappa_{i,0}*u_{n-1}+a\kappa_{i,0})(t),\quad n\geqslant 1,
\end{aligned}$$

其在范数 $\|\cdot\|_{L^1[0,T]}$ 中收敛于某个函数 $u\in L^1[0,T]$。对于 $v_n(t)=(\tilde{\kappa}_0*u_n)(t)+a\tilde{\kappa}_0(t)$，前述序列具有如下形式

$$\begin{aligned}
&v_0(t)=(\tilde{\kappa}_0*g(\cdot,0))(t)+a\tilde{\kappa}_0(t),\\
&v_n(t)=(\tilde{\kappa}_0*g(\cdot,v_{n-1}))(t)+a\tilde{\kappa}_0(t)-\tilde{\kappa}_0*\sum_{i=1}^m\sigma_i(t)(\kappa_i'*v_{n-1})(t),\quad n\geqslant 1. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

容易看出，$\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ 收敛于 $v=\tilde{\kappa}_0*u+a\tilde{\kappa}_0$ 中 L^{κ_0}。因此，v 是 L^{κ_0} 中方程（4.1）的唯一解。

我们展示定理4.1的一个应用。具体而言，我们利用注4.2 迭代构造解。

例 4.3。设 $\kappa_0(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ 且 $g(t, v(t)) = v(t)/4 + t^{-\alpha}$ 对于 $\alpha \in (0, 1)$。考虑 $\sigma_1(t) = 1/8$ 和 $\kappa_1(t) = t.$，则方程 (4.1) 可写为

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)'(t) + \frac{1}{8}(t * v)'(t) = \frac{1}{4}v(t) + t^{-\alpha}, \quad t \in [0, 1], \tag{4.7}$$

其中 $\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)(0) = 0.$。我们知道

$$\left|\frac{v_1(t)}{4} + t^{-\alpha} - \frac{v_2(t)}{4} - t^{-\alpha}\right| = \frac{1}{4}|v_1(t) - v_2(t)|,$$

即，(4.3) 成立。由于 $\tilde{\kappa}_0(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$，我们有

$$\frac{1}{4}\int_s^1 \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{1}\int_s^1 \frac{1}{8}\frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{8\Gamma(\alpha+2)} < 1,$$

这意味着 (4.4)。根据定理 4.1，方程 (4.7) 有唯一解 $v \in L^{\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}$。将上述函数代入 (4.6，得到以下迭代序列

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * t^{-\alpha}\right)(t), \\ v_n(t) &= \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \left(\frac{v_{n-1}}{4} + t^{-\alpha}\right)\right)(t) - \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{1}{8}(1 * v_{n-1})\right)(t). \end{aligned}$$

前面的序列可以改写为

$$\begin{aligned} v_0(t) &= {}^{RL}I_0^{\alpha} t^{-\alpha}, \\ v_n(t) &= \frac{1}{4}{}^{RL}I_0^{\alpha} v_{n-1}(t) + {}^{RL}I_0^{\alpha} t^{-\alpha} - \frac{1}{8}{}^{RL}I_0^{\alpha+1} v_{n-1}(t). \end{aligned}$$

如果对该序列进行迭代，我们可以观察到

$$v_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}{}^{RL}I_0^{\alpha} - \frac{1}{8}{}^{RL}I_0^{\alpha+1}\right)^k ({}^{RL}I_0^{\alpha} t^{-\alpha}).$$

根据牛顿二项式定理、黎曼-刘维尔积分的半群性质，并令 $n \to +\infty$ 趋于极限，我们得到

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(-\frac{1}{8}\right)^{j} {}^{RL}I_0^{\alpha(k-j)+(\alpha+1)j+\alpha} t^{-\alpha} \\ &= \Gamma(1-\alpha)\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(-\frac{1}{8}\right)^{j}\frac{t^{k\alpha+j}}{\Gamma(k\alpha+j+1)}. \end{aligned}$$

根据 $m = k - j$ 下的柯西乘积公式，可得

$$v(t) = \Gamma(1-\alpha)\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(m+j)!}{j!\,m!}\left(\frac{1}{4}\right)^m\left(-\frac{1}{8}\right)^j\frac{t^{\alpha(m+j)+j}}{\Gamma(\alpha(m+j)+j+1)}$$
$$= \Gamma(1-\alpha)\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(m+j)!}{j!\,m!}\left(\frac{1}{4}t^{\alpha}\right)^m\left(-\frac{1}{8}t^{\alpha+1}\right)^j\frac{1}{\Gamma(\alpha m+(\alpha+1)j+1)}.$$

根据 [1, 定义 2。1], 我们得到

$$v(t) = \Gamma(1-\alpha)E_{(\alpha,\alpha+1),1}\left(\frac{1}{4}t^{\alpha}, -\frac{1}{8}t^{\alpha+1}\right).$$

另一方面，对方程（4.7）应用拉普拉斯变换，得到

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{v\}(s) - {}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(0) + \frac{1}{8}s^{-1}\mathcal{L}\{v\}(s) = \frac{1}{4}\mathcal{L}\{v\}(s) + \Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}, \quad s>0.$$

利用 ${}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(0) = 0$，可得

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{v\}(s) + \frac{1}{8}s^{-1}\mathcal{L}\{v\}(s) = \frac{1}{4}\mathcal{L}\{v\}(s) + \Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}$$

and

$$\mathcal{L}\{v\}(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\frac{1}{8s}-\frac{1}{4}} = \Gamma(1-\alpha)\frac{1}{s(1-\frac{1}{4s^{\alpha}}+\frac{1}{8s^{\alpha+1}})}.$$

根据 [1, 定理 2。3], 我们发现

$$v(t) = \Gamma(1-\alpha)E_{(\alpha,\alpha+1),1}\left(\frac{1}{4}t^{\alpha}, -\frac{1}{8}t^{\alpha+1}\right).$$

5. Linear integro-differential equations with continuous variable coefficients

本节研究以下具有连续变系数的线性积分微分方程:

$$(\kappa_0 * v)'(t) + \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\,(\kappa_i * v)'(t) = g(t), \quad t\in[0,T], \tag{5.1}$$

其初始条件为

$$(\kappa_0 * v)(0) = 0, \tag{5.2}$$

其中 κ_0 是索宁核， σ_i， $g\in C[0,T]$ 且 $\kappa_i\in AC[0,T]$ 对于 $i=1,\ldots,m$. 我们寻求连续解 v，使其满足(5.1)-(5.2)，且属于 C^{κ_0}。注意，对于每个 $v\in C[0,T]$.，(5.2)总是成立

我们首先证明方程(5.1)的解满足条件 $v(0)=0$ 与$(\kappa_0*v)(0)=0$之间的关系。尽管对于 $C^{\kappa_0}[0,T]$中的任意函数，这些条件并不等价，但如下所示，对于方程(5.1)-(5.2)的解，它们是等价的。

命题 5.1。 设 $v\in C^{\kappa_0}$。则 v 是方程（5.1）在初始条件（κ_0*v）（0）$=0$ 成立的解，当且仅当 v 满足方程（5.1）及初始条件 v（0）$=0$.

证明。设 $v \in C^{\kappa_0}$ 是方程（5.1）的一个解，且 $v(0) = 0$. 由 $\kappa_0 \in L^1[0,T]$ 和 $v \in C[0,T]$, 可得

$$|(\kappa_0 * v)(t)| \leqslant \int_0^t |v(s)||\kappa_0(t-s)|\,\mathrm{d}s \leqslant \|v\|_\infty \int_0^t |\kappa_0(r)|\,\mathrm{d}r.$$

当 $\lim_{t\to 0^+} \int_0^t |\kappa_0(u)|\mathrm{d}u = 0$ 时，则 $\lim_{t\to 0^+}(\kappa_0 * v)(t) = 0$. 此外，根据命题 2.1，我们知道 $\kappa_0 * v \in C[0,T]$, 因此 $(\kappa_0 * v)(0) = 0$.

Su现在假设 $v \in C^{\kappa_0}$ 满足（5.1），其中 $(\kappa_0 * v)(0) = 0$. 由（5.1），我们得到 in

$$(\kappa_0 * v)'(t) = g(t) - \sum_{i=1}^m \sigma_i(t)(\kappa_i * v)'(t).$$

定义

$$h(t) := g(t) - \sum_{i=1}^m \sigma_i(t)(\kappa_i * v)'(t).$$

A对于 $v \in C^{\kappa_0}$, 有 $\kappa_0 * v \in C^1[0,T]$ 和 $h \in C[0,T]$. 。根据 $(\kappa_0 * v)(0) = 0$, 我们得到t

$$Ih(t) = \int_0^t (\kappa_0 * v)'(s)\,\mathrm{d}s = (\kappa_0 * v)(t) - (\kappa_0 * v)(0) = (\kappa_0 * v)(t).$$

Fr由 $(\tilde{\kappa}_0 * \kappa_0)(t) = 1$, $(\tilde{\kappa}_0 * Ih)(t) = Iv(t)$。利用 [15, 推论 7.4]，，我们得到 t

$$v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * Ih)'(t) = Ih(0)\tilde{\kappa}_0(t) + (\tilde{\kappa}_0 * h)(t) = (\tilde{\kappa}_0 * h)(t).$$

由于 $h \in C[0,T]$ 和 $\tilde{\kappa}_0 \in L^1[0,T]$, 我们得出 $v(0) = (\tilde{\kappa}_0 * h)(0) = 0$. □

现在给出关于（5.1）-（5.2）的主要结论。证明中的若干步骤与定理 3.1的证明相似，因此省略其中一些步骤。

定理 5.2。若 σ_i, $g \in C[0,T]$, $\kappa_i \in AC[0,T]$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, m$, 则问题（5.1）-（5.2）有唯一解 $v \in C^{\kappa_0}$, 且可显式表示为：

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Theta^k (\tilde{\kappa}_0 * g)(t),$$

其中

$$\Theta w := \tilde{\kappa}_0 * \left(\sum_{i=1}^m \sigma_i(t)\,(\kappa_i * w)' \right),$$

其中 Θ^0 ：=恒等算子 且 Θ^k $(k \geqslant 2)$ 是 Θ 的 k 重复复合。

Proof. 首先，若 $v \in C^{\kappa_0}$ 满足（5.1）-（5.2），则 $u(t) = (\kappa_0 * v)'(t)$ 属于 $C[0,T]$ 一个 d

$$u(t) + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t)(\kappa_i * \tilde{\kappa}_0 * u)'(t) = g(t). \tag{5.3}$$

反之，由（$u \in C[0,T]$ 5.3）的解 $v(t) = (u * \tilde{\kappa}_0)(t)$ 可得 C^{κ_0} （5.1）— （5.2）的一个解。

设 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个正整数序列，并定义 T_{λ_j}： $C[0,T] \to C[0,T]$ 如下

$$T_{\lambda_j} u(t) := e^{-\lambda_j t} \left(g(t) - \sum_{i=1}^m \sigma_i(t) \big(\kappa_i * \tilde{\kappa}_0 * u\, e^{\lambda_j(\cdot)}\big)'(t) \right).$$

显然，(5.3) 等价于 $T_{\lambda_j}\left[e^{-\lambda_j t}u(t)\right]=e^{-\lambda_j t}u(t)$。下面证明，对于 λ_j 取定值，并且 $j\in\mathbb{N}$. 足够大且固定时， T_{λ_j} 是 $C[0,T]$ 上的压缩映射。 u_1， $u_2\in C[0,T]$ 和 $t\in[0,T]$，我们有

$$T_{\lambda_j}u_1(t)-T_{\lambda_j}u_2(t)=-e^{-\lambda_j t}\left(\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\big(\kappa_i*\tilde{\kappa}_0*(u_1-u_2)e^{\lambda_j(\cdot)}\big)'(t)\right).$$

令 $w:=u_1-u_2$， $f:=\tilde{\kappa}_0*we^{\lambda_j(\cdot)}$ 且 $\kappa_{i,\ 0}=\kappa_i'*\tilde{\kappa}_0$. 由 [15, 推论 7。4], 可得

$$(\kappa_i*f)'(t)=\kappa_i(0)(\tilde{\kappa}_0*we^{\lambda_j(\cdot)})(t)+(\kappa_{i,0}*we^{\lambda_j(\cdot)})(t).$$

因此

$$\begin{aligned}|T_{\lambda_j}u_1(t)-T_{\lambda_j}u_2(t)|&=e^{-\lambda_j t}\left|\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\left[\kappa_i(0)(\tilde{\kappa}_0*we^{\lambda_j(\cdot)})(t)+(\kappa_{i,0}*we^{\lambda_j(\cdot)})(t)\right]\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}|\sigma_i(t)|\left[|\kappa_i(0)|\int_0^t|\tilde{\kappa}_0(t-s)|\,|w(s)|e^{-\lambda_j(t-s)}\mathrm{d}s\right.\\&\qquad\left.+\int_0^t|\kappa_{i,0}(t-s)|\,|w(s)|e^{-\lambda_j(t-s)}\mathrm{d}s\right]\\&\leqslant\|w\|_\infty\sum_{i=1}^{m}\|\sigma_i\|_\infty\left[|\kappa_i(0)|\int_0^T|\tilde{\kappa}_0(r)|\,e^{-\lambda_j r}\mathrm{d}r+\int_0^T|\kappa_{i,0}(r)|\,e^{-\lambda_j r}\mathrm{d}r\right].\end{aligned}$$

由杨氏卷积不等式可得 $\kappa_{i,\ 0}\in L^1[0,T]$。由勒贝格控制收敛定理可知，

$$\int_0^T|\tilde{\kappa}_0(r)|e^{-\lambda_j r}\,\mathrm{d}r\to0,\quad\int_0^T|\kappa_{i,0}(r)|e^{-\lambda_j r}\,\mathrm{d}r\to0,\quad\text{as }j\to+\infty.$$

根据前述估计，我们得出

$$|T_{\lambda_j}u_1(t)-T_{\lambda_j}u_2(t)|\leqslant C(\lambda_j)\,\|u_1-u_2\|_\infty,$$

其中

$$C(\lambda_j)=\sum_{i=1}^{m}\|\sigma_i\|_\infty\left(|\kappa_i(0)|\int_0^T|\tilde{\kappa}_0(r)|e^{-\lambda_j r}\,\mathrm{d}r+\int_0^T|\kappa_{i,0}(r)|e^{-\lambda_j r}\,\mathrm{d}r\right).$$

由于 $C(\lambda_j)\to0$ 当 $j\to+\infty$，我们可以找到某个 $0<C(\lambda_j)<1$，当 j 充分大时，使得

$$\|T_{\lambda_j}u_1-T_{\lambda_j}u_2\|_\infty\leqslant C(\lambda_j)\|u_1-u_2\|_\infty.$$

根据巴拿赫不动点定理，存在唯一解 $u\in C[0,T]$ 满足（5.3），可通过以下序列进行近似

$$\begin{aligned}u_0(t)&=g(t),\\u_n(t)&=g(t)-\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)(\kappa_i*\tilde{\kappa}_0*u_{n-1})'(t),\quad n\geqslant1.\end{aligned}$$

令 $v_n(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u_n)(t)$ 对所有 n 成立，则

$$v_0(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g)(t),$$
$$v_n(t) = v_0(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * v_{n-1})'(t), \quad n \geqslant 1. \tag{5.4}$$

可以证明，$\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ 在 C^{κ_0}中收敛，且极限函数 $v = \tilde{\kappa}_0 * u$ 是 5.1在 C^{κ_0}. 中的唯一解。我们可以像处理（ v 时对（5.4）所做的那样，利用递推关系（3.7）构造 v 的显式解:

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Theta^k (\tilde{\kappa}_0 * g)(t),$$

其中极限是在 $\|\cdot\|_{C^{\kappa_0}}$ 中取的，并且级数在此范数下收敛。 □

注 5.3 （常系数）。 当系数 $\sigma_i(t)$ 在（5.1）中为常数时，我们无法得到对核更弱的条件，也无法得到更简洁的解公式。由于定理 5.2 已经讨论了这种情形，我们将不再单独分析。

注 5.4。 我们来讨论以下问题：问题（5.1）是否存在一个解 $v \in C^{\kappa_0}$，其初始条件 $v(0) = a \neq 0 \in \mathbb{R}$?

采用我们的方法，这是不可能的。相反，假设存在满足 (5.1) 且 $v \in C^{\kappa_0}$ $v(0) = a \neq 0$. 的对象。定义 $u(t) = (\kappa_0 * v)'(t)$。我们知道 $u \in C[0,T]$，并且 $Iu(t) = (\kappa_0 * v)(t) - (\kappa_0 * v)(0)$。由于 $v \in C[0,T]$ 且 $\kappa_0 \in L^1[0,T]$，可得 $(\kappa_0 * v)(0) = 0.$。由 $(\tilde{\kappa}_0 * \kappa_0)(t) = 1$，我们有 $(\tilde{\kappa}_0 * Iu)(t) = Iv(t)$。根据 [15,推论 7.4], ，可得

$$v(t) = Iu(0)\tilde{\kappa}_0(t) + (\tilde{\kappa}_0 * u)(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(t).$$

因此，$v(t) = (\tilde{\kappa}_0 * u)(t)$，且 $v(0) = 0.$。这与假设矛盾。

上述简要介绍表明，我们的模型仅适用于初始条件为零的情形。这一局限源于所考虑的函数空间 C^{κ_0}. 由此开启了一个新的研究方向，即探讨适合研究具有连续解的积分-微分方程的函数空间。

以下例子是定理5.2的直接应用。

例 5.5。 取 $\kappa_0(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$，其中 $\alpha \in (0,1)$ $\sigma_1(t) = 1$， $\kappa_1(t) = 1$ 以及$g(t) = e^{\lambda t}$ 对某个 $\lambda > 0$. 对于后面这些函数，方程（5.1）变为

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)'(t) + (1 * v)'(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in [0,2], \tag{5.5}$$

在初始条件下

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)(0) = 0. \tag{5.6}$$

根据定理 5.2，(5.5)-(5.6) 有唯一解 v in $C^{\Gamma\frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha}()}$，其表示为—

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Theta^k \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * e^{\lambda t}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Theta^k \left({}^{RL}I_0^{\alpha} e^{\lambda t}\right).$$

对于 $w = {}^{RL}I_0^{\alpha} e^{\lambda t}$，有

$$\Theta w = \tilde{\kappa}_0 * \left(\sum_{i=1}^{1} \sigma_i(t)(\kappa_i * w)' \right) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * (1 * w)' = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * w \right) = {}^{RL}I_0^{\alpha} w.$$

根据 Riemann-Liouville 分数阶积分的半群性质，该算子的 k 重复复合可表示为 $\Theta^k w = {}^{RL}I_0^{k\alpha} w$. 将 Θ^k 的这一表示代入级数解，可得

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, {}^{RL}I_0^{k\alpha} \left({}^{RL}I_0^{\alpha} e^{\lambda t} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, {}^{RL}I_0^{\alpha(k+1)} e^{\lambda t}.$$

现在计算

$${}^{RL}I_0^{\alpha(k+1)} e^{\lambda t} = \frac{\lambda^{-\alpha(k+1)} e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \int_0^{\lambda t} r^{\alpha(k+1)-1} e^{-r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda^{-\alpha(k+1)} e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \gamma(\alpha(k+1), \lambda t),$$

其中 $\gamma(\cdot, \cdot)$ 是下不完全伽马函数 [26, 公式 1.5。27]。因此

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^{-\alpha(k+1)} e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \gamma(\alpha(k+1), \lambda t).$$

注意，直接由 v, 的表示可得 $v(0) = 0$ 以及

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_0^{1-\alpha} v(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, {}^{RL}I_0^{1-\alpha} ({}^{RL}I_0^{\alpha(k+1)} e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k {}^{RL}I_0^{\alpha k+1} e^{\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^{-(\alpha k+1)} e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha k+1)} \gamma(\alpha k+1, \lambda t), \end{aligned}$$

这意味着 ${}^{RL}I_0^{1-\alpha} v(0) = 0.$

为完整起见，我们再次通过对方程（5.5）应用拉普拉斯变换来求解。因此

$$s^{\alpha} \mathcal{L}\{v\}(s) - {}^{RL}I_0^{1-\alpha} v(0) + \mathcal{L}\{v\}(s) = \frac{1}{s-\lambda}, \quad s > 0,$$

and

$$\mathcal{L}\{v\}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}+1} \frac{1}{s-\lambda}.$$

根据拉普拉斯变换的性质，我们得到

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha}+1} \right\} (t) * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-\lambda} \right\} (t).$$

根据 [1, 定理 2。3],

$$v(t) = \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^{\alpha}) * e^{\lambda t} \right)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, {}^{RL}I_0^{\alpha(k+1)} e^{\lambda t}.$$

这里，通过拉普拉斯变换得到的表示与由定理 5.2 得到的解一致。问题（5.5）-（5.6）也可以利用 Riemann-Liouville 积分-微分算子重写为

$${}^{RL}D_0^{\alpha} v(t) + v(t) = e^{\lambda t}, \quad {}^{RL}I_0^{1-\alpha} v(0) = 0.$$

例 5.6 （一个分数阶动力学模型）。 Haubold 和 Mathai 考虑了以下分数阶动力学模型 [23, 方程 21]:

$$N(t) - N_0 = -c^\alpha \, {}^{RL}I_0^\alpha N(t), \qquad 0 < t < T, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5.7}$$

其中， $c > 0$ 是破坏速率系数， $N(t)$是该物种的数密度，而 $N_0 = N(0)$是其初始值。

假设 $N \in C[0,T]$。对 α 式（5.7）两边施加阶数为 Riemann–Liouville 分数阶导数，得到

$${}^{RL}D_0^\alpha (N - N_0)(t) = -c^\alpha N(t).$$

Se代入 $v(t) = N_0 - N(t)$，有 $v(0) = 0$；于是前一个方程变为

$${}^{RL}D_0^\alpha v(t) + c^\alpha v(t) = c^\alpha N_0.$$

我们可以将此方程改写为

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v \right)'(t) + c^\alpha (1 * v)'(t) = c^\alpha N_0.$$

这里， $\kappa_0(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$， $\tilde{\kappa}_0(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ $\kappa_1(t) = 1$， $\sigma_1(t) = c^\alpha$ 且 $g(t) = c^\alpha N_0$。定理 5.2 保证上述方程存在唯一解$v \in C^{\kappa_0}$ 。在这种情况下，算子 Θ 的形式为

$$\Theta w = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * (c^\alpha (1 * w)') = c^\alpha \, {}^{RL}I_0^\alpha w.$$

利用 Riemann-Liouville 分数阶积分的半群性质:

$$\Theta^k w = c^{k\alpha} \, {}^{RL}I_0^{k\alpha} w.$$

将这些表达式代入定理5.2中的解的级数表示，可得

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k c^{k\alpha} {}^{RL}I_0^{k\alpha} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * c^\alpha N_0 \right)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k c^{(k+1)\alpha} \left({}^{RL}I_0^{(k+1)\alpha} N_0 \right)(t) \\ &= N_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(ct)^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)} = -N_0 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-c^\alpha t^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha + 1)} = N_0 \left(1 - E_\alpha(-c^\alpha t^\alpha)\right). \end{aligned}$$

因此，回想起 $N(t) = N_0 - v(t)$，可得 $N(t) = N_0 E_\alpha(-c^\alpha t^\alpha)$。

6. Nonlinear integro-differential equations with continuous variable coefficients

通过引入非线性项，我们将方程（5.1）推广如下。考虑以下方程:

$$(\kappa_0 * v)'(t) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t) \, (\kappa_i * v)'(t) = g(t, v(t)), \quad t \in [0,T], \tag{6.1}$$

满足初始条件

$$(\kappa_0 * v)(0) = 0. \tag{6.2}$$

我们假设 κ_0 是索宁核， $\sigma_i \in C[0,T]$ 和 $\kappa_i \in AC[0,T]$ 对于 $i=1,\ldots\ldots,\ m$。设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ 为开集， $g\colon [0,T]\times\Delta\to\mathbb{R}$ 为连续函数，使得

$$|g(t,\ v_1(t))\ -g(t,\ v_2(t))| \leqslant \lambda|v_1(t)\ -v_2(t)|,\qquad t\in[0,T],\qquad v_1(t)\ v_2(t)\qquad (6.3)$$

$\in \Delta$，对于某个常数 $\lambda>0$.

注 6.1。 注意，与命题 5.1 类似，对于 $v\in C^{\kappa_0}$，容易看出 v 是 (6.1)-(6.2) 的解，是 v 成为 (6.1) 在 $v(0)=0$. 下的解的充要条件。因此，方程 (6.1) 可以使用这两个初始条件中的任意一个求解。

我们的目标是证明，在条件 (6.2)–(6.3) 下，(6.1) 有唯一解 $v\in C^{\kappa_0}$.以下证明是定理 5.2中证明的延续。

定理 6.2。 假设 $\sigma_i\in C[0,T],\ \kappa_i\in AC[0,T]$，对于 $i=1,\ldots\ldots,\ m$ 且 g 在 $[0,T]\times\Delta$上连续。若条件（*6.2*）-（*6.3*）成立，则方程（*6.1*）存在唯一解 $v\in C^{\kappa_0}$。

证明。 注意，若 $v\in C^{\kappa_0}$ 是（6.1）的一个解，则 $u(t)=(\kappa_0*v)'(t)\in C[0,T]$满足下列方程

$$u(t)+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)(\kappa_i*\tilde{\kappa}_0*u)'(t)=g\left(t,(\tilde{\kappa}_0*u)(t)\right),\qquad (6.4)$$

反之亦然。这意味着，若 $u\in C[0,T]$ 是（6.4）的一个解，则 $v(t)=(\tilde{\kappa}_0*u)(t)$ 属于 C^{κ_0} 且满足（6.1）。

取一个由正整数组成的序列（α_j）$_{j\in\mathbb{N}}$ 以及 $T_{\alpha_j}\colon\ C[0,T]\to C[0,T]$ 作为

$$\widetilde{T}_{\alpha_j}u(t):=e^{-\alpha_j t}\left(g(t,(\tilde{\kappa}_0*(ue^{\alpha_j(\cdot)}))(t))-\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)(\kappa_i*\tilde{\kappa}_0*(ue^{\alpha_j(\cdot)}))'(t)\right),$$

其中（$ue^{\alpha_j(\cdot)}$）（t）$=u(t)\,e^{\alpha_j t}$. 根据（6.4），我们知道 $\widetilde{T}_{\alpha_j}\left[e^{-\alpha_j t}u(t)\right]=e^{-\alpha_j t}u(t)$。我们来验证，对于适当选取的 α_j，T_{α_j} 是 $C[0,T]$. 的压缩映射。对于$u_1,\ u_2\in C[0,T]$ 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{\alpha_j}u_1(t)-\widetilde{T}_{\alpha_j}u_2(t)=e^{-\alpha_j t}&\left[g(t,(\tilde{\kappa}_0*(u_1e^{\alpha_j(\cdot)}))(t))-g(t,(\tilde{\kappa}_0*(u_2e^{\alpha_j(\cdot)}))(t))\right]\\&-e^{-\alpha_j t}\left[\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\left[(\kappa_i*\tilde{\kappa}_0*((u_1-u_2)e^{\alpha_j(\cdot)}))(t)\right]'\right].\end{aligned}$$

设 $w = u_1 - u_2$ 以及 $f = \tilde{\kappa}_0 * (we^{\alpha_j (\cdot)})$。根据 [15, 推论 7。4] 和 (6.3)，我们得到

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{T}_{\alpha_j} u_1(t) - \widetilde{T}_{\alpha_j} u_2(t)| &\leqslant e^{-\alpha_j t} \left| g(t, (\tilde{\kappa}_0 * (u_1 e^{\alpha_j (\cdot)}))(t)) - g(t, (\tilde{\kappa}_0 * (u_2 e^{\alpha_j (\cdot)}))(t)) \right| \\
&\quad + e^{-\alpha_j t} \left| \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t) \left[\kappa_i(0) (\tilde{\kappa}_0 * (we^{\alpha_j (\cdot)}))(t) + (\kappa_{i,0} * (we^{\alpha_j (\cdot)}))(t) \right] \right| \\
&\leqslant e^{-\alpha_j t} \lambda |(\tilde{\kappa}_0 * (u_1 e^{\alpha_j (\cdot)}))(t) - (\tilde{\kappa}_0 * (u_2 e^{\alpha_j (\cdot)}))(t)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i(t)| \left[e^{-\alpha_j t} \left| \kappa_i(0) (\tilde{\kappa}_0 * (we^{\alpha_j (\cdot)}))(t) \right| + e^{-\alpha_j t} \left| (\kappa_{i,0} * (we^{\alpha_j (\cdot)}))(t) \right| \right] \\
&\leqslant \lambda \int_0^t |\tilde{\kappa}_0(t-s)| |w(s)| \, e^{-\alpha_j (t-s)} \mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i(t)| \Big[|\kappa_i(0)| \int_0^t |\tilde{\kappa}_0(t-s)| \, |w(s)| e^{-\alpha_j (t-s)} \mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t |\kappa_{i,0}(t-s)| \, |w(s)| e^{-\alpha_j (t-s)} \, \mathrm{d}s \Big] \\
&\leqslant \|w\|_\infty \left[\lambda \int_0^T |\tilde{\kappa}_0(r)| e^{-\alpha_j r} \mathrm{d}r + \sum_{i=1}^{m} \|\sigma_i\|_\infty \Big[|\kappa_i(0)| \int_0^T |\tilde{\kappa}_0(r)| \, e^{-\alpha_j r} \mathrm{d}r \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T |\kappa_{i,0}(r)| \, e^{-\alpha_j r} \mathrm{d}r \right].
\end{aligned}
$$

勒贝格控制收敛定理给出

$$
\int_0^T |\tilde{\kappa}_0(r)| e^{-\alpha_j r} \, \mathrm{d}r \to 0, \qquad \int_0^T |\kappa_{i,0}(r)| e^{-\alpha_j r} \, \mathrm{d}r \to 0, \quad \text{as} \quad j \to +\infty.
$$

˜ ˜因此 $|T_{\alpha_j} u_1(t) - T_{\alpha_j} u_2(t)| \leqslant C(\alpha_j) \, \|u_1 - u_2\|_\infty$，其中

$$
\begin{aligned}
C(\alpha_j) &= \lambda \int_0^T |\tilde{\kappa}_0(r)| e^{-\alpha_j r} \mathrm{d}r \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \|\sigma_i\|_\infty \left[|\kappa_i(0)| \int_0^T |\tilde{\kappa}_0(r)| e^{-\alpha_j r} \mathrm{d}r + \int_0^T |\kappa_{i,0}(r)| e^{-\alpha_j r} \mathrm{d}r \right].
\end{aligned}
$$

由于上述积分随着 $j \to +\infty$趋于零，因此我们有 $C(\alpha_j) \to 0$ 当$j \to +\infty$时。对于 j 充分大时，我们得到

$$
\|\widetilde{T}_{\alpha_j} u_1 - \widetilde{T}_{\alpha_j} u_2\|_\infty \leqslant C(\alpha_j) \|u_1 - u_2\|_\infty, \quad \text{for some} \quad 0 < C(\alpha_j) < 1.
$$

˜根据巴拿赫不动点定理， T_{α_j}存在唯一不动点 $u \in C[0, T]$. 因此，问题 (6.1) - (6.2) - (6.3) 有唯一解 $v \in C^{\kappa_0}$。□

注 6.3。根据定理6.2，解 u （6.4）可通过以下迭代序列的极限得到

$$u_0(t) = g(t,0),$$
$$u_n(t) = g\big(t,(\tilde{\kappa}_0 * u_{n-1})(t)\big) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * \tilde{\kappa}_0 * u_{n-1})'(t), \quad n \geqslant 1,$$

其在 $\|\cdot\|_\infty$. 中收敛。令 $v_n = (\tilde{\kappa}_0 * u_n)(t)$ 对每个 n 都成立，则

$$v_0(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g(\cdot,0))(t),$$
$$v_n(t) = (\tilde{\kappa}_0 * g(\cdot, v_{n-1}(\cdot)))(t) - \tilde{\kappa}_0 * \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)(\kappa_i * v_{n-1})'(t). \tag{6.5}$$

不难看出， $v_n \in C^{\kappa_0}$ 对所有 n.定理 5.2 表明，序列 $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$在 C^{κ_0}中收敛。因此，其极限 $v \in C^{\kappa_0}$ 是（6.1）的唯一解。

在下一个例子中，我们使用备注6.3来迭代求解。

例 6.4。假设 $\kappa_0(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ 对 $\alpha \in (0,1)$ $\sigma_1(t) = 1$, $\kappa_1(t) = t$ 且$g(t,v(t)) = v(t) + \cos(t)$ 成立。因此，方程（6.1）变为

$$\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)'(t) + (t * v)'(t) = v(t) + \cos(t), \quad t \in [0,10], \tag{6.6}$$

其初始条件为 $\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * v\right)(0) = 0$. 显然， $|v_1(t) + \cos(t) - v_2(t) - \cos(t)| = |v_1(t) - v_2(t)|$. 根据定理 6.2， （6.6）具有唯一解 $v \in C^{\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}$。由（6.5）可得以下迭代序列

$$v_0(t) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \cos(t)\right)(t),$$
$$v_n(t) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * (v_{n-1} + \cos(t))\right)(t) - \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * (t * v_{n-1})'\right)(t),$$

或者说，两者等价

$$v_0(t) = {}^{RL}I_0^{\alpha} \cos(t),$$
$$v_n(t) = {}^{RL}I_0^{\alpha} v_{n-1}(t) + {}^{RL}I_0^{\alpha} \cos(t) - {}^{RL}I_0^{\alpha+1} v_{n-1}(t).$$

对前一个序列进行连续迭代，得到

$$v_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left({}^{RL}I_0^{\alpha} - {}^{RL}I_0^{\alpha+1}\right)^k \left({}^{RL}I_0^{\alpha} \cos(t)\right).$$

B牛顿二项式定理， [41, 定理 2。5] 并令 $n \to +\infty$，我们有 e

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \, {}^{RL}I_0^{\alpha(k-j)+(\alpha+1)j+\alpha} \cos(t).$$

根据 $m = k - j$ 的柯西乘积公式，我们得到

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j \frac{(m+j)!}{j!\,m!}\,{}^{RL}I_0^{m\alpha+(\alpha+1)j+\alpha}\cos(t) \\ &= \int_0^t \cos(t-s)\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j \frac{(m+j)!}{j!\,m!}\frac{s^{m\alpha+(\alpha+1)j+\alpha-1}}{\Gamma(m\alpha+(\alpha+1)j+\alpha)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \cos(t-s)s^{\alpha-1}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(m+j)!}{j!\,m!}\frac{(s^\alpha)^m(-s^{\alpha+1})^j}{\Gamma(m\alpha+(\alpha+1)j+\alpha)}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

根据 [1,定义 2。1], 我们得到

$$v(t) = \int_0^t \cos(t-s)s^{\alpha-1}E_{(\alpha,\alpha+1),\alpha}(s^\alpha,-s^{\alpha+1})\,\mathrm{d}s.$$

注意，(6.6) 可以改写为

$${}^{RL}D_0^\alpha v(t) + Iv(t) = v(t) + \cos(t). \tag{6.7}$$

此外，对 (6.7) 应用拉普拉斯变换可得

$$s^\alpha\mathcal{L}\{v\}(s) - {}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(0) + s^{-1}\mathcal{L}\{v\}(s) = \mathcal{L}\{v\}(s) + \frac{s}{s^2+1}, \quad s>0.$$

我们知道 ${}^{RL}I_0^{1-\alpha}v(0) = 0$ 因此

$$s^\alpha\mathcal{L}\{v\}(s) + s^{-1}\mathcal{L}\{v\}(s) = \mathcal{L}\{v\}(s) + \frac{s}{s^2+1},$$

and

$$\mathcal{L}\{v\}(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)(s^{\alpha+1}-s+1)}.$$

因此

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)(s^{\alpha+1}-s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^{\alpha+1}-s+1}\right\}.$$

根据 [1, 定理 2。3], 可得

$$v(t) = \int_0^t \cos(t-s)s^{\alpha-1}E_{(\alpha,\alpha+1),\alpha}(s^\alpha,-s^{\alpha+1})\,\mathrm{d}s.$$

7. Conclusions

本文研究了一类具有 Sonin 核和绝对连续核的线性与非线性积分-微分方程，考虑了可积系数和连续变系数。本文的主要目标是确立此类问题可解性的最低条件。在线性情形下，我们证明了解的存在唯一性，并得到其解析表示。对于非线性情形，我们利用迭代过程保证了解的存在唯一性及其近似。

我们的观点为条件 $v(0) = 0$ 和 $(\kappa_0 * v)(0) = 0$ 对于 (5.1) 的解之间的等价性提供了一些新的见解，参见命题 5.1。这一性质使我们能够使用更自然的初始条件来重新表述原问题，该初始条件直接以未知函数表示

。在相同背景下，我们不要求 $k_i(0) = 0$ 对于 $i = 1,\ldots,m.$

T本研究所得结果为未来研究开辟了不同方向：

(1) 一个自然而然的首要问题是，放宽那些保证在线性方程和非线性方程的存在唯一性结果中所涉及算子具有压缩性的假设。(2) 另一个问题是研究具有非齐次初始条件的方程。特别是，分析具有如下形式条件的问题将很有意义：$(\kappa_0 * v)(0) \neq 0$ 或 $v(0) \neq 0$，这些问题在某些情况下并未在本文中讨论。(3) 考虑采用其他技术和工具来研究具有索宁核和变系数的积分-微分方程。本文仅考虑巴拿赫不动点定理和逐次逼近法。

8. Data availability statement and acknowledgments

由于本研究未生成或分析任何数据集，本文不适用数据共享。本研究过程中未收集或生成新数据。

References

[1] A. Abilassan、J.E. Restrepo、D. Suragan. 关于拉普拉斯变换法中出现的一种多元米塔-莱夫勒函数变体。Integr. Transf. Spec. F., 34(3), (2022), 244—260.[2] F. Al-Musalhi、A. Fernandez. 含有变系数的 Erd´elyi-Kober 导数的分数阶微分方程。Fract. Calc. Appl. Anal., 28, (2025), 1252–1281 .[3] F. Al-Musalhi. 利用变换关系求解变系数分数阶微分方程。Comp. Appl. Math., 45(26), (2026), 1–21.[4] T.M. Atanackovi´c、B. Stankovi´c. 变系数线性分数阶微分方程 I。Bull. de l Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Math., 38, (2013), 27–42.[5] T.M. Atanackovi´c、B. Stankovi´c. 变系数线性分数阶微分方程 II。Bull. de l Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Math., 39, (2014), 53–78.[6] K. Diethelm. 分数阶微分方程分析：使用 Caputo 型微分算子的应用导向论述。Springer, 海德堡, 2010.[7] M.M. Dzhrbashyan、A.B. Nersessyan. 分数阶导数与分数阶微分方程的柯西问题。Izv. AN Arm. SSR. Mat,. 3, (1968).[8] N. Faustino. 关于 L´e-Leblond 型分数阶半离散狄拉克算子。Math. Nachr., 296(7), (2023), 2758–2779.[9] A. Fernandez、J.E. Restrepo、D. Suragan. 含 Mittag-Leffler 核的变系数线性微分方程。Alexandria Eng. J., 61, (2022), 4757–4763.[10] A. Fernandez、J.E. Restrepo、D. Suragan. 关于变系数线性分数阶微分方程。Appl. Math. Comput., 432, (2022), #127370.[11] A. Fernandez、J.E. Restrepo、D. Suragan. 变系数普拉巴卡尔型线性微分方程。Differ. Integral Equ., 35(9/10), (2022), 581–610.[12] R. Garra. 利用算子方法求解一类变系数分数阶微分方程的解析解。Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17(4), (2012),1549–1554.[13] R. Garrappa、F. Mainardi、G. Maione. 基于完全单调函数的介电弛豫模型。Fract. Calc. Appl. Anal. 19(5), (2016), 1105–1160.[14] R. Gorenflo、A. A. Kilbas、F. Mainardi、S.V. Rogosin. 米塔-莱夫勒函数、相关主题与应用，第2版。Springer 数学专著丛书, Springer，纽约，2020.

[15] G. Gripenberg、S.O. Londen、O.J. Staffans. Volterra积分与函数方程。Cam- bridge University Press, Cambridge, 1990.[16] Y. G¨uzoglu Y¨ucel、A. Fernandez、N.I. Mahmudov. 含连续变系数和索宁核的分数阶微分方程。Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 152, (2026), #109136.[17] R.C. Koeller. 分数阶微积分在黏弹性理论中的应用。J. Appl. Mech. 51(2), (1984), 299–307.[18] Y. Luchko. 基于 Sonine 核的广义分数阶积分与导数, Mathematics, 9(6):594, (2021), 1–17.[19] Y. Luchko. 任意阶广义分数阶积分与导数。Symmetry, 13(5), (2021), # 755.[20] Y. Luchko. 基于 Sonine 核的广义分数阶导数的运算微积分。Fract. Calc. Appl. Anal., 24(2), (2021), 338–375.[21] Y. Luchko. 卷积级数与广义卷积泰勒公式。Fract. Calc. Appl. Anal., 25, (2022), 207–228.[22] Y. Luchko. 广义分数阶积分与导数及其应用。Phys D, 455, (2023), #133906.[23] H.J. Haubold、A.M. Mathai. 分数阶动力学方程与热核函数。Ast- rophys. Space Sci., 273, (2000), 53–63.[24] R. Hilfer，编。分数阶微积分在物理学中的应用。World Scientific, Singapore, 2000.[25] A.A. Kilbas、M. Rivero、L. Rodriguez-Germa、J.J. Trujillo. α关于若干含变系数线性分数阶微分方程的解析解，Appl. Math. Comput. 187 (2007), 239–249.[26] A.A. Kilbas、H.M. Srivastava、J.J. Trujillo. 分数阶微分方程理论与应用。North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Amsterdam, 2006.[27] M. Kim、H.-C. O. 变系数线性分数阶微分算子的格林函数显式表示。J. Fract. Calc. Appl. 5(1) (2014), 26–36.[28] A.N. Kochubei. 广义分数阶微积分、演化方程与更新过程。Integr. Equ. Oper. Theory, 71, (2011), 583–600.[29] F. Li、H. Wang. ψ–Hilfer 型变系数线性分数阶微分方程。Fract. Calc. Appl. Anal., 28, (2025), 807–838.[30] F. Li、H. Wang. 变系数非线性分数阶微分方程解析解的构造。Chaos Soliton Fract., 205, (2026), #117873.[31] F. Mainardi. 线性黏弹性中的分数阶微积分与波。Imperial College Press, London, 2010.[32] F. Mainardi、G. Spada. 流变学基本分数阶模型的蠕变、松弛与黏性性质。Eur. Phys. J. Spec. Top. 193(1), (2011), 133–160.[33] K.B. Oldham、J. Spanier. 分数阶微积分。Academic Press, 纽约, 1974.[34] S. Pak、H. Choi、K. Sin. 利用格林函数表示具有连续变系数的线性非齐次Caputo分数阶微分方程的解。Fractional Differ. Calc., 7(2), (2017), 357–369.[35] S. Pak、H. Choi、K. Sin、K. Ri. 具有连续变系数的线性非齐次分数阶微分方程的解析解。Adv. Differ. Equ., 2019, (2019), #256.[36] E. Pitcher、W.E. Sewel. 非整数阶微分方程解的存在定理。Bull. Amer. Math. Soc., 44(2), (1938), 100–107.[37] J.E. Restrepo、M. Ruzhansky、D. Suragan. 关于函数的线性变系数分数阶微分方程的显式解。Appl. Math. Comput. 403, (2021).[38] J.E. Restrepo、D. Suragan. 广义时空分数阶微分方程的正逆柯西问题。Adv. Differential Equations 26(7–8) (2021), 305–339.[39] J.E. Restrepo、M. Ruzhasky、D. Suragan. 广义分数阶狄拉克型算子。Fract. Calc. Appl. Anal. 26, (2023), 2720–2756.[40] M. Rivero、L. Rodr´ıguez–Cierm´a、J. J. Trujillo. 变系数线性分数阶微分方程，Appl. Math. Lett., 21, (2008), 892–897.

[41] S.G. Samko、A.A. Kilbas、O.I. Marichev。《分数阶积分与导数》，译自1987年俄文原版, Gordon and Breach，伊韦尔东，（1993）。[42] S.G. Samko、R.P. Cardoso。Sonine型第一类积分方程。《国际数学与数学科学杂志》，2003(57)，（2003），3609–3632。

Sebastian Nuñez:Department of Mathematics
Center for Research and Advanced Studies
Av. IPN 2508, 07360, CDMX, Mexico电子邮箱
sebastian.nunez@cinvestav.mx

Joel E. Restrepo:Department of Mathematics
Center for Research and Advanced Studies
Av. IPN 2508, 07360, CDMX, Mexico电子邮箱
joel.restrepo@cinvestav.mx