arXiv:2611.29063v1 [math.AG] 21 Nov 2026

曲线上函数的强全纯性

YURI BEREST 和 ISAAC GOLDBERG

Abstract. 设 X 是复数域 $\mathbb{C}$上的光滑仿射不可约曲线，并设 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(X)$ 是作用于 X上的整体微分算子环。对每个非零算子 $L \in \mathcal{D}$，我们赋予一个非负整数 $n(L)$，称为 L的 *holonomicity index*；其定义方式很初等，即计算 L在 L的奇点处的截断局部环中的解的个数。我们的主定理表明，$n(L)$ 等于 Weyl 闭包 $\mathrm{cl}(L) = \mathcal{D}(K)L \cap \mathcal{D}$的 Calogero–Moser 指数，即标记包含左理想 $\mathrm{cl}(L)$ 同构类的 Calogero–Moser 空间 $\mathcal{C}_n(X, \mathcal{I})$ 的整数 n；该左理想的归属依据的是 Berest–Chalykh, 2012] 中给出的 $\mathcal{D}$ 的理想分类 [。证明基于 Cannings–Holland 对应的对偶版本，该版本用 X上的有限维代数分布空间来描述 $\mathcal{D}$ 的左理想，并给出一个用这些分布表示的 Calogero–Moser 指数的显式公式。我们将这些结果应用于 X上全纯函数的湮灭子：若全纯函数 f *strongly holonomic* 的 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f)$ 的 Calogero–Moser 指数为正，我们就称其为全纯函数，并在若干有趣的情形下计算该指数。

1. Introduction

设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的一条光滑仿射不可约曲线，$\mathcal{D} = \mathcal{D}(X)$ 是 X 上整体代数微分算子的环。给定 X 上的全纯函数 f，自然会问它满足哪些具有正则系数的线性微分方程 f。所有这类方程构成 f 的湮灭子，

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f) := \{P \in \mathcal{D} : P(f) = 0\},$$

它是 $\mathcal{D}$ 的一个左理想。函数 f 称为全纯的，如果 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f) \neq 0$，也就是说 f 满足至少一个非平凡方程。全纯性这一概念（适用于任意维数的簇）源于 J. Bernstein 的奠基性工作 [10]；对于曲线，它等价于上述条件。例如，若 $X = \mathbb{A}^1$ 且 $\mathcal{D} = A_1(\mathbb{C})$ 是第一个 Weyl 代数，则函数 e^x 和 x^n $(n \geq 1)$ 都是全纯的，并且

$$\mathrm{Ann}(e^x) = A_1\,(\partial - 1), \qquad \mathrm{Ann}(x^n) = A_1\,\partial^{n+1} + A_1\,(x\partial - n), \tag{1.1}$$

而 $\Gamma(x)$ 和 e^{e^x} 则不是（参见 [14, 第 5 章第 3]节）。式（1.1）中的两个理想性质不同：第一个是循环的（即由 $\mathcal{D}$中的单个元素生成），而第二个不是。循环性是理想的同构类的一种性质，这引出了对上述问题的进一步探究：

Ann() 的类作为 $\mathcal{D}$-模是什么，以及它编码了 f 的哪些性质？对于曲线 X，这个问题是有意义的，因为（左）理想的类属于

$\mathcal{D}(X)$具有简单的几何分类。令 $\mathcal{L}(\mathcal{D})$表示 $\mathcal{D}$的（非零）左理想的同构类集合。由于 $\mathcal{D}$ 是遗传诺特整环，每个理想都是秩 1 投射模，将其同构类映入 $K_0(\mathcal{D}) \cong K_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(X)$即可定义一个映射

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号16S32、13N10；次要分类号14F10、32C38、14H99。
Key words and phrases. 微分算子环、Weyl 闭包、湮灭子理想、全纯函数、卡洛杰罗–莫泽空间、阿代尔格拉斯曼流形。

$\gamma:\ \mathcal{L}(\mathcal{D})\to \mathrm{Pic}(X)$。根据 [3]（推广了 [6, 7] 在 $X=\mathbb{A}^1$情形下的 γ），的每个纤维都分解为可数个光滑仿射簇商的并：

$$\omega:\ \bigsqcup_{n\geq 0}\mathcal{C}_n(X,\mathcal{I})/\mathrm{Aut}_X(\mathcal{I})\ \xrightarrow{\sim}\ \gamma^{-1}[\mathcal{I}],\qquad [\mathcal{I}]\in\mathrm{Pic}(X),\tag{1.2}$$

称为卡洛杰罗–莫泽空间 $\mathcal{C}_n(X,\mathcal{I})$（见第 2.5 节）。因此，对于每个非零左理想 $M\subseteq\mathcal{D}$，都可以赋予一个非负整数 $n(M)$——即包含 $\omega^{-1}(M)$ 的类的 (1.2) 中分层的指标 n ——我们称之为 M 的 Calogero–Moser 指数。该不变量在其最小值处有一个简单的含义：$n(M)=0$ 当且仅当 $M\cong\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{I}$ 是 X 上的一个线丛 $\mathcal{I}$（见命题 2.3）；特别地，当 $X=\mathbb{A}^1$ 时，$n(M)=0$ 当且仅当 M 是循环的。这引出了以下定义。

定义 1. 称 X 上的（局部）全纯函数 f 为强全纯，如果它是全纯的，且 $n(\text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f))\geq 1$。

因此，在上述例子中，x^n 在 $\mathbb{A}^1$ 上是强全纯的（事实上，$n(\text{湮灭子}(x^n))=n$），而e^x 则不是（$n(\text{湮灭子}(e^x))=0$）。不过，一般而言，答案并非如此显而易见：例如，对于 $n(\text{湮灭子}(f))$，$f={}_2F_1(a、b、c;x)$是什么？（参见例6.9）。

我们研究全纯性的动机来自纽结理论。对于一个纽结 $K\subset S^3$，可以将其带色Jones函数 J_K 与之关联：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$, $k\mapsto J_K(k)$，这是 K 的一种基本量子不变量，它推广了经典的琼斯多项式。将 $q\in\mathbb{C}^*$ 视为一般复参数后，可以把 $\mathbb{C}$取值函数在 $\mathbb{Z}$ 上的空间构造成代数 $\mathcal{T}_q=\mathbb{C}\langle \mathsf{L}^{\pm 1},\ \mathsf{M}^{\pm 1}\rangle/(\mathsf{LM}=q^2\mathsf{ML})$上的一个模，这个代数称为量子环面，其生成元L和M的作用方式为

$$(\mathsf{L}f)(k)=f(k+1)\quad\text{and}\quad(\mathsf{M}f)(k)=q^{2k}f(k)$$

众所周知，对于每个纽结 K，$\mathrm{Ann}^{\mathcal{T}_q}(J_K)\neq 0$（见 [15]，另见 [20],，其中这项性质称为 q-全纯性）。代数 $\mathcal{T}_q$ 具有许多与曲线上微分算子环相同的性质[1]：特别是，$\mathcal{T}_q$ 的左理想由 Calogero–Moser 空间的乘法（“量子”）类比对象分类（见 [2, 5]）。因此，自然会问，理想 $\mathrm{Ann}^{\mathcal{T}_q}(J_K)$ 属于分类空间的哪个分层。初步计算表明如下结论。

猜想1.1 (Berest)。对于任意纽结 $K\subset S^3$，(未约化) 带色*Jones*函数J_K是强全纯的；事实上，$n(\mathrm{Ann}^{\mathcal{T}_q}(J_K))\geq 2$。

我们希望在别处讨论这一猜想。本文研究微分情形，其中的问题本身就很有意思：如何根据 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f)$ 计算 f的 *Calogero–Moser* 指数？通过双射（$n(M)$ 定义 1.2）并不适合用于此目的：构造 ω 的逆映射需要借助非交换射影几何（见 [7, 3]）；而将 $n(M)$ 简单刻画为关联分次模 $\mathrm{gr}\,M$ 在其自反包中的余维（见定理 2.3）也需要知道 ¨的 Gro Mbner 基。我们将证明，对于作为湮灭子得到的理想，其指数可以通过单个微分算子，以初等方式显式计算。

我们先概述主要结果。回顾一下，算子 $L\in\mathcal{D}$ 的（Weyl）闭包是左理想 $\mathrm{cl}(L):=\mathcal{D}(K)L\cap\mathcal{D}$，其中 $K=K(X)$ 是 X 上的有理函数域，而 $\mathcal{D}(K)=K\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{D}$ 是有理微分算子环。每个湮灭子在此意义下都是闭的：若 f 是全纯的，且 L 是 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f)$ 中阶数最小的非零算子，则 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f)=\mathrm{cl}(L)$（见引理 2.4）。因此，我们的问题归结为计算任意 $L\in\mathcal{D}$ 的 $\mathrm{cl}(L)$ 的卡洛杰罗–莫泽指数。

[1]事实上，$\mathcal{T}_q$ 通常称为量子Weyl代数，记作 $A_q(\mathbb{C})$.

全纯性指数。取 X 上的一个非零正则微分算子 $L \in \mathcal{D}$。对于点 $\lambda \in X$，用 $\mathcal{O}_\lambda$ 表示 X 在 λ 处的局部环，其极大理想为 $\mathfrak{n}_\lambda$；令 $t \in \mathfrak{n}_\lambda$ 是 $\mathcal{O}_\lambda$ 中的局部参数（即 $\mathfrak{n}_\lambda$ 的循环生成元）。于是，存在唯一的（最小）整数 $w = w_\lambda(L)$，它依赖于 λ，使得算子 $L{:=}\, t^w L$ 保持 $\mathcal{O}_\lambda$ 上的 $\mathfrak{n}_\lambda$-阿迪克滤子，也就是说，对所有 $j \geq 0$ 都有 $\bar{L}(\mathfrak{n}_\lambda^j) \subseteq \mathfrak{n}_\lambda^j$（见引理 3.1）；我们称 $\bar{L}$ 为 L 的 λ-归一化。算子 $\bar{L}$ 作用于有限维向量空间 $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$，并定义

$$S_\lambda^j(L) := \operatorname{Ker}\big[\bar{L}:\ \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1} \to \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}\big], \qquad j \geq 0, \tag{1.3}$$

满足 $S_\lambda^{-1}(L){:}\ = 0$。事实证明，这些空间的维数构成一个单调递增序列，每一步至多增加一维，并最终趋于稳定（引理 3.3）。我们将有限集 $J_\lambda(L) = \{j_0 < j_1 < \ldots < j_s\}$ 中的指标 $j \geq 0$ 称为 $S_\lambda^j(L)\ >$ 维数 $S_\lambda^{j-1}(L)$ 的余型，即 L在 λ处的余型，并将局部全纯性指标定义为 L 在 λ处的

$$n_\lambda(L) := \sum_{i=0}^{s} (j_i - i). \tag{1.4}$$

除有限多个 λ外，这个数都为零；具体而言，$n_\lambda(L)\ = 0$ 在有限集$\Lambda(L)$ 中的奇点之外 L（见定义4）。于是，全纯性指标定义为 L:

$$n(L) := \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} n_\lambda(L). \tag{1.5}$$

注意，$n(L)$ 的定义只涉及 X 的局部环中的线性代数。

条件空间。本文的主要结果（下文定理 1.3）指出，$n(L)$ 是 $\mathrm{cl}(L)$ 的卡洛杰罗–莫泽指数。我们分两步证明等式 $n(\mathrm{cl}(L))\ = n(L)$，其中每一步本身都具有独立价值。首先，我们给出 $\mathcal{D}$ 左理想的一种新描述，它与 Cannings 和 Holland [13] 提出的著名分类互为对偶。回顾一下，后者将 $\mathcal{D}$ 的（胖）右理想与 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X)$ 的主可分解子空间对应起来：对于一个子空间 $W \subseteq \mathcal{O}$，它赋予右理想 $\mathcal{D}(\mathcal{O}, W)$，该理想由所有将 $\mathcal{O}$ 映入 W 的算子构成（见第 2.4 节）。对偶地，每个 $\mathcal{D}$ 的左理想都同构于 $\mathcal{D}(W, \mathcal{O})\ = \{P \in \mathcal{D}(K){:}\ $ 对于某个主可分解的 W，有 $P(W) \subseteq \mathcal{O}\}$。另一方面，将 G. Wilson [25] 的构造推广到任意曲线后，我们可以用一个有限维线性条件空间描述 $\mathcal{O}$ 中的一个（无限维）主可分解子空间。为此，我们对每个 $\lambda \in X$，考虑右 $\mathcal{D}$- 模 $\Delta_\lambda := \mathcal{D}/\mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D}$，其中 $\mathfrak{m}_\lambda \subset \mathcal{O}$ 是 λ 的极大理想；这个模与 $\mathcal{O}$ 自然配对，

$$\langle -, - \rangle_\lambda :\ \Delta_\lambda \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}_\lambda \cong \mathbb{C}, \qquad \langle F, f \rangle_\lambda := F(f) \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\lambda), \tag{1.6}$$

因此，其元素可视为支撑在点 λ处的 $\mathcal{O}$ 上的线性泛函。齐次条件空间 是 $\bigoplus_{\lambda \in X} \Delta_\lambda$的有限维子空间 $C = \bigoplus_\lambda C_\lambda$，相应的主可分解子空间为

$$W_C := \{f \in \mathcal{O}\ :\ \langle F, f \rangle_\lambda = 0 \ \text{ for all } \lambda \in X \text{ and } F \in C_\lambda\}. \tag{1.7}$$

我们的关键观察是，左理想 $I \subseteq \mathcal{D}$ 直接确定一个条件空间。选取一个阶最小的算子 $L \in I$，并对每个 $\lambda \in X$ 令

$$V_\lambda(I; L) := \operatorname{Ker}\big[\Delta_\lambda \xrightarrow{\cdot L} I/\mathfrak{m}_\lambda I\big], \qquad V_\lambda(L) := \operatorname{Ker}\big[\Delta_\lambda \xrightarrow{\cdot L} \Delta_\lambda\big], \tag{1.8}$$

其中的映射由 L 的右乘法诱导。这些空间是有限维的，并且除有限多个 λ 外都为零。此外，$V_\lambda(I; L) \subseteq V_\lambda(L)$，当 $I =\mathrm{cl}(L)$ 时取等号。

定理 1.1。 设 I 是 $\mathcal{D}$ 的非零左理想，且 $L \in I$ 是一个最小阶算子。设 $W = W_C$ 是与条件空间 $C = \bigoplus_{\lambda\in X} V_\lambda(I;\ L)$ 相关联的 $\mathcal{O}$ 的主可分解子空间。则

$$I = \mathcal{D}(W, \mathcal{O}) \cdot L.$$

特别地， $I \cong \mathcal{D}(W, \mathcal{O})$ 作为左 $\mathcal{D}$-模，而 IL^{-1} 的对偶右理想是 $\mathcal{D}$中 C 的湮灭子。

定理 1.1 表明 W 是 Cannings–Holland 对应赋予与对偶的右理想的主可分解子空间 I。因此， $\mathcal{D}$ 的左理想同构类由有限维齐次条件空间的等价类参数化，这些条件空间可视为“对偶阿代尔格拉斯曼流形”的点（见推论 4.3）。此外，我们还得到了任意曲线上算子闭包的一个显式表示。

推论 1.1. 对于任意非零 $L \in \mathcal{D}$,

$$\mathrm{cl}(L) = \mathcal{D}L + \sum_{\lambda\in\Lambda(L)} \mathcal{D}\,\mathfrak{m}_\lambda^{-1}\,\widetilde{V}_\lambda(L)\,L,$$

其中， $\widetilde{V}_\lambda(L) = \{F \in \mathcal{D}:\ \ FL \in \mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D}\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中 $V_\lambda(L)$ 的原像，而 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1} \subset K$ 是 $\mathfrak{m}_\lambda$ 的分式理想逆。

对于 $X = \mathbb{A}^1$，推论 1.1 是 H. Tsai 的一项结果（参见 [24, 算法 3。4]）。

我们的第二步是给出一个用条件空间表示 Calogero–Moser 指数的公式。 $\mathcal{D}$ 上的阶滤过在每个 Δ_λ上诱导出一个滤过，因此我们可以讨论 Δ_λ 中非零元素的次数（若 t 是 λ 处的局部参数，且 ∂_t 是满足$\partial_t(t) = 1$的导子，则 $\Delta_\lambda \cong \mathbb{C}[\partial_t]$，而 deg 是多项式次数的通常概念）。

定理 1.2. 设 $C = \bigoplus_\lambda C_\lambda$ 是一个有限维齐次条件空间。对于每个满足 $C_\lambda \neq 0$的 λ，选取 C_λ 的一组基 $\{F_{\lambda,1}, \ldots, F_{\lambda,g_\lambda}\}$，使其元素的次数两两不同。则左理想 $I = \mathcal{D}(W_C, \mathcal{O})$ 的 *Calogero–Moser* 指数由下式给出

$$n(I) = \sum_\lambda \Big[\sum_{i=1}^{g_\lambda} \deg(F_{\lambda,i}) \ - \ \frac{g_\lambda\,(g_\lambda - 1)}{2}\Big]. \tag{1.9}$$

公式（1.9）与 n 关于主可分解子空间“间隙”的公式 [8, （8.3）] （见第5节末的注）。

主定理。以下对偶关系（定理 3.1）揭示了这两种描述之间的联系。回顾一下， L 的全纯性指标是根据截断局部环$\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 中 L 的 λ-归一化 $\bar{L}$的解空间$S_\lambda^j(L)$定义的（见（1.3））；而条件空间 $V_\lambda(L) \subseteq \Delta_\lambda$ 则由 L的右乘法定义（见（1.8））。现在，若 L 是 λ-规范化的（因此 $\bar{L} = L$），那么 $\dim S_\lambda^j(L)$ 等于 $V_\lambda(L)$中次数为 $\leq j$ 的元素所成子空间的维数。因此， L 在 λ 处的余型就是 $V_\lambda(L)$中元素次数的集合¯，而局部全纯性指标（1.4）就是（1.9）的 λ 项。结合定理 1.1 和定理 1.2，便得到本文的主结果。

定理 1.3。 设 L 是 X 上的一个非零微分算子。对于每个 $\lambda \in X$，令 $J_\lambda(L) = \{j_0 < j_1 < \ldots < j_{s_\lambda}\}$ 表示 L 在 λ 处的余型，即指标 $j \geq 0$ 的集合，在这些指标处

解空间的维数 （1.3）发生 λ-归一化的 L 跳跃，并令

$$n(L) = \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} \sum_{i=0}^{s_\lambda} (j_i - i)$$

是 L 由(1.4) 和(1.5)定义的全纯性指标。那么 $n(L)$ 等于闭包$\mathrm{cl}(L) = \mathcal{D}(K)L \cap \mathcal{D}$ 的卡洛杰罗–莫泽指数，其中 L:

$$n(L) = n(\mathrm{cl}(L)).$$

推论 1.2。 设 f 是 X上的全纯函数， L 是 湮灭子$_{\mathcal{D}}(f)$中阶数最小的非零算子。那么 n(湮灭子$_{\mathcal{D}}(f)$) $= n(L)$。特别地， f 是强全纯的，当且仅当存在至少一个奇点 λ 属于 L，使得 $n_\lambda(L) > 0$ 。

我们将在第1.3 节中通过若干例子说明定理6。此处我们只提及一个结果，它为最简单情形下的卡洛杰罗–莫泽指数赋予了直观的几何意义。

定理 1.4。 设 f 是 X 上的非零有理函数，或者更一般地，是 X 上的非零全纯函数，且被一阶微分算子湮灭。那么 n(湮灭子$_{\mathcal{D}}(f)$)等于 X 中 f 的零点数，按重数计。特别地，这类函数是强全纯的，当且仅当它在 X上某处取零。

例如，若 $f = p/q$ 是 $\mathbb{A}^1$ 上的一个有理函数，且n(湮灭子(f)) $= \deg(p)$; 若 f 是 X 上的正则函数，并定义有限映射 $X \to \mathbb{A}^1$，则n(湮灭子$_{\mathcal{D}}(f)$) 就是该映射的次数。对于有限个函数 $\{f_1, \ldots, f_k\}$，上述定理中 f的作用由朗斯基行列式 Wr$(f_1, \ldots, f_k)$ 承担（见推论 6.1）。

与早期工作的关系。Weyl 闭包最初是在 H. Tsai 的博士论文 [24] 中针对 Weyl 代数A_1 引入的；他从算法视角研究了这一运算，特别是利用空间 $V_\lambda(L)$ 给出了计算 cl(L) 生成元的算法。在 [24] 的末尾，Tsai 指出，他对 cl(L) 的表述与 Cannings 和 Holland [13]的理想分类之间应当存在联系。我们的定理 1.1 精确地阐明了这一联系，并将其推广到任意理想和任意曲线。Tsai 的工作发表的同一年，论文 [6], 首次建立了以卡洛杰罗–莫泽空间刻画 A_1理想分类的结果。因此，不变量 n并未出现在 [24]中。另一方面，算子的余型确实出现在 [24], 中；该文通过对矩阵作显式比较，证明了 A_1 上的定理 3.1 中的等式。我们的证明基于微分算子的形式连续性，适用于任意曲线。G. Wilson 在研究双谱微分算子 [25]时引入了条件空间；[25, 26] 的阿代尔格拉斯曼流形参数化了 $\mathbb{C}[x]$的主可分解子空间的等价类，而我们的“对偶阿代尔格拉斯曼流形”则是其针对左理想的自然对应物。对于 $X = \mathbb{A}^1$，卡洛杰罗–莫泽指数可由阿代尔格拉斯曼流形中相应点的 Baker函数读出（见 [26]）；在我们对定理 1.2 的第一个证明中，我们结合了这一事实与 Wilson 的朗斯基行列式公式 [25], 。附录中的第二个证明纯属代数方法：它基于 Briaņcon 和 Maisonobe [11]意义下的理想规范阶梯。两个证明所依据的卡洛杰罗–莫泽指数的余维刻画归功于 [7, 9]。

本文结构。第2 节为预备内容：其中确定了记号，并汇集了本文其余部分所需的微分算子环、闭理想、主可分解子空间和卡洛杰罗–莫泽空间的相关结果。尽管本节中的大多数结果

已有文献记载，但其中有些结果（似乎）是新的：尤其是引理2.2 和2.3 关于 Δ_λ 与完备局部环之间的局部对偶，以及命题2.2 关于卡洛杰罗–莫泽指数在对偶下的不变性。第3节定义微分算子的全纯性指数，阐述其基本性质，并将其与空间 $V_\lambda(L)$联系起来（定理3.1）；本节末尾陈述主要结果（定理3.2，这是定理1.3的一个更精确版本）。第4 节给出理想的对偶分类（定理4.2）及其推论。第5节证明卡洛杰罗–莫泽指数公式（定理5.1），并由此推出主定理；证明概要见本节开头。第6节讨论具体例子：仿射直线的情形在本文中具有特殊地位，我们在第6.1节对其进行了详细讨论，其中根据理想的条件空间描述了该理想的卡洛杰罗–莫泽数据。最后，附录给出局部指标公式的另一种自足证明。

本文的部分结果基于第二作者的博士论文 [16]。

记号与约定。本文中，我们均在基域 $\mathbb{C}$ 上工作。除非另有说明，X 表示一条光滑仿射不可约曲线，$\mathcal{O}=\mathcal{O}(X)$ 表示其坐标环，$K=K(X)$ 表示其有理函数域，而 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(X)$ 表示其微分算子环。对于 $X=\mathbb{A}^1$，我们将 $\mathcal{D}(\mathbb{A}^1)$ 与第一 Weyl 代数 $A_1=\mathbb{C}\langle x,\partial\rangle/(\partial x - x\partial - 1)$ 等同。$\mathcal{D}$ 的理想 始终指一个非零 单边理想；我们会明确说明它是左理想还是右理想。对于算子 P 作用于函数 f，我们用 $P(f)$ 表示，以区别于环 $\mathcal{D}$ 中的乘积 $Pf=P\cdot f$。对于 $s\in\mathbb{C}$ 和整数 $k\geq 0$，我们记 $[s]_k:=s(s-1)\cdots(s-k+1)$；对于由非负整数组成的有限集 S，我们定义

$$\nu(S):=\sum_{s\in S}s-\binom{|S|}{2}. \tag{1.10}$$

如果 $S=\{s_0<s_1<\ldots<s_{g-1}\}$，那么 $\nu(S)=\sum_i(s_i-i)\geq 0$，其中 $\nu(S)=0$ 当且仅当$S=\{0,1,\ldots,g-1\}$。

2. Preliminaries

本节固定记号，并回顾本文其余部分所需的材料。

2.1. 微分算子环。设 X 是 $\mathbb{C}$上的光滑仿射不可约曲线，其坐标环为 $\mathcal{O}=\mathcal{O}(X)$。$X$ 上的微分算子环 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(X)$ 是一个滤过代数 $\mathcal{D}=\bigcup_{k\geq 0}\mathcal{D}_k$，其滤过分量由下列递归方式定义：$\mathcal{D}_{-1}:=0$以及 $\mathcal{D}_k:=\{P\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}):\ [P,f]\in\mathcal{D}_{k-1},\ \text{对所有 } f\in\mathcal{O}\}$成立。$\mathcal{D}_k$中的元素是阶为 $\leq k$的微分算子；我们用 $\mathrm{ord}(P)$ 表示 P的阶。特别地，$\mathcal{D}_0=\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{D}_1=\mathcal{O}\oplus\mathrm{Der}(\mathcal{O})$。由于 X 是光滑的，$\mathcal{D}$ 由 $\mathcal{O}$ 和 $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ 生成，并且它是一个单诺特遗传整环（见 [22, 第 15]章）。伴随分次环 $\mathcal{D}:=\mathrm{gr}\,\mathcal{D}=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_{k-1}$ 是交换的：它同构于余切丛 T^*X的坐标环，而后者是一个维数为 2 的正则整环。

设 $K=K(X)$ 为 X 上的有理函数域。有理微分算子环 $\mathcal{D}(K)=K\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{D}=\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}K$ 包含 $\mathcal{D}$ 作为子环；若 δ 是 K 的任意非零导子，则 $\mathcal{D}(K)=K[\delta]$ 是 K 的 Ore 扩张，因而是一个（左、右）主理想整环。我们将 Q 记作 $\mathcal{D}$ 的商斜域。我们所说的<styles id='16'>分式左 （分别为 右）理想，是指 Q 的一个非零有限生成左（分别为右） $\mathcal{D}$-子模。对于分式左理想 M，其对偶是分式右理想

$$M^*:=\{q\in Q:\ Mq\subseteq\mathcal{D}\}, \tag{2.1}$$

右理想的情形类似。由于 $\mathcal{D}$ 是遗传的，每个分式理想 M 都是秩 1 的投射模；我们有 $M^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M,\ \mathcal{D})$ 和 $M^{**} = M$作为 Q的子模。我们将 $\mathcal{L}(\mathcal{D})$（分别为 $\mathcal{R}(\mathcal{D})$）记作 $\mathcal{D}$ 的左（分别为右）理想的同构类集合； $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ 中的每个类都包含分式理想，且映射 $M \mapsto M^*$ 诱导出一个双射$\mathcal{L}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{R}(\mathcal{D})$。

对于子空间 $U,\ V \subseteq K$，我们定义

$$\mathcal{D}(U,V) := \{P \in \mathcal{D}(K)\ :\ P(U) \subseteq V\}. \tag{2.2}$$

例如， $\mathcal{D}(\mathcal{O},\ \mathcal{O}) = \mathcal{D}$，并且对于任意 $V \subseteq \mathcal{O}$， $\mathcal{D}(\mathcal{O},\ V)$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个右理想。

局部结构。对于一点 $\lambda \in X$，我们用 $\mathfrak{m}_\lambda \subset \mathcal{O}$ 表示相应的极大理想，用 $\mathcal{O}_\lambda$ 表示 X 在 λ处的局部环，并用 $\mathfrak{n}_\lambda := \mathfrak{m}_\lambda \mathcal{O}_\lambda$ 表示其极大理想。由于 $\mathcal{O}_\lambda$ 是一个离散赋值环，对于某个 $t \in \mathcal{O}_\lambda$（$\lambda$处的局部参数），有 $\mathfrak{n}_\lambda = t\,\mathcal{O}_\lambda$，且 $\mathcal{O}_\lambda$ 的每个非零理想都具有 $\mathfrak{n}_\lambda^k$ 的形式；我们用 $\mathrm{ord}_\lambda : \mathcal{O}_\lambda \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 表示相应的赋值。模 $\mathrm{Der}(\mathcal{O}_\lambda)$ 是 $\mathcal{O}_\lambda$ 上秩 1 的自由模，由导子 $\partial = \partial_t$ 生成，且满足 $\partial_t(t) = 1$ （参见 [17, 定理 II.8.8]）。环 $\mathcal{D}_\lambda := \mathcal{D}(\mathcal{O}_\lambda) = \mathcal{O}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}$ 因而由 $\mathcal{O}_\lambda$ 和 ∂ 生成（参见 [22, 推论 15.5.6]）：

$$\mathcal{D}_\lambda \cong \mathcal{O}_\lambda\langle\partial\rangle \big/ \big(\partial f - f\partial = \partial(f),\ f \in \mathcal{O}_\lambda\big), \tag{2.3}$$

因此， $\mathcal{D}_\lambda$ 中的每个元素都可以唯一地写成 $\sum_i a_i \partial^i$，其中 $a_i \in \mathcal{O}_\lambda$。我们通过局部化映射将 $\mathcal{D}$视为 $\mathcal{D}_\lambda$ 的子环。我们还需要将 $\mathcal{O}_\lambda$ 在 $\mathfrak{n}_\lambda$处完备化：

$$\widehat{\mathcal{O}}_\lambda := \varprojlim \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^j \cong \mathbb{C}[[t]]\,,$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，其极大理想为 $\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda = t\,\mathcal{O}_\lambda$，以及环 $\mathcal{D}_\lambda$：

$= \mathcal{O}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \mathcal{D}_\lambda \cong \mathbb{C}[[t]][\partial]$，即关于 $\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda$进拓扑的、作用于 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ 上的连续微分算子环。自然的乘法映射 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \mathcal{D}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ 是滤过双模的同构，因此 $\widehat{\mathcal{D}}_\lambda \cong$

$\widehat{\ }$ $\frown\mathcal{D}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \mathcal{O}_\lambda$ （见引理 2.3]）。

由此得到环嵌入 $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\lambda \subset \mathcal{D}_\lambda$，它们扩张了$\frown\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}_\lambda$。最后，我们引入记号 $\theta :\ = t\partial_t$，表示关于局部参数 t的欧拉算子，并注意到恒等式

$$t^k \partial^k = [\theta]_k := \theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1), \qquad \forall\, k \geq 1\,. \tag{2.4}$$

（后者成立， $\mathcal{D}_\lambda$ 因为两边都是阶为 k 、首项系数为 t^k且湮灭 1、 t、.....、 t^{k-1} 的算子。）

形式连续性。 我们回顾代数微分算子的一般性质。设 A 是一个交换的 $\mathbb{C}$-代数。对于 A-模 M和 N，从 M到 N的微分算子空间 $\mathcal{D}_A(M,N) = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{D}_A^i(M,N)$归纳定义为 $\mathcal{D}_A^{-1}(M,N) := 0$ 和 $\mathcal{D}_A^i(M,N) := \{\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)\colon\ [a,\theta] \in \mathcal{D}_A^{i-1}(M,N),$ 对所有 $a \in A\}$ 均成立。以下性质众所周知。为完整起见，我们给出证明。

命题 2.1。 设 A、 M 和 N 如上所述。

(a) 对于任意理想 $\mathfrak{a} \subseteq A$ 以及所有 i、 $r \geq 0$，有 $\mathcal{D}_A^i(M,N)\ [\mathfrak{a}^{i+r}M] \subseteq \mathfrak{a}^r N$。$(b)$ 设 $\mathfrak{m} \subset A$是一个满足 $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$的极大理想。那么，映射 $\theta \mapsto [\,a + \mathfrak{m}^{i+1} \mapsto \theta(a)\,]$ 是一个线性同构 $\mathcal{D}_A^i(A,\ A/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A/\mathfrak{m}^{i+1}, A/\mathfrak{m})$，对所有 $i \geq 0$均成立。

证明。 (a) 我们对 i 使用归纳法。对于 $i = 0$，结论显然成立，因为 $\mathcal{D}_A^0(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$。如果结论对 i（以及所有 r）成立，那么根据 $\mathcal{D}_A^{i+1}$ 的定义，

$$\mathcal{D}_A^{i+1}(M,N)\,[\mathfrak{a}^{i+1+r}M] \subseteq \mathcal{D}_A^i(M,N)\,[\mathfrak{a}^{i+r}M] + \mathfrak{a}\,\mathcal{D}_A^{i+1}(M,N)\,[\mathfrak{a}^{i+r}M],$$

根据归纳假设并对 r 再作一次归纳，右端包含于 $\mathfrak{a}^r N$ 中。(*b*) 根据 (*a*)，每个 $\theta \in \mathcal{D}_A^i(A, A/\mathfrak{m})$ 都在 $\mathfrak{m}^{i+1}$ 上消失，因此该映射定义良好且为单射。反过来，如果 $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, A/\mathfrak{m})$ 在 $\mathfrak{m}^{i+1}$ 上消失，那么由于 $A = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}$，与 $a_j \in A$ 的 $(i+1)$ 重交换子 $[a_0, [a_1, \dots [a_i, \theta] \dots]]$ 可以用 $a_j \in \mathfrak{m}$ 计算，此时其取值属于 $\mathfrak{m}\,\theta(A) + \theta(\mathfrak{m}^{i+1}) = 0$。因此 $\theta \in \mathcal{D}_A^i(A, A/\mathfrak{m})$。□

引理 *2.1* ([23], 1.*3(e),(f)*)。设 A 是 $\mathcal{O}(X)$ 的局部化。那么，对任意理想 $\mathfrak{a} \subseteq A$，自然映射 $\mathcal{D}(A)/\mathfrak{a}\,\mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}_A(A, A/\mathfrak{a})$ 是一个同构。特别地，$\mathcal{D}(A, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,\mathcal{D}(A)$。

2.2. **局部对偶**。固定 $\lambda \in X$。右 $\mathcal{D}$-模

$$\Delta_\lambda := \mathcal{D}/\mathfrak{m}_\lambda \mathcal{D} \tag{2.5}$$

在本文中起着核心作用。它带有由 $\mathcal{D}$ 上的阶滤过诱导的滤过：我们将 $\mathcal{D}_j$ 在 Δ_λ 中的像记作 $\Delta_\lambda^{\le j}$，并将非零元素 $F \in \Delta_\lambda$ 的次数 $\deg(F)$定义为满足 $F \in \Delta_\lambda^{\le j}$ 的最小 j。对于子空间 $V \subseteq \Delta_\lambda$，我们令$V^{\le j} := V \cap \Delta_\lambda^{\le j}$。下一个引理用局部坐标描述 Δ_λ，并将其线性对偶与完备局部环等同起来。

引理 2.2. 令 t 为 λ处的局部参数，并令 $\partial = \partial_t$。

(*a*) 自然映射 $\Delta_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda \mathcal{D}_\lambda \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}_\lambda/t\,\widehat{\mathcal{D}}_\lambda$ 是滤过向量空间之间的同构，而 1、∂、∂^2、... 的类构成 Δ_λ 的一组基；因此 $\Delta_\lambda \cong \mathbb{C}[\partial]$，其中 次数对应于多项式的次数。特别地，$\Delta_\lambda$ 自然是一个右$\widehat{\mathcal{D}}_\lambda$-模。

(*b*) 配对 $\langle F, f\rangle_\lambda := F(f)$（模 $\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda$）在 $\Delta_\lambda \times \widehat{\mathcal{O}}_\lambda$上定义良好，并将 *(1.6)* 扩展。它满足 $\langle \partial^i, t^j\rangle_\lambda = i!\,\delta_{ij}$，因此将 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$与完整的线性对偶 $\mathit{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta_\lambda, \mathbb{C})$ 等同，并将 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda/\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1} \cong \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 与 $\Delta_\lambda^{\le j}$ 的对偶等同，对每个 $j \ge 0$均如此。

(*c*) 对所有 $F \in \Delta_\lambda$, $P \in \mathcal{D}_\lambda$和 $f \in \mathcal{O}_\lambda$，有 $\langle FP, f\rangle_\lambda = \langle F, P(f)\rangle_\lambda$.

(*d*) 对于 $P \in \mathcal{D}_\lambda$，令 $R_P\colon \Delta_\lambda \to \Delta_\lambda$, $F \mapsto FP$ 表示右乘以 P。于是，对于 $V \subseteq \Delta_\lambda$，记

$$(\operatorname{Ker} R_P)^\perp = P(\widehat{\mathcal{O}}_\lambda) \qquad \textit{and} \qquad (\operatorname{Im} R_P)^\perp = \operatorname{Ker}(P; \widehat{\mathcal{O}}_\lambda),$$

$$V^\perp := \{f \in \widehat{\mathcal{O}}_\lambda : \langle F, f\rangle_\lambda = 0 \textit{ for all } F \in V\}.$$

因此，存在自然同构 $(\operatorname{Ker}\ R_P)^* \cong \operatorname{Coker}(P;\, \mathcal{O}_\lambda)$ 以及 $(\operatorname{Coker}\ R_P)^* \cong \operatorname{Ker}(P;\, \mathcal{O}_\lambda)$。

证明。(*a*) 由于 $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{O}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{O}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}$ 是左模，因此有 $\mathcal{D}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda \mathcal{D}_\lambda \cong (\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D} \cong (\mathcal{O}/\mathfrak{m}_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D} = \Delta_\lambda$，对 $\mathcal{D}_\lambda$ 也同理。其余部分由 (2.3) 得出。(*b*) 若$F \in t\,\widehat{\mathcal{D}}_\lambda$，则对所有 f，$F(f) \in \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda$，因此配对定义良好；公式 $\partial^i(t^j)|_{t=0} = i!\,\delta_{ij}$显然。(*c*) 由定义立即得到。(*d*) 根据 (*b*) 和 (*c*)，线性映射 $P\colon \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda$ 是 R_P 的转置。于是该结论可由线性代数的标准事实推出：若 $A\colon U \to U'$ 是向量空间之间的线性映射，且 $A^{\mathsf{T}}\colon (U')^* \to U^*$ 是其转置，则 $\operatorname{Im}(A^{\mathsf{T}})$ 是 $\operatorname{Ker}(A)$ 的湮灭子，而 $\operatorname{Ker}(A^{\mathsf{T}})$ 是 $\operatorname{Im}(A)$ 的湮灭子。□

注。一般而言，引理 2.2(*d*) 中的映射 R_P 既不是单射，也不是满射。例如，若 $X = \mathbb{A}^1$、$\lambda = 0$ 和 $P = x\partial - n$ 满足 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，则 $\partial^j P \equiv (j-n)\,\partial^j$ 模 xA_1，因此 $\operatorname{Ker}(R_P) = \mathbb{C}\,\partial^n$，且 $\operatorname{Im}(R_P)$ 由满足 $j \ne n$ 的 ∂^j 张成。对偶地，$P(x^j) = (j-n)\,x^j$，因此 P 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 上的核和余核均由 x^n（的等价类）张成。

给定一个有限维子空间 $V \subseteq \Delta_\lambda$，我们定义其 次数集

$$\Sigma(V) := \{\deg(F) \,:\, 0 \neq F \in V\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

并令 $\nu(V) := \nu(\Sigma(V))$，见（1.10）。对偶地，对于子空间 $U \subseteq \mathcal{O}_\lambda$，我们定义其间隙集 $\Gamma(U) := \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{\text{阶}_\lambda(f) :\ 0 \neq f \in U\}$。

引理 2.3。设 V 是 Δ_λ 的有限维子空间。

(a) V 有一个由次数两两不同的元素组成的基；对于任意这样的基$\{F_1, \dots, F_g\}$，有 $\Sigma(V) = \{\text{次 } F_1, \dots\dots, \text{次 } F_g\}$。特别地， $|\Sigma(V)| =$ 维数 V，且对所有 $j \geq 0$，维数 $V^{\leq j} = |\Sigma(V) \cap [0, j]|$。*(b)* $(V^\perp)^\perp = V$和 $\Gamma(V^\perp) = \Sigma(V)$。*(c)* 设 $u \in \mathcal{O}_\lambda$ 是一个阶为 $k \geq 0$的元素，并设 $V' \subseteq \Delta_\lambda$ 是满足 $(V')^\perp = u\,V^\perp$ 的（有限维）子空间。则

$$\Sigma(V') = \{0, 1, \dots, k-1\} \sqcup \big(k + \Sigma(V)\big) \qquad and \qquad \nu(V') = \nu(V).$$

证明。(a) 是标准的（相对于基 $\{\partial^i\}$ 使用高斯消元即可）。(b) 第一个等式成立，因为 $\mathcal{O}_\lambda$ 是 Δ_λ 的全对偶，且维数$V < \infty$。对于第二个，注意到 $(V^\perp + \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1})^\perp = V \cap \Delta_\lambda^{\leq j}$ 由引理 2.2(b) 可得；因此维数 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda/(V^\perp + \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1})$ $=$维数$V^{\leq j}$ 对所有$j \geq 0$都成立。另一方面，由模律可得，

$$\frac{V^\perp + \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^j}{V^\perp + \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}} \cong \frac{\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^j}{(V^\perp \cap \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^j) + \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}},$$

且当 $V^\perp$ 含有一个阶为 j 的元素时，右侧为零；否则为一维。因此， $j \in \Gamma(V^\perp)$ 当且仅当维数 $V^{\leq j} =$维数$V^{\leq j-1}+1$，也就是说，当且仅当 $j \in \Sigma(V)$，由 (a) 可知。(c) 子空间 $uV^\perp$ 在 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$中是闭的且具有有限余维，因此 $V' := (uV^\perp)^\perp$是有限维的，并且 $(V')^\perp = uV^\perp$。显然， $\Gamma(u\,V^\perp) = \{0, \dots, k-1\} \sqcup (k + \Gamma(V^\perp))$，结合 (b) 即得第一个公式。若 $|\Sigma(V)| = g$，则

$$\nu(V') = \binom{k}{2} + \sum_{s \in \Sigma(V)} (s + k) - \binom{k+g}{2} = \sum_{s \in \Sigma(V)} s - \binom{g}{2} = \nu(V),$$

因为 $\binom{k+g}{2} = \binom{k}{2} + \binom{g}{2} + kg$。

□

2.3. **闭理想**。 左理想 $I \subseteq \mathcal{D}$ 的闭包 是左理想

$$\mathrm{cl}(I) = \mathrm{cl}_{\mathcal{D}}(I) := \mathcal{D}(K)\, I \cap \mathcal{D}, \tag{2.6}$$

若 I，则称其为闭的，如果 $\mathrm{cl}(I) = I$。对于 $L \in \mathcal{D}$，记作 $\mathrm{cl}(L) := \mathrm{cl}(\mathcal{D}L)$。对于 $X = \mathbb{A}^1$，Tsai [24]引入并研究了这一运算，并称之为*Weyl* 闭包。显然，$I \subseteq \mathrm{cl}(I)$ 且 $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(I)) = \mathrm{cl}(I)$。在 I 中，所谓最小阶 算子，是指任意非零$L \in I$，满足 $\mathrm{ord}(L) = \min\{\mathrm{ord}(P) :\ 0 \neq P \in I\}$。

引理 2.4。 (a) 设 N 是左 $\mathcal{D}(K)$-模（例如， X 上的亚纯函数空间，或 X 在经典拓扑下的某个开子集上的亚纯函数空间）。那么，对于任意有限子集 $\{u_1, \dots, u_k\} \subset N$，左理想 湮灭子$_{\mathcal{D}}(u_1, \dots, u_k) := \{P \in \mathcal{D} :\ Pu_i = 0 \text{ 对所有 } i\}$ 都是闭的。

(b) 设 I 是 $\mathcal{D}$ 的非零左理想，且设 $L \in I$ 是一个最小阶算子。则 $\mathcal{D}(K)\, I = \mathcal{D}(K)\, L$，因此

$$\mathcal{D}L \subseteq I \subseteq \mathrm{cl}(I) = \mathrm{cl}(L).$$

特别地，如果 I 是闭的，则 $I = \mathrm{cl}(L)$。I 中任何其他最小阶算子都具有以下形式：hL，其中 $h \in K^\times$。(c) 对于任意非零 $L \in \mathcal{D}$，商模 $\mathrm{cl}(L)/\mathcal{D}L$ 是左 $\mathcal{D}$-模 $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$ 的 $\mathcal{O}$-挠子模。

证明。(a) 若 $P \in \mathcal{D}(K)$ 湮灭子$_{\mathcal{D}}(u_1, \dots, u_k) \cap \mathcal{D}$，则 $P = \sum_j q_j b_j$ 其中 $q_j \in \mathcal{D}(K)$ 且$b_j u_i = 0$ 对所有 i 和 j成立；因此 $Pu_i = 0$。(b) 由于 $\mathcal{D}(K)$ 是左主理想整环，$\mathcal{D}(K)\, I = \mathcal{D}(K)\, L'$对某个 $L' \in \mathcal{D}(K)$ 成立。由于 $\mathcal{D}(K)\, I = K \cdot I$，我们有 $fL' \in I$对某个非零$f \in \mathcal{O}$成立。另一方面，$L = qL'$ 其中 $q \in \mathcal{D}(K)$，因此 $\mathrm{ord}(L) \geq \mathrm{ord}(L') = \mathrm{ord}(fL')$。由极小性，$\mathrm{ord}(L) = \mathrm{ord}(L')$；因此 $q \in K^\times$ 且 $\mathcal{D}(K)\, L = \mathcal{D}(K)\, L'$。同样的论证可证明最后一个结论。(c) 算子 $P \in \mathcal{D}$ 属于 $\mathrm{cl}(L)$ 当且仅当 $P = qL$ 对某个 $q \in \mathcal{D}(K) = K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}$ 成立，即当且仅当 $fP \in \mathcal{D}L$ 对某个非零 $f \in \mathcal{O}$成立。□

对于左 $\mathcal{D}$-模 N 和点 $\lambda \in X$，我们将 $H^0_\lambda(N) := \{u \in N : \mathfrak{m}_\lambda^k u = 0 \text{ 对某个 } k \geq 1\}$ 记为支撑在 λ处的元素所构成的子模，并且 $N^{\mathfrak{m}_\lambda} := \{u \in N : \mathfrak{m}_\lambda u = 0\}$。若 N 是挠 $\mathcal{O}$-模，则 $N = \bigoplus_{\lambda \in X} H^0_\lambda(N)$，因为 $\mathcal{O}$ 是戴德金整环。我们将需要柏原定理的以下一个初等特殊情形。

引理 2.5. 对于任意左 $\mathcal{D}$-模 N 和任意 $\lambda \in X$，乘法映射$(\mathcal{D}/\mathcal{D}\mathfrak{m}_\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} N^{\mathfrak{m}_\lambda} \to H^0_\lambda(N)$ 是一个同构。特别地，$H^0_\lambda(N) = \mathcal{D} \cdot N^{\mathfrak{m}_\lambda}$，并且当 $H^0_\lambda(N)$ 是有限生成的 $\mathcal{D}$-模时，$N^{\mathfrak{m}_\lambda}$是有限维的。

证明。$\mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}_\lambda$ 的每个元素在 $H^0_\lambda(N)$上都可逆地作用，因此 $H^0_\lambda(N)$自然是一个 $\mathcal{D}_\lambda$上的模，且 $\mathcal{D}/\mathcal{D}\mathfrak{m}_\lambda \cong \mathcal{D}_\lambda/\mathcal{D}_\lambda t \cong \mathbb{C}[\partial]$。若 $u \in N^{\mathfrak{m}_\lambda}$，则 $tu = 0$，并且对所有 $j \geq 1$都有 $t\,\partial^j u = -j\,\partial^{j-1} u$；因此 $t^j \partial^j u = (-1)^j j!\; u$。这说明其为单射：若 $\sum_{j=0}^r \partial^j u_j = 0$ 且 $u_j \in N^{\mathfrak{m}_\lambda}$，则施加 t^r 可得 $u_r = 0$。为证明满射，我们对 k 进行归纳，证明 $t^k v = 0$蕴含 $v \in \sum_j \partial^j N^{\mathfrak{m}_\lambda}$。当 $k = 1$时，无需证明。若 $k \geq 2$，令 $u := t^{k-1} v \in N^{\mathfrak{m}_\lambda}$且 $v' := v - (-1)^{k-1}\,(k-1)!\;\partial^{k-1} u$。于是 $t^{k-1} v' = u - u = 0$，结论由归纳法得出。最后一个断言成立，~~因为~~ $\mathcal{D}/\mathcal{D}\mathfrak{m}_\lambda$ 是一个简单的 $\mathcal{D}$-模。□

2.4. 主可分解子空间与条件空间。我们回顾 Cannings 和 Holland [13]对 $\mathcal{D}$ 的理想所作的分类。若子空间 $W \subseteq \mathcal{O}$ 包含极大理想 $\mathfrak{m}_\lambda$的某个幂，则称其为$\mathfrak{m}_\lambda$-主的；若它是有限个 $\mathfrak{m}_\lambda$-主子空间 W_λ 的交 $W = \bigcap_\lambda W_\lambda$，则称其为主可分解的（此时子空间 W_λ 由 W唯一确定，见 [13, 定理 2.4]）。例如，$\mathcal{O}$ 的每个非零理想都是主可分解的。若存在某个 $h \in K^\times$使得 $W' = hW$，则称两个主可分解子空间 W 和 W' 等价。若 $M \cap \mathcal{O} \neq 0$，则称右理想 $M \subseteq \mathcal{D}$为肥的（这里，按照惯例，我们将 $\mathcal{O}$ 与$\mathcal{D}$中由零阶微分算子组成的子环 $\mathcal{D}_0$ 等同）。对于右理想 M，我们用 $M \cdot \mathcal{O}$表示 $\mathcal{O}$中由所有满足$P \in M$ 且 $f \in \mathcal{O}$的 $P(f)$ 张成的子空间。

定理 *2.1* ([13])。*(a)* 对应关系 $W \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{O}, W)$ 和 $M \mapsto M \cdot \mathcal{O}$分别是 $\mathcal{O}$ 的主可分解子空间集合与 $\mathcal{D}$的胖右理想集合之间的互逆双射。这些双射保持包含关系、和与交。*(b)* $\mathcal{D}$ 的每个右理想都同构于一个胖右理想，并且 $\mathcal{D}(\mathcal{O}, W) \cong \mathcal{D}(\mathcal{O}, W')$ 当且仅当 W和 W'等价。因此，$W \mapsto [\mathcal{D}(\mathcal{O}, W)]$ 在 $\mathcal{O}$ 的主可分解子空间等价类集合与 $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ 之间诱导出一个双射。*(c)* 对任意主可分解子空间 W，我们有 $\mathcal{D}(\mathcal{O}, W)^* = \mathcal{D}(W, \mathcal{O})$。因此，$\mathcal{D}$ 的每个左理想都同构于某个主可分解子空间 $W \subseteq \mathcal{O}$ 对应的 $\mathcal{D}(W, \mathcal{O})$，且该子空间在等价关系下唯一确定。

(*a*)和(*b*)两部分在 [13] 中证明（ $X = \mathbb{A}^1$ 的情形另见 [6, 第 3] 节）。(*c*)部分是(*a*)的直接推论（参见 [6, 引理 5.3]）：若 $q \in \mathcal{D}(W,\mathcal{O})$ 且 $p \in \mathcal{D}(\mathcal{O},W)$，则 $qp \in \mathcal{D}(\mathcal{O},\mathcal{O}) = \mathcal{D}$；反之，若 $q \in Q$ 且 $q\mathcal{D}(\mathcal{O},W) \subseteq \mathcal{D}$，则 $q \in \mathcal{D}(K)$，因为$\mathcal{D}(\mathcal{O},W)$包含一个非零函数，并且 $q(W) = q(\mathcal{D}(\mathcal{O},W)\cdot\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$。

接下来 [25], 我们用线性条件来描述主可分解子空间。考虑右 $\mathcal{D}$-模

$$\Delta(X) := \bigoplus_{\lambda\in X} \Delta_\lambda, \qquad \Delta_\lambda = \mathcal{D}/\mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D},$$

（参见 [4, 第 3] 节）。如果 $C \subseteq \Delta(X)$是齐次的，即 $C = \bigoplus_{\lambda\in X} C_\lambda$，其中$C_\lambda := C \cap \Delta_\lambda$，则称其为子空间。

定义 2。在 X 上的条件空间是 C的 $\Delta(X)$ 中的有限维齐次子空间。有限集 $\mathrm{Supp}(C) := \{\lambda \in X : C_\lambda \neq 0\}$ 称为支撑的 C。对于条件空间 C，我们关联子空间 $W_C \subseteq \mathcal{O}$，其由（1.7）定义；以及右理想

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(C) := \{P \in \mathcal{D} : FP = 0 \text{ in } \Delta(X) \text{ for all } F \in C\}. \tag{2.7}$$

在局部坐标中，C_λ 的一个元素是 $\mathcal{O}$ 上的线性泛函，形式为 $f \mapsto [(a_k\partial_t^k + \ldots + a_1\partial_t + a_0)\ f](\lambda)$，其中 $a_i \in \mathbb{C}$。当 $X = \mathbb{A}^1$时，定义2 与 [25,第 4]节中的定义一致。

引理*2.6*。*(a)* 对于任意条件空间 C，子空间 $W_C = \bigcap_\lambda W_{C_\lambda}$ 是主可分解的。W_C 在 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ 中的闭包为 $C_\lambda^\perp$，且配对（*1.6*）诱导出同构 $\mathcal{O}/W_{C_\lambda} \cong C_\lambda^*$和 $\mathcal{O}/W_C \cong C^*$；特别地，$\mathit{codim}_{\mathcal{O}}(W_C) = \mathit{dim}\ C$。*(b)* 赋值 $C \mapsto W_C$ 是从 X上的条件空间集合到 $\mathcal{O}$的主可分解子空间集合之间的双射。*(c)* $\mathit{Ann}_{\mathcal{D}}(C) = \mathcal{D}(\mathcal{O},W_C)$；特别地，$\mathit{Ann}_{\mathcal{D}}(C)$是一个胖右理想。

证明。(*a*) 选取 N，使得对于所有 λ均有 $C_\lambda \subseteq \Delta_\lambda^{\leq N-1}$。由引理2.2(*b*)，$C_\lambda^\perp \supseteq \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^N$，因此 $W_{C_\lambda} = \mathcal{O} \cap C_\lambda^\perp$包含 $\mathcal{O} \cap \widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^N = \mathfrak{m}_\lambda^N$。由于自然映射 $\mathcal{O} \to \widehat{\mathcal{O}}_\lambda/\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^N$是满射，$\mathcal{O}/W_{C_\lambda} \cong \widehat{\mathcal{O}}_\lambda/C_\lambda^\perp \cong C_\lambda^*$。其余结论由中国剩余定理推出。(*b*) 若$W = \bigcap_\lambda W_\lambda$ 且 $W_\lambda \supseteq \mathfrak{m}_\lambda^N$，令 $C_\lambda := \{F \in \Delta_\lambda : \langle F, W_\lambda\rangle_\lambda = 0\} \subseteq \Delta_\lambda^{\leq N-1}$。则$W_{C_\lambda} = W_\lambda$，这是由 $\Delta_\lambda^{\leq N-1}$ 与 $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_\lambda^N$之间的对偶性得到的。反之，$C$ 可由 W_C根据（a）和引理2.3(*b*)恢复。(*c*) 令 $P \in \mathcal{D}$ 和 $F \in C_\lambda$。根据引理2.1，$FP = 0$ 属于 Δ_λ 当且仅当 $(FP)(\mathcal{O}) \subseteq \mathfrak{m}_\lambda$，即当且仅当 $\langle F,$ 对于所有 $f \in \mathcal{O}$均有 $P(f)\rangle_\lambda = 0$。因此，$P \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(C)$当且仅当 $P(\mathcal{O}) \subseteq W_C$。□

2.5. 卡洛杰罗–莫泽空间与 Calogero–Moser 指标。现在我们回顾 $\mathcal{D}$ 的理想按照卡洛杰罗–莫泽空间分类的结果；详情请参阅 [3]。如引言中所述，存在一个自然映射

$$\gamma : \mathcal{L}(\mathcal{D}) \to K_0(\mathcal{D}) \cong K_0(X) \xrightarrow{\det} \mathrm{Pic}(X), \tag{2.8}$$

其纤维是理想的稳定同构类（参见 [9] 和 [3, 第 3 节2]）。给定 X上的线丛 $\mathcal{I}$，记 $\tilde{} = \mathcal{O}[\mathcal{I}]$ 为 $\mathcal{O}$ 由 $\mathcal{I}$作的单点扩张，即坐标环 $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\tilde{X}) \cong \mathcal{O} \times \mathbb{C}$ 由 $\mathcal{I}$这个 $\mathcal{O}$-模作的（非交换）平方零扩张，并令

$$\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(B) := T_B\mathrm{Der}(B, B^{\otimes 2})/\langle \Delta_B - \boldsymbol{\lambda}\rangle$$

为 B 的权为 $\boldsymbol{\lambda} = (1, -n)$ 的（变形）预投射代数。于是，$(X, \mathcal{I})$型的第 n个 *Calogero–Moser* 空间定义为表示的模空间（表示簇）

$$\mathcal{C}_n(X,\mathcal{I}) := \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{n}}[\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(B)]//\mathrm{GL}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{C})$$

参数化维数向量为 $\boldsymbol{n} = (n, 1)$ 的有限维 $\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(B)$-模的（同构类）（见 [3, 第 3 节3]）。对于所有的对 $(X,\mathcal{I})$ 以及每个 $n \geq 0$, $\mathcal{C}_n(X,\mathcal{I})$ 都是一个光滑仿射不可约簇，其（复）维数为 $2n$（见 [3, 定理 1.1]）。我们将$\mathcal{C}_n(X,\mathcal{I})$记为 $\mathcal{C}_n(X,\mathcal{I})$ 关于 $\mathrm{Aut}_X(\mathcal{I})$ 的自然作用所得的商模；该商模仅取决于 $\mathcal{I}$ 在 $\mathrm{Pic}(X)$ 中的类。

定理 2.2 ([3], 定理 4.2)。对于每个 $n \geq 0$ 和 $[\mathcal{I}] \in \mathrm{Pic}(X)$，存在典范单射 $\omega_n : \mathcal{C}_n(X,\mathcal{I}) \hookrightarrow \gamma^{-1}[\mathcal{I}]$，它们对所有 n) 合在一起给出一个双射：

$$\omega : \bigsqcup_{n\geq 0} \mathcal{C}_n(X,\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \gamma^{-1}[\mathcal{I}]\,.$$

因此，我们得到一个自然的双射 $\bigsqcup_{[\mathcal{I}]\in \mathrm{Pic}(X)} \bigsqcup_{n\geq 0} \mathcal{C}_n(X,\mathcal{I}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{D})$。

定理 2.2 通过有限生成代数的有限维表示，对 $\mathcal{D}$ 的左理想进行了分类；实际上，这归结为用线性代数数据显式描述这类理想。对于 $X = \mathbb{A}^1$，空间 $\mathcal{C}_n := \mathcal{C}_n(\mathbb{A}^1, \mathcal{O})$ 是文献 [26] 中引入的经典 Calogero–Moser 空间：它们具有如下简单的矩阵表示

$$\mathcal{C}_n = \{(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, v, w) \,:\, [\mathsf{X}, \mathsf{Y}] + \mathrm{Id}_n = v\, w\}/\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \tag{2.9}$$

其中，X、Y $\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, $v \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$, $w \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$，且 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 通过 $g \cdot (\mathsf{X}, \mathsf{Y}\ v, w) = (g\mathsf{X}g^{-1}, g\mathsf{Y}g^{-1}, gv, wg^{-1})$ 作用。在此情形下，定理 2.2 是文献 [6, 7] 的主要结果。

定义 3. 左理想 $M \subseteq \mathcal{D}$ 的 *Calogero–Moser* 指数 $n = n(M) \geq 0$是满足以下条件的整数：M 的同构类属于 ω_n 定理 2.2中的像。

根据定义，$n(M)$仅取决于 M的同构类；特别地，它对分式左理想也有定义。下一个定理给出了 $n(M)$的一种刻画，而不涉及 Calogero–Moser 空间。若 M 是 $\mathcal{D}$的左理想或右理想，则赋予它诱导滤过 $M_k := M \cap \mathcal{D}_k$，并将 $M := \mathrm{gr}\, M \subseteq \mathcal{D}$ 记作伴随分次理想。对于有限生成的 $\mathcal{D}$-模 E，记 $E^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{D})$。

定理 2.3 ([9], 命题 2.1; [3], 定理 3.1)。设 M 是 $\mathcal{D}$的左理想。那么

(a) $M^{\vee\vee} \cong \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{I}_M$ 对应于 X 上唯一的（差一个同构）线丛 $\mathcal{I}_M$，并且 $\gamma[M] = [\mathcal{I}_M]$; (b) 典范映射 $M \to M^{\vee\vee}$ 是单射，其余核 $\mathsf{V}_M := M^{\vee\vee}/M$ 是一个有限维向量空间，且

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{V}_M = n(M); \tag{2.10}$$

(c) 更一般地，(2.10) 若 M 是任意一个秩为一的射影 $\mathcal{D}$-模，并配备一个良滤过，使得 $\mathrm{gr}\, M$ 是无挠的，则该结论成立。

定理 a）和（b）中的陈述，以及 $\dim \mathsf{V}_M$ 不依赖于所选滤过这一事实，同样适用于右理想（ [9]中的证明具有左右对称性）。对于右理想 M，我们 定义其 Calogero–Moser 指数 $n(M)$ 为公式（2.10）。我们将证明（见下文命题 2.2 ），这与对偶 $M \mapsto M^*$相一致。首先，我们给出（2.10）的同调解释。

引理 2.7。对于 M 的任意（左或右）理想 $\mathcal{D}$，存在自然同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{M},\overline{\mathcal{D}}) \cong \mathrm{Ext}^2_{\overline{\mathcal{D}}}(\mathsf{V}_M,\overline{\mathcal{D}}) \cong \mathsf{V}_M^*.$$

因此 $n(M)$ = 维数$_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{M},\overline{\mathcal{D}})$。

证明。对正合列 $0 \to M \to \mathcal{D}\mathcal{I}_M \to \mathsf{V}_M \to 0$ 取对偶，得到

$$\mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{\mathcal{D}\mathcal{I}_M},\overline{\mathcal{D}}) \to \mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{M},\overline{\mathcal{D}}) \to \mathrm{Ext}^2_{\overline{\mathcal{D}}}(\mathsf{V}_M,\overline{\mathcal{D}}) \to \mathrm{Ext}^2_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{\mathcal{D}\mathcal{I}_M},\overline{\mathcal{D}}),$$

其中首项和末项均为零，因为 $\mathcal{D}\mathcal{I}_M$ 是一个投射 $\mathcal{D}$-模。这证明了第一个同构。对于第二个同构，注意到 V_M 是一个有限长度的 $\mathcal{D}$-模，其支撑位于有限多个（闭）点 $p_i \in T^*X$；因此 $\mathsf{V}_M = \bigoplus_i \mathsf{V}_{p_i}$，且 $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}}(\mathsf{V}_M,\mathcal{D}) \cong \bigoplus_i \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}_{p_i}}(\mathsf{V}_{p_i},\mathcal{D}_{p_i})$。每个局部环 $\mathcal{D}_{p_i}$ 都是维数 2 的正则环，因此是 Gorenstein 环（见[12, 命题 3.1.20]）。由局部对偶性，对每个 i，都有 $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}_{p_i}}(\mathsf{V}_{p_i},\mathcal{D}_{p_i}) \cong \mathsf{V}_{p_i}^*$，结论得证。□

命题 2.2。对于任意左理想 M，属于 $\mathcal{D}$，有 $n(M^*) = n(M)$，其中 M^* 是对偶右理想 (2.1)。

证明。设 $\widetilde{\mathcal{D}} := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{D}_k \tau^k \subseteq \mathcal{D}[\tau]$ 为 $\mathcal{D}$ 的 Rees 代数，$\widetilde{M} := \bigoplus_k M_k \tau^k$ 为 M 的 Rees 模；于是 τ 是一个次数为 1 的中心非零因子，其中 $\mathcal{D}/\tau\mathcal{D} \cong \mathcal{D}$ 且 $M/\tau M \cong M$。分次对偶 $M^\vee := \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(M,\mathcal{D})$ 是关于对偶滤过 $(M^*)_k := \{q \in M^* \text{ 的 } M^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M,\mathcal{D}) \text{ 的 Rees 模：对所有 } j\}$ 均有 $M_j\, q \subseteq \mathcal{D}_{j+k}$。令 $E^i := \mathrm{Ext}^i_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\widetilde{M},\widetilde{\mathcal{D}})$。这些都是有限生成分次 $\widetilde{\mathcal{D}}$-模，并且当 $i \geq 1$ 时 $E^i[\tau^{-1}] = 0$，因为 M 是投射的。将 $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\widetilde{M},-)$ 应用于正合列 $0 \to \widetilde{\mathcal{D}} \xrightarrow{\tau} \widetilde{\mathcal{D}} \to \overline{\mathcal{D}} \to 0$（我们省略分次平移），并利用同构 $\mathrm{Ext}^i_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\widetilde{M},\mathcal{D}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}(M,\mathcal{D})$；这些同构成立是因为 τ 是 $\widetilde{M}$ 上的非零因子，由此得到正合列

$$0 \to \widetilde{M^\vee} \xrightarrow{\tau} \widetilde{M^\vee} \to \overline{M^\vee} \to E^1 \xrightarrow{\tau} E^1 \to \mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{M},\overline{\mathcal{D}}) \to E^2 \xrightarrow{\tau} E^2 \to \mathrm{Ext}^2_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{M},\overline{\mathcal{D}}).$$

由于 $\overline{M}$ 是正则环 $\mathcal{D}$ 上投射模 $\mathcal{D}\mathcal{I}_M$ 中的有限余维子模，而该环的维数为 2，因此它的投射维数至多为 1；故 $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}}(M,\mathcal{D}) = 0$。由此可得 $E^2 = \tau E^2$，因此根据分次 Nakayama 引理，$E^2 = 0$。接下来，E^1 被 τ 的某个幂湮灭，并且 $E^1/\tau E^1 \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(M,\mathcal{D})$ 由引理 2.7 可知是有限维的；由于每个 $\tau^i E^1/\tau^{i+1}E^1$ 都是 $E^1/\tau E^1$ 的商模，因此 $\dim_{\mathbb{C}} E^1 < \infty$，并且

$$\dim \mathrm{Ker}(\tau; E^1) = \dim \mathrm{Coker}(\tau; E^1) = \dim \mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{M},\overline{\mathcal{D}}) = n(M).$$

另一方面，上述正合列表明，$\mathrm{gr}(M^*) = M^\vee/\tau M^\vee$ 是自反模 $M^\vee$ 的子模，其商模为 $\mathrm{Ker}(\tau; E^1)$。因此，M^* 上的对偶滤过是良好的，$\mathrm{gr}(M^*)$ 是无挠的，其自反包为 $M^\vee$，且 $\dim \mathsf{V}_{M^*} = \dim \mathrm{Ker}(\tau; E^1) = n(M)$。根据定理 2.3(c)（其右侧版本），我们得出 $n(M^*) = n(M)$。□

命题 2.3。设 M 是 $\mathcal{D}$ 的一个左理想。那么 $n(M) = 0$ 当且仅当存在 X 上的某个线丛 $\mathcal{I}$，使得 $M \cong \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{I}$；在这种情况下，$[\mathcal{I}] = \gamma[M]$。特别地，$M$ 是循环的，当且仅当 $n(M) = 0$ 且 $\gamma[M]$ 是平凡的。

证明。如果 $M = \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{I}$，那么对于自然滤过 $M_k = \mathcal{D}_k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{I}$，我们有 $\mathrm{gr}\, M = \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{I}$，它是自反的；因此 $n(M) = 0$ 由定理 2.3(c) 得出。反之，假设 $n(M)$。根据定理 2.3，$M \cong \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{I}_M$ 作为分次模（分次平移意义下）。令 p

令其为满足 $M_p \neq 0$ 的最小整数。于是 $M_p \cong \mathcal{I}_M$ 作为 $\mathcal{O}$-模，并且乘法映射 $\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}} M_p \to M$ 是滤过 $\mathcal{D}$-模的同态，它在关联分次模上诱导出一个同构。因此它是同构。最后一个结论由以下事实得出： $\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{I}$ 在 $K_0(\mathcal{D}) \cong K_0(X)$ 中的类对应于 $[\mathcal{I}]$。□

最后，我们注意到 Calogero–Moser 指数是局部贡献之和。设 M 是 $\mathcal{D}$ 的右理想。由于 V_M 是一个有限维的 $\mathcal{D}$-模，它作为 $\mathcal{O}\subset\mathcal{D}$ 上的模具有有限长度；因此 $\mathsf{V}_M = \bigoplus_{\lambda\in X}(\mathsf{V}_M)_\lambda$，其中 $(\mathsf{V}_M)_\lambda := \mathsf{V}_M\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_\lambda$，并且

$$n(M) = \sum_{\lambda\in X} n_\lambda(M), \qquad n_\lambda(M) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathsf{V}_M)_\lambda. \tag{2.11}$$

我们称 $n_\lambda(M)$ 为 M 在 λ 处的局部*Calogero–Moser*指标。它可以在局部化和完备化之后计算。具体而言，设 $M_\lambda := M\mathcal{D}_\lambda \cong M\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_\lambda$ 是由 M 生成的 $\mathcal{D}_\lambda$ 的右理想 $\widehat{\ }\qquad\widehat{\ }\qquad\widehat{\ }$，其滤过由 $\mathcal{D}_\lambda$ 上的阶滤过诱导。于是 $\mathrm{gr}\ M_\lambda \cong \overline{M}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_\lambda$ 是 $\mathrm{gr}\mathcal{D}_\lambda \cong \mathcal{O}_\lambda[\xi]$ 的一个理想，并且由于自反包的构造与平坦基变换可交换，我们有

$$n_\lambda(M) = \dim_{\mathbb{C}}\big[\,(\mathrm{gr}\,\widehat{M}_\lambda)^{\vee\vee}\big/\,\mathrm{gr}\,\widehat{M}_\lambda\,\big]. \tag{2.12}$$

$\widehat{\ }\qquad\widehat{\ }$因此，$n_\lambda(M)$ 仅取决于右理想 $M_\lambda\subseteq\mathcal{D}_\lambda\cong\mathbb{C}[[t]][\partial]$。

2.6. **仿射直线**。在 $X=\mathbb{A}^1$ 的情形下，上述分类还具有一些附加特征，我们将在第 5 节和 6 节中用到这些特征。我们用 x 表示 $\mathbb{A}^1$ 上的坐标，从而 $\mathcal{O}=\mathbb{C}[x]$，$K=\mathbb{C}(x)$ 且 $\mathcal{D}=A_1$。

阿代尔格拉斯曼流形。若 $W=\bigcap_\lambda W_\lambda$ 是 $\mathbb{C}[x]$ 的一个主可分解子空间，且 $k_\lambda :=$ 的余维为 W_λ，则子空间 $\prod_\lambda (x-\lambda)^{-k_\lambda} W\subset\mathbb{C}(x)$ 仅取决于 W 的等价类。以此方式得到的 $\mathbb{C}(x)$ 的所有子空间构成 Wilson的阿德尔格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$（见 [25, 26]）。由定理 2.1，$W\mapsto[\mathcal{D}(\mathbb{C}[x],W)]$ 是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}\to\mathcal{R}(A_1)$ 的双射，而 $W\mapsto[\mathcal{D}(W,\mathbb{C}[x])]$ 是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}\to\mathcal{L}(A_1)$ 的双射。对每个 $W\in\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$，Wilson 都关联一个（平稳）Baker函数，其形式为

$$\psi_W(x,z) = e^{xz}\Big(1+\sum_{i\geq 1} a_i(z)\,x^{-i}\Big), \tag{2.13}$$

其中 $a_i(z)$ 是关于 z 的有理函数，并且它唯一确定 W（见 [25,第 4] 节）。[2] 对于有理函数 $a(z)$，我们用 $\mathrm{res}_\infty a$ 表示 $a(z)$ 在 $z=\infty$ 处的洛朗展开中 z^{-1} 的系数；等价地，$\mathrm{res}_\infty a = \sum_{p\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}_{z=p}\,a(z)$。

命题 2.4 ([25, 26])。设 C 是 $\mathbb{A}^1$上的条件空间，其基为 $\{c_1,\dots,c_g\}$，其中 $c_i\in C_{\lambda_i}$ 由 $F_i(\partial)\in\mathbb{C}[\partial]$表示。设 $W\in\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ 是对应于W_C的点，并设 ψ_W 是它的 *Baker* 函数 (2.13)。

(a) 右理想 $\mathcal{D}(\mathbb{C}[x],W)$ ≅湮灭子$_{A_1}(C)$ 的卡洛杰罗–莫泽指数由$n = -res_\infty\, a_1(z)$ 给出。*(b)* 令 $f_i(z) := \langle c_i, e^{xz}\rangle_{\lambda_i} = F_i(z)\,e^{\lambda_i z}$。那么，除一个加法常数外，$a_1(z) = -\partial_z \log$ 朗斯基行列式 $(f_1,\dots,f_g)$，其中朗斯基行列式$(f_1,\dots,f_g) = \det\big(\partial_z^{i-1}f_j\big)_{i,j=1}^{g}$ 是朗斯基行列式。

[2]与 [25, 26], 相比，我们交换了变量 x 和 z 的角色，因为在本文中 x 是曲线上的坐标。因此，我们的 $\psi_W(x,\ z)$ 就是 *loc. cit.* 中记作 $\psi_W(z,\ x)$ 的函数；根据 [25,定理 2],，按照 Wilson 的记号，它是 W 在双谱对合下的像 $b(W)$ 的 Baker 函数。

(c) $\psi_W(x,z) = e^{xz}$ 行列式 $\mathsf{M}(z,x)$/ 行列式 $\mathsf{M}(z,\infty)$，其中 $\mathsf{M}(z,x)$ 是一个 $g\times g$ 矩阵，其元素为

$$\mathsf{m}_{ij} = (\partial_z + \lambda_i)^{j-1}\big[\,F_i(z) - (x-\lambda_i)^{-1}F_i'(z)\,\big], \qquad i,j = 1,\dots,g.$$

(a) 部分可由点 $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$的 Baker函数的 Wilson公式推出，该点对应于 $(\mathsf{X},\mathsf{Y}\ v,w) \in \mathcal{C}_n$（见 [26, (3.7)]）：用我们的记号，$e^{-xz}\,\psi_W\,(x,z) = \det\{\mathrm{Id} - (z+\mathsf{X})^{-1}(x+\mathsf{Y})^{-1}\}$，由此得到 $a_1(z) = -\mathrm{tr}\,(z+\mathsf{X})^{-1}$ 以及 $\mathrm{res}_\infty a_1 = -n$。关于 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}} \cong \mathcal{R}(A_1)$ 按空间 $\mathcal{C}_n$ 进行的分层与由指标 (2.10) 给出的分层一致这一事实，证明见 [7, 定理 1.2 和 4.5]（另见 [7, 命题 5.2]）。部分 (b) 和 (c) 分别是[25, 引理 5.8] 和 [25, 命题 6.5], 。（(b) 中的加法常数源于 Wilson 引理所指的是子空间 $x^{-g}W_C$，它与 W 相差一个有理函数因子；该有理函数在无穷远点处等于 1，且不影响 $\mathrm{res}_\infty a_1$。）

特征代表元。 与一般情形不同，A_1 的每个理想类都有两个特征代表元（参见 [7, 第 5 节1], ，其中讨论了右理想的情形；左理想的情形类似）。具体而言，对于任意左理想 $M \subseteq A_1$，存在唯一的分式理想$M_x \cong M$，使得 $M_x \subset \mathbb{C}(x)[\partial]$，$M_x \cap \mathbb{C}[x] \neq 0$，$M_x$ 中所有元素的首项系数都是多项式，并且 M_x 含有一个首项系数为 1 的元素。类似地，存在唯一的分式理想 $M_\partial \cong M$，相对于 ∂（即交换 x 和 ∂的角色）也具有相同性质。我们将 $\kappa = \kappa_M$ 记为 Q 中满足下述条件的唯一元素

$$M_x = M_\partial\,\kappa. \tag{2.14}$$

元素 κ 确定了 M 的同构类，并与 Baker函数的关系如下（参见 [6, 命题 9.2] 和 [7, 注 5.4]）：若$M \cong \mathcal{D}(W,\ \mathbb{C}[x])$且 $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$，则

$$\kappa^{-1}(x,\partial)\,[e^{xz}] = \psi_W(x,z), \tag{2.15}$$

这里，κ^{-1} 被视为形式伪微分算子 $1 + \sum_{i\geq 1} x^{-i}a_i(\partial)$，并以显然的方式作用于$e^{xz}$。例如，若 $f \in \mathbb{C}[x]$ 是次数为 n的多项式，则 $\mathrm{Ann}(f) = A_1\partial^{n+1} + A_1(f\partial - f')$，并可得 $M_\partial = M\partial^{-1}$, $M_x = M(\partial - f'/f)^{-1}$，因此

$$\kappa^{-1} = 1 - \frac{f'(x)}{f(x)}\,\partial^{-1}. \tag{2.16}$$

最后，我们回顾一下，群 $G = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(A_1)$ 自然地作用于 $\mathcal{L}(A_1)$ 和 $\mathcal{R}(A_1)$，而定理 ω 2.2 中的双射 与 G 在 $\mathcal{C} = \bigsqcup_n \mathcal{C}_n$上的自然作用相容；该作用保持每个 $\mathcal{C}_n$ 不变，并且在其上具有传递性（参见 [6, 定理 1.2 和 1.3]）。特别地，Calogero–Moser 指数在 G 对理想的作用下是不变量。

3. The holonomicity index

本节定义微分算子的全纯性指数，并将其与第 2.4 节引入的条件空间联系起来。在全文中，L表示 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(X)$ 的非零元素。

3.1. 奇点。 对于每个 $\lambda \in X$，右乘法 L 定义了向量空间 $\Delta_\lambda = \mathcal{D}/\mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D}$ 上的线性自同态，并令

$$V_\lambda(L) := \mathrm{Ker}\big[\,\Delta_\lambda \xrightarrow{\cdot L} \Delta_\lambda\,\big]. \tag{3.1}$$

定义 4。 若点 $\lambda \in X$ 满足 $V_\lambda(L) \neq 0$，则称其为 L 的奇点。我们用 $\Lambda(L)$ 表示 L的所有奇点构成的集合，并且 $V_\Lambda(L) := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda(L)} V_\lambda(L) \subseteq \Delta(X)$。

根据引理 2.2(*d*)，当且仅当方程 $L(u) = f$ 无法在 $\mathcal{O}_\lambda$ 中求解某个 $f \in \mathcal{O}_\lambda$时， λ 才是 L 的奇点。特别地，当 L 的首项系数（相对于 λ处的局部参数）在 λ处不为零时， $\lambda \notin \Lambda(L)$，因此 $\Lambda(L)$ 是有限集。下文将证明，每个 $V_\lambda(L)$ 都是有限维的（推论 3.1），因此 $V_\Lambda(L)$ 是定义 2 意义下的条件空间，并且 $\Lambda(L)$ 恰好是 $\mathcal{O}$- 模 $\mathrm{cl}(L)/\mathcal{D}L$ 的支撑（定理 4.1 ）。注意， L的首项系数的零点不一定是奇点：例如， $L = x\partial + 1 = \partial x \in A_1$ 没有奇点。

3.2. **归一化**。 固定 $\lambda \in X$ 和一个局部参数 t 于 λ。利用（2.3），我们可以将 L写成 $\mathcal{D}_\lambda$的一个元素：

$$L = a_N\partial^N + a_{N-1}\partial^{N-1} + \ldots + a_0, \qquad a_i \in \mathcal{O}_\lambda, \quad \partial = \partial_t. \tag{3.2}$$

对于每个 i 满足 $a_i \neq 0$的，令 $k_i := $ 阶$_\lambda(a_i)$，从而 $a_i = b_i\, t^{k_i}$ 满足 $b_i \in \mathcal{O}_\lambda \setminus \mathfrak{n}_\lambda$。根据（2.4），我们可以将（3.2）改写为以下形式

$$L = \sum_{i\,:\,a_i\neq 0} b_i\, t^{k_i - i}\, [\theta]_i\,, \tag{3.3}$$

其中 $\theta = t\partial$和 $[\theta]_i := t^i\partial^i = \theta(\theta-1)\ldots(\theta-i+1)$。

定义 5。 我们称 L是 λ-规范化的（或在 λ处平衡），如果

（a）对于所有满足 $a_i \neq 0$的 i， $k_i - i \geq 0$；以及（b）存在 $i \in \{0, \ldots, N\}$，使得 $a_i \neq 0$且 $k_i = i$。

在这种情况下， t 它在 λ 处的 指标多项式 定义为 $q_{L,\,\lambda}(s)$: $= \sum_{i\,:\;k_i=i} b_i(\lambda)\; [s]_i \in \mathbb{C}[s]$.

注意， $q_{L,\,\lambda}$ 是一个次数为 $\leq N$ 的非零多项式，因为多项式 $[s]_i$ 的次数各不相同。接下来的两个引理几乎可以直接由定义得到。

引理 3.1。 对于任意非零 $L \in \mathcal{D}_\lambda$，存在唯一的 $w = w_\lambda(L) \in \mathbb{Z}$，使得 $t^w L$ 是 λ-规范化的，即 $w =$ 最大值$\{i - k_i : \;\; a_i \neq 0\}$。整数 w 以及为 λ-规范化的性质均不依赖于局部参数的选择。

证明。 第一个断言由（3.2）显然可得：将 L 乘以 t^w 会将每个 k_i 替换为 $k_i + w$。选择 t 的独立性由下文的引理 3.2 得出，该引理表明， $-w$ 是满足以下条件的最大整数 m：对于所有 $j \gg 0$， $L(\mathfrak{n}_\lambda^j) \subseteq \mathfrak{n}_\lambda^{j+m}$。 □

我们称 $\bar{L} := t^{w_\lambda(L)}L$ 为 L 的 λ-归一化；它由 L 确定，差一个 $\mathcal{O}_\lambda$ 中的单位因子。

引理 3.2。 若 L 是 λ-规范化的，则对所有 $j \geq 0$，都有 $L(\mathfrak{n}_\lambda^j) \subseteq \mathfrak{n}_\lambda^j$，且 L 在一维向量空间$\mathfrak{n}_\lambda^j/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 上诱导的作用是乘以$q_{L,\,\lambda}(j)$。特别地， $L(\mathfrak{n}_\lambda^j) \not\subseteq \mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 对 $j \gg 0$ 成立。

证明。 我们有 $\mathfrak{n}_\lambda^j = \mathcal{O}_\lambda\, t^j$，并且 $\theta(a\, t^j) = (t\,\partial(a) + j\, a)\, t^j$ 对所有 $a \in \mathcal{O}_\lambda$ 成立。因此 θ 保持$\mathfrak{n}_\lambda^j$，并在 $\mathfrak{n}_\lambda^j/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 上的作用是乘以 j。由此，根据（3.3），结论成立，因为含有 $k_i - i > 0$ 的项映射 $\mathfrak{n}_\lambda^j$ 到 $\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$。 □

¯3.3. 解空间与余型。根据引理 3.2， λ归一化 L 的 L 为有限维向量空间 $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1} \cong \widehat{\mathcal{O}}_\lambda/\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}$ 诱导出线性自同态，对所有$j \geq 0$均成立。推广 [24, 第 4], 节中的构造，我们按照引言中的公式 (1.3) 定义空间 $S_\lambda^j(L)$: $S_\lambda^j(L) :=$ 核$[\bar{L};\;\; j \geq 0$时， $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}]$ 以及 $S_\lambda^{-1}(L) := 0$。显然，这些空间的维数不取决于 t的选择。

引理 3.3。令 $q = q_{\bar{L},\,\lambda}$ 为 L的 λ归一化的指标多项式。

(a) 对于所有 $j \geq 0$，要么 $\dim S^j_\lambda(L) = \dim S^{j-1}_\lambda(L)$，要么 $\dim S^j_\lambda(L) = \dim S^{j-1}_\lambda(L) + 1$。第二种情况只有在 $q(j) = 0$ 时才可能发生。*(b)* 对于 $j \gg 0$，自然映射 $S^j_\lambda(L) \to S^{j-1}_\lambda(L)$ 是同构。*(c)* 对于 $j \gg 0$，$\dim S^j_\lambda(L) = \dim$ 核$(\bar{L};\ \widehat{\mathcal{O}}_\lambda) = \dim$ 余核$(\bar{L};\ \widehat{\mathcal{O}}_\lambda)$。

证明。算子 L 诱导出短正合序列的一个端同态

$$0 \to \mathfrak{n}^j_\lambda/\mathfrak{n}^{j+1}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}^{j+1}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}^j_\lambda \to 0,$$

根据引理 3.2，它在第一项上的作用是乘以 $q(j)$。由蛇引理，我们得到一个正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}(q(j)) \to S^j_\lambda(L) \to S^{j-1}_\lambda(L) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(q(j)).$$

如果 $q(j) \neq 0$，则核$(q(j)) =$ 余核$(q(j)) = 0$，且 $S^j_\lambda(L) \cong S^{j-1}_\lambda(L)$。如果 $q(j) = 0$，则核$(q(j)) \cong$余核$(q(j)) \cong \mathbb{C}$，并且 $\dim S^j_\lambda(L) = \dim S^{j-1}_\lambda(L) + 1 - \mathrm{rk}(\delta)$。这就证明了 (a)。由于 $q \neq 0$ 只有有限个根，(b) 随之成立。为证明 (c)，取 m 足够大，使得对于所有 $j \geq m$，$q(j) \neq 0$。然后 $\bar{L}$ 保持 $\widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda$ 上的滤过 $\{\widehat{\mathfrak{n}}^j_\lambda\}_{j\geq m}$，并在其分次部分上诱导出同构；由于 $\widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda$ 是完备的，$\bar{L} : \widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda \to \widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda$ 是双射。将蛇引理应用于 $\bar{L}$ 在 $0 \to \widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda \to \widehat{\mathcal{O}}_\lambda \to \widehat{\mathcal{O}}_\lambda/\widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda \to 0$ 上的作用，我们看到，$\bar{L}$ 在 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ 上的核和余核与 $\bar{L}$ 在 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda/\widehat{\mathfrak{n}}^m_\lambda$ 上的核和余核同构；后两者的维数相同，均等于 $\dim S^{m-1}_\lambda(L)$。最后，核$(\bar{L};\ \widehat{\mathcal{O}}_\lambda) =$核$(\bar{L};\ \widehat{\mathcal{O}}_\lambda)$。□

利用引理3.3，我们引入以下数值不变量：L 在 λ 处：

$$\begin{aligned} d_\lambda &:= \dim S^j_\lambda(L) \quad (j \gg 0), \\ J_\lambda(L) &:= \{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \dim S^j_\lambda(L) \neq \dim S^{j-1}_\lambda(L)\}, \\ g_\lambda &:= \max J_\lambda(L), \qquad s_\lambda := |J_\lambda(L)| - 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

根据引理3.3(c)，d_λ 是方程 $L(u) = 0$ 在 λ处线性无关的形式幂级数解的个数。我们称有限集 $J_\lambda(L)$为余型，即 L 在 λ处的余型，并按递增顺序写出其元素：$J_\lambda(L) = \{j_0 < j_1 < \ldots < j_{s_\lambda}\}$。根据引理3.3$(a)$，余型包含于 L的指标多项式的非负整数根集合中。

引理 3.4。有(a) $s_\lambda = d_\lambda - 1$，$(b)$ $g_\lambda \geq d_\lambda - 1$ *(*在 $d_\lambda > 0$ 的条件下*)*。

证明。(a) 根据引理3.3，$d_\lambda = \sum_{j\geq 0}$ [维数 $S^j_\lambda(L)$ − 维数$S^{j-1}_\lambda(L)] = |J_\lambda(L)|$。$(b)$由于 j_i互不相同且均为非负整数，$j_i \geq i$ 对所有 i均成立；因此 $g_\lambda = j_{s_\lambda} \geq s_\lambda = d_\lambda - 1$。□

现在可以陈述我们的主要定义了。

定义 6。L 的局部全纯性指标在 $\lambda \in X$ 定义为

$$n_\lambda(L) := \nu(J_\lambda(L)) = \sum_{i=0}^{s_\lambda}(j_i - i) = \sum_{i=0}^{d_\lambda - 1} j_i - \binom{d_\lambda}{2}, \tag{3.5}$$

其中 $\{j_0 < \ldots < j_{s_\lambda}\}$ 是 L 在 λ处的余型。L 的（全局）全纯性指数为

$$n(L) := \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} n_\lambda(L). \tag{3.6}$$

因此有 $n_\lambda(L) \geq 0$；当且仅当 L 在 λ 处的余型是$\{0,1,\dots,d_\lambda-1\}$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$的初始段时， $n_\lambda(L)=0$ 。例如，当 L 的首项系数 a_N 在 λ处不为零时，情况就是如此：此时 $\bar{L}=t^N L$，并且不难看出 $J_\lambda(L)=\{0,1,\dots,N-1\}$。更一般地，我们将证明，对于所有 $\lambda\notin\Lambda(L)$，都有 $n_\lambda(L)=0$ （见推论 3.1），因此（3.6）中的求和可以遍历 X的所有点。

3.4. **与条件空间的比较**。下一个定理将解空间 $S^j_\lambda(L)$ 与空间 $V_\lambda(L)$ 联系起来，后者在 (3.1) 中定义。对于 $X=\mathbb{A}^1$，这一结论已在 [24,第 4] 节中通过比较计算这两个空间的矩阵得到了证明。

定理 3.1. 假设 L 是 λ-规范化的。那么， L的右乘法保持 Δ_λ上的滤过 $\{\Delta_\lambda^{\leq j}\}$，并且对所有 $j\geq 0$，

$$\dim S^j_\lambda(L)=\dim V_\lambda(L)^{\leq j},$$

其中 $V_\lambda(L)^{\leq j}=V_\lambda(L)\cap\Delta_\lambda^{\leq j}$。因此， $V_\lambda(L)$ 是一个维数为 d_λ 的有限维向量空间，其次数集与 L 在 λ 处的余型一致： $\Sigma(V_\lambda(L))=J_\lambda(L)$。

证明。由引理 2.2(b)，元素 $F\in\Delta_\lambda$ 属于 $\Delta_\lambda^{\leq j}$ 当且仅当 $\langle F、\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}\rangle_\lambda=0$，且配对将 $\Delta_\lambda^{\leq j}$ 与 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda/\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}\cong\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 的对偶空间相识别。由于 L 保持 $\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}$ （引理 3.2 ），由引理 2.2(c)可得，对所有$F\in\Delta_\lambda^{\leq j}$， $\langle FL、\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1}\rangle_\lambda=\langle F、L(\widehat{\mathfrak{n}}_\lambda^{j+1})\rangle_\lambda=0$，即 $\Delta_\lambda^{\leq j}\cdot L\subseteq\Delta_\lambda^{\leq j}$；并且 R_L 对 $\Delta_\lambda^{\leq j}$ 的限制是 $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 上的端同态 L 的转置。因此

$$\begin{aligned}\dim V_\lambda(L)^{\leq j}&=\dim\operatorname{Ker}\big(R_L|_{\Delta_\lambda^{\leq j}}\big)=\dim\operatorname{Coker}(L;\,\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1})\\&=\dim\operatorname{Ker}(L;\,\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1})=\dim S^j_\lambda(L),\end{aligned}$$

其中第三个等式成立是因为 $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 是有限维的。最后一个结论由引理3.3 和引理2.3(a) 得出。 □

注。 根据命题 2.1(b) 和引理 2.1，上述证明中将 $\Delta_\lambda^{\leq j}$ 与 $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 的对偶空间相识别，所用的是自然同构 $\mathcal{D}^j_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda\mathcal{D}^j_\lambda\cong\mathcal{D}^j_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda,\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1},\mathbb{C})$，其中 $\mathcal{D}^j_\lambda$ 表示 $\leq j$ 中阶为 $\mathcal{D}_\lambda$的算子空间。因此，定理 3.1体现了微分算子的形式连续性。

定理 3.1 适用于 λ-规范化算子。对于任意的 $L\in\mathcal{D}$，空间 $V_\lambda(L)^{-}$与 $V_\lambda(L)$ 不同，但差异是可控的。

推论 3.1。 令 L 为 $\mathcal{D}$，$\lambda\in X$的非零元素，并令 $L=t^wL$ 为 L的 λ-归一化。

(a) $V_\lambda(L)$ 是有限维的，且 $V_\lambda(L)^\perp=L(\widehat{\mathcal{O}}_\lambda)$。($b$) 若 $w\geq 0$，则 $J_\lambda(L)=\Sigma(V_\lambda(L))=\{0,\dots,w-1\}\sqcup(w+\Sigma(V_\lambda(L)))$；若 $w<0$，则$\Sigma(V_\lambda(L))=\{0,\dots,-w-1\}\sqcup(-w+J_\lambda(L))$。($c$) 在两种情况下，$n_\lambda(L)=\nu(V_\lambda(L))$。具体而言，若 $\{F_1,\dots,F_g\}$ 是由次数各不相同的元素组成的 $V_\lambda(L)$ 的一组基，则

$$n_\lambda(L)=\sum_{i=1}^{g}\deg(F_i)-\binom{g}{2}.\tag{3.7}$$

(d) $n_\lambda(L)=0$ 对所有 $\lambda\notin\Lambda(L)$。

证明。根据引理 2.2(d)，对任意 $P \in \widehat{\mathcal{D}}_\lambda$，$V_\lambda(P)^\perp = P(\widehat{\mathcal{O}}_\lambda)$；因此 $V_\lambda(\bar{L})^\perp = t^w V_\lambda(L)^\perp$。由于根据定理 3.1，$V_\lambda(\bar{L})$ 是有限维的，子空间 $V_\lambda(L)^\perp$ 是闭的，且在 $\mathcal{O}_\lambda$ 中具有有限余维，这就意味着 (a)。随后，(b) 由引理 2.3(c) 和定理 3.1 得出，而 (c) 则由 (b) 和引理 2.3(c) 的最后一个公式得出。最后，(d) 是 (c) 的一个特例。□

注。代价是使用余核而非核，这样就可以完全避免归一化。如果 $L \in \mathcal{D}$ 是一个阶为 N的算子，那么 $L(\mathfrak{n}_\lambda^{j+N+1}) \subseteq \mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 对所有 $j \geq 0$ 均成立，这是由命题 2.1(a得出的；而定理 3.1 的论证表明

$$\dim V_\lambda(L)^{\leq j} = \dim \operatorname{Coker}\big[L:\ \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+N+1} \to \mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}\big], \qquad j \geq 0.$$

因此，$V_\lambda(L)$ 的次数集以及由此得到的 $n_\lambda(L)$，都可以从右侧维数的跳变中读出。

3.5. **主定理**。现在我们可以精确表述主要结果。回顾一下，$V_\Lambda(L) = \bigoplus_\lambda V_\lambda(L)$ 是 X 上的一个条件空间（见定义 4 和推论 3.1(a)）；我们将其记为

$$M(L) := \operatorname{Ann}_{\mathcal{D}}(V_\Lambda(L)) = \{P \in \mathcal{D}:\ FP = 0 \text{ in } \Delta(X) \text{ for all } F \in V_\Lambda(L)\} \tag{3.8}$$

相应的 $\mathcal{D}$ 的胖右理想（见（2.7））。

定理 3.2。设 L 是 X上的一个非零微分算子。

(a) 右理想 $M(L)$ 与 L 的闭包对偶；准确地说，$M(L) = (\mathrm{cl}(L)\ L^{-1})^*$。($b$) 对任意 $\lambda \in X$，L 的局部全纯性指标等于 $M(L)$ 的局部Calogero–Moser指标：$n_\lambda(L) = n_\lambda(M(L))$。($c$) $n(L) = n(M(L)) = n(\mathrm{cl}(L))$。

定理 a 的第（3.2）部分将在第 4 节证明（见推论 4.1），第（b）部分和第（c）部分将在第 5.3 节证明。本节最后给出两个直接推论。

推论 *3.2.* 设 $f_1, \dots, f_k$ 是定义在 X 上的全纯函数，且左理想 $I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f_1, \dots, f_k)$ 非零，并设 L 是 I 中的最小阶算子。则 $I = \mathrm{cl}(L)$ 且 $n(I) = n(L)$。特别地，定义在 X 上的全纯函数 f 是强全纯的，当且仅当对于某个 $\lambda \in \Lambda(L)$，有 $n_\lambda(L) > 0$，其中 L 是 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f)$ 中的最小阶算子。

证明。由引理 2.4可知，理想 I 是闭的，且 $I = \mathrm{cl}(L)$。结论由定理3.2(c) 得出。□

推论 3.3。对于非零的 $L \in \mathcal{D}$，以下各项等价：

(i) $n(L) = 0$; *(ii)* L 在每个点 $\lambda \in X$ 处的余型为 $\{0, 1, \dots, d_\lambda - 1\}$; *(iii)* 对于 X上的线丛 $\mathcal{I}$，$\mathrm{cl}(L) \cong \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{I}$。

证明。等价关系 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 可由 (3.5) 显然得到，而 (i) $\Leftrightarrow$ (iii) 可由定理 3.2(c) 和命题2.3推出。□

4. Dual classification of ideals

本节将 $\mathcal{D}$ 中的左理想用条件空间来描述。因此，我们得到微分算子的闭包的一个表示，并证明定理 a 的第（a）部分3.2。

4.1. **理想的表示**。 设 I 是 $\mathcal{D}$的一个（非零）左理想，且设 $L \in I$ 是一个最小阶算子。回顾 $\mathcal{D}L \subseteq I \subseteq \mathrm{cl}(L)$（见引理 2.4($b$)）。对于每个 $\lambda \in X$，置

$$\widetilde{V}_\lambda(I;L) := \{F \in \mathcal{D} : FL \in \mathfrak{m}_\lambda I\}, \qquad V_\lambda(I;L) := \widetilde{V}_\lambda(I;L)/\mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D} \subseteq \Delta_\lambda. \tag{4.1}$$

因此， $V_\lambda(I;L)$ 是由 L 的右乘法诱导的映射 $\Delta_\lambda \to I/\mathfrak{m}_\lambda I$ 的核，如式 (1.8) 中的 $\widetilde{\ }$ 所示。当 $I = \mathrm{cl}(L)$ 时，我们将 $V_\lambda(L)$ 在 $\mathcal{D}$ 中的原像简记为 $V_\lambda(L) := \{F \in \mathcal{D} : FL \in \mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D}\}$。按照惯例， $\mathfrak{m}_\lambda^{-1} := \{h \in K : h\,\mathfrak{m}_\lambda \subseteq \mathcal{O}\}$ 表示 $\mathfrak{m}_\lambda$ 的分式理想逆；回顾一下， $\mathfrak{m}_\lambda^{-1}\mathfrak{m}_\lambda = \mathcal{O}$，且 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1}/\mathcal{O}$ 是一维向量空间。

引理 4.1。 令 $N := I/\mathcal{D}L$。那么，对每个 $\lambda \in X$，

(a) $V_\lambda(I;L) \subseteq V_\lambda(L)$，当 $I = \mathrm{cl}(L)$ 时取等号；*(b)* $N^{\mathfrak{m}_\lambda} = \big(\mathfrak{m}_\lambda^{-1}\widetilde{V}_\lambda(I;L)\,L + \mathcal{D}L\big)/\mathcal{D}L$，并且存在一个同构 $N^{\mathfrak{m}_\lambda} \cong (\mathfrak{m}_\lambda^{-1}/\mathcal{O}) \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda(I;L)$。特别地，$\dim N^{\mathfrak{m}_\lambda} = \dim V_\lambda(I;L)$。

证明。(a) 这个包含关系显然，因为 $\mathfrak{m}_\lambda I \subseteq \mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D}$。若 $I = \mathrm{cl}(L)$ 且 $FL \in \mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D}$，则 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1}FL \subseteq \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(K)L = \mathrm{cl}(L)$，因此 $FL \in \mathfrak{m}_\lambda\mathfrak{m}_\lambda^{-1}FL \subseteq \mathfrak{m}_\lambda\,\mathrm{cl}(L)$。($b$) 根据定义，$N^{\mathfrak{m}_\lambda}$ 由满足 $\mathfrak{m}_\lambda P \subseteq \mathcal{D}L$ 的元素 $P \in I$ 的等价类组成。将 $P = qL$ 写成$q \in \mathcal{D}(K)$，可知这个条件等价于 $\mathfrak{m}_\lambda q \subseteq \mathcal{D}$。于是 $(\mathfrak{m}_\lambda q)L \subseteq \mathfrak{m}_\lambda I$，即$\mathfrak{m}_\lambda q \subseteq \widetilde{V}_\lambda(I;\,L)$，因此 $q \in \mathfrak{m}_\lambda^{-1}\mathfrak{m}_\lambda q \subseteq \mathfrak{m}_\lambda^{-1}\widetilde{V}_\lambda(I;L)$。反之，若 $q \in \mathfrak{m}_\lambda^{-1}\widetilde{V}_\lambda(I;L)$，则 $qL \in \mathfrak{m}_\lambda^{-1}\mathfrak{m}_\lambda I = I$，且 $\mathfrak{m}_\lambda qL \subseteq \widetilde{V}_\lambda(I;L)\,L \subseteq \mathcal{D}L$。这就证明了第一个结论。由于$qL \in \mathcal{D}L$ 当且仅当 $q \in \mathcal{D} = \mathfrak{m}_\lambda^{-1}(\mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D})$，我们得到 $N^{\mathfrak{m}_\lambda} \cong \mathfrak{m}_\lambda^{-1}\widetilde{V}_\lambda(I;\,L)/\mathfrak{m}_\lambda^{-1}(\mathfrak{m}_\lambda\mathcal{D})$ $\cong \mathfrak{m}_\lambda^{-1} \otimes_{\mathcal{O}} V_\lambda(I;L)$，它与 $(\mathfrak{m}_\lambda^{-1}/\mathcal{O}) \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda(I;L)$ 同构，因为 $\mathfrak{m}_\lambda$ 湮灭子 $V_\lambda(I;L)$。□

对于 $X = \mathbb{A}^1$，引理 4.1(b) 中的同构可明确表示为 $F \mapsto (x-\lambda)^{-1}FL$(参见 [24, 定理 2。5])。

定理 4.1。 设 I 是 $\mathcal{D}$ 的一个左理想， $L \in I$ 是一个最小阶算子。那么，对于所有 $\lambda \notin \Lambda(L)$，都有 $V_\lambda(I;L) = 0$，并且

$$I = \mathcal{D}L + \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} \mathcal{D}\,\mathfrak{m}_\lambda^{-1}\,\widetilde{V}_\lambda(I;L)\,L. \tag{4.2}$$

特别地，对于任意非零的 $L \in \mathcal{D}$，

$$\mathrm{cl}(L) = \mathcal{D}L + \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} \mathcal{D}\,\mathfrak{m}_\lambda^{-1}\,\widetilde{V}_\lambda(L)\,L, \tag{4.3}$$

并且 $\Lambda(L)$ 是 $\mathcal{O}$-模 $\mathrm{cl}(L)/\mathcal{D}L$ 的支撑。

证明。由引理 2.4(c)， $N = I/\mathcal{D}L$ 是一个挠 $\mathcal{O}$-模；因此 $N = \bigoplus_{\lambda \in X} H^0_\lambda(N)$。由引理 2.5， $H^0_\lambda(N) = \mathcal{D} \cdot N^{\mathfrak{m}_\lambda}$ 对每个 λ 都成立；由引理 4.1， $N^{\mathfrak{m}_\lambda}$ 是 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1}\widetilde{V}_\lambda(I;\,L)\,L$ 在 N 中的像；此外，除非 $V_\lambda(L) \neq 0$，否则 $N^{\mathfrak{m}_\lambda} = 0$。由此得到公式 (4.2)。最后一条陈述是 $I = \mathrm{cl}(L)$ 的特例，其中当且仅当 $V_\lambda(L) \neq 0$ 时， $N^{\mathfrak{m}_\lambda} \neq 0$。□

公式（4.3）是引言中的推论 1.1。对于 $X = \mathbb{A}^1$，我们有 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1} = (x-\lambda)^{-1}\mathbb{C}[x]$ 和 $\widetilde{V}_\lambda(L) = \sum_i \mathbb{C}\,F_{\lambda,\,i} + \mathfrak{m}_\lambda A_1$，其中 $\{F_{\lambda,i}\}$ 是 $V_\lambda(L) \subset \mathbb{C}[\partial]$的一个基，因此（4.3）变为

$$\mathrm{cl}(L) = A_1 L + \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} \sum_i A_1\,(x-\lambda)^{-1}F_{\lambda,i}\,L, \tag{4.4}$$

即为 [24, 算法 3.4]。

4.2. **由条件空间定义的理想**。设 $C = \bigoplus_\lambda C_\lambda$ 为一个条件空间~于 X（见定义 2）。对于每个 $\lambda \in \mathrm{Supp}(C)$，令 $C_\lambda \subseteq \mathcal{D}$ 表示 C_λ 在投影 $\mathcal{D} \to \Delta_\lambda$下的原像。我们将 C 与之关联的左 $\mathcal{D}$-子模，它属于 $\mathcal{D}(K)$

$$J_C := \mathcal{D} + \sum_{\lambda \in \mathrm{Supp}(C)} \mathcal{D}\, \mathfrak{m}_\lambda^{-1}\, \widetilde{C}_\lambda. \tag{4.5}$$

显然， J_C 是有限生成的，即它是 $\mathcal{D}$的一个分式左理想。

引理 4.2。对于任意条件空间 C，我们有

$$(J_C)^* = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(C) = \mathcal{D}(\mathcal{O}, W_C) \qquad \textit{and} \qquad J_C = \mathcal{D}(W_C, \mathcal{O}).$$

证明。由于 $J_C \supseteq \mathcal{D}$，我们有 $(J_C)^* \subseteq \mathcal{D}$。对于 $P \in \mathcal{D}$和 $F \in \widetilde{C}_\lambda$，包含关系 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1} F P \subseteq \mathcal{D}$ 成立当且仅当 $FP \in \mathfrak{m}_\lambda \mathcal{D}$ （分别乘以 $\mathfrak{m}_\lambda$和 $\mathfrak{m}_\lambda^{-1}$ ）。因此

$$(J_C)^* = \{P \in \mathcal{D} : \widetilde{C}_\lambda\, P \subseteq \mathfrak{m}_\lambda \mathcal{D} \ \text{ for all } \lambda\} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(C),$$

且湮灭子$_{\mathcal{D}}$（C） $= \mathcal{D}$（$\mathcal{O}$， W_C）由引理 2.6（c）。由于 J_C是自反的，由定理 2.1（c）可知 $J_C =$（J_C）$^{**} = \mathcal{D}$（$\mathcal{O}$， W_C）$^* = \mathcal{D}$（W_C， $\mathcal{O}$）。□

现在我们可以陈述并证明本节的主要结果，这是定理 1.1的一个更精确版本。

定理 4.2。(a) 设 I 是 $\mathcal{D}$ 的一个左理想， $L \in I$ 是一个最小阶算子，并设 $C := \bigoplus_\lambda V_\lambda(I; L)$。那么 C 是关于 X 的条件空间，并且

$$I\, L^{-1} = J_C = \mathcal{D}(W_C, \mathcal{O}), \qquad (I\, L^{-1})^* = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(C) = \mathcal{D}(\mathcal{O}, W_C).$$

特别地，$I \cong \mathcal{D}(W_C, \mathcal{O})$ 作为左 $\mathcal{D}$-模。

(b) 反过来，设 C 是关于 X 的任意条件空间，并设 L 是 $\mathcal{D}$ 的一个非零元素，使得 $I := J_C\, L \subseteq \mathcal{D}$。那么 L 是 I 中的一个最小阶算子，并且对所有 $\lambda \in X$，$V_\lambda(I; L)$ $= C_\lambda$ 。(c) 若 L 和 $L' = hL$ $(h \in K^\times)$ 是 I 中两个最小阶算子，其对应的条件空间分别为 C 和 C'，则 $W_{C'} = h\, W_C$。

证明。(a) 根据定理 4.1 和推论 3.1(a)， C 是 $\Delta(X)$ 的有限维齐次子空间。将 (4.2) 右乘 L^{-1}，得到 $IL^{-1} = J_C$，结论由引理 4.2 得出。(b) 由于 $1 \in J_C \subset \mathcal{D}(K)$，我们有 $L \in I$，并且对所有非零 $q \in J_C$，ord(qL) $\geq$ord(L)；因此 L 在 I 中具有最小阶。设 $C' := \bigoplus_\lambda V_\lambda(I; L)$。根据 ($a$)， $\mathcal{D}(W_{C'}, \mathcal{O}) = IL^{-1} = J_C = \mathcal{D}(W_C, \mathcal{O})$。转到对偶理想并应用定理 2.1($a$)，得到 $W_{C'} = W_C$，因此由引理2.6(b)可得 $C' = C$ 。(c) 根据 (a)， $\mathcal{D}(W_{C'}, \mathcal{O}) = IL^{-1}h^{-1} = \mathcal{D}(W_C,$ $\mathcal{O})\ h^{-1}$。取对偶后，得到 $\mathcal{D}(\mathcal{O}, W_{C'}) = h\, \mathcal{D}(\mathcal{O}, W_C)$，由此根据定理 2.1($a$)，有 $W_{C'} = \mathcal{D}(\mathcal{O},$ $W_{C'}) \cdot \mathcal{O} = h\, W_C$。□

应用定理4.2 于闭理想，可得到微分算子闭包的如下描述，其中包含定理3.2(a)。

推论 4.1。设 L 是 $\mathcal{D}$中的一个非零元素。设 $W(L) := W_{V_\Lambda(L)}$ 是与条件空间 $\mathcal{O}$ 相关联的 $V_\Lambda(L)$的主可分解子空间，并设 $M(L)$ =湮灭子$_{\mathcal{D}}(V_\Lambda(L))$，见 (3.8)。则

(a) $\mathrm{cl}(L) = \mathcal{D}(W(L), \mathcal{O}) \cdot L$ *and* $M(L) = (\mathrm{cl}(L)\, L^{-1})^* = \mathcal{D}(\mathcal{O}, W(L))$;

(b) $W(L) = \{f \in \mathcal{O}:$ 对所有 $\lambda \in X\}$，均有 $f \in L(\mathcal{O}_\lambda)$；换言之，$W(L)$ 由 X 上满足非齐次方程 $L(u) = f$ 在 X 的每个点处都有形式幂级数解的所有正则函数 f 构成。特别地，$L(\mathcal{O}) \subseteq W(L)$，且 $\operatorname{codim}_{\mathcal{O}} W(L) = \sum_\lambda \dim V_\lambda(L)$。

证明. (a) 由定理 4.2(a) 和引理 4.1(a) 得出。(b) 根据定义，$W(L)$ 是所有满足 $f \in V_\lambda(L)^\perp$ 对任意 λ 均成立的 $f \in \mathcal{O}$ 的集合，并且 $V_\lambda(L)^\perp = L(\widehat{\mathcal{O}}_\lambda)$ 由推论 3.1(a) 得出。最后一个结论由引理2.6(a) 得出。□

推论 *4.2.* 设 $L \in \mathcal{D}$ 和 $h \in K^\times$ 满足 $hL \in \mathcal{D}$。则 $\operatorname{cl}(hL) = \operatorname{cl}(L)$ 且 $W(hL) = h \cdot W(L)$。此外，对每个 $\lambda \in X$，都有 $V_\lambda(hL)^\perp = h\, V_\lambda(L)^\perp$ 在 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ 中；特别地，若 h 在 λ 处正则且 $k = \operatorname{ord}_\lambda(h)$，则 $\Sigma(V_\lambda(hL)) = \{0, 1, \dots, k-1\} \sqcup (k + \Sigma(V_\lambda(L)))$。

证明。 前两个结论由定理 4.2(c) 应用于 $I = \mathrm{cl}(L)$ 得出。局部结论是引理 2.2(d) 和引理2.3(c) 的推论。□

注。 1. 推论 4.2 说明了附属于理想的条件空间如何取决于最小阶算子的选择：例如，若 $X = \mathbb{A}^1$，$a \in \Lambda(L)$ 且 $L' = (x-a)^k L$，则 $V_a(L')$ 的次数集可由 $V_a(L)$ 的次数集平移 k 并加上 $\{0, 1, \dots, k-1\}$ 得到，而 $W(L') = (x-a)^k\, W(L)$。

2. 由 [9, 节 5], 可知，$K_0(\mathcal{D}) \cong K_0(X)$ 中胖右理想 $\mathcal{D}(\mathcal{O}, W)$ 的类由线丛 $\prod_\lambda \mathfrak{m}_\lambda^{k_\lambda}$ 确定，其中 $W = \bigcap_\lambda W_\lambda$ 且 $k_\lambda =$ 余维$_{\mathcal{O}} W_\lambda$。因此，由推论 4.1，与 $\mathrm{cl}(L)$ 对偶的右理想 $M(L)$ 对应于 $\mathcal{O}$中的理想 $\prod_{\lambda \in \Lambda(L)} \mathfrak{m}^{d_\lambda(L)\,\lambda}$，其中 $d_\lambda(L) =$ 维数 $V_\lambda(L)$，且 $\gamma[\mathrm{cl}(L)]$ 是该理想在 $\mathrm{Pic}(X)$ 中的逆元的类。

结合定理 4.2 与定理2.1，我们可以将分类重新表述为以下形式；这与用阿代尔格拉斯曼流形描述 $\mathcal{R}$（$\mathcal{D}$）是对偶的（见第 2.6节）。

推论 4.3。 设 $\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{ad}}(X)$ 表示所有关于 X 的条件空间的集合，模去如下等价关系：$C \sim C'$ 当且仅当 $W_{C'} = h\, W_C$ 对某个 $h \in K^\times$成立。则映射 $C \mapsto J_C$（见 （4.5））诱导出一个双射

$$\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{ad}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathcal{D}),$$

其逆映射由 $[I] \mapsto [\bigoplus_\lambda V_\lambda(I;\ L)]$, 给出，其中 L 是I中的任意一个最小阶算子。

证明。 由引理 4.2，$J_C = \mathcal{D}(W_C,\ \mathcal{O})$，因此根据定理 2.1 和引理 2.6（b），该映射是良定义且为单射。根据定理4.2（a），它是满射，而逆映射的描述则由定理 4.2得出。□

我们称 $\mathrm{Gr}_*^{\mathrm{ad}}(X)$ 为 的 X的对偶阿代尔格拉斯曼流形。根据引理 2.6，它与 $\mathcal{O}$ 的主可分解子空间的等价类集合自然双射，即与 X 的阿代尔格拉斯曼流形（按 [13, 9] 的定义）双射；推论4.3 的要点在于，用条件来描述更适用于左理想：给定理想 J_C 及其条件空间，都由显式公式给出。

5. The Calogero–Moser index of an ideal

在本节中，我们证明定理 1.2并推导出主定理。我们将以下述更精确的形式证明定理1.2 。回顾一下，对于有限维子空间$V \subseteq \Delta_\lambda$，我们用 $\Sigma(V$表示其次数集，用 $\nu(V) = \sum_{s \in \Sigma(V)} s - \binom{\dim V}{2}$ 表示（参见第2.2节）。

定理 5.1。设 $C=\bigoplus_\lambda C_\lambda$ 是 X 上的条件空间。那么，右理想 湮灭子$_{\mathcal{D}}(C)=\mathcal{D}(\mathcal{O},W_C)$ 的局部 *Calogero–Moser* 指数为

$$n_\lambda(\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(C))=\nu(C_\lambda),\qquad \lambda\in X.$$

因此，

$$n(\mathcal{D}(W_C,\mathcal{O}))=n(\mathcal{D}(\mathcal{O},W_C))=\sum_{\lambda\in\mathrm{Supp}(C)}\nu(C_\lambda).$$

证明分三步进行。首先，利用卡洛杰罗–莫泽指数的可加性（2.11）及其与完备化的相容性，我们证明 n_λ(湮灭子$_{\mathcal{D}}(C)$) 仅取决于子空间 C_λ，而该子空间属于 $\Delta_\lambda\cong\mathbb{C}[\partial]$ （引理 5.1）。由此，问题归结为 X为仿射直线且 C 支撑在一个点上的情形。其次，我们利用 Wilson 对阿代尔格拉斯曼流形的描述处理这一特殊情形（命题 5.1）。第三，我们借助命题 2.2，从右理想转到左理想。附录中给出了第二步的另一种证明，该证明纯属代数方法，不依赖于化归到仿射直线的步骤。

5.1. **局部化**。设 $\mathcal{D}:=\mathbb{C}[[t]][\partial]$，其中 $\partial t-t\partial=1$，并设 C_0 是 $\mathbb{C}[\partial]\cong\mathcal{D}/t\mathcal{D}$ 的有限维子空间。考虑右理想

$$\mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{D}}}(C_0):=\{P\in\widehat{\mathcal{D}}\,:\,FP\in t\widehat{\mathcal{D}}\ \text{ for all } F\in C_0\},$$

其中包含 $t^m\mathcal{D}$ 对于 $m\gg0$，并定义

$$n(C_0):=\dim_{\mathbb{C}}\big[\,(\mathrm{gr}\,\mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{D}}}(C_0))^{\vee\vee}\big/\,\mathrm{gr}\,\mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{D}}}(C_0)\,\big],\tag{5.1}$$

其中，gr 是相对于 $\widehat{\mathcal{D}}$ 上的阶滤过取得的，而 $(-)^\vee$ 表示对偶于$\widehat{\mathrm{gr}}\,\mathcal{D}=\mathbb{C}[[t]][\xi]$。

引理 5.1。设 C 是 X上的条件空间，并设 $M:=$湮灭子$_{\mathcal{D}}(C)$。那么，对于每个$\lambda\in X$，由 M 生成的 $\mathcal{D}_\lambda$ 的右理想为

$$\widehat{M_\lambda}=\{P\in\widehat{\mathcal{D}}_\lambda\,:\,FP=0\ in\ \Delta_\lambda\ for\ all\ F\in C_\lambda\}.$$

因此，$n_\lambda(M)=n(C_\lambda)$，其中 C_λ 通过由 λ处的局部参数 t 确定的同构 $\mathcal{D}_\lambda\cong\mathbb{C}[[t]][\partial]$ 和 $\Delta_\lambda\cong\mathbb{C}[\partial]$ 被视为 $\mathbb{C}[\partial]$ 的子空间。特别地，$n_\lambda(M)=0$，其中 $\lambda\notin\mathrm{Supp}(C)$。

证明。将右侧记为 M'，并选取 m，使得对所有 μ 都有 $C_\mu\subseteq\Delta_\mu^{\le m-1}$。那么$M=\bigcap_\mu$Ann$_{\mathcal{D}}(C_\mu)$，且对每个 μ，Ann$_{\mathcal{D}}(C_\mu)\supseteq\mathfrak{m}_\mu^m\mathcal{D}$，这是由命题 2.1($a$) 和引理 2.1 得出的。若 $\mu\neq\lambda$，则 Ann$_{\mathcal{D}}(C_\mu)\mathcal{D}_\lambda\supseteq\mathfrak{m}_\mu^m\mathcal{D}_\lambda=\mathcal{D}_\lambda$，因为 $\mathfrak{m}_\mu^m$包含在 λ 处不为零的函数。由于从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}_\lambda\cong\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_\lambda$ 的右理想扩张是正合的，且与有限交可交换，我们得到 $M_\lambda=$Ann$_{\mathcal{D}}(C_\lambda)\,\mathcal{D}_\lambda$。显然，Ann$_{\mathcal{D}}(C_\lambda)\,\mathcal{D}_\lambda\subseteq M'$，且这两个理想都包含 $t^m\mathcal{D}_\lambda=\mathfrak{m}_\lambda^m\mathcal{D}_\lambda$。由于自然映射 $\mathcal{D}/\mathfrak{m}_\lambda^m\mathcal{D}\to\mathcal{D}_\lambda/t^m\mathcal{D}_\lambda$ 是双射，且条件 $FP\in t\mathcal{D}_\lambda$ 只取决于 P 模 $t^m\mathcal{D}_\lambda$ 的等价类，这两个理想在 $\mathcal{D}_\lambda/t^m\mathcal{D}_\lambda$ 中的像相同。因此它们相等。第二个结论由 (2.12) 和 (5.1) 得出；若 $C_\lambda=0$，则 $M_\lambda=\mathcal{D}_\lambda$，且 $n_\lambda(M)=0$。□

5.2. **单点情形**。鉴于引理 5.1，定理 5.1 等价于以下陈述。

命题 5.1. 设 C_0 是 $\mathbb{C}[\partial]$ 的有限维子空间，其次数集为 $S=\Sigma(C_0)$。则 $n(C_0)=\nu(S)$。具体而言，若 $\{F_1,\dots,F_g\}$ 是 C_0 的一组基，且次数 $F_i=s_i$，并且 $s_1<\ldots<s_g$，则 $n(C_0)=\sum_{i=1}^g s_i-\binom{g}{2}$。

We w将使用以下关于朗斯基行列式的基本事实（参见 [18, 命题 2]） .

引理 5.2. 设 F_1，……，$F_g\in\mathbb{C}[z]$ 是次数两两不同的多项式，其次数分别为 s_1，……，s_g。那么朗斯基行列式$(F_1$，……，$F_g)$是次数为 $\sum_i s_i-\binom{g}{2}$ 的非零多项式。同样，若 u_1，……，$u_g\in\mathbb{C}[[t]]$ 是阶两两不同的幂级数，其阶分别为 ρ_1，……，ρ_g，那么朗斯基行列式$(u_1$，……，$u_g)$是阶为 $\sum_i\rho_i-\binom{g}{2}$ 的非零幂级数。

证明。由于朗斯基行列式是多重线性的，只需计算首项的贡献：$\mathrm{Wr}(z^{s_1},\dots,z^{s_g})=\det\left([s_j]_{i-1}\,z^{s_j-i+1}\right)=z^{\sum_j s_j-\binom{g}{2}}\det\left([s_j]_{i-1}\right)$。由于 $[s]_{i-1}$是 s 中的次数为 $i-1$的首一多项式，最后一个行列式等于范德蒙德行列式 $\prod_{i<j}(s_j-s_i)\neq 0$。$\mathrm{Wr}(F_1,\dots,F_g)$的所有其他项次数都较低（对于幂级数情形，则阶较高）。□

命题 5.1 的证明。我们将 C_0 视为仿射直线 $\mathbb{A}^1$（坐标为 t）上支撑于原点的条件空间，并令 $N:=\mathrm{Ann}_{A_1}(C_0)=\mathcal{D}(\mathbb{C}[t],W_{C_0})$。由引理 5.1 和 (2.11)，$n(N)=n_0(N)=n(C_0)$。另一方面，由命题 2.4$(a)$，$n(N)=-\operatorname{res}_\infty a_1(z)$，其中 a_1 是对应于 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$中相应点的 Baker函数的第一系数。由于 C_0 支撑于原点，命题 2.4(b)中的函数 f_i 只是 $f_i(z)=F_i(\partial_t)\,e^{tz}|_{t=0}=F_i(z)$；因此

$$n(N)=\operatorname{res}_\infty\partial_z\log\mathrm{Wr}(F_1,\dots,F_g)=\deg\mathrm{Wr}(F_1,\dots,F_g),$$

因为对于多项式 $P(z)$，z^{-1}在 P'/P于无穷远点处的展开中，P的系数为 $\deg P$。由引理 5.2 即得此结果。□

5.3. **主要结果的证明**。

定理 5.1 的证明。第一个公式由引理 5.1 和命题 5.1 得出。对 λ 求和，依据 (2.11) 可得 $n(\mathcal{D}(\mathcal{O},W_C))=\sum_\lambda\nu(C_\lambda)$。最后，$\mathcal{D}(\mathcal{O},W_C)$ 是分式左理想 $\mathcal{D}(W_C,\mathcal{O})$ 的对偶（见定理 2.1(c)），因此由命题 2.2 可得 $n(\mathcal{D}(W_C,\mathcal{O}))=n(\mathcal{D}(\mathcal{O},W_C))$。□

定理 1.2 是定理 5.1最后一个公式的重新表述，这是由引理 2.3(a) 可知的。

定理 *3.2* 的证明。 部分（a）是推论 4.1(a)。为证明（b），我们将定理 5.1 应用于条件空间 $C=V_\Lambda(L)$：对每个 $\lambda\in X$，

$$n_\lambda(M(L))=\nu(V_\lambda(L))=n_\lambda(L),$$

其中第二个等式由推论 3.1(c) 得出。对 λ 求和，得到 $n(M(L))=n(L)$。最后，根据第 (a) 部分，$M(L)$ 是分式左理想 $\mathrm{cl}(L)L^{-1}\cong\mathrm{cl}(L)$ 的对偶；因此由命题 2.2 可得 $n(\mathrm{cl}(L))=n(M(L))$。这就证明了 (c)，从而完成了定理 1.3 的证明。□

对于任意理想（不一定是闭理想），定理4.2和5.1给出

推论 5.1。 设 I 是 $\mathcal{D}$ 的一个左理想，且 $L \in I$ 是一个最小阶算子。那么

$$n(I) = \sum_{\lambda \in \Lambda(L)} \nu(V_\lambda(I; L)).$$

注：公式（1.9）与 [8, （8.3）]中给出的卡洛杰罗–莫泽指数公式互为对偶。为说明这一点，考虑 $X = \mathbb{A}^1$ 且 C 支撑于原点并由单项式张成的情形： $C = \operatorname{span}\{\partial^{s_1}, \dots, \partial^{s_g}\}$ 其中 $s_1 < \dots < s_g$。那么 W_C 由下列单项式张成： x^r 其中 $r \notin \{s_1, \dots, s_g\}$。令 $r_0 < r_1 < r_2 < \dots$ 为 W_C 中出现的指数；因此 g 是 W_C 中的“间隙”数，而 $r_i = g + i$ 对于 $i > s_g - g$。根据定理5.1，

$$n = \sum_{i=1}^{g} s_i - \sum_{i=0}^{g-1} i = \sum_{k=g}^{s_g} k - \sum_{i=0}^{s_g - g} r_i = \sum_{i \geq 0} (g + i - r_i),$$

这正是 [8]的公式。

6. Explicit constructions and examples

本节将通过实例说明我们的结果。我们首先讨论仿射直线的情形，这是最简单的例子，同时也是（通过命题5.1）一般指标公式证明中的一个要素。

6.1. 仿射直线。设 $X = \mathbb{A}^1$，使得 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[x]$ 和 $\mathcal{D} = A_1$。X 上的每个线丛都是平凡的；因此，根据命题 2.3，左理想 $M \subseteq A_1$ 是循环的，当且仅当 $n(M) = 0$；而 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数是强全纯的，当且仅当它在 A_1 中的湮灭子不是循环的。对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们取 $t = x - \lambda$ 为局部参数，使得 $\partial_t = \partial$、$\Delta_\lambda = A_1/(x-\lambda)A_1 \cong \mathbb{C}[\partial]$，并且配对（1.6）为 $\langle F(\partial)\ f\rangle_\lambda = [F(\partial)f](\lambda)$。我们记 $\theta_\lambda := (x - \lambda)\partial$。

6.1.1. 计算 $V_\lambda(L)$。空间 $V_\lambda(L)$ 以及算子的余型可以通过线性代数计算，如 [24]所示。下面的引理对任意曲线都成立。

引理 6.1. 设 $L \in \mathcal{D}$, $\lambda \in X$，并假设 $w_\lambda(L) \leq 0$，因此 L 可写成 $\curvearrowright \mathcal{D}_\lambda$ 的形式

$$L = \sum_{i \geq 0} t^i\, q_i(\theta), \qquad q_i \in \mathbb{C}[s], \quad \deg q_i \leq \operatorname{ord}(L). \tag{6.1}$$

那么，对所有 $j \geq 0$,

$$\partial^j L \equiv \sum_{i=0}^{j} [j]_i\, q_i(j-i)\, \partial^{j-i} \pmod{t\,\widehat{\mathcal{D}}_\lambda}. \tag{6.2}$$

因此，在 Δ_λ的基 $\{\partial^j\}$ 下，右乘法 L 由一个三角矩阵 $R_\lambda(L)$表示，其对角元为 $q_0(j)$，且 $V_\lambda(L) = \text{核}\, R_\lambda(L)$。若 L 是 λ-规范化的，则 $q_0 = q_{L,\,\lambda}$ 是其指标多项式，而余型 $J_\lambda(L)$ 中的每个元素都是 q_0 的非负整数根。

证明。展开式 (6.1) 由 (3.3) 得出。由于 $[\partial^j, t] = j\,\partial^{j-1}$，我们有 $\partial^j t^i \equiv [j]_i\, \partial^{j-i}$ 模 $t\,\mathcal{D}_\lambda$（当 $i > j$ 时，右端为零）。另一方面，对于任意多项式 q， $q(\theta)\,\partial^m = \partial^m q(\theta - \curvearrowright m)$；因此 $\partial^m q(\theta) = q(\theta + m)\ \partial^m \equiv q(m)\,\partial^m$，因为 $\theta\,\partial^m \in t\,\mathcal{D}_\lambda$。结合这两个公式即可得到 (6.2)。最后一个结论由定理 3.1 得出（另见引理 3.3(a)）。□

对于 $X = \mathbb{A}^1$ 和 $L \in A_1$，(6.1) 中的和是有限的：它是 L 关于由 θ_λ的伴随作用定义的 A_1 分次所作的齐次分量分解。算子 $(x-\lambda)^{w_\lambda(L)}L$ 在 [24] 中被称为 L 在 λ处的平衡形式。根据 (4.4)，矩阵 $R_\lambda(L)$、 $\lambda \in \Lambda(L)$的核给出了 $\mathrm{cl}(L)$ 的一个有限生成元集；根据定理 3.2 和推论 3.1(c)，它们确定了 $\mathrm{cl}(L)$ 的 Calogero–Moser 指数：如果$\{F_{\lambda,1},\dots,F_{\lambda,g_\lambda}\}$ 是 $V_\lambda(L)$ 的一个由次数各不相同的多项式组成的基，那么

$$n(\mathrm{cl}(L)) = \sum_{\lambda\in\Lambda(L)} \Big[\sum_{i=1}^{g_\lambda} \deg F_{\lambda,i} - \binom{g_\lambda}{2}\Big]. \tag{6.3}$$

若 (6.3) 的右端为零，则 $\mathrm{cl}(L)$ 是循环的；事实上，在这种情况下，$\mathrm{cl}(L) = A_1\, h^{-1}L$，其中 $h \in \mathbb{C}[x]$ 是 L 的系数的最大公因式。

例 6.1。设 $L = x\partial - n$ 且 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则 $L = \theta_0 - n$ 在 $\lambda = 0$处规范化，其指标多项式为 $q_0(s) = s - n$，且 $\partial^j L \equiv (j-n)\,\partial^j$ 模 xA_1。因此，$\Lambda(L) = \{0\}$，$V_0(L) = \mathbb{C}\,\partial^n$，$L$ 在 0 处的余型为 $\{n\}$，且 $n(L) = n$。公式 (4.4) 给出

$$\mathrm{cl}(L) = A_1(x\partial - n) + A_1\, x^{-1}\partial^n(x\partial - n) = A_1(x\partial - n) + A_1\,\partial^{n+1} = \mathrm{Ann}(x^n),$$

这与 (1.1) 一致，并由此得到 $n(\mathrm{Ann}(x^n)) = n$。推论 4.1 的主可分解子空间为 $W(L) = \{f \in \mathbb{C}[x] : f^{(n)}(0) = 0\}$；它恰有一个间隙，位于次数 n，且 $M(L) = \{P \in A_1 :\ \partial^n P \in xA_1\}$。对偶地，$L$ 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 上的作用为 $x^j \mapsto (j-n)\ x^j$，而 $L(\mathbb{C}[[x]])$ 是 ∂^n 的湮灭子，这正如引理 2.2(d) 所述。

例 6.2。设 $f(x) = x^2(x-1)^3$。湮灭子 $\mathrm{Ann}(f)$ 中的一个最小阶算子是 $L = x(x-1)\partial - 5x + 2$，其中 $\Lambda(L) = \{0,1\}$。在 $\lambda = 0$ 处，我们有 $L = -(\theta_0 - 2) + x(\theta_0 - 5)$，而 (6.2) 给出 $\partial^j L \equiv (2-j)\,\partial^j + j(j-6)\ \partial^{j-1}$；因此 $V_0(L) = \mathbb{C}(\partial^2 + 8\partial + 20)$。在 $\lambda = 1$ 处，我们有 $L = (\theta_1 - 3) + (x-1)(\theta_1 - 5)$，于是 $\partial^j L \equiv (j-3)\ \partial^j + j(j-6)\ \partial^{j-1}$ 模 $(x-1)A_1$，且 $V_1(L) = \mathbb{C}\,(\partial^3 - 9\partial^2 + 36\partial - 60)$。因此 $n(\mathrm{Ann}(f)) = 2 + 3 = 5 = \deg f$。

6.1.2. Calogero–Moser 数据。根据推论 4.3，在任意曲线上，左理想的条件空间不仅确定其 Calogero–Moser 指数，也确定理想类本身。对于 $X = \mathbb{A}^1$，这一点可以完全明确地表达：从条件空间可以计算理想的 Calogero–Moser 数据，即在（2.14）中定义的元素 κ，它是理想的完全同构不变量（见第 2.6 节）。设 M 是 A_1 的左理想，$L \in M$ 是一个最小阶算子，并令 $C = \bigoplus_\lambda V_\lambda$（$M$；$L$）。由定理 4.2，$M \cong \mathcal{D}\,(W_C,\ \mathbb{C}[x])$，因此与 M 对应的点 $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ 是 $W = \prod_\lambda (x-\lambda)^{-\dim C_\lambda} W_C$。取 C 的一组基 $\{c_1,\dots,c_g\}$，其中 $c_i \in C_{\lambda_i}$ 由 $F_i(\partial) \in \mathbb{C}[\partial]$ 表示。于是，根据（2.15）和命题 2.4（c），联系 M 两个特征代表元的元素 $\kappa = \kappa_M$（见（2.14））由下式给出

$$\kappa^{-1}(x,\partial)\,[e^{xz}] = \kappa^{-1}(x,z)\,e^{xz}, \qquad \kappa^{-1}(x,z) = \frac{\det \mathsf{M}(z,x)}{\det \mathsf{M}(z,\infty)}, \tag{6.4}$$

其中，$\mathsf{M}(z,\ x)$ 是一个 $g\times g$矩阵，其元素为 $\mathsf{m}_{ij} = (\partial_z + \lambda_i)^{j-1}[F_i(z) - (x-\lambda_i)^{-1}F_i'(z)]$。换句话说，要找出 $\kappa^{-1}(x,\ \partial)$，需将有理函数 $\kappa^{-1}(x,\ z)$ 展开为$1 + \sum_k \phi_k(x)\,\chi_k(z)$的形式，并将 z 替换为 ∂，把关于 x 的函数写在左边。

例6.3。设 C 由单个条件组成 $F(\partial)$，该条件位于点 λ，因此$M \cong J_C = A_1 + A_1(x-\lambda)^{-1}F(\partial)$。那么，式（6.4）给出

$$\kappa^{-1}(x,\partial) = 1 - \frac{1}{x-\lambda}\,\frac{F'(\partial)}{F(\partial)}. \tag{6.5}$$

在这种情况下， M 的特征代表元很容易直接求得： $M_x = J_C\ (x-\lambda)\ = A_1\ (x-\lambda)\ + A_1\,[F\ (\partial)\ +\ (x-\lambda)^{-1}F'\ (\partial)\ ]$, 以及

$$M_\partial = M_x\,\kappa^{-1} = A_1\Big(x-\lambda-\frac{F'(\partial)}{F(\partial)}\Big) + A_1\,F(\partial).$$

对于 $F=\partial^n$ 和 $\lambda=0$，公式（6.5）给出 $\kappa^{-1}=1-n\,x^{-1}\partial^{-1}$，这与 2.16）中 $f=x^n$的结果一致。注意，在无穷远点处 $x^{-1}z^{-1}$ 的展开 $\kappa^{-1}\ (x,\ z)$ 的系数是$-\deg F$，这与定理 5.1 和命题 2.4（a）一致。

例 6.4。 假设 $C=$ 张成$\{F_1\ (\partial)\ \ F_2\ (\partial)\ \}$ 的支撑仅位于一点 λ。直接利用（6.4）计算可得

$$\kappa^{-1}(x,\partial) = 1-\frac{1}{x-\lambda}\,\frac{\mathrm{Wr}'}{\mathrm{Wr}}(\partial) + \frac{1}{(x-\lambda)^2}\,\frac{F_1'F_2''-F_1''F_2'}{\mathrm{Wr}}(\partial),$$

其中，朗斯基行列式 $=\mathrm{Wr}(F_1,\ F_2)=F_1F_2'-F_1'F_2$。因此， κ^{-1}在（$x-\lambda$）$^{-1}$各次幂前的系数，与变量 ∂_z^2-（Wr′ / Wr） ∂_z+（$F_1'F_2''-F_1''F_2'$）/的二阶首一微分算子 z的系数一致，该算子的核由 F_1（z）和 F_2（z）张成。这体现了双谱对偶（参见命题 2.4（b））。

例 6.5. 设 $f=x^2(x-1)^3$,如例 6.2 中所示。则 C由 $F_1=\partial^2+8\partial+20$在 $\lambda_1=0$ 处以及 $F_2=\partial^3-9\partial^2+36\partial-60$ 在 $\lambda_2=1$处张成。计算 (6.4) 中的行列式，得到 det M$(z,x)\ =z^5-($ $2/x+3/(x-1))\ z^4$ 以及 det M$(z,\infty)\ =z^5$，由此

$$\kappa^{-1}=1-\Big(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}\Big)\,\partial^{-1}=1-\frac{f'}{f}\,\partial^{-1},$$

与（2.16）一致。

例 6.6. 设 $p\in\mathbb{C}[x]$，并考虑函数 $f=e^{p(x)}\,x^n$, $n\ge 1$。它被 $L=x\partial-n-x\,p'(x)$ 湮灭，其中该函数在 0 处规范化，且对于 $i\ge 1$，有 $q_0(s)\ =s-n$ 以及 $q_i(s)\ =-p_i$，其中 $p'(x)\ =\sum_{i\ge1}p_i\,x^{i-1}$。因此， $V_0(L)$ 由单个多项式 $F(\partial)\ =\partial^n+\ldots$张成，其次数为 n，并且对于所有 p，均有 n (Ann(f)) $=n$。然而，Ann(f) 的同构类取决于 p：由推论 4.1，Ann$(f)\cong\mathcal{D}(W,\mathbb{C}[x])$，其中 $W=\{g\in\mathbb{C}[x]:\ \ [F(\partial)g](0)\ =0\}\supseteq L(\mathbb{C}[x])$；并且当且仅当相应的多项式$F$ 成比例时，这两个理想同构（根据定理 2.1，因为在 $\mathbb{C}[x]$ 中，两个以原点为主的余维一子空间等价，当且仅当它们相同）。现在，当且仅当 $L(x^j)\ =(j-n)\,x^j-x^{j+1}p'(x)$ 中 x^n 的系数对所有 $j<n$ 都为零时，F 与 ∂^n 成比例；也就是说，当且仅当 $p_1=\ldots=p_n=0$。因此

$$\mathrm{Ann}(e^{p(x)}x^n)\cong\mathrm{Ann}(x^n)\quad\Longleftrightarrow\quad p\in\mathbb{C}+x^{n+1}\,\mathbb{C}[x].$$

换言之，在群 $x^n\ \{e^{\mathrm{ad}\,p(x)}:\ \ p\in\mathbb{C}[x]\}\subset\mathrm{Aut}(A_1)$ 中，湮灭子 Ann($p\in\mathbb{C}+x^{n+1}\mathbb{C}[x]$) 的同构类的稳定子由满足 κ 的自同构组成。也可以从元素 中得出相同结论，该元素确定了一个理想的同构类（见第 2.6 节）。例如，对于 $n=2$，可得 $F=(\partial-p_1)^2-p_2$，而由（6.5）可得

$$\kappa^{-1}=1-\frac{2}{x}\,\frac{\partial-p_1}{(\partial-p_1)^2-p_2}.$$

将此与 $\kappa^{-1}=1-2\,x^{-1}\partial^{-1}$ for 湮灭子(x^2) 相比较，我们再次看到，当且仅当 $p_1=p_2=0$ 时，湮灭子$(e^px^2)\ \cong$ 湮灭子(x^2)，也就是说，当且仅当 $e^{\mathrm{ad}\,p}$ 稳定湮灭子(x^2) 的类。

6.2. **一阶算子**。 现在我们回到任意曲线 X 并证明定理 1.4。

定理 6.1. 设 f 是 X 上的非零有理函数，或是 X 上被 $\mathcal{D}$ 中某个一阶算子湮灭的非零全纯函数。那么，对于任意满足 $L(f) = 0$ 的非零一阶算子 $L \in \mathcal{D}$，均有 $\text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f) = \mathrm{cl}(L)$；对每个 $\lambda \in X$，

$$n_\lambda(L) = \max\{\mathrm{ord}_\lambda(f), 0\},$$

因此

$$n(\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f)) = \sum_{\lambda \in X} \max\{\mathrm{ord}_\lambda(f), 0\}.$$

证明. 若 $f \in K^\times$，取一个非零导子 $\delta \in \mathrm{Der}(\mathcal{O})$ 以及一个非零 $g \in \mathcal{O}$，使得$g\,\delta(f)/f \in \mathcal{O}$；则 $L = g\,\delta - g\,\delta(f)/f$ 是一个湮灭 f 的一阶算子。无论哪种情况，$\text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f)$ 根据引理 2.4(*a*)都是闭的，且不含非零的零阶算子；因此，由引理 2.4(*b*)，$\text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f) = \mathrm{cl}(L)$。固定 $\lambda \in X$ 以及 λ 处的一个局部参数 t。我们可以 $\widehat{\ }$ 写成 $f = t^m u$，其中 $m = \mathrm{ord}_\lambda(f) \in \mathbb{Z}$，且 u 是 $\mathcal{O}_\lambda$ 中的可逆元。若 $L = a\,\partial + b\widehat{\ }$，其中 $a, b \in \mathcal{O}_\lambda$，则 $b = -af'/f$，因此在 $\mathcal{D}_\lambda$ 中

$$L = a\,t^{-1}\,(\theta - m - t\,c), \qquad c := u'/u \in \widehat{\mathcal{O}}_\lambda.$$

¯因此，L 的 λ-归一化为 $L = \theta - m - t\,c$（相差一个单位），其指标多项式为$q(s) = s - m$。由引理 3.2，$\bar{L}$ 在基 $\{1, t, \dots, t^j\}$下作用于 $\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{n}_\lambda^{j+1}$ 的矩阵是三角矩阵，对角元为 $-m$、$1-m$、……、$j-m$。若 $m < 0$，则该矩阵对所有 j均可逆，因此 L 在 λ 处的余型为空。若 $m \geq 0$，则该矩阵对 $j < m$ 可逆，而当 $j \geq m$时有一维核；因此 $J_\lambda(L) = \{m\}$。两种情况下，$n_\lambda(L) = \max\{m, 0\}$。最后一个公式现在由定理 3.2(*c*) 得出。□

因此，函数 f 如定理6.1 所述，当且仅当它在X上有一个零点时，才是强全纯的，且 $n(\text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f))$ 是 f 在 X 上的零点除子的次数。特别地，若 $f \in \mathcal{O}$ 定义了一个有限态射 $f\colon X \to \mathbb{A}^1$，则 $n(\text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f)) = \deg(f)$。

注。 假设 f 被一阶算子湮灭不能省略：一般来说，湮灭子 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}}(f$的 Calogero–Moser 指数不能由 f的零点确定。例如，函数 $\cos x$ 在 $\mathbb{C}$中有无穷多个零点，但 $\mathrm{Ann}(\cos x) = A_1(\partial^2 + 1)$ 是一个循环理想，因此 $n(\mathrm{Ann}(\cos x)) = 0$（见下文例6.8(2)）。类似地，对于 $f = (e^x - 1)/x$，Ann(f中的最小阶算子为

$$L = \partial\,(\partial - 1)\,x = x\,\partial^2 + (2 - x)\,\partial - 1.$$

它在原点处的归一化为 $xL = \theta_0(\theta_0 + 1) - x(\theta_0 + 1)$，指标多项式为$s(s+1)$；因此，根据引理 6.1，$L$ 在 0 处的余型为 $\{0\}$，且 L 没有奇点。因此 $n(L) = 0$，且 $\mathrm{Ann}(f) = A_1 L$ 是循环的，尽管 f 有无穷多个零点。定理 6.1 对高阶算子的正确推广涉及解的基的朗斯基行列式（见下文推论 6.1）：例如，$\mathrm{Wr}(\cos x, \sin x) = 1$ 没有零点。

例 6.7。令 $X = \mathbb{A}^1$。

（1）如果 $f = p/q$ 是一个有理函数，且 p，$q \in \mathbb{C}[x]$ 互素，那么 $n(\text{湮灭子}(f)) = \deg(p)$。特别地，对于任意多项式 p，都有 $n(\text{湮灭子}(p)) = \deg(p)$；而对于任意 q，湮灭子$(1/q)$ 都是一个循环理想：明确地说，湮灭子$(1/q) = A_1\,h^{-1}\partial\,q$，其中 h 是 q 与 q' 的最大公因式（特别地，当且仅当 q 具有单根时，湮灭子$(1/q) = A_1\,\partial\,q$）。

（2）如果 $f = p\,e^{q}$ 是一个拟多项式，且 p，$q \in \mathbb{C}[x]$，那么 n（湮灭子(f)）$= \deg(p)$。这也可由以下事实推出：湮灭子$(p\,e^{q})$ 是湮灭子(p) 在自同构 $e^{\operatorname{ad} q}$ 下的像A_1（见第 2.6 节）。

(3) 定理6.1 中的论证适用于任何被一阶算子湮灭的（多值）函数。例如，湮灭 $L = x\partial - \alpha$ 的算子 x^{α} 在 $s - \alpha$ 原点处的指标多项式为；因此，若 $\alpha \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则 $n(L) = 0$ 且 $\mathrm{cl}(L) = A_1(x\partial - \alpha)$ 是循环的。

6.3. **表观奇点与朗斯基行列式**。定理6.1 可推广为以下关于高阶算子的结论。

命题 6.1. 设 $L \in \mathcal{D}$ 是一个 $k \geq 1$ 阶算子，且 $\lambda \in X$。假设该方程 $L(u) = 0$ 在 $\mathcal{O}_\lambda$ 中有 k 个线性无关解。取解空间的一组基 $u_1, \ldots, u_k$，使得 $\rho_i := \text{阶}_\lambda(u_i)$ 两两不同。则 $J_\lambda(L) = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$，并且

$$n_\lambda(L) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i - \binom{k}{2} = \operatorname{ord}_\lambda \operatorname{Wr}(u_1, \ldots, u_k),$$

其中，朗斯基行列式是相对于导子 ∂_t 取的（它在 λ 处的阶不依赖于局部参数的选取）。

证明。令 L 为 L的 λ-归一化，并令 q 为其指标多项式。若 $u = c\,t^{\rho} + \ldots$ 且 $c \neq 0$，则由引理 3.2，$L(u) = c\,q(\rho)\ t^{\rho} + \ldots$；因此，对所有 i，$q(\rho_i) = 0$。由于 $\deg q \leq k$，数 ρ_1、……、ρ_k 都是 q的根。另一方面，由引理 3.3，余型$\sim J_\lambda(L)$ 是 q 的根集的一个子集，其中包含 $d_\lambda = \dim \text{核}(L; \mathcal{O}_\lambda) = k$ 个元素。因此 $J_\lambda(L) = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$。第二个等式由引理 5.2 得出。□

满足命题 $\lambda \in \Lambda(L$的假设的点称为 6.1 的一个 表观奇点 。对于 L，用经典术语来说，命题 6.1 指出，在表观奇点处，L 的余型是 L的局部指数集合，而局部全纯性指标衡量这些指数相对于一般值 0，1，……，$k - 1$的偏离程度。

推论 6.1。设 $f_1, \ldots, f_k$ 是 X 上的线性无关全纯函数，使得理想 $I = \text{湮灭子}_{\mathcal{D}}(f_1, \ldots, f_k)$ 包含一个阶为 k的算子。那么

$$n(I) = \sum_{\lambda \in X} \operatorname{ord}_\lambda \operatorname{Wr}(f_1, \ldots, f_k),$$

也就是说，$n(I)$ 等于 $f_1, \ldots, f_k$ 在 X 上的朗斯基行列式的零点数（按重数计）。对于 $X = \mathbb{A}^1$，若 $L = a_k\partial^k + a_{k-1}\partial^{k-1} + \ldots \in I$ 是一个阶为 k的算子，则 $n(I) = -\operatorname{res}_\infty(a_{k-1}/a_k)$；特别地，若 $f_1, \ldots, f_k$ 是多项式，则 $n(I) = \deg \operatorname{Wr}(f_1, \ldots, f_k)$。

证明。由于 f_1、……、f_k 线性无关，I 不包含阶小于 k 的非零算子；因此，对于任意阶为 k 的 $L \in I$，有 $I = \mathrm{cl}(L)$（引理 2.4），并且根据定理 3.2，$n(I) = n(L)$。在每个点 $\lambda \in X$ 处，f_1、……、f_k 的泰勒展开构成 $L(u) = 0$ 在 $\mathcal{O}_\lambda$ 中的解的基。将此基替换为具有不同阶的基不会改变朗斯基行列式的阶，由命题 6.1 可得第一个公式。对于 $X = \mathbb{A}^1$，阿贝尔公式 $\mathrm{Wr}' = -(a_{k-1}/a_k)\,\mathrm{Wr}$ 表明，整函数 $\mathrm{Wr} = \mathrm{Wr}(f_1$、……、$f_k)$ 的零点数等于有理函数 $-a_{k-1}/a_k$ 的留数之和，即 $-\mathrm{res}_\infty(a_{k-1}/a_k)$。□

注。推论6.1 的第二个公式可视为经典福克斯关系的推论：若 λ 是算子 $\partial^k + p_1(x)\,\partial^{k-1} + \ldots + p_k(x)$ 的正则奇点，

其局部指数为 $\rho_1(\lambda)$……， $\rho_k(\lambda)$ ，则 $\sum_i \rho_i(\lambda) = \binom{k}{2}$ –在$x=\lambda$ $p_1(x)$ 处的留数。将此公式与命题 2.4进行比较颇有启发：在这两种情况下，卡洛杰罗–莫泽指数都表现为朗斯基行列式对数导数在无穷远处留数的（负值）。

例6.8。设 $X = \mathbb{A}^1$。

(1) 设 $0 \le k_1 < \ldots < k_s$ 为整数。则 $L = (x\partial - k_1)\cdots(x\partial - k_s)$ 是 $I = \mathrm{Ann}(x^{k_1}, \ldots, x^{k_s})$ 中阶最小的算子；它在 0 处规范化，并且 $V_0(L)$ =张成$\{\partial^{k_1}, \ldots, \partial^{k_s}\}$。因此 $n(I) = \sum_i k_i - \binom{s}{2}$。例如，$\mathrm{Ann}(x^2, x^4) = A_1\partial^5 + A_1(x\partial - 2)(x\partial - 4) + A_1(x\partial^4 - \partial^3)$ 的 Calogero–Moser 指标为 5。更一般地，若 f_1, …, f_s 是次数两两不同的多项式，则根据推论 6.1 和引理 5.2， $n(\mathrm{Ann}(f_1, \ldots, f_s)) = \sum_i \deg(f_i) - \binom{s}{2}$。

(2) 令 $f = \sum_{i=1}^k c_i\, e^{a_i x}$，其中 $a_i \in \mathbb{C}$ 和 $c_i \neq 0$ 互异。于是， $L = (\partial - a_1)\cdots(\partial - a_k)$ 是湮灭 f 的最小阶算子。由于 L 具有常数首项系数，$\Lambda(L) = \varnothing$，且 $\mathrm{Ann}(f) = A_1 L$ 是循环的。因此，指数函数的和（例如 cos x）是全纯的，但不是强全纯的。当 f 的一个最小阶湮灭子是首一的，即具有非零常数首项系数时，同样的结论也成立（例如满足 $f'' - xf = 0$ 的经典艾里函数 $f = \mathrm{Ai}(x)$）。

(3) 令 $f = x + xe^x$。$\mathrm{Ann}(f)$ 中的最小阶算子是 $L = x^2\partial^2 - (x^2 + 2x)\partial + (x + 2)$，其解空间由 x 和 xe^x张成。由于 $\mathrm{Wr}(x, xe^x) = x^2 e^x$，推论 6.1给出 $n(\mathrm{Ann}(f)) = 2$。

(4) Calogero–Moser 指数不具有可加性。例如，设 $f = e^p + q$满足 $p,\ q \in \mathbb{C}[x]$非恒定，且 $h := q' - p'q$。则 $L = (h\partial - h')(\partial - p')$ 是湮灭子 f 中的最小阶算子，其解为 e^p和 q，且朗斯基行列式$(e^p,\ q) = h\, e^p$。因此， $n($ 湮灭子 $(f)) = \deg(h) = \deg(p) + \deg(q) - 1$，而 $n($ 湮灭子 $(e^p)) = 0$，且 $n($ 湮灭子 $(q)) = \deg(q)$。

当 L 的奇点不是表观奇点时，余型必须直接计算，如第 6.1 节所示。下面的例子是对 [24, 例 4。5] 的修正版。

例 6.9。 考虑高斯超几何算子 $L = x(1-x)\partial^2 + (c - (a+b+1)x)\partial - ab$，其中 $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$。它的奇点包含于 $\{0, 1\}$。在 $\lambda = 0$ 处， L 的归一化为

$$xL = \theta_0\,(\theta_0 + c - 1) - x\,(\theta_0 + a)(\theta_0 + b),$$

其指标多项式为 $q_0(s) = s(s + c - 1)$。由引理 6.1， $\partial^j(xL) \equiv q_0(j)\,\partial^j - j\,(j - 1 + a)(j - 1 + b)\,\partial^{j-1}$。由此可知，0 总属于 L 在 0 处的余型，而第二个根 $m_0 := 1 - c$属于 q_0的余型，当且仅当 m_0是正整数且$\prod_{j=0}^{m_0-1}(j + a)(j + b) = 0$。因此

$$n_0(L) = \begin{cases} m_0 - 1 & \text{if } m_0 \in \{2, 3, \ldots\} \text{ and } \{a, b\} \cap \{0, -1, \ldots, 1 - m_0\} \neq \varnothing, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

同理，在 $\lambda = 1$处，我们有 $-(x-1)L = \theta_1(\theta_1 + a + b - c) + (x-1)(\theta_1 + a)(\theta_1 + b)$；指标多项式为 $s(s - m_1)$，其中 $m_1 := c - a - b$，同样的论证可得

$$n_1(L) = \begin{cases} m_1 - 1 & \text{if } m_1 \in \{2, 3, \ldots\} \text{ and } \{a, b\} \cap \{0, -1, \ldots, 1 - m_1\} \neq \varnothing, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此， $n(L) = n_0(L) + n_1(L)$，其中 $n_0(L)$ 和 $n_1(L)$ 由上述公式结合 $m_0 = 1 - c$ and $m_1 = c - a - b$ 计算得出。这回答了引言中关于超几何级数 $f = {}_2F_1(a, b, c;\ x)$ 的 $n(\mathrm{Ann}(f))$ 的问题，前提是高斯超几何算子 L 是 f 的最小阶湮灭算子。在共振情形下，答案可能不同。举一个具体例子，取 $f = {}_2F_1(-1, 1, 3;\ x) = 1 - x/3$，此时根据定理 6.1，$n(\mathrm{Ann}(f)) = 1$，而 $n(L) = n_0(L) + n_1(L) = 0 + 2 = 2$。

6.4. **非闭理想**。下一个例子说明推论5.1。

例 6.10. 令 $I := A_1\,x^{n+1} + A_1(x\partial + n + 1)$，$n \geq 1$。这是 $\mathrm{Ann}(x^n)$ 在傅里叶自同构 $x \mapsto \partial$，$\partial \mapsto -x$ 下的像；因此 $n(I) = n$（见第 2.6 节）。I 中的最小阶算子是 $L = x^{n+1}$，所以 $\mathrm{cl}(L) = A_1$，并且我们有一列左理想 $A_1x^{n+1} \subset I \subset A_1$，其首项和末项都是循环的。由于 $\partial^j x^{n+1} \in xA_1$ 当且仅当 $j \leq n$，我们有 $V_0(L) = \mathrm{span}\{1, \partial, \ldots, \partial^n\}$，且 $\nu(V_0(L)) = 0$，正如预期。另一方面，对于 $1 \leq j \leq n$，

$$\partial^j x^{n+1} = x^{n+1-j} \prod_{i=n+2-j}^{n+1} (x\partial + i) \in x\,A_1\,(x\partial + n + 1) \subseteq xI,$$

当 $x^{n+1} \notin xI$时，由于 $x^n \notin I$。因此 $V_0(I;\ L) =$张成$\{\partial, \partial^2, \ldots, \partial^n\}$，推论 5.1 给出$n(I) = \sum_{j=1}^{n} j - \binom{n}{2} = n$。因此，三个理想 $A_1L \subset I \subset \mathrm{cl}(L$分别对应于子空间$0 \subset V_0(I;L) \subset V_0(L)$，其指标分别为 0、$n$ 和 0。

6.5. **其他曲线**。

6.5.1. 开子集。全纯性指数具有局部性质：若 $U \subseteq X$ 是一个仿射开子集，并且将 $L \in \mathcal{D}(X)$ 视为 $\mathcal{D}(U)$ 的一个元素，则 $n(L|_U) = \sum_{\lambda \in U} n_\lambda(L)$。例如，设 $X = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$，于是 $\mathcal{D}(X) = \mathbb{C}[x, x^{-1}][\partial]$。那么 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}(X)}(x^n) = \mathcal{D}(X)\,(\partial - n/x)$ 是循环的，且 $n = 0$；而 $n(\mathrm{Ann}_{A_1}(x^n)) = n$：去掉 $x\partial - n$ 的唯一奇点会使指标消失。类似地，根据定理 6.1，有理函数 f 视为 X 中零点补集上的函数时，绝不会是强全纯的。

注。全纯性指数的局部性质表明，对于不一定是仿射的曲线，它也应当具有研究价值。事实上，由定义立即可知，对于任意 $h \in K^\times$，$n_\lambda(hL) = n_\lambda(L)$；因此，对于全纯函数 f，数值 $n_\lambda(f) :=$$n_\lambda(L)$ 是良定义的，其中 L 是湮灭 f 的最小阶算子；它在任意光滑曲线 Y 的每一点 λ 处都有定义，只要 f 在该曲线上有定义，并且我们可以令 $n_Y(f) := \sum_{\lambda \in Y} n_\lambda(f)$。当 Y 为仿射时，根据定理 3.2，$n_Y(f)$ 是 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}(Y)}(f)$ 的卡洛杰罗–莫泽指数。当 Y 为射影时，Y 上的整体微分算子环过小，本文所采用的理想分类并不适用；然而，不变量 $n_Y(f)$ 仍然有意义。例如，函数 x^{-n} $(n \geq 1)$ 在点 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 处有一个阶为 n 的零点，因此 $n_{\mathbb{P}^1}(x^{-n}) = n$，而 $n_{\mathbb{A}^1}(x^{-n}) = 0$。更一般地，定理 6.1 的证明表明，对于光滑射影曲线 Y 上的任意非常数有理函数 f，都有 $n_Y(f) = \deg(f)$。将这些不变量与 [1] 中给出的射影曲线上的无挠 $\mathcal{D}$- 模的分类联系起来，将会很有意义。

6.5.2. 平面曲线。设 $X \subset \mathbb{A}^2$ 是一条由方程 $P(x, y) =$0 定义的光滑平面曲线，因此 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[x, y]/(P)$。在这种情况下，环 $\mathcal{D}(X)$ 有一个简单的描述（参见 [3,第 6.2 节.3]）。

引理 6.2。$\mathcal{O}$-模 $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ 是秩为一的自由模，由导子 ∂_θ 生成，该导子由 $\partial_\theta(x) = P_y$, $\partial_\theta(y) = -P_x$ 定义，其中 P_x 和 P_y 是 P的偏导数。因此，

$$\mathcal{D}(X) \cong \mathcal{O}\langle\partial_\theta\rangle \big/ \big([\partial_\theta, x] = P_y,\ [\partial_\theta, y] = -P_x\big).$$

证明。导子 δ 由 $\mathcal{O}$ 的有序对 $(u,\ v) = (\delta(x)\ \delta(y)) \in \mathcal{O}^2$确定，并满足关系 $uP_x + vP_y = 0$ in $\mathcal{O}$。由于 X 光滑，函数 P_x 和 P_y 在 X上没有公共零点；因此，对某个 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{O}$，有 $\alpha P_x + \beta P_y = 1$。令 $h := \beta u - \alpha v$。那么$u = u\,(\alpha P_x + \beta P_y) = -\alpha v P_y + \beta u P_y = h\,P_y$，类似地 $v = -h\,P_x$。因此 $\delta = h\,\partial_\theta$。第二个结论由以下事实得出：$\mathcal{D}(X)$由 $\mathcal{O}$ 和 $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$生成。□

例 6.11。设 E 为仿射椭圆曲线 $y^2 = x^3 + x$。根据引理 6.2, $\mathcal{D}(E)$由 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(E)$以及满足 $\partial_\theta(x) = 2y$ 和 $\partial_\theta(y) = 3x^2 + 1$的导子 ∂_θ 生成。考虑函数 $x \in \mathcal{O}$。它定义了一个次数为 2 的有限映射 $E \to \mathbb{A}^1$；它在 E上的唯一零点是点 $o = (0, 0)$，其中 y 是局部参数，且 x 的阶为 2。根据定理 6.1,

$$n(\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}(E)}(x)) = 2.$$

让我们直接验证这一点，并求出相应的理想。湮灭 x 的最小阶算子是 $L = x\,\partial_\theta - 2y$，其中 $\Lambda(L) = \{o\}$。由于 $\partial_\theta(y)$ 在 o 处不为零， ∂_θ^j 、 $j \geq 0$ 的等价类构成 $\Delta_o = \mathcal{D}/\mathfrak{m}_o\mathcal{D}$ 的一组基。直接计算可得

$$\partial_\theta L = x\,\partial_\theta^2 - 6x^2 - 2, \qquad \partial_\theta^2 L = x\,\partial_\theta^3 + 2y\,\partial_\theta^2 - (6x^2 + 2)\,\partial_\theta - 24xy,$$
$$\partial_\theta^3 L = x\,\partial_\theta^4 + 4y\,\partial_\theta^3 - 48xy\,\partial_\theta - 120x^3 - 72x.$$

因此， $\partial_\theta L \equiv -2$、 $\partial_\theta^2 L \equiv -2\,\partial_\theta$ 和 $L \equiv \partial_\theta^3 L \equiv 0$ 模 $\mathfrak{m}_o\mathcal{D}$，所以 1 和 ∂_θ^3 属于 $V_o(L)$。事实上，

$$V_o(L) = \mathrm{span}\{1, \partial_\theta^3\}.$$

确实， $L = y\,L$ 在 $\mathcal{O}_o$ 的一个单位因子意义下，其中 L 是 L 在 o 处的归一化，并且根据定理 6.1， $J_o(L) = \{2\}$；因此，根据推论 3.1(b)， $\Sigma(V_o(L)) = \{0, 3\}$ 。公式 (3.7) 给出 $n_o(L) = 0 + 3 - 1 = 2$，正如预期。接下来， $\mathfrak{m}_o^{-1} = \mathcal{O} + \mathcal{O}(y/x)$，定理 4.1 得出

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}(E)}(x) = \mathrm{cl}(L) = \mathcal{D}L + \mathcal{D}\,\tfrac{y}{x}L + \mathcal{D}\,\partial_\theta^3 L + \mathcal{D}\,\tfrac{y}{x}\,\partial_\theta^3 L,$$

其中

$$\tfrac{y}{x}L = y\,\partial_\theta - 2(x^2 + 1), \qquad \tfrac{y}{x}\,\partial_\theta^3 L = y\,\partial_\theta^4 + 4(x^2 + 1)\,\partial_\theta^3 - 48y^2\,\partial_\theta - 120x^2 y - 72y.$$

这个理想包含三阶算子 $\partial_\theta^3 - 6x\,\partial_\theta - 12y$，它等于 $-\frac{1}{3}\big[\partial_\theta^3\,\frac{y}{x}L - \frac{y}{x}\,\partial_\theta^3 L - 3x\,\partial_\theta^2 L\big] + 2y\,\partial_\theta L + 2x^2 L$。由此可知，$\mathrm{gr}\,\mathrm{Ann}(x)$ 包含 $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}(E) = \mathcal{O}[\xi]$ 的理想 $(x\xi, y\xi, \xi^3) = \mathcal{O}[\xi]$，该理想在其自反包 $\xi\,\mathcal{O}[\xi]$ 中的余维为 2；根据定理 2.3，这证实了 $n(\mathrm{Ann}(x)) \leq 2$。最后，根据推论 4.1， $\mathrm{Ann}^{\mathcal{D}(E)}(x) = \mathcal{D}(W, \mathcal{O}) \cdot L$，其中

$$W = \{f \in \mathcal{O}(E) : f(o) = 0,\ (\partial_\theta^3 f)(o) = 0\}.$$

致谢。我们感谢 O. Chalykh 和 P. Etingof 富有启发性的讨论、许多有趣的问题以及批判性意见。第一作者在 2024 年春季作为研究教授参加“非交换代数几何”项目、访问西蒙斯·劳弗数学科学研究所（前身为 MSRI）期间，开展了部分本研究工作。他非常感谢该研究所的热情接待，以及其通过美国国家科学基金会资助项目 DMS-1928930 提供的经费支持。

Appendix 附录 A. Canonical stairs and the local index formula

在本附录中，我们给出命题 5.1 的另一种证明，从而也给出定理 5.1 的另一种证明。与第 5.2节给出的证明不同，这种证明纯属代数方法，不涉及根据阿代尔格拉斯曼流形对 Weyl 代数的理想进行分类。它基于 Briaņcon 和 Maisonobe [11] 引入的理想的规范阶梯这一概念（另见 [21]）。

A.1. **胖理想的阶梯**。与第 5.1 节一样，记 $\mathcal{D} = \mathbb{C}[[t]][\partial]$ 为系数取自 $\mathbb{C}[[t]]$的微分算子环，并赋予该环阶滤过 $\{\mathcal{D}_{\le k}\}$，使得 $\operatorname{gr}\mathcal{D} \cong \mathbb{C}[[t]][\xi]$。设 N 是 $\mathcal{D}$ 的一个右理想，且按如下意义为胖的：$N \cap \mathbb{C}[[t]] \neq 0$。对于每个 $k \ge 0$，记

$$\mathfrak{I}_k(N) := \{a \in \mathbb{C}[[t]] \,:\, a\,\partial^k + (\text{terms of order} < k) \in N\}$$

N 中阶为 $\le k$的元素的首项系数集合。这些是$\mathbb{C}[[t]]$ 的非零理想，满足

$$\mathfrak{I}_0(N) \subseteq \mathfrak{I}_1(N) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{I}_k(N) \subseteq \mathfrak{I}_{k+1}(N) \subseteq \ldots$$

由于 $\mathbb{C}[[t]]$的每个非零理想都由 t的幂生成，因此对于唯一的整数 $m_k \ge 0$，有 $\mathfrak{I}_k(N) = (t^{m_k})$，并且

$$m_0 \ge m_1 \ge m_2 \ge \ldots \ge 0.$$

令 q 为 t 使得对所有 $k \ge q$都有 $m_k = m_q$ 的最小整数。按照 [11], , 有限个 s et

$$\operatorname{Stairs}(N) := \{(m_0, 0), (m_1, 1), \ldots, (m_q, q)\}$$

称为阶梯 N （见图1）。显然，该集合由分拆（m_0， m_1，……， m_q）确定，我们也将其称为阶梯。根据构造，

$$\operatorname{gr} N = \bigoplus_{k\ge 0} t^{m_k}\,\mathbb{C}[[t]]\,\xi^k \;\subseteq\; \mathbb{C}[[t]][\xi], \tag{A.1}$$

这表明 gr N的自反包是由 t^{m_q}生成的主理想，并且

$$\dim_{\mathbb{C}}\big[\,(\operatorname{gr} N)^{\vee\vee}/\operatorname{gr} N\,\big] = \sum_{k=0}^{q-1}(m_k - m_q), \qquad \dim_{\mathbb{C}}\big[\,\widehat{\mathcal{D}}_{\le k}/(N \cap \widehat{\mathcal{D}}_{\le k})\,\big] = \sum_{j=0}^{k} m_j. \tag{A.2}$$

在 (A.2) 中，第一个数是“阶梯下方方格的数量”。如果 M 是 $\mathcal{D}(X)$ 的一个胖右理想，并且 $\lambda \in X$，那么根据 (2.12)，局部Calogero–Moser指标 $n_\lambda(M)$ 由将 (A.2) 的第一个公式应用于 $N = M_\lambda$得到。

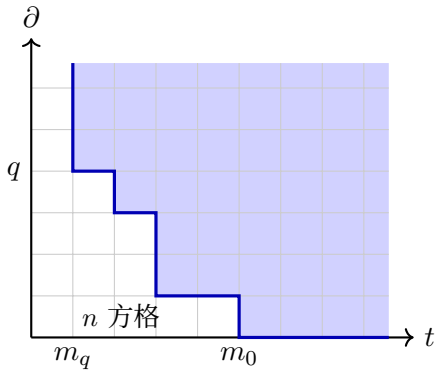

FIGURE 1. 胖理想的阶梯：阴影区域表示 gr N，而直线 $t = m_q$ 右侧阶梯下方的方格数就是局部指标。

A.2. **湮灭子的阶梯**。设 C_0 是 $\mathbb{C}[\partial] \cong \frown \mathcal{D}/t\,\mathcal{D}$ 的一个有限维子空间，其次数集为 $S = \Sigma(C_0) = \{s_1 < \ldots < s_g\}$，并设 $N := \mathrm{Ann}\widehat{\mathcal{D}}(C_0)$。回忆一下，$\frown N$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个胖右理想，而 $n(C_0)$ 由 (5.1定义。下面的定理将明确计算这个理想的阶梯。

定理 A.1. 令 $m_0 \geq m_1 \geq \ldots$ 为理想 $N =$ 湮灭子$\widehat{\mathcal{D}}(C_0)$的阶梯。那么

$$m_k = \begin{cases} s_{g-k} + k + 1, & 0 \leq k < g, \\ g, & k \geq g. \end{cases} \tag{A.3}$$

特别地，我们有 $q \leq g$ 和 $m_q = g$。

^若 $g = 0$，则 $N = \mathcal{D}$ 且每个 $m_k = 0$，所以定理显然成立。因此我们可以假设 $g > 0$。在 C_0 中选取一组基 $\{F_1, \ldots, F_g\}$，其中每个 $F_i = \sum_j f_{ij}\,\partial^j$ 都是次数为 s_i的首一多项式。令 $f_{ij} = 0$ 表示 $j < 0$ 或 $j > s_i$。对于每个 $k \geq 0$，考虑线性映射

$$\Phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\leq k} \to T_k := \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{C}[\partial]_{\leq s_i + k}, \qquad P \mapsto (F_1 P, \ldots, F_g P) \pmod{t\,\widehat{\mathcal{D}}}.$$

^根据定义，核 $\Phi_k = N \cap \mathcal{D}_{\leq k}$；因此，由 (A.2)，

$$\mathrm{rk}\,\Phi_k = \sum_{j=0}^{k} m_j. \tag{A.4}$$

^ ^为了计算 Φ_k 的秩，我们需要对 $\mathcal{D}_{\leq k}$作一个方便的参数化。每个 $P \in \mathcal{D}_{\leq k}$都可以唯一地写成如下形式

$$P = \sum_{a \geq 0} \frac{t^a}{a!}\, P_a(\partial), \qquad P_a = \sum_{b=0}^{k} p_{a,b}\,\partial^b.$$

对于每个 $r \geq 0$，我们定义多项式

$$\pi_r(s) := \sum_a \binom{s}{a} p_{a,\,k-r+a} \in \mathbb{C}[s], \qquad \binom{s}{a} := \frac{[s]_a}{a!},$$

其中求和遍及所有满足 $\max\{0, r-k\} \leq a \leq r$ 的 a。由于多项式 $\binom{s}{a}$ 是^线性无关的，映射 $P \mapsto (\pi_r)_{r \geq 0}$ 是从 $\mathcal{D}_{\leq k}$ 到 $\prod_{r \geq 0} \Pi_r$ 的双射，其中

$$\Pi_r = \mathbb{C}[s]_{\leq r} \quad \text{for } r \leq k, \qquad \Pi_r = [s]_{r-k} \cdot \mathbb{C}[s]_{\leq k} \quad \text{for } r > k.$$

最后，令 $\vartheta := \partial\,\frac{d}{d\partial}$表示作用于 $\mathbb{C}[\partial]$ 上的欧拉算子，因此对于任意 $\pi \in \mathbb{C}[s]$，$\pi(\vartheta)\,\partial^j = \pi(j)\,\partial^j$。

^**引理 A.1.** 对于任意 $F \in \mathbb{C}[\partial]$ 和 $P \in \mathcal{D}_{\leq k}$，有

$$FP \equiv \sum_{r \geq 0} \partial^{k-r} \cdot [\pi_r(\vartheta) F](\partial) \pmod{t\,\widehat{\mathcal{D}}}.$$

证明。由于 $[F(\partial)\ t] = F'(\partial)$，我们有 $F(\partial)\ t^a \equiv F_{(a)}(\partial)$ 模 $t\,\widehat{\mathcal{D}}$。因此，若 $F = \sum_j f_j\,\partial^j$，则

$$FP \equiv \sum_{a \geq 0} \frac{1}{a!}\, F^{(a)}(\partial)\, P_a(\partial) = \sum_{a,b,j} \binom{j}{a} f_j\, p_{a,b}\,\partial^{j-a+b}.$$

令 $r := k-b+a$，我们可以将最后一个求和式改写为 $\sum_{r\ge 0}\sum_j f_j\,\pi_r(j)\,\partial^{j+k-r}$，这就是所需的公式。（注意，对于整数 $0\le j<r-k$，$\pi_r(j)=0$，因此不会出现 ∂ 的负次幂。）□

定理 A.1 的证明。设 $k\ge 0$。对于 $c\ge 0$，令 $T_k^{(c)}\subseteq T_k$ 为由 i 直和项中的元素 ∂^{s_i+k-c}、$i=1$、……、g（其中 $s_i+k-c\ge 0$）张成的子空间；因此 $T_k=\bigoplus_{c\ge 0}T(c)_k$，且对于 $c\le k$，$\dim T(c)_k = g$。根据引理 A.1，$\Phi_k(P)$ 在 $T_k^{(c)}$ 中的分量是坐标为

$$\gamma_{i,c}=\pi_c(s_i)+\sum_{r=0}^{c-1} f_{i,\,s_i-c+r}\;\pi_r(s_i-c+r). \tag{A.5}$$

因此，相对于分解 $\mathcal{D}_{\le k}\cong\prod_r \Pi_r$ 和 $T_k=\bigoplus_c T_{(c)k}$，Φ_k 是“分块三角”的，其对角块由求值映射 $\mathrm{ev}_c\colon \Pi_c\to T_k^{(c)}$，$\pi\mapsto(\pi(s_i))_i$ 给出。只有 $c\le s_g+k$ 对应的块会对目标产生贡献，而具有更大指标的输入块不会影响这些分量。

若 $c\le k$，则 ev_c 是次数为 $\le c$ 的多项式在 g 个不同点处的求值，因此 $\mathrm{rk}(\mathrm{ev}_c)=\min\{c+1,g\}$。若 $c>k$，令 $g_c:=|\{i:\ s_i\ge c-k\}|$。在这种情况下，$\mathrm{ev}_c$ 是多项式 $[s]_{c-k}\,\pi(s)$（$\deg\pi\le k$）在 g_c 个点 $s_i\ge c-k$处的求值，在这些点上$[s]_{c-k}$ 不为零。因此

$$\mathrm{rk}(\mathrm{ev}_c)=\min\{k+1,g_c\}\qquad (c>k).$$

令 $L:=s_g+k$，并令 M_k为 Φ_k在 $\bigoplus_{c=0}^{L}\Pi_c$上的限制。则 $\mathrm{rk}\ \Phi_k=\mathrm{rk}\,M_k$。由于 $\dim\Pi_c=\min\{c+1,k+1\}$非递减，且 $\dim\ T_{(c)k}$非递增，而 $\dim\ T_{(L)_k}=1$，整数

$$\ell:=\min\{c:0\le c\le L,\ \dim\Pi_c\ge\dim T_k^{(c)}\}$$

满足

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_c)=0\quad(c<\ell),\qquad \mathrm{Coker}(\mathrm{ev}_c)=0\quad(c\ge\ell).$$

将源和目标在 ℓ处分块，三角性给出

$$M_k=\begin{pmatrix}A & 0\\ B & D\end{pmatrix},\qquad \mathrm{Ker}\,A=0,\qquad \mathrm{Coker}\,D=0.$$

因此，核 $M_k=0\oplus$核 D，从而

$$\mathrm{rk}\,\Phi_k=\sum_{c<\ell}\dim\Pi_c+\sum_{c=\ell}^{L}\dim T_k^{(c)}=\sum_{c=0}^{L}\mathrm{rk}(\mathrm{ev}_c).$$

记 $G_h:=|\{i:\ s_i\ge h\}|$ 为 $h\ge 1$，并令 $R_k:=\mathrm{rk}\,\Phi_k$，其中 $R_{-1}:=0$。由前面的秩公式可得

$$R_k=\sum_{c=0}^{k}\min\{c+1,g\}+\sum_{h\ge 1}\min\{k+1,G_h\}.$$

由（A.4），

$$m_k=R_k-R_{k-1}\ =\ \min\{k+1,g\}+\sum_{h\ge 1}\bigl(\min\{k+1,G_h\}-\min\{k,G_h\}\bigr).$$

对于 $0 \le k < g$，当且仅当 $h \le s_{g-k}$ 时，我们有 $G_h \ge k+1$；对于 $k \ge g$，对于所有h，我们有 $G_h \le k$。因此

$$\sum_{h\ge 1}\big(\min\{k+1, G_h\} - \min\{k, G_h\}\big) = \begin{cases} \sum_{h=1}^{s_{g-k}} 1 = s_{g-k}, & 0 \le k < g, \\ 0, & k \ge g. \end{cases}$$

这证明了（A.3）。其余断言成立，这是因为序列 m_k 在 g 处对$k \ge g$稳定。□

注。 定理 A.1 特别表明，gr 湮灭子$\hat{\mathcal{D}}$（C_0）的自反包由 t^g 生成，其中 $g =$ 维数C_0，这与推论 4.2之后的注 2 一致。

现在记录定理 A.1 的两个推论，其中第二个是命题 5.1。令$W := C_0^{\perp} \subseteq \mathbb{C}[[t]]$ 为 C_0 在 $\mathbb{C}[[t]]$ 中的湮灭子（相对于引理 2.2 的配对）。我们赋予 W自然的阿迪克滤子 $W = F^0W \supset F^1W \supset \ldots$，其中 $F^rW := W \cap t^r\mathbb{C}[[t]]$ 对于 $r \ge 0$，并令 $W := \bigoplus_{r\ge 0} F^rW/F^{r+1}W$表示关联分次向量空间。根据引理 2.3（$b$）， W的间隙集为 S。由于每个 $F^rW/F^{r+1}W$都是一维空间 $t^r\mathbb{C}[[t]]/t^{r+1}\mathbb{C}[[t]]$的子空间，因此我们有

$$\dim_{\mathbb{C}}(F^rW/F^{r+1}W) = \begin{cases} 0, & r \in S, \\ 1, & r \notin S. \end{cases}$$

′的庞加莱级数因此由下式给出

$$P(\overline{W}, z) := \sum_{r\ge 0} \dim_{\mathbb{C}}(F^rW/F^{r+1}W)\, z^r = \frac{1}{1-z} - \sum_{s\in S} z^s \tag{A.6}$$

下一个 命题给出了该级数的一个显式公式，以 N的阶梯表示 .

命题 A.1. 采用上述记号，有

$$P(\overline{W}, z) = \sum_{j=0}^{q} \frac{z^{m_j - j}}{1-z} - \sum_{i=0}^{q-1} \frac{z^{m_i - i - 1}}{1-z}\,. \tag{A.7}$$

证明。 若 $g = 0$，则（A.7）两边均等于 $1/(1-z)$。设 $g > 0$ 并令$r := g - q$。若 $r > 0$，定理 A.1 给出 $s_r + q + 1 = m_q = g$，因此 $s_r = r - 1$。由于s_i 是严格递增的非负整数，我们有 $s_i = i - 1$ 当 $1 \le i \le r$时。对于 $r = 0$，这个初始区间为空。此外，（A.3）给出 $m_j - j = s_{g-j} + 1$ 当 $0 \le j < q$ 且$m_q - q = r$。因此，

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q} z^{m_j - j} - \sum_{j=0}^{q-1} z^{m_j - j - 1} &= z^r + (z-1)\sum_{i=r+1}^{g} z^{s_i} \\ &= 1 + (z-1)\left[\sum_{h=0}^{r-1} z^h + \sum_{i=r+1}^{g} z^{s_i}\right] \\ &= 1 - (1-z)\sum_{s\in S} z^s \\ &= (1-z)\,P(\overline{W}, z)\,, \end{aligned}$$

其中最后一个等号由（A.6）得出。这就得到了所需的公式（A.7）。 □

下面重新得到命题 5.1的结果。

推论 A.1。 对于任意次数集为 S、阶梯为 $m_0 \geq m_1 \geq \ldots \geq m_q$ 的 $C_0 \subset \mathbb{C}[\partial]$,

$$n(C_0) = \sum_{k=0}^{q-1}(m_k - m_q) = \sum_{s\in S} s - \binom{g}{2} = \nu(S)\,.$$

证明。 利用公式（A.6），我们计算得

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[z^{-g}(1-z)P(\overline{W},z)\right]_{z=1} \;=\; 2\Big[\sum_{s\in S} s - \binom{g}{2}\Big]$$

另一方面，（A.7）给出

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^{-g}(1-z)P(\overline{W},z)\right]_{z=1} &= \sum_{j=0}^{q}(m_j - m_q - j)(m_j - m_q - j - 1) - \\ &- \sum_{i=0}^{q-1}(m_i - m_q - i - 1)(m_i - m_q - i - 2) \\ &= \sum_{j=0}^{q}(m_j - m_q - j)^2 - \sum_{i=0}^{q-1}(m_i - m_q - i - 1)^2 \\ &= 2\sum_{i=0}^{q-1}(m_i - m_q)\,,\end{aligned}$$

其中第一步用到了等式 $m_q = g$（该等式也可通过计算 $\frac{d}{dz}[(1-z)P(W,z)]$ 在 $z=1$处而由（A.6）和（A.7）形式地推出）。现在，由于 $\sum_{i=0}^{q-1}(m_i - m_q) = n(C_0)$ 根据（A.2），我们得到所需的等式 $n(C_0) = \nu(S)$。□

例 A.1。 设 $C_0 = \mathbb{C}\,\partial^n$，其中 $n \geq 1$。则 $N = \{P \in \mathcal{D} :\ \partial^n P \in t\,\mathcal{D}\}$，且可得 $\mathrm{gr}\ N = (t^{n+1}) + t\,\xi\,\mathbb{C}[[t]][\xi]$，因此 $m_0 = n+1$，$m_k = 1$ 当 $k \geq 1$时，且 $q = 1$。公式（A.7）给出

$$P(\overline{W},z) = \frac{z^{n+1} + 1 - z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z} - z^n,$$

而阶梯下方的方格数为 $m_0 - m_1 = n$。

References

1. David Ben-Zvi 和 Thomas Nevins, *Perverse bundles and Calogero-Moser spaces*, 《Compos. Math.》**144** （2008 2474315 2 6, 1403 1428），第 – 期。MR。Yuri Berest 和 Oleg Chalykh, *Ideals of quantum Weyl algebras*, 未发表的笔记（2004）。3. ,

Ideals of rings of differential operators on algebraic curves (with an appendix by George Wilson), 《Journal of Pure and Applied Algebra》**216** （2012），第 7 期，1493–1527。4. Yuri Berest 和 Alex Kasman, *D-modules and Darboux transformations*, 《Letters in Mathematical Physics》**43** （1998），第 3 期，279–294。5. Yuri Berest、Ajay C Ramadoss 和 Xiang Tang, *The Picard group of a noncommutative algebraic torus*, 《Journal of Noncommutative Geometry》**7** （2013），第 2 期，335–356。6. Yuri Berest 和 George Wilson, *Automorphisms and ideals of the Weyl algebra*, 《Mathematische Annalen》**318** （2000），第 1 期，127–147。7. , *Ideal classes of the Weyl algebra and noncommutative projective geometry (with an appendix by Michel Van den Bergh)* **2002** 2002 26, 1347 1396 ，《International Mathematics Research Notices》（），第 – 期。

8. , *Differential isomorphism and equivalence of algebraic varieties*, 《拓扑、几何与量子场论：2002年牛津研讨会论文集（纪念 G. Segal）》（U. Tillmann 编），伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，2004年，第 98–126 页。9. , *Differential operators on an affine curve: ideal classes and Picard groups*, 《数学季刊》**62**（2011年），第 1 期，7–19。10. I. N. Bernˇste
ˇ *Modules over a ring of differential operators. An investigation of the fundamental solutions* in, , *of equations with constant coefficients* **5** 1971 2, 1 16
《Funkcional. Anal. i Priloˇzen.》（），第 – 期。MR 290097 11 . J. Brian¸con 和 P. Maisonobe, *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*, 《数学教学》（
2 **30** 1984 1 2, 7 38 743668 ）（），第 - – 期。MR。Winfried Bruns 和 H. Jurgen Herzog, 12
¨ *Cohen-Macaulay Rings*, 第 2 版，剑桥高等数学研究，剑桥大学出版社，1998年。13. R.C. Cannings 和 M.P. Holland, *Right ideals of rings of differential operators*, 《代数杂志》**167**（1994），第 1 期，116–141。14. S. C. Coutinho, *A primer of algebraic D-modules*, 伦敦数学会学生教材，剑桥大学出版社，1995年。15. Stavros Garoufalidis 和 Thang Lˆe, *The colored Jones function is q-holonomic*, 《几何与拓扑》**9**（2005），第 3 期，1253–1293。16. Isaac Goldberg, *Strong Holonomicity of Functions on Curves*, ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2026，博士论文—康奈尔大学。MR 17 5007826 *Algebraic geometry* 。Robin
Hartshorne, , 《数学研究生教材》，第 52 卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1977年 463157 18 。MR。Carlos Hermoso 和 Juan Gerardo Alc
´ *Nonzero constant Wronskians of polynomials and Laurent* ázar, , , *polynomials and geometric consequences* 2024 2410 18867
arXiv 电子印本（），arXiv: 。. 19. Friedrich Knop, *Graded cofinite rings of differential operators*, 《密歇根数学杂志》**54**（2006），第 1 期，3–24。20. Thang T. Q. Lˆe, *The colored Jones polynomial and the AJ conjecture*, 《三维量子拓扑讲义》，Panor. Synth
` 48, 2016, 33 90 3617632 eses，第 21
Soc. Math. France 卷，巴黎，第 – 页。MR。Philippe Maisonobe, *D-modules: an overview towards effectivity*, 《计算机代数与微分方程》（1992），伦敦数学会讲义丛书，第 193 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994年，第 21 1278056 22 55– 页。MR。J.C. McConnell 和 J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, 数学研究生进阶丛书，美国数学会，2001年。23. S. Paul Smith 和 J. Toby Stafford, *Differential operators on an affine curve*, 《伦敦数学会会刊》**56**（1988），第 3 期，229–259。24. Harrison Tsai, *Weyl closure of a linear differential operator*, 《符号计算杂志》**29**（2000），第 4 期，747–775。25. George Wilson, *Bispectral commutative ordinary differential operators*, 《纯粹与应用数学杂志》**442**（1993），177–204。26. , *Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian (with an appendix by I.G. Macdonald)* **133** 1998 1, 1 41
, 《数学创作》（），第 – 期。

Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY 14853-4201, USA*Email address*: berest@math.cornell.edu

Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY 14853-4201, USA
Email address: isg26@cornell.edu