曲率是切线距离函数的平面曲线：Karpenkov 的面积密度与角密度之间的关系

Esther Notik独立研究者，佩塔提克瓦，以色列 esthnt@gmail.com

arXiv:2611.29065v1 [math.MG] 21 Nov 2026

摘要

对于平面曲线和点 O，O. Karpenkov 引入了面积密度 A 和角密度 B，将它们作为 LLS 序列交替项的光滑对应物。这里，A 是从 O 到切线的有向距离；按照此处有向定义中弦的顺序，$A^2B = \kappa$，其中 κ 是有向曲率。因此，两种密度之间的关系规定了曲率是切线距离的函数。Karpenkov 提出，哪些曲线的 AB 或仅 B 为常数。方程 $AB = C$ 给出了平面曲线缩短中的收缩、静止和扩张轮廓曲线。对于非零常数B，选择定向使得 $B > 0$。具有正支撑函数的曲线具有周期支撑函数，或为中心圆。非圆闭曲线由其在 $(1/2, 1/\sqrt{3})$ 中的转向分数分类；中心圆是唯一的嵌入闭解。负支撑函数对应的光滑开曲线图，其两端趋近于从原点出发的射线。在正支撑函数的情形下，极倒易曲线是恒力轨道，而原曲线是该轨道经过旋转和缩放后的速度曲线。对于 $A^3B = C$，我们确定哪些端点延伸至无穷远、到达尖点，或螺旋进入原点。我们描述了正支撑函数族 $A^pB = C$的正则性和转向分数范围。最后，对于一般关系 $B = \Phi(A)$，极倒易曲线是中心力 $L^2/\Phi(1/r)$作用下的轨道；我们描述了所有具有 $AB < 0$ 的弧的端点，并证明转向分数为 m/n 的闭曲线恰有 $n(m-1)$ 个双重点。我们还描述了面积密度或角密度是弧长线性函数的曲线。

关键词。面积密度、角密度、LLS 序列、连分数、曲线缩短流、支撑函数、近拱点角、中心力、速端曲线、中心仿射曲率。**2020 年数学学科分类**。53A04,11J70, 53E10,70F05。

1 引言

O. Karpenkov [1, 2] 构造“无穷小连分数”时，将弧长参数化的 C^2 平面曲线 γ 与一个特殊点 O 关联起来，并定义了两个函数：面积密度 A 和角密度 B。具体而言，A是 O 到切线的有向距离，而 $B = \kappa/A^2$，其中 κ 是有向曲率（§2）。

Karpenkov 将面积密度 A 与开普勒第二定律 [1, 联系起来（命题 3.2]）。在满足 $A \neq 0$的弧上，设一点以速度 v沿曲线运动。从 O 到该动点的线段以速率 $\frac{1}{2}|A|v$扫过面积。因此，若选取 v 与 $1/|A|$ 成正比，则相等时间内扫过的面积相等。恒等式 $A^2B = \kappa$ （符号约定已在 §2 中固定）将这两种密度与欧几里得曲率联系起来。

[1, §3] 中的例子表明，直线具有常数 A，中心椭圆具有常数 A/B，而以 O 为圆心的对数螺线具有常数 A^3B。根据曲率恒等式，任意圆上的 A^2B 均为常数。

在 [2, 注15中，23] Karpenkov指出，研究由密度之间的关系所定义的曲线是很自然的，并提出了这样的问题：当 AB或单独的 B 为常数时，会得到哪些曲线。这两个问题是本文的主要研究内容。

我们将这些关系视为关于曲线的微分方程。基本观察是，在 $A \neq 0$ 和实幂有定义的地方，单项式关系 $A^pB = C$ 等价于$\kappa = CA^{2-p}$。这将 [2] 的问题与若干经典主题联系起来，包括曲线缩短流的自相似解、凸曲线的支撑函数方程、幂律中心力的拱点角，以及常数中心仿射曲率。在第4节中，我们指出 $A\,ds$ 和$B\,ds$ 分别是中心仿射弧长和转向，因此这些密度是以欧氏长度为单位测量的经典中心仿射不变量。

本文所声称的新颖性是有限的。这些密度、曲率恒等式以及本文研究的问题均归功于 O. Karpenkov [1, 2]。常数中心仿射曲率、Abresch–Langer 收缩子、极倒易、速端曲线以及拱点角的单调性，都是经典内容。

本文的贡献包括：(i) 给出使曲率恒等式对带符号量成立的符号约定（命题 2.1）；(ii) 将 $AB =$const 识别为曲线缩短流的孤子方程（命题 5.1）；(iii) 对于非零常数 B，将问题化为恒力比内方程，并将其解释为极倒易曲线和恒力轨道的速端曲线，同时给出完整的闭合判据（定理 7.2 和 7.3，命题 7.4 和 7.5）；以及 (iv) 显式求出 $A^3B =$const 的局部解（命题 8.1）。我们还在第 5、6 和 8 节描述开曲线的端点，并在第 9 节给出一般正支撑函数对应的转向分数。第 10 节讨论一般关系 $B = \Phi(A)$：力定律（注 10.1）、具有 $AB < 0$ 的弧的端点（命题 10.2），以及闭曲线的双重点数目（命题 10.3）。此外，我们构造具有指定转向分数的关系（注 10.4），并描述面积密度关于弧长呈线性关系的曲线，以及角密度关于弧长呈线性关系的曲线（定理 10.5 和推论 10.6）。命题10.7给出一般关系的转向分数单调性的判定方法，其中包括在圆解处进行的显式判定；命题 10.8 则表明，对于光滑关系，在势阱的每个点分别施加的、关于有限阶导数的条件，都不等价于转向分数的导数处处为正（或处处为负）。

2 O. Karpenkov 的密度与曲率恒等式的符号

设 $\gamma(s)$ 是一条以欧几里得弧长为参数的 C^2 正则平面曲线，且 O 是原点。记 $T = \gamma'$ 为单位切向量，$N = JT$ 为单位法向量，其中 J 是旋转 $+\pi/2$，并记 $\kappa =$ det$(T,\ T')$ 为有向曲率，因此 $T' = \kappa N$ 且 $N' = -\kappa T$。全文中，det 表示由两个向量张成的平行四边形的有向面积。

密度的来源。设 $A_0A_1 \dots A_n$ 是一条折线，使得 O、A_k 和 A_{k+1} 永不共线。Karpenkov [1, §2.2] 相对于 O 为其赋予一个实数序列，即其 LLS 序列，其中两类元素交替出现。每条边 A_kA_{k+1} 贡献 det$(A_k,\ A_{k+1})$，即三角形 OA_kA_{k+1} 有向面积的两倍。每个顶点 A_k 贡献 det$(A_{k-1} - A_k,\ A_{k+1} - A_k)$ 除以两条相邻边的贡献；这衡量了从 O 看去，折线在 A_k 处转弯的锐利程度。对于格锥的帆，这些数

分别是边的整数长度和角度的整数正弦值，由它们构成的连分数就是锥的斜率 [1, 定理 1.2]。将折线替换为曲线，并将这些元素替换为单位长度密度，便得到以下定义。

定义（Karpenkov [1, 定义 3.1], [2, 定义 15.18]。 γ 相对于 O 在参数 s处的面积密度和角密度为

$$A(s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det\big(\gamma(s),\gamma(s+\varepsilon)\big)}{\varepsilon},\qquad B_K(s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det\big(\gamma(s-\varepsilon)-\gamma(s),\,\gamma(s+\varepsilon)-\gamma(s)\big)}{\varepsilon\,\det\big(\gamma(s-\varepsilon),\gamma(s)\big)\,\det\big(\gamma(s),\gamma(s+\varepsilon)\big)}.$$

因此，对于顶点为 $\gamma(k\varepsilon)$ 的折线，边元素为 $\varepsilon A+o(\varepsilon)$，而当 $A\neq 0$ 时，顶点元素为 $\varepsilon B_K+o(\varepsilon)$。在 [1] 中，行列式记作 $|v\times w|$，表示由 v 和 w 张成的平行四边形的有向面积；在 [2] 中则将其显式写出。在 B_K 的分子中，反向弦排在前面；命题 2.1 表明，这一顺序确定了曲率恒等式的符号。

由于 $\gamma(s+\varepsilon)=\gamma(s)+\varepsilon T(s)+o(\varepsilon)$，面积密度为

$$A(s)=\det(\gamma(s),T(s)).$$

我们还设

$$X(s)=\det(\gamma(s),N(s))=\langle\gamma(s),T(s)\rangle.$$

由于 $\det(a,b)=\langle Ja,b\rangle$ 与 J 是斜对称的，因此 $A=-\langle\gamma,N\rangle$。所以，$|A|$ 是从 O 到 $\gamma(s)$ 处切线的距离，而 $\frac{1}{2}|A|$ 是从 O 到 $\gamma(s)$ 的线段扫过面积的速率。对于正向局部凸弧，A 是相对于 O 的欧几里得支撑函数。曲线上该点可表示为 $\gamma=XT-AN$。求导得

$$A'=\kappa X,\qquad X'=1-\kappa A. \tag{2.1}$$

命题 2.1 (曲率恒等式的符号)。 在每个满足 $A\neq 0$ 极限 B_K 存在且 $A^2B_K=-\kappa$ 的点处，此恒等式不依赖于曲线的定向。

证明。 由泰勒公式，

$$\gamma(s\pm\varepsilon)-\gamma(s)=\pm\varepsilon T+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\kappa N+o(\varepsilon^2).$$

由于 $\det(T,N)=1$，分子等于

$$\det(-\varepsilon T,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\kappa N)+\det(\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\kappa N,\varepsilon T)+o(\varepsilon^3)=-\varepsilon^3\kappa+o(\varepsilon^3).$$

此外，

$$\det(\gamma(s-\varepsilon),\gamma(s))=\det(\gamma(s)-\varepsilon T+o(\varepsilon),\gamma(s))=\varepsilon A+o(\varepsilon),$$

同理，$\det(\gamma(s)\ \gamma(s+\varepsilon))=\varepsilon A+o(\varepsilon)$。因此，商等于

$$\frac{-\varepsilon^3\kappa+o(\varepsilon^3)}{\varepsilon^3A^2+o(\varepsilon^3)}\longrightarrow-\frac{\kappa}{A^2}.$$

如果定向反转，κ和 A变号，因此 $-\kappa/A^2$ 变号。由此，B_K 变号，而 $A^2B_K=-\kappa$ 保持不变。直接来看，分子中的两条弦互换，分母中的每个行列式都变号。

□

在 [1, 命题 3.3] 和 [2, 命题 15.20] 中，该恒等式表述为 $A^2B=\kappa$，其中 κ 是有向曲率。在 [1] 中，未指定 κ 的符号约定。在 [2] 中，证明使用了 $\kappa = x'y''-y'x''$，即标准约定 $\kappa=\det(\gamma',\gamma'')$。按照这一约定以及定义中的弦的顺序，命题 2.1 给出 $A^2B_K=-\kappa$。差异出现在 [2]证明的最后一步：对于弦 $v_\pm=\pm\varepsilon\gamma'+\frac{1}{2}\varepsilon^2_-\gamma''$，有 $\det(v_-,\ v_+)=-\varepsilon^3(x'y''-y'x'')$，带有一个负号。若将前向弦写在前面，或规定顺时针转动时曲率为正，则恒等式 $A^2B=\kappa$ 按原文所述成立。

例如， 以其圆心为中心的逆时针单位圆具有 $A=1$、$\kappa=1$ 和 $B_K=-1$。

[1, 2] 中选取的弦的顺序适用于连分数：沿着帆逆时针绕 O 行进时，方向会转为顺时针，因此 $\kappa<0$ 和 $B_K>0$，这与 LLS 序列中的正元素一致。

[1] 中的光滑例子给出了曲线沿逆时针方向行进时 B 的正值。这些值为 $|B_K|$。例如，对于沿逆时针方向行进的中心椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$，可得 $A/B_K=-a^2b^2$，这与 [1, 例 3.8]中 $|A/B|$ 的值 a^2b^2 一致。

约定。本文采用弦的顺序相反的角密度，

$$B:=-B_K,\qquad \text{so that}\qquad A^2B=\kappa. \tag{2.2}$$

以下所有陈述均指 B。若要将陈述转换为 [1, 2], 的密度 B_K，请将每个常数 C 替换为 $-C$。

改变曲线的定向会改变 A、B 和 κ的符号。由 (2.2) 可知，在$A\neq0$处，

$$B=\kappa/A^2,\qquad A^pB=C\iff\kappa=CA^{2-p}. \tag{2.3}$$

若弧上的 $A\neq0$，则称该弧为非退化 弧；也就是说，该弧的任何切线都不经过 O。本文始终将角密度限定在非退化弧上，此时 $B=\kappa/A^2$。

3 单项式层级 $A^pB=C$

p	关系	曲率方程	解释
0	$B=C$	$\kappa=CA^2$	常角密度（§§6–7）
1	$AB=C$	$\kappa=CA$	曲线缩短孤子（§5）
2	$A^2B=C$	$\kappa=C$	常曲率
3	$A^3B=C$	$\kappa A=C$	切角线性方程（§8）

情形 $p=2$ 本身就是曲率恒等式。情形 $p=0$ 和 $p=1$ 是 [2, 注 15.23]中提出的两个关系。情形 $p=3$ 包含对数螺线，但其解空间更大（§8）。

为完整起见，我们还讨论关系 $A=$常数 $\neq0$。根据 (2.1)，$A'=\kappa X$和 $X=\langle\gamma,\ T\rangle=\frac{1}{2}(|\gamma|^2)'$。

令 U 为连通非退化弧上满足 $\kappa\neq0$ 的开子集。在 U 上有 $X=0$，因此 $|\gamma|$ 局部为常数。于是，U 的每个连通分支都是以 O 为圆心、半径为 $|A|$ 的圆弧，并且 $|\kappa|=1/|A|$。由连续性可知，$|\kappa|=1/|A|\neq0$ 在 U 的闭包上成立，因此 U 也是闭集。

因此，要么 U 为空，且该弧是距 O为 $|A|$ 的直线线段；要么 U 是整个弧，且该弧是圆心为 O、半径为 $|A|$ 的圆的一段弧。

例3.1（常曲率与原点的选择）。 逆时针圆 $\gamma(t) = (d + R\cos\, t,\ R\sin\, t)$ 具有 $A = R + d\cos t$ 和 $\kappa = 1/R$。对于 $0 < d < R$，其面积密度会发生变化，而$A^2B = 1/R$ 处处成立。在 $d = R$ 处，支撑函数在 $t = \pi$处消失：该圆仍保持光滑，而角密度变得未定义。

4 比率 B/A 与中心二次曲线

比率 B/A 可作为一个基准。

在一段非退化弧上，设 σ 为中心仿射弧长，其定义为 $d\sigma/ds = A$，于是 $\det(\gamma,\ \gamma_\sigma) = 1$ 且 $\gamma_\sigma = T/A$。对 $\det(\gamma,\ \gamma_\sigma) = 1$ 求导，得到 $\det(\gamma,\ \gamma_{\sigma\sigma}) = 0$，因此对于函数 k，即中心仿射曲率，有 $\gamma_{\sigma\sigma} = -k\gamma$。由

$$\gamma_{\sigma\sigma} = A^{-1}(T/A)' = A^{-1}\big(\kappa N/A - A'T/A^2\big)$$

可得

$$k = \det(\gamma_\sigma, \gamma_{\sigma\sigma}) = \frac{\kappa}{A^3} = \frac{B}{A}.$$

因此， B/A为常数恰好意味着中心仿射曲率为常数，其分类是经典结果。参见 O. Mayer 和 A.Myller [3]。

作为中心仿射不变量的密度。上述计算给出了 Karpenkov密度与曲线相对于 O 的中心仿射几何之间的对应关系：

$$A\,ds = \det(\gamma, d\gamma) = d\sigma, \qquad B\,ds = \frac{B}{A}\,A\,ds = k\,d\sigma.$$

右侧的两个微分在行列式为 1 的任意线性映射下都保持不变。折线的 LLS 序列中的边元素和顶点元素也是如此，因为它们由行列式构成[1, 命题 2。3]；对于顶点为 $\gamma(j\varepsilon)$ 的折线，它们分别是 $\varepsilon A + o(\varepsilon)$，以及除去由 (2.2) 确定的符号外的 $\varepsilon B + o(\varepsilon)$。密度本身并不保持不变，因为它们是按单位欧氏弧长取值的。因此， A和 B 分别是中心仿射弧长和中心仿射转角 $k\,d\sigma$，二者均以欧氏长度为测度，而关系 $B = \Phi(A)$ 将这两种几何结合起来：用中心仿射术语表示，它写作 $k = \Phi(A)/A$ 其中 $A = d\sigma/ds$。Karpenkov 的构造为经典理论增添的是这些不变量的离散起源：折线的连分数中的元素在极限下分别变为 $d\sigma$ 和 $k\,d\sigma$。

注。近期 N. Kalinin、E. Lupercio 和 M. Shkolnikov [20]的研究中，出现了另一种从晶格数据过渡到光滑凸曲线仿射不变量的方法。他们定义了一个凸域的 $SL_2(\mathbb{Z})$-不变热带ζ函数，在二维情况下，它是关于 Farey对的狄利克雷级数。对于 C^3 严格凸域，该函数在 $s = 2/3$ 处有一个简单极点，其留数与等仿射周长成正比。在那里，这个光滑不变量是对所有晶格方向求和所得结果的留数，并且不依赖于圆心。而在这里，与 [1, 2], 一样，它是相对于固定点 O取行列式所得的逐点极限，且比值 B/A 就是中心仿射曲率。我们不知道有什么公式能够联系这两种构造。

命题 4.1. 设 γ 是一条曲率为常数 $B/A = c$ 的非退化弧。若 $c > 0$， γ 是以 O 为圆心的椭圆上的一段弧。若 $c < 0$， γ 是以 O 为圆心的双曲线的一支上的一段弧。若 $c = 0$， γ 是一条不经过 O 的直线上的一段弧。

证明。方程为 $\gamma_{\sigma\sigma}+c\gamma=0$。若 $c=\omega^2>0$，则 $\gamma=U\cos(\omega\sigma)+V\sin(\omega\sigma)$，且 $\det(\gamma,\gamma_\sigma)=\omega\det(U,V)=1$，因此 U 和 V 线性无关。其像是一个中心椭圆。若 $c=-\lambda^2<0$，则 $\gamma=U\cosh(\lambda\sigma)+V\sinh(\lambda\sigma)$，其中 $\lambda\det(U,V)=1$，它是中心双曲线的一支。若 $c=0$，则 $\gamma=U+\sigma V$，且 $\det(U,V)=1$，这是一条不经过 O 的直线。 □

特别地，[1, 例 3.8] 中的中心椭圆对应情形 $c>0$，而对于 $c\neq 0$，关系可写为 $A/B=1/c$。在逆时针定向下，椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 具有$c=1/(a^2b^2)$。

例 4.1（常数 B/A）。椭圆（$2\cos t$,$\sin t$）具有 $B/A=1/4$，并且光滑闭合。双曲线（$\cosh t,\sinh t$）具有 $B/A=-1$：它的两端趋近于直线 $y=\pm x$。在后一个参数化中，$\det(\gamma,\dot\gamma)=1$ 且 $\ddot\gamma=\gamma$，因此命题 4.1 中的中心仿射曲率为 -1。

例 4.2（关于 σ呈线性的中心仿射曲率：艾里曲线）。令 $B/A=c\sigma$，其中 $c\neq 0$为常数，因此 $\gamma_{\sigma\sigma}=-c\sigma\gamma$。取 $t=-c^{1/3}\sigma$ 后，这就是艾里方程 $\gamma_{tt}=t\gamma$，并且

$$\gamma=U\,\mathrm{Ai}(t)+V\,\mathrm{Bi}(t),\qquad -c^{1/3}\det(U,V)=\pi,$$

因为 Ai 和 Bi 的朗斯基行列式为 $1/\pi$，且 $\det(\gamma,\ \gamma_\sigma)=1$。对于所有 t，该曲线都是非退化的，并且恰好有一个拐点，位于 $t=0$。当 $t\to+\infty$ 时，$\mathrm{Ai}(t)\to 0$ 而 $\mathrm{Bi}(t)\to\infty$，因此这一端趋于无穷远，并逼近由 O 张成的射线 V。当 $t=-x\to-\infty$ 时，且 $\zeta=\frac{2}{3}x^{3/2}$[11, §9.7]，

$$\gamma=\pi^{-1/2}x^{-1/4}\big(U\sin(\zeta+\tfrac{\pi}{4})+V\cos(\zeta+\tfrac{\pi}{4})\big)+O(x^{-7/4}),$$

因此，这一端沿着不断收缩的椭圆无限次地绕 O 旋转，并趋近于 O。它的欧氏长度是无限的，因为 $|\gamma_t|$ 按 $x^{1/4}$ 的形式增长。相比之下，第 8 节中的对数螺线经过有限长度后到达O 。

5 关系 $AB=\mathrm{const}$ 与曲线缩短孤子

设 $AB=C$ 位于一条非退化弧上。由（2.3）可得，

$$\kappa=CA=-C\langle\gamma,N\rangle. \tag{5.1}$$

伸缩 $\gamma\mapsto\lambda\gamma$，$\lambda>0$ 将 κ 映射到 κ/λ，并将 A 映射到 λA，因此它把 C 替换为 C/λ^2。C 的符号是不变的。

曲线 γ_0 生成曲线缩短流的自相似解 $\gamma_t=\sqrt{1-2ct}\,\gamma_0$，当且仅当 $\kappa=-c\langle\gamma_0,\ N\rangle$，其中 $c>0$ 对应于收缩解，$c<0$ 对应于扩张解。在归一化条件 $c=1/2$下，这就是标准的收缩子方程 $\kappa=-\frac{1}{2}\langle\gamma,\ N\rangle$ [4, 5]。与（5.1）进行比较可得以下结论。

命题 5.1。非退化弧满足 $AB=C$，当且仅当它满足曲线缩短流的自相似方程，且 $c=C$。因此，$C>0$ 恰好给出所有自收缩子，$C<0$给出所有自扩张子，而 $C=0$ 给出所有不经过 O的直线。

对于 $C>0$，曲率不改变符号。对 (5.1) 关于 $C=1$ 求导，得到 $\kappa'=\kappa X$，因此 κ 若在某一点为零，则必恒等于零。取满足 $\kappa>0$ 的定向，并令$h(\theta)$表示法向角参数 θ下的支撑函数。在规范化条件 $C=1$ 下，有$h=A=\kappa$ 且 $1/\kappa=h+h''$，于是

$$h''+h=\frac{1}{h},\qquad \frac{1}{2}(h')^2+\frac{1}{2}h^2-\log h=E.$$

U. Abresch 和 J. Langer [4]对该方程的闭合解进行了分类。圆是唯一嵌入的闭合收缩解，其他闭合收缩解则是浸入曲线，其旋转数为 m/n，取遍区间 $(1/2,\ 1/\sqrt{2})$ 中的有理数，每个这样的有理数对应一个解。

孤子的分类是经典结果。这里的结果是将 [2] 的关系AB =const 与孤子方程联系起来。

例 5.1（收缩圆与静止直线）。初始半径为 R 的中心圆具有 $AB = R^{-2}$。在曲线缩短流下，其半径为$\sqrt{R^2 - 2t}$。当 $t \uparrow R^2/2$时，圆的曲率趋于无穷大，此时圆收缩至 O。对于定向直线 $\gamma(s) = (s,\ d)$，$d \neq 0$，我们有 $A = -d$ 和$B = 0$。该直线静止不动。

例 5.2（具有两条渐近射线的膨胀图像）。取 $C = -1$，并将轮廓曲线写为（x，$f(x)$），方向朝右。方程（5.1）变为

$$f'' = (1 + f'^2)(f - xf'), \qquad f(0) = 1/2, \quad f'(0) = 0.$$

由唯一性可知，该解为偶函数。令

$$g = f - xf' \qquad x \geq 0 \ \ g' = -x\sqrt{1 + f'^2}\, g \qquad 0 < g \leq 。对于 , ( )$$

$\frac{1}{2}e^{-x^2/2}$ $f'' = g$ $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}/2 < \pi/2$

, 因此 。由于 (arctan) ，切线角始终小于 。斜率保持有界，因此得到全局严格凸图像。其极限正斜率 m 存在；$f'' = O(e^{-x^2/2})$ 意味着 $x(m - f'(x)) \to 0$，从而 $f(x) - mx = g - x(m - f'(x)) \to 0$。由偶性可知，渐近射线为 $y = m|x|$。支撑函数 $A = -g/\sqrt{1 + f'^2}$ 在任何有限点都不会消失。对于 $t > -1/2$，该流将这一光滑轮廓曲线按 $\sqrt{1 + 2t}$ 进行膨胀。在反向极限下，两条渐近射线交于 O。

完整轮廓曲线与时间演化。对于（5.1）的每条非直线轮廓曲线，$A_s = \kappa\langle \gamma,\ T\rangle$和 $\kappa = CA$ 给出

$$|\kappa(s)| = K \exp\bigl(C|\gamma(s)|^2/2\bigr), \qquad K > 0.$$

特别地，非直线解没有拐点。对于 $C > 0$，极大轮廓曲线光滑且有界。非圆形轮廓由同一振荡的连续旋转组成；每次振荡所对应的转数比例为有理数时，其像是闭合的；为无理数时，则在一个环域中稠密。每条收缩轮廓曲线都按 $\sqrt{1 - 2Ct}$ 缩放，因此即使初始轮廓曲线光滑，曲率也会在消亡时趋于无穷。对于 $C < 0$，每条极大非直线轮廓曲线旋转后都是光滑的嵌入图像，两端渐近于从 O 发出的射线。曲率在无穷远处趋于零，尽管 $|B| = |C/A|$ 在那里趋于无穷。整体分类见 Halldorsson [10, 定理 5.1 和 6.1]。

6 常角密度 B =常数

假设 $B = C \neq 0$。定向反转会改变 B 的符号，因此选择满足 $C > 0$ 的定向。在每个非退化弧上，$\kappa = CA^2 > 0$。因此，该曲线是局部严格凸的，其法向角 θ 是一个正则参数。将 $e(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ 写作外单位法向量。有向支撑函数 $h = A$ 满足 $1/\kappa = h + h''$，因此

$$h'' + h = \frac{1}{Ch^2}.$$

此方程对 h 的任一符号均成立。我们首先考虑 $h > 0$；下面的引理 6.1 表明，这涵盖了每一条闭合非退化曲线。写作 $h = C^{-1/3}u$ 可得

$$u'' + u = u^{-2}, \qquad u > 0. \tag{6.1}$$

乘以 u' 可得守恒能量

$$\tfrac{1}{2}(u')^2 + \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{1}{u} = E, \qquad E \geq \tfrac{3}{2}. \tag{6.2}$$

对于非恒定正周期解，令 $P(E)$ 表示法向角的最小周期。

引理 6.1。设 γ 是一条闭合正则 C^2 曲线，其上 A 从不为零，并且假设 $B = C > 0$。则 γ 是局部严格凸的，且其有向支撑函数 $h = A$ 为正。

证明。我们有 $\kappa = CA^2 > 0$。由于 A 在连通曲线上连续且不为零，因此其符号恒定。在一次遍历过程中，切线角以及法向角增加 $2\pi m$，其中 $m \geq 1$ 为某个整数。取初始角作为积分下限 θ_0，并令 $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi m$。导数 h' 返回其初始值，因此

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} h\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h + h'')\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\kappa} = \mathrm{length}(\gamma) > 0.$$

因此在整条曲线上 $h = A > 0$。 □

命题 6.2（常角密度下的重建与正则性）。固定 $C > 0$。在分支 $h = A > 0$ 上，具有 $B = C$ 的曲线与外法向角 θ 下的 $u'' + u = u^{-2}$ 的正解局部对应，对应关系由 $h = C^{-1/3}u$ 和 $\gamma = he + h'e'$ 给出，其中 $e = (\cos\theta, \sin\theta)$。每个这样的极大解都可延拓到所有实数 θ。平衡点是半径为 $C^{-1/3}$ 的中心圆。在每个能量 $E > 3/2$ 下，支撑函数在两个正的转向点之间作周期振荡，重建出的曲线是正则浸入。

证明。支撑函数恒等式给出 $h + h'' = 1/(Ch^2)$；反之，$\gamma' = (h + h'')e' = C^{-1/3}u^{-2}e'$ 处处不为零，并给出 $\kappa = Ch^2$。势能 $V(u) = u^2/2 + 1/u$ 在 $(0, \infty)$ 上严格凸，在两端趋于无穷远，并在 $u = 1$ 处取得极小值 $3/2$。守恒能量将 u 限制在远离零和无穷远的范围内，并限制 u'，从而得到整体存在性。对于 $E > 3/2$，两个转折点都是单根，因此每个转折点处的时间积分均有限，运动会重复。 □

例 6.1（两个转折点并不意味着闭合）。对于 $C = 1$，取 $u(0) = 2$，$u'(0) = 0$。于是 $E = 5/2$，转折点为 2 和 $\sqrt{2} - 1$，即 $u^3 - 5u + 2 = 0$ 的正根。曲率 u^2 处处有限且为正。平面曲线是否闭合取决于支撑周期与 2π 之比，正如第 7 节所述。该节中的图 1 给出了一个闭合示例。

命题 6.3（支撑函数的两种符号对应于 $B = C$）。将曲线定向，使得 $C > 0$。取右单位法向量 $e = (\cos\theta, \sin\theta)$，于是 $e' = T$ 且 $h = A$。对于正支撑函数，若非常数解的 $P/(2\pi)$ 为无理数，则其像在一个闭环带中稠密。对于负支撑函数，每个极大解都是光滑嵌入曲线，且在两个方向上长度均为无限。曲线的两个端点趋近于从 O 出发的射线，并且沿每个端点曲率都趋于零。

证明。先直接研究 h，不进行缩放。将支撑函数方程乘以 h'，得到

$$E = \tfrac{1}{2}(h'^2 + h^2) + \frac{1}{Ch}, \qquad |\gamma|^2 = h^2 + h'^2 = 2E - \frac{2}{Ch}.$$

如果 $h > 0$ 在 a 和 b 之间振荡，那么 $|\gamma|$ 也会如此：它的平方随 h 增大，并在转向点处等于 h^2。每经过一个支撑周期，整段弧就旋转 P。如果 $P/(2\pi)$ 是无理数，这些旋转在振荡期间达到的每个半径所对应的圆上都稠密。它们的并集

是环域 $a \le |x| \le b$。法向角下的速度 $1/(Ch^2)$和曲率 Ch^2 始终为正且有界。

若 $h < 0$，势能 $h^2/2 + 1/(Ch)$ 从 $+\infty$ 到 $-\infty$严格递减。存在一个转折点，即一个极小值。在其两侧，h 从下方趋于 0，且 $|h'| \sim \sqrt{2}/(C|h|)$。因此，到端点的角距离为 $O(|h|^{3/2})$。半径 $|\gamma|$ 趋于无穷远，所以每一端的长度都无穷。若 e_* 是端点法向量，则 $\gamma \cdot e_* = O(|h|) + O(|h'|\,|h|^{3/2}) \to 0$。因此，每一端都趋近于经过 O 且垂直于 e_*的直线上的一条射线。其曲率 Ch^2 趋于零。为考察嵌入性，将极小值置于

$$\theta = 0 \qquad g = -h \qquad g'\,0 = 0 \qquad g'' + g =, \text{并令}。$$

$$-1/\,Cg^2 < 0 \qquad g\ t = g\ 0 \qquad t - \int_0^t \quad t - v\ /\ Cg\ v^{\,2}\ dv$$

于是 ( ) 和 ( )。常数变易法给出 ( ) ( ) cos sin( ) (( ))。因此，正区间在任一方向上都在 $\pi/2$ 之前结束（由偶对称性可知）。切线总转角小于 π，且其在中间切线方向上的投影始终为正。

□

例 6.2。令 $C = 1$, $h(0) = -1$, $h'(0) = 0$。则 $E = -1/2$，前面的恒等式给出$h = -2/(1 + |\gamma|^2)$ 和 $\kappa = 4/(1 + |\gamma|^2)^2$。最近点到 O 的距离为一。

7 比内方程、周期界与闭合

方程 (6.1) 是中心力的轨道方程，称为比内方程，描述单位质量粒子在大小恒定为 F 的吸引中心力作用下运动，其角动量为L，采用归一化 $F = L^2 = 1$。若 r 表示到圆心的距离，且 $w = 1/r$，则比内方程为 $w'' + w = F/(L^2w^2)$。

在这种归一化下，机械能为 $\frac{1}{2}((w')^2 + w^2) + 1 \neq w$，因此 (6.2) 中的 E 正是轨道的能量。最小周期 $P(E)$ 的一半是轨道的拱点角 $\Theta(E)$。用第一积分形式表述，这一结论见 V. I. Arnold [6, §8，问题 1]：对于势能 $U(r)$ 和角动量 M，从近心点到下一个远心点之间的角度，等于势能为 $W(x) = U(M/x) + x^2/2$ 的一维系统周期的一半，其中 $x = M/r$。对于$U = r$ 和 $M = 1$，这就是 (6.2)。

按照 R. Castelli [7] 和 D. Rojas [8], 的记号，力为 $f(r) \sim r^{-(\alpha+1)}$，势能为$V(r) = -\alpha^{-1}r^{-\alpha}$。恒力对应于 $\alpha = -1$。Castelli 证明，对于 $-2 < \alpha < 1$，拱点角是偏心率的单调函数。Rojas [8, 定理 1.1] 证明，对于固定的非零角动量，$\Theta'(E) < 0$ 对于 $\alpha \in (-2, -2/3)$成立。由于 $\alpha = -1$ 位于此区间内，$P(E)$ 是 E在 $(3/2, \infty)$ 上的严格递减函数。下面还需计算这两个极限。

在圆轨道附近，令 $u = 1 + v$。由于 $u^{-2} = 1 - 2v + O(v^2)$，方程 (6.1) 变为$v'' + 3v = O(v^2)$。因此，当 $E \downarrow 3/2$ 时，$P(E) \to 2\pi/\sqrt{3}$。对于大能量，由 (6.2) 可得，

$$P(E) = 2\int_{u_-}^{u_+} \left(2E - u^2 - \frac{2}{u}\right)^{-1/2} du.$$

代入 $u = \sqrt{2E}\,x$，并令 $\varepsilon = 2(2E)^{-3/2}$。则

$$P(E) = 2\int_{x_-}^{x_+} f_\varepsilon(x)^{-1/2}\,dx, \qquad f_\varepsilon(x) = 1 - x^2 - \frac{\varepsilon}{x},$$

其中 $x_- < x_+$ 是 f_ε 在 $(0, 1)$ 中的零点。由于 $\varepsilon \to 0$，$x_- = \varepsilon + O(\varepsilon^3)$ 且 $x_+ \to 1$。固定 $\delta \in (0, 1/4)$，并在 2ε 和 $1 - \delta$ 处分割积分。

(a) 在 $[x_-, 2\varepsilon]$ 上，令 $x = \varepsilon y$。则 $f_\varepsilon(\varepsilon y) = 1 - 1/y - \varepsilon^2 y^2$，且积分等于

$$\varepsilon \int_{y_-}^{2} (1 - 1/y - \varepsilon^2 y^2)^{-1/2}\,dy$$

其中 $y_- \to 1$。被积函数在 y_- 处有可积平方根奇性，在其他地方有界，因此这一部分为 $O(\varepsilon)$。

(b) 在 $[2\varepsilon, 1-\delta]$ 上有 $\varepsilon/x \le 1/2$。取满足 $x_0^2 < 1/4$ 的 $x_0 > 0$。对于 $x \le x_0$， $f_\varepsilon(x) \ge 1/2 - x_0^2 > 1/4$。对于 $x_0 \le x \le 1-\delta$， $f_\varepsilon(x) \ge 1-(1-\delta)^2 - \varepsilon/x_0$；当 ε 充分小时，它有一个正的下界。因此，被积函数关于 ε 一致有界，并逐点收敛到 $(1-x^2)^{-1/2}$。由控制收敛定理，这一部分趋于 $\int_0^{1-\delta}(1-x^2)^{-1/2}\,dx$。

(c) 在 $[1-\delta, x_+]$ 上，当 ε 充分小时， $f_\varepsilon'(x) = -2x + \varepsilon/x^2 \le -1/2$，且 $f_\varepsilon(x_+) = 0$。因此， $f_\varepsilon(x) \ge (x_+ - x)/2$，并且这一部分一致地不超过 $\int_0^\delta \sqrt{2}\,t^{-1/2}\,dt = 2\sqrt{2\delta}$，其中 ε。

先令 $E \to \infty$（也就是说， $\varepsilon \to 0$），再令 $\delta \to 0$，得到 $P(E) \to 2\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\,dx = \pi$。这两个极限都与 [6, §8，问题 2–4] 一致：对于势能 $U = ar^\beta$，近圆轨道的拱点角为 $\pi/\sqrt{\beta+2}$；当 $\beta = 1$ 时，它是 $\pi/\sqrt{3}$；而对于 $\beta > 0$，当 $E \to \infty$ 时，它趋于 $\pi/2$。结合严格单调性，即可证明周期界。

命题 7.1（周期界）。非常数解 *(6.1)* 的最小周期 $P(E)$ 是 $E \in (3/2, \infty)$ 的连续严格递减函数；当 $E \downarrow 3/2$ 时， $P(E) \to 2\pi/\sqrt{3}$；当 $E \to \infty$ 时，$P(E) \to \pi$。特别地，

$$\pi < P(E) < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \textit{equivalently} \qquad \frac{\pi}{2} < \Theta(E) < \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \tag{7.1}$$

P 的连续性由上述积分公式得出，因为当$E > 3/2$时， $u_\pm$ 随 E 光滑变化。

定理 7.2（常角密度的嵌入曲线）。设 γ 是一条闭合的嵌入 C^2 平面曲线，且其上 A 处处不为零。若 γ 的角密度 B 为非零常数，则 γ 是以 O为圆心的圆。

证明。必要时反转定向，使得 $B = C > 0$。由引理 6.1， $\kappa > 0$ 且$h = A > 0$。根据 H. Hopf 的绕行定理， [9], 一条嵌入的闭正则曲线的旋转指数为± 1。由于 $\kappa > 0$，切线角恰好增加 2π，因此 γ 是凸的，且法向角θ 是 $[0, 2\pi)$ 上的全局参数。因此，缩放后的支撑函数 $u = C^{1/3}h$ 是方程（6.1）的一个正2π-周期解。假设 u 不是常数，其最小周期为 P。那么，对于某个正整数 n，有 $2\pi = nP$。根据（7.1）， $n = 1$ 将推出$P = 2\pi > 2\pi/\sqrt{3}$， $n = 2$ 将推出 $P = \pi$，而$n \ge 3$ 将推出 $P \le 2\pi/3 < \pi$。这三种情况都不可能。因此， u 是常数，由（6.1）可知 $u \equiv 1$，且γ 是半径为 $C^{-1/3}$ 、圆心为 O的圆。

□

注记。对于一条闭凸曲线，处处满足条件 $A \neq 0$ 等价于 O 位于由 γ围成的区域内部，因为曲线上的点或曲线外的点必位于某条切线上。

定理 7.3（恒定角密度闭浸入曲线）。设 m、n 为互素正整数。存在一条满足 $B = 1$ 且旋转指数为 m 、并且不是圆的闭非退化浸入曲线，当且仅当 $1/2 < m/n < 1/\sqrt{3}$，其中 n 是其支撑函数的振荡次数。对于每一对这样的整数，它在绕 O旋转的意义下唯一，并且对应于唯一的能量 E，满足 $P(E) = 2\pi m/n$。

证明。设 γ 为这样的曲线。根据引理 6.1，其支撑函数 u是方程 (6.1) 的正解，在 $\theta \in \mathbb{R}$ 上定义，且具有 $2\pi m$-周期。若 u 不是常数，其最小周期 P满足 $2\pi m = nP$，其中 n 表示一次遍历中的振荡次数。由于 γ 不会在更早的值 $\theta = 2\pi k$ 处闭合（此时$0 < k < m$），整数 m 和 n 互质。根据 (7.1)， $m/n = P/(2\pi) \in (1/2,\ 1/\sqrt{3})$。反之，

若 m/n 属于此区间，命题 7.1 保证存在唯一的 E，使得 $P(E) = 2\pi m/n$。曲线$\gamma(\theta) = u(\theta)e(\theta) + u'(\theta)e'(\theta)$ 满足 $B = 1$ (§6)，并且首次在 $\theta = 2\pi m$处闭合，因为$2\pi k$ 只有在 nk/m 为整数时才是 P 的倍数，也就是说，当且仅当 m 整除 k。根据 E 的唯一性以及方程 (6.1) 关于 θ的平移不变性，曲线在旋转意义下唯一。 □

区间 $(1/2, 1/\sqrt{3})$ 中分子最小的有理数是 $4/7$、$5/9$ 和 $6/11$。当 $m/n = 4/7$ 时，能量为 $E = 1.697378876\ldots$（图 1）。根据命题 10.3，转向分数为 m/n 的曲线恰有 $n(m-1)$ 个双重点；图 1 中的曲线有 21 个。这个族类似于第 §5 节的 Abresch–Langer 族，其旋转数填满区间 $(1/2, 1/\sqrt{2})$。在那里，圆处的线性化是 $v'' + 2v = 0$，而不是 $v'' + 3v = 0$。

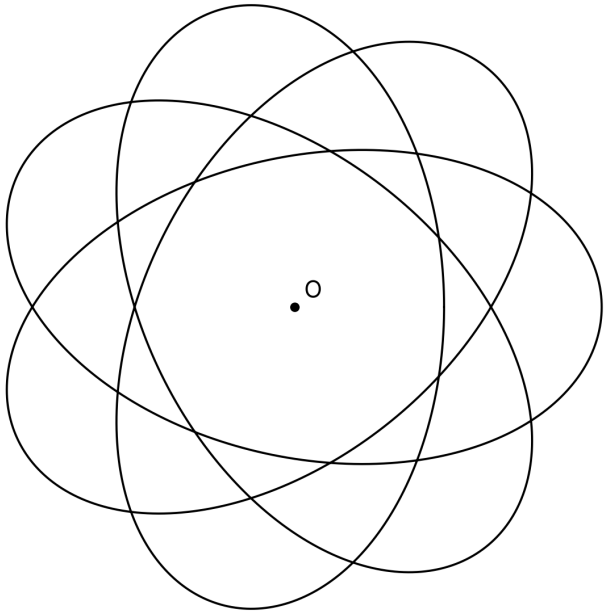

图 1：常角密度为 $B = 1$、旋转数为 $m/n = 4/7$（$E = 1.697378876\ldots$）的闭曲线。该点标示原点 O。

数值方法。方程 (6.1) 从内转向点 u_- 出发，在 $u' = 0$ 的条件下，采用 8 阶显式龙格–库塔方法（Dormand–Prince），相对和绝对容差均为 10^{-13} 进行积分。周期 $P(E)$ 是首次返回 u_- 所需的时间。通过 Brent 方法求得满足 $P(E) = 8\pi/7$ 的能量，得到 $E = 1.697378876138$。重构的曲线经过 $\theta = 8\pi$ 后闭合，误差为 $1.1 \cdot 10^{-12}$；其通过有限差分计算得到的角密度在 $5 \cdot 10^{-6}$ 内等于 1。在 $(3/2, 200]$ 的 1000 个能量构成的网格上，计算得到的 $P(E)$ 严格递减，从 $2\pi/\sqrt{3} = 3.627599$ 附近的 $E = 3/2$ 递减至 $P(200) = 3.14369$。此外，$P(3000) = 3.14165$。这些数值与命题 7.1 一致。

恒力问题还给出了具有常数 B的曲线的两种几何描述。

命题 7.4（恒力轨道的极倒易曲线）。设 γ 是一段局部严格凸弧，其相对于 O 的支撑函数 $h(\theta)$ 为正，其中 θ 为法向角。γ 关于以 O 为圆心的单位圆的极倒易曲线 γ^* 的极坐标方程为 $r(\theta) = 1/h(\theta)$。

因此，γ 具有常角密度 $B=C>0$，当且仅当 γ^* 是以 O 为中心、受大小恒定为 F 的吸引中心力作用的某个轨道的一段，且 $F/L^2=1/C$，其中 L 为单位质量角动量。

证明。法向角为 θ 的 γ 的切线为

$$\{x:\langle x,e(\theta)\rangle=h(\theta)\}=\{x:\langle x,e(\theta)/h(\theta)\rangle=1\}.$$

它关于单位圆的极点是点 $e(\theta)/h(\theta)$，而这些点构成 γ^*。令$w=1/r=h$。对于大小为常数 F 的吸引中心力，比内方程为 $w''+w=(F/L^2)w^{-2}$。当且仅当 $F/L^2=1/C$ 时，这与 $h''+h=1/(Ch^2)$ 完全一致。□

命题 7.5（恒力轨道的速端曲线）。设 $x(t)$ 是单位质量在关于 O 的大小为常数 F 的吸引中心力作用下的运动，角动量为 $L>0$，并设$v(t)=\dot{x}(t)$。则速端曲线 v 按 t 增大的方向遍历时，是局部严格凸的，具有正支撑函数，并且相对于 O 的角密度为常数 $B=1/(FL)$。反之，每一条具有常角密度 $B=C>0$ 和正支撑函数的弧，在绕 O 旋转后，都是具有 $F=1/C$ 和 $L=1$ 的此类运动的速端曲线的一段。

证明。令 $x=re(\varphi)$，使得 $r^2\dot{\varphi}=L$，$\dot{r}=\langle v,e(\varphi)\rangle$ 以及 $r\dot{\varphi}=\langle v,Je(\varphi)\rangle=L/r$。由于 $\dot{v}=-Fe(\varphi)$，我们有

$$\frac{dv}{d\varphi}=\frac{\dot{v}}{\dot{\varphi}}=-\frac{Fr^2}{L}e(\varphi).$$

因此，速端曲线的单位切向量为 $-e(\varphi)$。其切线角 $\varphi+\pi$ 随 t增加，因此其曲率为正，并且相对于切线角的曲率半径为 $|dv/d\varphi|=Fr^2/L$。其单位法向量为 $N=J(-e(\varphi))=-Je(\varphi)$，所以其面积密度为 $A=-\langle v,N\rangle=\langle v,Je(\varphi)\rangle=L/r>0$。因此 $\kappa=L/(Fr^2)=A^2/(FL)$，且 $B=\kappa/A^2=1/(FL)$。

对于逆命题，设 γ 具有 $B=C>0$，且其关于法向角 θ的支撑函数为 $h>0$。根据命题 7.4，取 $L=1$ 和 $F=1/C$ 时，曲线 $r=1/h(\varphi)$ 是一条轨道。由第一部分可知，其速端曲线关于法向角 $\varphi+\pi/2$的支撑函数为 $L/r=h(\varphi)$。凸弧由其支撑函数唯一确定，因此速端曲线是将 γ 旋转 $\pi/2$后所得的像。□

命题 7.4 和 7.5 表述了一个经典事实：中心力运动的速端曲线是轨道的极倒易曲线，经过直角旋转并按 L缩放。由于 B 在绕 O旋转时保持不变，因此旋转不会影响密度。在开普勒问题中，速端曲线是一个圆。对于恒力，速端曲线是一条具有常角密度的曲线。因此，具有常 B 的闭曲线恰好是闭合恒力轨道的速端曲线，而定理 7.2 和 7.3 则是对拱点角分析的重新表述。

8 关系 $A^3B=\text{const}$

根据（2.3），$A^3B=C$ 等价于 $\kappa A=C$。对于 $C=0$，非退化性给出 $\kappa=0$，因此解是其支撑直线不经过 O的直线。

假设 $C\neq 0$。那么 $\kappa\neq 0$，且切线角 θ（其中 $d\theta/ds=\kappa$）是一个正则参数。反转定向会使 A 和 κ 的符号同时改变，并保持 C不变。选择满足 $\kappa>0$的定向。由 (2.1) 和 $\kappa=C/A$,

$$A_\theta=X,\qquad X_\theta=\frac{1-\kappa A}{\kappa}=\frac{1-C}{C}A,\qquad A_{\theta\theta}=\frac{1-C}{C}A. \tag{8.1}$$

在本节余下部分中，在命题 8.1 之后，撇号表示对 θ 而非 s 求导： $A' = A_\theta$， $\gamma' = \gamma_\theta$。

命题 8.1. 固定 $C \neq 0$。对于一个以 $\kappa > 0$ 定向的非退化弧，关系 $A^3B = C$成立，当且仅当面积密度作为切线角的函数满足 *(8.1)* 和 $A/C > 0$。反过来，在 $A/C > 0$ 的区间上，*(8.1)* 中最后一个方程的每个解都确定这样一条弧，其定义为

$$\gamma = A_\theta T(\theta) - AN(\theta), \qquad T(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad N(\theta) = JT(\theta).$$

这些解具有以下形式，其中 α、$\beta \in \mathbb{R}$。

(i) If $0 < C < 1$, *then* $A = \alpha e^{q\theta} + \beta e^{-q\theta}$, *where* $q = \sqrt{(1-C)/C}$.

(ii) 若 $C = 1$，则 $A = \alpha + \beta\theta$。

(iii) 若 $C > 1$ 或 $C < 0$，则 $A = \alpha\cos(q\theta) + \beta\sin(q\theta)$，其中 $q = \sqrt{(C-1)/C}$.

证明. 必要性由上面的计算得出。符号条件 $A/C > 0$ 等价于 $\kappa = C/A > 0$。反过来，设 A 是满足 (8.1) 且具有 $A/C > 0$ 的解，并定义 $\gamma = A_\theta T - AN$。由于 $T_\theta = N$ 和 $N_\theta = -T$，

$$\gamma_\theta = A_{\theta\theta}T + A_\theta N - A_\theta N + AT = (A_{\theta\theta} + A)T = (A/C)T.$$

因此， T是单位切向量， $ds/d\theta = A/C$，且 $\kappa = d\theta/ds = C/A$。此外，$\det(\gamma, T) = \det(-AN, T) = A$。因此， A 是重构弧的面积密度，且 $\kappa A = C$。所展示的三个族是 (8.1) 中关于 A 的常系数方程的通解。 □

对于 $0 < C < 1$，满足 $\alpha\beta = 0$ 的解是以 O为圆心的对数螺线。对于螺线$r = ae^{b\varphi}$，可得 $C = 1/(1+b^2)$，这与 [1, 例 3.10]一致。满足$\alpha\beta \neq 0$ 的解给出了这一族中的更多曲线。

对于 $C = 1$ 和 $\beta \neq 0$，曲率半径 $A/C = \alpha + \beta\theta$ 关于切线角呈线性关系，这是圆的渐开线的内蕴方程。情形 $\beta = 0$ 给出一条以 O为圆心的圆，与第 3 节中的情况一样。在情形 (iii) 中， A 有零点，而非退化解是在相邻零点之间的区间上的弧，且 $A/C > 0$。

例 8.1（支撑函数为零处的尖点）。对于 $C = 1$，取 $A(\theta) = \theta$，位于 (8.1) 中。令$T =$为（$\cos\theta$，$\sin\theta$），$N =$为（$-\sin\theta$，$\cos\theta$），则重构出的渐屈线为 $\gamma = T - \theta N$，且 $\gamma' = \theta T$。在零点附近，其坐标为（$1 + \theta^2/2 + O(\theta^4)$ $\theta^3/3 + O(\theta^5)$）。跨越零点的解析延拓具有一个普通的半三次尖点；在原弧上，曲率 $1/\theta$ 在其端点处发散。

命题 8.2（的极大弧的端点 $A^3B = C$）。使用切线角 θ，并调整弧的方向使得 $\kappa > 0$。记 $T =$（$\cos\theta$，$\sin\theta$），$N =$（$-\sin\theta$，$\cos\theta$）。对于 $C \neq 0$，选取满足 $A/C > 0$ 的连通区间。于是

$$\gamma = A'T - AN, \qquad \gamma' = (A/C)T, \qquad \kappa = C/A, \qquad |\gamma|^2 = A^2 + A'^2.$$

- 对于 $0 < C < 1$，取$q = \sqrt{(1-C)}/C$。除对角度变量进行平移或反向变换外，可能的正函数为 $H\cosh(q\theta)$、$H\sinh(q\theta)$（定义于 $\theta > 0$）以及 $He^{q\theta}$，其中 $H > 0$。第一种在无穷远处有两个光滑端点。第二种有一个有限长度的尖点端点和一个无穷远端。第三种是对数螺线：其位于 O 的端点具有有限长度和无穷多次切线转动；另一端延伸至无穷远。

- 对于 $C=1$，恒定的正 A 给出一个中心圆。在 $A>0$ 上的非恒定 $A=a+b\theta$ 给出一条圆的渐开线，具有一个尖点端点和一个无界端。
- 当 $C>1$ 或 $C<0$ 时，A 呈正弦变化。每条极大弧位于两个相邻的单零点之间，具有有限长度和两个尖点端点（它们在平面上不一定是不同的点）。
- 当 $C=0$ 时，所有非退化的极大轮廓曲线在 O 之外都是直线。

证明。 A 的公式由 $A''=(1-C)A/C$ 得出。在有限零点 θ_0 处，由唯一性可知 $A'(\theta_0)\neq 0$。将 γ 的公式延拓至端点之外，有 $\gamma'(\theta_0)=0$，且 $\gamma''=(A'/C)T$ 在该处成立，并且 $\det(\gamma'',\gamma''')=2(A'/C)^2\neq 0$ 在该处成立。因此，在切向与法向坐标中，首个非零项的阶数分别为二和三，即普通尖点。在其正则侧，曲率发散。对于指数解，从 $-\infty$ 到任意有限角度的长度为 $\int_{-\infty}^{\theta} He^{qv}/C\,dv<\infty$，尽管切线角没有有限极限。关于另一端点的其余结论由 $|\gamma|^2=A^2+A'^2$ 和 $ds/d\theta=A/C$ 得出。 □

例 8.2（具有相同 A^3B 值的三条开曲线）。对于 $C=1/2$，方程 (8.1) 为$A''=A$。取 $A=\cosh\theta$ 可得到一条有两个无界端的光滑曲线。它会自交：其第一坐标为奇函数，第二坐标为偶函数，且第一坐标在某个 $\theta\in(\pi/2,\pi)$ 处为零，因为它在该处变号。θ 和 $-\theta$ 处的两条切线不同。在 $\theta>0$ 上取 $A=\sinh\theta$，可在 $(1,\ 0)$ 处得到一个有限端点。相对于该点，位置向量的首项为 $(\theta^2,\ \frac{2}{3}\theta^3)$，延拓后形成一个尖点。取 $A=e^{\theta}$，则在 O 处得到一段长度为 $\int_{-\infty}^{0}2e^{\theta}\,d\theta=2$、延伸至 $\theta=0$ 的曲线。这段有限长度上，切线无限次转向。

9 族 $A^pB=C$

物理解释。 在满足 $C>0$ 的正支撑弧上，关系式 $A^pB=C$ 给出$h''+h=C^{-1}h^{p-2}$。令 $r=1/h$，即可将其识别为吸引中心力大小为 $F(r)=(L^2/C)r^{-p}$ 时的比内方程，其中 L 是单位质量角动量。因此，密度曲线的极倒易曲线就是一条中心力轨道。对于非恒定周期支撑函数，其最小周期的一半就是该轨道的拱点角。

情形 $p=0$，1，2，3 分别对应恒力、与 $1/r$ 成正比的力、反平方力和反立方力。对于每个指数，速度曲线的支撑函数都是 L/r，如命题 7.5 所述；经过旋转和尺度变换后，它会还原为原密度曲线。

正支撑弧上的正则性检验。 对于 $C>0$、$h=A>0$ 和任意实数 p，法向角下的速率与曲率为

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{h^{p-2}}{C},\qquad \kappa=Ch^{2-p}.$$

二者在每个具有有限正支撑函数的内部点处都为正且有限。第一积分为

$$E=\tfrac{1}{2}h'^2+V_p(h),\qquad V_p(h)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}h^2-h^{p-1}/[C(p-1)], & p\neq 1,\\ \tfrac{1}{2}h^2-C^{-1}\log h, & p=1.\end{cases}$$

例如，对于 $p\le 1$，势能在 $0<h<\infty$ 的两端都趋于无穷远。因此，所有这些正支撑函数解都保持在正的有限界之间，贯穿所有角度，并且具有

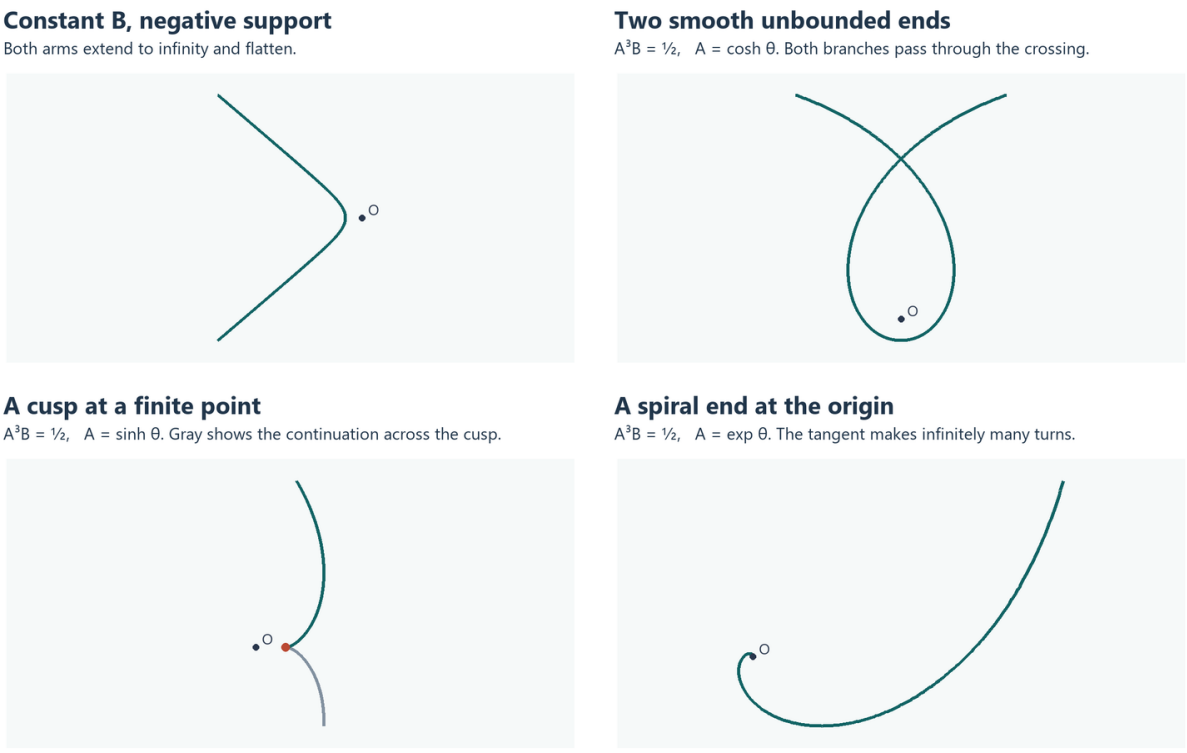

图2：第6节和第8节中的示例。每个图中的两个坐标轴比例相同，圆点标示原点 O。左上方的曲线具有 $B = 1$ 和负支撑函数。其他三条曲线具有 $A^3B = 1/2$。左下方图中的灰色延拓显示了正支撑弧端点处的尖点。图中仅显示无界曲线的有限部分。

有界曲率。对于 $p>1$，若一条分支以 $E>0$趋近 $h=0$，则 $|h'|\to\sqrt{2E}$ 和$|\gamma|\to\sqrt{2E}$。由于 ds/dh 的绝对值渐近于$h^{p-2}/(C\sqrt{2E})$，其端点距此处的弧长有限。当 $1<p<2$时，其曲率趋于零；当 $p=2$时，曲率等于 C；当$p>2$时，曲率发散。仅凭曲率发散无法确定尖点类型；上面的尖点计算使用了局部参数化。

一次振荡期间的转向。 假设 h 为正、非常数且具有周期性。令 P表示其关于法向角的最小周期。在一个周期内，切线转过 $\rho=P/(2\pi)$个完整周。若 $nP=2\pi m$，则位置向量 $\gamma=he+h'e'$和定向切线经过 n 次振荡后重复。反过来，定向曲线的一个周期必须使法向前进整数个完整周，并且必须重复 h。因此，当且仅当 ρ 为有理数时，曲线闭合。写成既约分数时，$\rho=m/n$ 意味着首次完整遍历包含 n 次振荡和 m 次切线转动。当 ρ为无理数时，每次后续振荡描绘的都是前一段弧的旋转副本，因此不存在闭合遍历。

推论 9.1（哪些转向分数会出现）。 固定 $C>0$。如果 $p<3$ 和 $p\notin\{-1,2\}$，正的非恒定周期支撑函数的转向分数集合是一个开区间，其端点为

$$a_p=\frac{1}{\sqrt{3-p}},\qquad b_p=\begin{cases}1/2, & p\le 1,\\ 1/(3-p), & 1<p<3.\end{cases}$$

对于该区间内的每个既约有理数，除绕 O 旋转和起始点的选择外，恰好存在一条这样的闭曲线。对于 $p=-1$，唯一的转向分数是 $1/2$；对于 $p=2$，则为 1。对于 $p\ge 3$，不存在正的非恒定周期支撑函数。

证明。 在 Castelli [7] 和 Rojas [8], 所采用的力定律中，指数为 $\alpha=p-1$。 $r=1/h$ 的两个连续极值相隔角度 $P/2$，因此 ρ 等于拱点角除以 π。在 [7, 第 3] 节中，将该角度在偏心率为零以及偏心率趋近于一时的极限分别除以 π，恰好得到 a_p 和 b_p。根据 [7, 定理 1.1] 和 [8, 定理 1.1], ，该角度在这些极限之间连续且严格单调，但在 $\alpha=-2$，1 处除外。对于固定的 C，比值 $k=h_{\min}/h_{\max}$ 确定两个转向点：令它们的 V_p 值相等，得到

$$h_{\max}^{3-p}=\frac{2(1-k^{p-1})}{C(p-1)(1-k^2)}\quad(p\neq 1),\qquad h_{\max}^{2}=\frac{-2\log k}{C(1-k^2)}\quad(p=1).$$

反过来，每个 $0<k<1$ 都会在 V_p 的唯一极小值两侧给出两个转向点，因此对应一个正周期解。对应的偏心率为 $(1-k)/(1+k)$。转向点处支撑函数方程的唯一性意味着解在角度平移意义下唯一，也就是说，唯一到旋转为止。

在 $p=-1$，命题 4.1 给出中心椭圆；每个非圆椭圆的最小支撑周期为 π。在 $p=2$，$h''+h=1/C$，且每个非常数正解的最小周期为 2π；这些轮廓曲线都是圆，O 位于圆心之内且偏离圆心。对于 $p\ge 3$，在极大值和极小值处代入方程可得 $h_{\max}^{p-3}\le C\le h^{p-3}$ 极小值。对于 $p>3$，这迫使解为常数；对于 $p=3$，则得到 $C=1$和 $h''=0$。 □

10 一般关系 $B=\Phi(A)$

局部而言，这两个密度之间的关系可写为 $B=\Phi(A)$。反转定向会将$(A,\ B)$替换为$(-A,\ -B)$，因此反向弧满足 $B=-\Phi(-A)$。所以，这种形式的关系指的是一条定向弧。除了涉及包含 $B=\Phi$或弧长的关系且有各自假设的例 10.1 和定理 10.5 外，我们

考虑满足 $B=\Phi(A)$的正曲率定向弧，其中 Φ 是在所考虑的 A 取值范围上的正局部利普希茨函数。于是 $\kappa = A^2\Phi(A) > 0$，且在法向角下，有向支撑函数 $h = A$ 满足

$$h'' + h = \frac{1}{h^2\Phi(h)}. \tag{10.1}$$

AB的符号与 κA的符号相同，且不依赖于定向。对于这些弧， $AB > 0$ 的情形是正支撑函数，$AB < 0$ 的情形是负支撑函数。

注 10.1（力定律）。将 (10.1) 与比内方程进行比较。在一段满足 $AB > 0$ 的弧上，极倒易曲线 $r = 1/h$ 是吸引中心力的轨道

$$F(r) = \frac{L^2}{\Phi(1/r)}.$$

在一段满足 $AB < 0$ 的弧上，令 $g = -h > 0$。于是 $g'' + g = -1/(g^2\Phi(-g))$，这是大小为 $L^2/\Phi(-1/r)$ 的排斥中心力所对应的比内方程。因此，角密度作为面积密度的函数，等于 L^2 除以力；负支撑函数对应排斥。单项式关系 $A^pB = C$ 就是第 9 节中的幂律。

例如，令 $\mu > 0$且 $0 \le \nu < 1$。多项式关系 $A^2B(\mu+\nu A) = 1$是 $\kappa(\mu+\nu A) =1$，而 (10.1) 化为线性方程 $h''+(1-\nu)h = \mu$。它对应于反平方力与反立方力之和。其解为 $h = \mu/(1-\nu) + a\cos(\sqrt{1-\nu}(\theta-\theta_0))$，并且当且仅当 $|a| < \mu/(1-\nu)$ 时，它们对所有 θ 都为正。当 $0 < |a| < \mu/(1-\nu)$时，转向分数为$1/\sqrt{1-\nu}$，因此这些曲线当且仅当 $\sqrt{1-\nu}$ 为有理数时闭合。当 $|a| \ge \mu/(1-\nu)$ 时，支撑函数在某个 θ处为零，而正支撑函数对应的弧不闭合。

特别地，如果 $\sqrt{1-\nu}$ 是有理数，则每个非恒定支撑函数对所有法向角均为正的解都会给出一条闭曲线。对于 $\mu = 1$ 和 $\nu = 3/4$，解为 $h = 4 + a\cos((\theta-\theta_0)/2)$，其中 $0 < |a| < 4$；每条此类曲线都会在切线转动两周后闭合。因此， $A^2B = C$（圆）和 $B/A = C$（中心椭圆）并不是所有具有周期性正支撑函数的曲线都闭合的唯一关系。伯特兰定理 [6, §8] 不适用于此处：它固定力而改变角动量，而一个固定关系 $B = \Phi(A)$ 固定的是商 F/L^2。

命题 10.2（弧的端点位于 $AB < 0$）。设 Φ 在（$-\infty$,0）上为正且局部利普希茨，设 γ 是一条极大弧，满足 $B = \Phi(A)$ 且 $A < 0$。令 $\psi(g) = 1/(g^2\Phi(-g))$。则 γ 的切线转动小于 π，该弧是嵌入的，并且在 $A \to 0$ 的每个端点处。此外：

- 若 $\int_0 \psi(g)\,dg$ 发散，则每个端点的长度都为无限，趋于无穷远，并趋近于一条从O出发的射线；
- 若 $\int_0 \psi(g)\,dg$ 收敛，则每个端点的长度都有限，并终止于一个有限点，该点的切线经过 O。

证明。设 $g = -h > 0$ 定义在法向角的极大区间 $I = (\theta_0,\ \theta_1)$ 上。由 (10.1) 得，$g''+g = -\psi(g) < 0$，因此 g严格凹。正凹函数在有界区间上保持有界，因此 I 的有限端点只能出现在 $g \to 0$ 处。

考虑端点 θ_1，假设它是有限的，并令 $\Delta = \theta_1 - \theta$。在该端点附近 $g' < 0$，且 $|g'|$ 随着 θ 增大，因为 $g'' < 0$。因此

$$\Delta = \int_0^g \frac{dg}{|g'|} \le \frac{g}{|g'(\theta)|}, \qquad \text{that is,} \qquad |g'|\,\Delta \le g. \tag{10.2}$$

在 θ_0 处同样成立这个界。

若 I 包含一个区间 $[a, a+\pi]$，将 $g''+g=-\psi(g)$ 乘以 $w=\sin(\theta-a)$ 并积分，就会得到 $g(a)+g(a+\pi) = -\int \psi(g)\, w\, d\theta < 0$，这是不可能的。因此两端都是有限的，且 $|I| \le \pi$。若 $|I|=\pi$，则在 $(\theta_0+\varepsilon, \theta_1-\varepsilon)$ 上进行相同的计算，由 (10.2) 可知，$a=\theta_0$ 的边界项有界于 $g+|g'|\Delta \le 2g$。它们趋于零，而积分仍为负。因此$|I|<\pi$。速度为 $\gamma' = \psi(g)\, e'(\theta)$，且它在 I 中点处沿 e' 方向的投影为正。因此γ 是该方向上的图像，并且是嵌入的。

取 g值域中的 g_0。第一积分为

$$\tfrac{1}{2}g'^2 + \tfrac{1}{2}g^2 - \int_g^{g_0} \psi(v)\, dv = E, \qquad |\gamma|^2 = g^2 + g'^2.$$

因此，当且仅当 $\int_0 \psi$ 发散时，$|g'| \to \infty$ 才在端点处成立。令 $e_* = e(\theta_1)$ 和 $e'_* = e'(\theta_1)$。由于 $\gamma = -ge - g'e'$，

$$\langle \gamma, e_* \rangle = -g\cos\Delta - g'\sin\Delta, \qquad \langle \gamma, e'_* \rangle = g\sin\Delta - g'\cos\Delta.$$

根据 (10.2)，第一项的绝对值至多为 $2g$，且趋于零。第二项趋于 $\ell = \lim |g'|$。如果 $\ell=\infty$，则末端沿着由 e'_*张成的射线趋于无穷远，且它到该射线的距离趋于零。如果 $\ell<\infty$，则 $\gamma \to \ell e'_*$。极限切线方向为 e'_*，因此端点处的切线经过 O。末端的长度为 $\int \psi(g)\, d\theta = \int \psi(g)\, dg/|g'|$，当且仅当 $\int_0 \psi$ 收敛时，该长度有限。

□

对于实指数 p，当 $A<0$时，幂 A^p 未必为实数，因此在满足 $AB<0$ 的弧上，我们将单项式关系写作 $|A|^p B = C$，其中 $C>0$；对于整数 p，这就是 $A^p B = (-1)^p C$。那么$\psi(g) = g^{p-2}/C$。当 $p \le 1$ 时，末端趋于无穷远；当 $p>1$时，末端止于一个有限点。情形$p=0$ 和 $p=1$ 分别是命题 6.3 和第 5 节中的扩张型轮廓曲线。在有限端点处，曲率为 $1/\psi(g)$ 的极限。

命题 10.3（闭曲线的双重点）。设 Φ 在 $(0,\infty)$ 上为正且局部利普希茨。设 γ 是一条闭曲线，满足 $B=\Phi(A)$，支撑函数为正且非常数，转向分数 m/n 为既约分数，并且曲线恰好遍历一周。那么 γ 的所有自交点都是横截的，γ 没有三条分支经过同一点，并且 γ 恰有 $n(m-1)$ 个双重点。

证明。令 φ 为 γ 和 $r=|\gamma|$的极角。由于 $r^2\, d\varphi/ds = A > 0$，角度 φ 沿曲线递增。以法向角 θ 为参数时，曲线为 $\gamma = h\, e(\theta) + h' e'(\theta)$，因此 $\varphi = \theta + \arctan(h'/h)$。由于 $h>0$，第二项在一次闭合遍历后回到初始值，而 θ 则增加 $2\pi m$。因此，γ 由 $r=R(\varphi)$给出，其中 φ 在长度为 $2\pi m$的区间内变化。将 (10.1) 乘以 h'，得到 $r^2 = h^2 + h'^2 = 2E - 2U(h)$，其中 $U'(h) = -1/(h^2\Phi(h)) < 0$，所以 r随h递增。h 的一次振荡使曲线转过 $P = 2\pi m/n$，并且 h 关于其每个极值点对称。因此，R 是 P-周期的，关于其极值点对称，并且在相邻极值点之间严格单调。以 R的一个最大值为基准测量 φ。只有当 $y \equiv \pm x \pmod P$时，$R(x) = R(y)$才成立。

自交点是满足 $R(\varphi) = R(\varphi + 2\pi j)$ 且 $1 \le j \le m-1$ 的一个解。由于 m 和 n 互素，位移 $2\pi j = (jn/m)P$ 不是 P 的倍数。因此，解为$\varphi \equiv -\pi j$（模 $P/2$），每个周期有两个，总共 $2n$ 个。这样的 φ 不是 R 的极值点，并且$R'(\varphi+2\pi j) = -R'(\varphi) \neq 0$，所以两条分支横截相交。对 j 求和可得 $2n(m-1)$ 对 (φ, j)。对 (φ, j) 和 $(\varphi+2\pi j,\, m-j)$ 描述的是同一个交点，因此剩下 $n(m-1)$。这些交点彼此不同。若三条分支交于同一点，则三个参数值相差 2π 的倍数，但不相差 P 的倍数，却会给出相同的 R 值。这是不可能的，因为具有给定 $R(x)$ 的 x 值至多构成模 P 的两个等价类。

□

计数 $n(m-1)$ 也通过数值方法得到了验证。对于 $p=-2$，0，1，$1。5$，$2。5$ 和 21 个转向分数，重建了具有 $A^pB=1$ 的闭曲线，并直接对其自交点进行了计数。

注10.4 （具有预设转向分数的定律）。将（10.1）写成 $h''=-V'(h)$，其中 $V'(h)=h-1/(h^2\Phi(h))$，从而 $E=\frac{1}{2}h'^2+V(h)$。考虑 V的极小值附近的周期解，其中 V 归一化为零。对于 $v>0$，令 $h_-(v)<h_+(v)$ 表示 $V(h)=v$在极小值两侧的两个解，并令 $D(v)=h_+(v)-h_-(v)$ 表示势阱的宽度。于是

$$P(E)=\sqrt{2}\int_0^E \frac{D'(v)}{\sqrt{E-v}}\,dv, \qquad D(v)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^v \frac{P(E)}{\sqrt{v-E}}\,dE.$$

第一个公式是以 $v=V(h)$ 为变量、分别在极小值两侧取值的周期积分。第二个公式是阿贝尔反演 [12, §12]；另见 [13]。因此，周期函数决定势阱宽度，反之亦然，而中点 $M=(h_++h_-)/2$ 仍然是自由的。于是，具有预设周期函数的关系，特别是严格单调的关系，可以按如下方式构造。根据 P计算 D，选择 M，使得 $h_\pm=M\pm D/2$ 为正且单调，并使函数

$$h(s)=M(s^2)+\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(s)\,D(s^2)$$

在整个重构区间内光滑地延伸经过 $s=0$，且 $h'(s)>0$，特别是在 $s=0$处；这使得由 $V(h(s))=s^2$定义的拼接势函数光滑，并具有一个非退化极小值。然后令

$$\Phi(h)=\frac{1}{h^2\big(h-V'(h)\big)},$$

这要求 $V'(h)<h$。每个具有非退化极小值的单势阱光滑关系，都可通过这种方式得到，但须满足这些正性和可逆性条件。退化极小值不在此范围内：对于 $V(h)=(h-1)^4$，，也就是 $F(h)=h-4(h-1)^3$，，支撑函数仍围绕 $h=1$振荡，但 $s=\operatorname{sgn}(h-1)\sqrt{V(h)}$在 $h=1$处没有光滑反函数。例如，$P(E)=P_0+\lambda E$，取 $P_0>0$时得到 $D(v)=\big(2P_0\sqrt{v}+\frac{4}{3}\lambda v^{3/2}\big)/(\pi\sqrt{2})$。取常数中点$M=h_0>0$ 后，对于较小的能量，这就定义了一个满足 $V'(h_0)=0<h_0$的光滑势函数，因而得到一个转向分数 $P(E)/(2\pi)$在 $\lambda>0$ 上严格递增、在$\lambda<0$上严格递减的关系。因此，严格单调的转向分数并非第 9 节幂律所独有。这一构造通过 P 和 M来描述这些关系；它并未给出针对 Φ 本身的判据。

包含 A的关系。由 (2.1) 可知 $A'=\kappa X$，关系 $G(A,B,A')=0$在可局部求解出 κ 的范围内，可写作 $\kappa=f(A,X)$。于是，方程 (2.1) 在 (A,X) 平面上构成一个自治系统，而曲线可通过一次积分由其解还原。最简单的这类关系可以显式求解。

例 10.1 （弧长的线性面积密度）。这里不使用关于 Φ 的既定假设；曲率可以取正也可以取负。考虑关系 $A'=c$，其中 c 是常数，因此$A=cs+a$。对于 $c=0$，(2.1) 给出 $\kappa X=0$，其解为直线和圆心位于 O 的圆。令 $c\neq0$。在 $X\neq0$ 的范围内，曲率为 $\kappa=c/X$，切线角 θ 是一个正则参数，且 $ds/d\theta=X/c$。由 (2.1) 可得，

$$A_\theta=X, \qquad X_\theta=\frac{X}{c}-A, \qquad A_{\theta\theta}-\frac{1}{c}A_\theta+A=0. \tag{10.3}$$

反过来，对于方程 (10.3) 的一个解 A，如命题 8.1 中那样，令 $\gamma=A_\theta T(\theta)-A\,N(\theta)$。于是 $\gamma_\theta=(A_\theta/c)\,T$，因此曲线在 $A_\theta\neq0$ 处为正则曲线，其面积密度为 A，且在该处 $A'=c$。这里

每条正则弧的定向都使其单位切向量为 T；在 $A_\theta/c<0$ 处，这意味着沿弧行进时 θ 递减。与命题 8.2 的证明一样， A_θ 的简单零点是一个普通尖点。特征方程为 $\lambda^2-\lambda/c+1=0$。

- 如果 $|c|<1/2$，则根 λ_1， λ_2 为实数且 $\lambda_1\lambda_2=1$，并且 $A=\alpha e^{\lambda_1\theta}+\beta e^{\lambda_2\theta}$。对于 $\alpha\beta=0$，该曲线是以 O为圆心的对数螺线；如果它与从 O 出发的射线成 ψ角相交，则$\lambda=\cot\psi$ 以及 $c=\sin\psi\cos\psi$。对于 $\alpha\beta>0$，该曲线是光滑的，没有尖点。一端螺旋趋近于 O，另一端趋于无穷远，并且比值 X/A 在一端趋近于 λ_1，在另一端趋近于λ_2。因此，该曲线从角度为 ψ 的螺线过渡到角度为$\pi/2-\psi$的螺线。对于 $\alpha\beta<0$，该曲线有一个尖点以及一个具有 $A=0$的点。

- 如果 $|c|=1/2$，那么 $A=(\alpha+\beta\theta)e^{\theta/(2c)}$。对于 $\beta=0$，这是具有 $\psi=\pm\pi/4$的对数螺线；对于 $\beta\neq0$，该曲线有一个尖点以及一个具有 $A=0$的点。

- 如果 $|c|>1/2$，则 $A=$ $He^{\theta/2c}$，$\omega=\sqrt{1-1/4c^2}$，$\omega\,\theta-\theta_0$ 不存在对数螺线。令 $(\,)$。那么 $(\,)\cos(\,(\,))$. 该曲线是由有限长度的弧在普通尖点处连接而成的无限弧链，其中 θ中的每个长度为 π/ω 的区间对应一条弧。每条弧恰好包含一个满足 $A=0$的点；曲线在那里是光滑的，但其切线经过 O，而 B 未定义。由于 $A(\theta+\pi/\omega)=-e^{\pi/(2c\omega)}A(\theta)$，下一条弧可由前一条弧绕 O 旋转 $\pi+\pi/\omega$，再以因子 $e^{\pi/(2c\omega)}$ 进行伸缩得到。整个曲线在此相似变换下保持不变。

包含弧长的关系。 对于角密度，前述示例的对应情形有完整答案。同样，关于 Φ的既定假设并未使用：下面的曲线具有一个拐点，且其曲率取正负两种值。

定理 10.5 (弧长线性变化的角密度)。 设 γ 是一条满足 $B=B_0+cs$ 的非退化曲线，其中 $c\neq0$，并令 $b=|c|$。那么 γ 可延拓至所有 $s\in\mathbb{R}$，成为一条非退化曲线，且恰有一个拐点，位于 $s_0=-B_0/c$。乘积 AB 在 s_0 的一侧为负，在另一侧为正。设 $t=|s-s_0|$ 为从拐点起测量的弧长。

- 在 $AB<0$ 的一侧，

$$|A|\sim\frac{3}{bt^3},\qquad |\kappa|\sim\frac{9}{bt^5},\qquad \gamma=(t+d)\,T_\infty+O(t^{-3})\qquad (t\to\infty)$$

  对于一个单位向量 T_∞ 和一个常数 d。因此，这一端趋近于由 O 出发、以 T_∞ 为方向的射线。

- 在 $AB>0$ 的一侧，存在常数 $0<k_1<k_2$ 使得

$$k_1t^{-1/3}\le|A|\le|\gamma|\le k_2t^{-1/3}$$

  对所有充分大的 t 都成立，并且 $|\kappa|$ 介于 $t^{1/3}$ 的正倍数之间。这一端绕 O 无限旋转并趋近于 O，其长度为无限。

证明。 由 (2.1) 和 $\kappa=A^2B$，

$$A'=A^2BX,\qquad X'=1-A^3B,\qquad (A^2+X^2)'=2X,\qquad (1/A)'=-BX.$$

第三个方程在弧长的每个有限区间上对 $|\gamma|$ 给出了界，随后第四个方程表明 A 在那里不会变为零。因此，解可以延拓到所有 s，且 A 保持其符号。由于$\kappa=cA^2(s-s_0)$，曲率恰有一个零点，且该零点是单零点， AB 在此处变号。

固定 s_0的一侧。用点表示对 t的导数，并令 $u=|A|$、 $r=|\gamma|$ 和$Y=\langle\gamma,d\gamma/dt\rangle$，于是 $Y=\pm X$、 $r^2=u^2+Y^2$ 和 $(r^2/2)^{\cdot}=Y$。用这些变量表示的方程为

$$\dot Y=1+btu^3,\quad (1/u)^{\cdot}=btY\quad (AB<0),\qquad\qquad \dot u=btu^2Y,\quad \dot Y=1-btu^3\quad (AB>0).$$

该边 $AB<0$。这里 $Y\ge 1$，因此对于常数 K，有 $Y\ge t-K$。对 $(1/u)^{\cdot}=btY$积分，得到$u=O(t^{-3})$。于是 $\dot Y=1+O(t^{-8})$，所以对于常数 d，有 $Y=t+d+O(t^{-7})$，并且 $1/u=bt^3/3+O(t^2)$。因此 $u\sim 3/(bt^3)$ 且 $|\kappa|=btu^2\sim 9/(bt^5)$。由于 $|\kappa|$ 可积，单位切向量 $d\gamma/dt$ 趋近于单位向量 T_∞，误差为 $O(t^{-4})$。γ 沿 $d\gamma/dt$ 的分量为 Y，而与之正交的分量的绝对值为 $u=O(t^{-3})$。因此 $\gamma=(t+d)\,T_\infty+O(t^{-3})$。

该边 $AB>0$。令

$$W=\frac{1}{btu},\qquad H=\tfrac12 r^2+W.$$

直接求导可得

$$\dot W=-\frac{W}{t}-Y,\qquad \dot H=-\frac{W}{t},\qquad (YW)^{\cdot}=3W-2H-\frac{YW}{t}.$$

对于 $t\ge t_0>0$，函数 H 为正且单调递减，因此 r、 Y和 W 有界。结合后两个恒等式，

$$\frac{d}{dt}\Big(t^{2/3}H+\tfrac13 t^{-1/3}YW\Big)=-\tfrac49\,t^{-4/3}\,YW.$$

右侧在无穷远处绝对可积，且 $t^{-1/3}YW\to 0$。因此 $t^{2/3}H$ 存在有限极限。由于

$$H\ge \tfrac12 u^2+\frac{1}{btu}\ge \tfrac32\,(bt)^{-2/3},$$

该极限为正。因此，对于某个 $k_1>0$,$\overline{\ r}\le\sqrt{2H}=O(t^{-1/3})$ 和 $u=1/(btW)\ge 1/(btH)\ge k_1t^{-1/3}$。结合 $u\le r$，可得双侧界，并且 $|\kappa|=btu^2$ 介于 $t^{1/3}$ 的正倍数之间。最后， γ 的极角 φ 满足 $r^2\,d\varphi/ds=A$，因此 $|d\varphi/dt|=u/r^2$ 有一个正倍数的 $t^{1/3}$ 作为下界，且 $d\varphi/dt$ 符号恒定。因此，该曲线绕着 O无限缠绕，而当 $t\to\infty$时， $r\to 0$。 □

两个端点与第4节中的艾里曲线端点类型相同：一个从 O趋近一条射线，另一个沿着一段无限长度的弧绕入 O。下一个推论给出绕入端上缩放距离 $t^{1/3}|\gamma|$的下极限和上极限。当$E_*>\frac32$时，它们彼此不同。

推论10.6 (绕入端的极限)。 在定理 *10.5* 中含有 $AB>0$ 的一侧，令$E_*=$极限$_{t\to\infty}(bt)^{2/3}H$。那么 $E_*\ge\frac32$。令 $q_-\le q_+$ 为.....的正根

$$\tfrac12 q^2+\frac1q=E_*.$$

Then

$$\liminf_{t\to\infty}t^{1/3}|\gamma|=\liminf_{t\to\infty}t^{1/3}|A|=b^{-1/3}q_-,\qquad \limsup_{t\to\infty}t^{1/3}|\gamma|=\limsup_{t\to\infty}t^{1/3}|A|=b^{-1/3}q_+.$$

证明。 根据定理 10.5 的证明，极限存在且至少为3 2。令

$$q=(bt)^{1/3}u,\qquad z=(bt)^{1/3}Y,\qquad \tau=\tfrac34\,b^{1/3}t^{4/3},\qquad G(q,z)=\tfrac12(q^2+z^2)+\frac1q.$$

于是，$(bt)^{1/3}r=\sqrt{q^2+z^2}$ 和 $(bt)^{2/3}H=G(q,z)$，边 $AB>0$ 的方程变为

$$\frac{dq}{d\tau}=q^2z+\frac{q}{4\tau},\qquad \frac{dz}{d\tau}=1-q^3+\frac{z}{4\tau}.$$

根据定理 10.5，当 τ 足够大时，点 $(q,\ z)$ 始终位于半平面 $q>0$ 的一个紧子集内。令 Ω 为其在 $\tau\to\infty$ 时的极限点集合。项 $q/(4\tau)$ 和 $z/(4\tau)$ 趋于零。因此，若 $(q,\ z)(\tau_n)\to p$，且 $\tau_n\to\infty$，则平移解 $(q,\ z)(\tau_n+\cdot)$ 在紧区间上一致收敛于极限系统中经过 p 的解

$$\frac{dq}{d\tau}=q^2z,\qquad \frac{dz}{d\tau}=1-q^3.$$

因此，Ω 包含极限系统经过其每个点的整条轨道。极限系统守恒 G，且沿解 $G(q,\ z)\to E_*$，因此 Ω 位于等值集 $G=E_*$ 上。函数$q^2/2+1/q$是凸函数，在 $q=1$ 处有唯一极小值 $\frac{3}{2}$，而 (1, 0) 是极限系统唯一的平衡点。因此，若 $E_*>\frac{3}{2}$，等值集是一条闭轨道，q在其上遍历 $[q_-,q_+]$，而 Ω 就是这条轨道。若 $E_*=\frac{3}{2}$，等值集就是点 (1，0)，且 $q_-=q_+=1$。在这两种情况下，q 的下极限和上极限分别为 q_- 和 q_+。在等值集 $q^2+z^2=2E_*-2/q$ 上，q 增大时它也随之增大，并在 $q=q_\pm$ 时等于 $q_\pm^2$。因此，$(bt)^{1/3}r$ 的下极限和上极限也分别为 q_- 和 q_+。

□

例如，对于 $c=1$, $A(s_0)=1$ 和 $X(s_0)=0$，数值积分给出 $E_*=1.7842$，因此$q_-=0.6308$ 和 $q_+=1.4929$。计算得到的 $t^{1/3}|A|$ 的极小值和极大值，以及 $t^{1/3}|\gamma|$ 在$50\le t\le 3000$ 上的极小值和极大值，与这些数值精确到小数点后四位一致。

转向分数的单调性。我们回到关系 $B=\Phi(A)$，并询问转向分数 $P(E)/(2\pi)$ 何时是能量的单调函数。令

$$F(h)=\frac{1}{h^2\Phi(h)},$$

曲率半径为面积密度的函数。于是 (10.1) 为 $h''+h=F(h)$，并且在注10.4的记号下，$V'(h)=h-F(h)$。设 Φ 光滑，并令 $h_0>0$ 满足$F(h_0)=h_0$以及 $F'(h_0)<1$。则以 O为圆心、半径为 h_0的圆满足该关系，并且h_0是 V的非退化极小值，其中 $V''(h_0)=\omega^2$，且 $\omega^2=1-F'(h_0)$。我们考察 h_0附近的振荡，将 $V(h_0)=0$归一化，并使用注10.4中的宽度 $D(v)$。令$g(v)=\sqrt{v}\,D'(v)$。

命题 10.7（单调转向分数的检验）。在此情形下，以下结论成立 .

（*a*）周期是 g的平均值:

$$P(E)=\sqrt{2}\int_0^1\frac{g(Ew)}{\sqrt{w(1-w)}}\,dw.$$

因此，如果 g 在（0, E_1）上严格递增，那么 P也严格递增；如果 g 在此区间上严格递减，那么 P也严格递减。

（*b*）对于该族的每个能量 E，

$$P'(E)=\frac{1}{E}\int_{h_-(E)}^{h_+(E)}\Big(1-\frac{2VV''}{V'^2}\Big)\frac{dh}{\sqrt{2(E-V)}},$$

其中，第一个因子在 h_0处通过其极限0 延拓。

(*c*) 在圆上，

$$\lim_{E\to 0} P'(E) = \frac{\pi K}{12\,\omega^7}, \qquad K = 5F''(h_0)^2 + 3\big(1-F'(h_0)\big)F'''(h_0).$$

因此，若 $K>0$，则小振荡时转向分数严格递增；若 $K<0$，则严格递减。如果转向分数是能量的单调递增函数，那么 $K\ge 0$；如果它单调递减，那么 $K\le 0$。

(d) 宽度是周期的平均值：

$$\frac{D(v)}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{P(vw)}{\sqrt{1-w}}\,dw.$$

因此，若 P 在$(0,E_1)$上单调递增，则 $D(v)/\sqrt{v}$也单调递增；若 P 单调递减，则 $D(v)/\sqrt{v}$也单调递减。当且仅当 $D(v)/\sqrt{v}$ 为常数时，所有周期都相等。

证明。设$s=\sqrt{v}$。在 h_0 附近，函数 $\sigma(h)$ 在 $h\ge h_0$ 时等于 $\sqrt{V(h)}$，在$h\le h_0$ 时等于 $-\sqrt{V(h)}$；该函数是光滑的，且 $\sigma'(h_0)=\omega/\sqrt{2}$。令 ψ 为 $h\mapsto\sigma(h)$ 的反函数，并作平移使得 $\psi(0)=0$。于是 $h_\pm(v)=h_0+\psi(\pm s)$，因此 $D(v)=\psi(s)-\psi(-s)$，且

$$g(v) = \tfrac{1}{2}\big(\psi'(s)+\psi'(-s)\big).$$

这是 s的光滑偶函数，因此在 v 上除 $v=$外是光滑函数 0.

(a) 将 $v=Ew$ 代入注10.4的第一个公式。权函数 $1/\sqrt{w(1-w)}$为正，由此得到关于单调性的两个结论。

(b) 对(a)求导得

$$P'(E) = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{g'(Ew)\,w}{\sqrt{w(1-w)}}\,dw = \frac{\sqrt{2}}{E}\int_0^E \frac{\sqrt{v}\,g'(v)}{\sqrt{E-v}}\,dv.$$

值 $g(v)$是 $\sqrt{V}/|V'|$ 在两个点 $h_\pm(v)$处的值之和，并且

$$\frac{d}{dh}\frac{\sqrt{V}}{V'} = \frac{V'^2-2VV''}{2\sqrt{V}\,V'^2}, \qquad dv = V'\,dh.$$

将两边都换回变量 h 即可得到该公式。在 h_0附近，当 $x=h-h_0$时，有$V'^2-2VV''=O(x^3)$和 $V'^2\sim\omega^4x^2$，因此第一个因子趋于0。

(c) 令 $\psi(s)=c_1s+c_2s^2+c_3s^3+\cdots$。于是 $g(v)=c_1+3c_3v+O(v^2)$，根据 (b) 的证明中的第一个公式，

$$\lim_{E\to 0} P'(E) = \sqrt{2}\,g'(0)\int_0^1 \frac{w\,dw}{\sqrt{w(1-w)}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\,c_3.$$

由于 $V''=1-F'$ $V'''=-F''$ $V''''=-F'''$ V h_0 $-\frac{1}{2}\omega^2x^2-\frac{1}{6}F''x^3-$，$-$ $\frac{1}{24}F''''x^4+\cdots$ F h_0 V $h_0+\psi$ s $=s^2$ 且，在 处的展开为，其中 的导数取值于 。比较 (( )) 中的系数，得到

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega}, \qquad c_2 = \frac{F''c_1^2}{6\,\omega^2}, \qquad c_3 = \frac{c_1^3K}{72\,\omega^4},$$

因此极限 $\pi K/(12\omega^7)$。其余结论由 P' 在 $E=0$ 上连续可得。

(d) 将 $E=vw$ 代入注10.4的第二个公式。若 $D(v)/\sqrt{v}$ 为常数，则 g 为常数，并且根据 (a)， P 为常数。 □

(a)、(b) 和 (d) 的结论以其他形式在势系统中已有所知；我们将它们表述为关于关系 $B = \Phi(A)$ 的结论，并从注10.4的两个公式推出。(b) 是 [18, 定理 A]的 $k = 1$ 情形。同一定理还给出了点对上的一个充分条件：若每个能级上两点 $h_{\pm}(v)$ 处 $1 - 2VV''/V'^2$ 的值的某种组合不为零，则周期单调。这个组合是 $g'(v)$ 的正倍数，因此该条件就是 (a) 中的条件。(d) 中的必要条件见 [18, 定理 2.6 和注 2.7], ，它推广了 Opial [15] 关于偶势的一个结果；关于周期相等的论述引自 [19]。(c) 是圆心处周期展开式的经典首项，用 F 表示。

对于单项式关系 $A^pB = C$，当 $p < 3$ 时，有 $F(h) = h^{p-2}/C$，并且

$$K = \frac{2\,(p-2)(p+1)(p-3)^2}{h_0^2}.$$

因此， K 恰好在 $p = -1$ 和 $p = 2$ 时为零，此时所有周期都相等；在 $-1 < p < 2$ 时为负，在 $p < -1$ 和 $2 < p < 3$ 时为正。这与推论 9.1 一致：在第一种情况下，转向分数从 a_p 降至 b_p，而在另外两种情况下则上升。对于非单项式关系，取 $A^2B(3 + A^3) = 4$，使得 $F(h) = (3 + h^3)/4$，并且 $h_0 = 1$。于是，$\omega^2 = \frac{1}{4}$ 和 $K = \frac{99}{8} > 0$，因此转向分数在单位圆附近增加。

(a) 中的条件是充分但非必要的。对于 $B = 1$，有 $V(h) = \frac{1}{2}h^2 + 1/h - \frac{3}{2}$，根据命题 7.1，-周期对所有能量都减小。但是，计算得到的 g 仅从 $g(0) = \sqrt{2}/3$ 降至 $v = 12.2$ 附近的极小值 ≈ 0.6955；此后 g 增加并趋近于 $1/\sqrt{2}$，该值对应于周期的极限 π。

无逐点判据。命题10.7(b)通过对势阱上的积分来判定 $P'(E)$的符号，而(a)和(d)是关于宽度 D的条件，宽度同时涉及势阱的两侧。(c)是关于单个点 h_0的条件，但它只能判定小振荡。下一个命题表明，对于光滑关系，不存在一种普适条件，能够通过在势阱的每个点分别施加于 F的有限个导数，来刻画导数 $P'(E)$处处为正或处处为负的情形。它并未涉及弱单调性：证明中的比较关系具有常数周期，因而是弱单调的。原因在于，转向分数严格递增的关系，可能在势阱的一整侧上与转向分数为常数的关系重合。

考虑以下类型的三元组$(F,\ h_0,\ E_1)$：F是在开区间 $I \subset (0,\ \infty)$上的光滑正函数，$h_0 \in I$满足 $F(h_0) = h_0$且 $F'(h_0) < 1$，并且具有以下性质的曲线的支撑函数的振荡

$$\frac{1}{\kappa} = F(A), \qquad \text{that is,} \qquad B = \Phi(A) \ \text{ with } \ \Phi(A) = \frac{1}{A^2F(A)},$$

围绕 h_0且能量位于 $(0,\ E_1)$ 内的点都处于 I 内。它们的并集是区间 $W = (h_-(E_1),\ h_+(E_1))$，即势阱。设 $P(E)$ 为支撑函数的周期，则 $P(E)/(2\pi)$ 是转向分数。

命题 10.8 （无逐点判据）。不存在整数 $k \geq 0$ 和函数 Q（h、y_0、…、y_k），使得对于上述每个三元组（F、h_0、E_1），$P'(E) > 0$ 对所有 $E \in$（0、E_1）成立，当且仅当

$$Q\big(h, F(h), F'(h), \ldots, F^{(k)}(h)\big) > 0 \quad \textit{at every } h \in W \setminus \{h_0\}.$$

将 $P'(E) < 0$ 换成 $P'(E) > 0$ 时，同样成立。

证明。令 $h_0 = 1$ 和 $F_0 \equiv 1$。则 $V_0'(h) = h - 1$，因此 $V_0(h) = \frac{1}{2}(h-1)^2$, 方程 (10.1) 为 $h'' + h = 1$，并且对于所有 E，$P_0(E) = 2\pi$。

固定 $\varepsilon > 0$ 并令

$$\chi(s) = s \quad (s \ge 0), \qquad \chi(s) = s\big(1 + \varepsilon e^{-2/s^2}\big) \quad (s < 0).$$

函数 se^{-2/s^2} 延拓为零后，在 $s = 0$ 处光滑且在此处平坦，因此 χ 是光滑的，且 $\chi'(0) = 1$。此外，对于 $s < 0$，有 $\chi'(s) = 1 + \varepsilon e^{-2/s^2}(1 + 4/s^2) > 0$。因此，$h = 1 + \chi(s)$ 是一个光滑递增的变量变换，而 $V_L(1 + \chi(s)) = \frac{1}{2}s^2$ 定义了一个光滑势函数，它在 $h = 1$ 处有一个非退化极小值，且 $V_L''(1) = 1$。令 $F_L(h) = h - V_L'(h)$。对于 $h \ge 1$，我们有 $V_L = V_0$ 和 $F_L = 1$。由于 $F_L(1) = 1$ 且 $F_L'(1) = 1 - V_L''(1) = 0$，存在 $s_1 \in (0, 1)$，使得 $1 + \chi(s) > 0$，并且对于 $|s| \le s_1$，有 $F_L(1 + \chi(s)) > 0$。取 $E_1 = s_1^2/2 < 2$，并令 I 为一个包含 $[1 + \chi(-s_1)\ 1 + s_1]$ 且在其上 F_L 为正的开区间。那么，$(F_L, 1, E_1)$ 是上述的一个三元组，其势阱为 $W_L = (1 + \chi(-s_1)\ 1 + s_1)$。

由于 $s = \pm\sqrt{2}v$ 势阱的两侧分别为 $h_+(v) = 1 + \sqrt{2}v$ 和 $h_-(v) = 1 - \sqrt{2}v(1 + \varepsilon e^{-1/v})$，所以

$$D(v) = \sqrt{2v}\,\big(2 + \varepsilon e^{-1/v}\big), \qquad g(v) = \sqrt{v}\,D'(v) = \sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{2}\,e^{-1/v}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{v}\Big),$$

and

$$g'(v) = \frac{\varepsilon\sqrt{2}\,e^{-1/v}(2 - v)}{2v^3} > 0 \qquad (0 < v < 2).$$

根据命题 10.7(a)，P_L 在 $(0, E_1)$ 上严格递增；根据命题 10.7(b) 证明中的公式，对于每个 $E \in (0, E_1)$，$P_L'(E) > 0$。

令 $V_R(h) = V_L(2 - h)$，且 $F_R(h) = h - V_R'(h) = h + V_L'(2 - h)$。代换 $h \mapsto 2 - h$ 将 $h'' = -V_L'(h)$ 的解映射到 $h'' = -V_R'(h)$ 的解上，因此 $P_R = P_L$。对于 $h \le 1$，我们有 $F_R(h) = h + (1 - h) = 1$，且 $F_R(1) = 1$，$F_R'(1) = 0$。必要时减小 s_1 后，F_R 在其势阱 $W_R = (1 - s_1, 1 - \chi(-s_1))$ 的闭合附近为正，并且 $(F_R, 1, E_1)$ 是上述三元组。

假设 k 和 Q 存在。将该条件应用于 F_L，可得 $Q(h, 1, 0, \ldots\ldots, 0) > 0$ 对于 $1 < h < 1 + s_1$，因为 $F_L \equiv 1$ 在那里。将其应用于 F_R，可对 $1 - s_1 < h < 1$ 得到相同的不等式。现在考虑区间 $(1 - s_1,\ 1 + s_1)$ 上的三元组 $(F_0,\ 1,\ E_1)$，其势阱就是整个区间。该条件在其中每个点 $h \ne 1$ 处都成立，因此 $P_0'(E) > 0$，这与 $P_0 \equiv 2\pi$ 矛盾。

对于 $P'(E) < 0$，取 $-\frac{1}{2} < \varepsilon < 0$。于是 $\chi'(s) \ge 1 - \frac{1}{2}\sup_{u>0} e^{-2u}(1 + 4u) = 1 - e^{-1/2} > 0$，采用相同的构造；现在 $g'(v) < 0$ 在 $(0,\ 2)$ 上，因此 P_L 和 P_R 严格递减，同样的论证会导致矛盾。 □

势能 V_L 也经过了数值检验（对于 V_R，周期相同）：对于 $\varepsilon = 1$ 和 $\varepsilon = -\frac{1}{2}$，通过积分 $h'' = -V_L'(h)$ 计算得到的周期与注10.4中的公式在 10^{-10} 范围内吻合，并且它们分别随 E 递增、递减。

关系 F_L 和 F_R 是光滑的，但不是实解析的，因为它们各自在某个区间上等于常数 1，却并非恒等于常数。因此，证明并未判定实解析关系是否存在逐点判据，例如多项式或有理关系 $B = \Phi(A)$。命题 10.8 也为成对点上的条件留有余地：命题 10.7(a)的条件以及 [18, 定理 A] 的条件，比较每个能级上的两个点 $h_\pm(v)$，而这些条件足以适用于所有能量。

已知内容。 特殊族的完整答案。对于 $F(h) = h^{p-2}/C$，即对于 $A^pB = C$，根据 Castelli [7] 和 Rojas [8] 在第 9 节中使用的定理，除 -1 和 2 之外的每个 $p < 3$，转向分数都严格单调。对于 $F(h) = \mu + \nu h$，所有周期都相等（注 10.1）。注10.4从另一侧描述了一般答案：在具有非退化极小值的光滑势阱类中，一个可容许的对 $(P,\ M)$，由周期函数和

势阱的中点组成，并满足注10.4中的正性和可逆性条件，决定了势阱上的关系（而非势阱外的关系）；因此，具有单调转向分数的关系，就是那些来自 $(P,\ M)$ 且 P单调的对的关系。

相关文献。由于 $h'' = -V'(h)$ 与 $V'(h) = h - F(h)$，问题在于，对于形如 $V'(h) = h - F(h)$ 的势能，一维势系统的周期函数的单调性。关于这个问题，已有许多充分条件；参见 Opial [15],Schaaf [16], Chicone [14], 以及 [18] 中的参考文献。在 [18, 定理 A] 中，给出了一系列这样的条件，其中命题 10.7(a) 是第一个。例如，根据 [14, 定理 A]，若 $V/(V')^2$ 在势阱上是凸函数，则周期是能量的单调递增函数；若它是凹函数，则周期单调递减。这里的单调性取弱意义：对于$V = (h - h_0)^2/2$，商 $V/(V')^2$ 为常数，因此周期也为常数。Schaaf 条件 [16,定理 1] 是逐点的。用我们的记号，它如下所示。令

$$K(h) = 5F''(h)^2 + 3\big(1 - F'(h)\big)F'''(h),$$

因此，$K(h_0)$是命题 10.7(c)中的常数 K。若势阱中每个满足$F'(h) < 1$的点都满足 $K(h) > 0$，且势阱中每个满足 $F'(h) = 1$的点都满足$(h - F(h))F''(h) > 0$，那么对于该族的所有能量，$P'(E) > 0$。因此，决定圆附近单调性的量，再加上对 $F' = 1$所在点的附加条件，就构成了使所有能量下的转向分数递增的充分条件。这个附加条件不能省略。对于 $F(h) = 20 - 2\sin x$，若 $x = h - 20$，则有 $V = \frac{1}{2}x^2 + 2(1 - \cos x)$和 $K = 20 - 8\cos^2 x + 6\cos x \geq 6$，且势阱是单阱。小振荡的周期为 $2\pi/\sqrt{3}$。由于 $V(a) - V(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2) + 2(\cos x - \cos a)$，振幅为 $a = 2\pi$ 的振荡比 $x'' + x = 0$ 慢，而振幅为3π 的振荡则更快，因此前一种振幅下周期大于 2π，后一种振幅下周期小于 2π；周期并非单调。此处第二个条件在 $x = 4\pi/3$处不成立。对于 $A^pB = C$，当 $2 < p < 3$时，Schaaf 判据的两个假设在整个势阱内都成立。当 $p < -1$ 时，不存在满足 $F' = 1$的点，因为 $F' < 0$；但对于足够大的 h，条件 $K(h) > 0$不成立，尽管此时转向分数也递增。根据命题 10.8，这类逐点条件不可能同时也是必要条件。一般的必要条件见命题 10.7(d)。当周期不单调时，问题就变成它有多少个临界点，也就是有多少个满足 $P'(E) = 0$的能量。Chow 和 Sanders [17] 证明，对于三次势函数 V，这样的临界点不存在；对于四次势函数，至多有三个；Mañosas 和 Villadelprat [18] 给出了可对其数量作出界定的判据。

人工智能工具的使用

本研究广泛使用了人工智能助手，包括 OpenAI 的 Astra 和 Anthropic 的 Claude。作者提出问题、指导研究并核查结果。

参考文献

[1] O. N. Karpenkov，连分数与开普勒第二定律，arXiv:0911.2791（2009）。

[2] O. N. Karpenkov，连分数几何，第 2 版，《数学中的算法与计算》第 26 卷，Springer，2022 年，第 15 章。

[3] O. Mayer 和 A. Myller，《平面曲线的中心仿射微分几何》，《*Jassy* 大学科学年刊》18(1933), 234–280.

[4] U. Abresch 和 J. Langer，归一化曲线缩短流与相似解，《微分几何杂志》23 (1986), 175–196.[5] K.-S. Chou 和 X.-P. Zhu，曲线缩短问题，Chapman & Hall/CRC，2001.[6] V. I. Arnold，经典力学的数学方法，第2版，Springer，1989.[7] R. Castelli，幂律势系统中拱点角的单调性，《数学分析及其应用》428 (2015), 653–676；arXiv:1509.08662.[8] D. Rojas，利用势振子理论研究拱点角的单调性，《定性理论与动力系统》17 (2018), 631–635；arXiv:1710.08133.[9] H. Hopf，关于平面曲线切线与弦的转动，《组合数学》2 (1935), 50–62.[10] H. P. Halldorsson，曲线缩短流的自相似解，《美国数学会汇刊》364 (2012), 5285–5309；arXiv:1007.1617.[11] 美国国家标准与技术研究院数学函数数字图书馆，§9.7（艾里函数：渐近展开），https://dlmf.nist.gov/9.7.[12] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz，力学，第3版，培格曼出版社，1976.[13] M. Asorey、J. F. Cariñena、G. Marmo 和 A. Perelomov，等周期经典系统及其量子对应系统，《物理年鉴》322 (2007), 1444–1465；arXiv:0707.4465.[14] C. Chicone，平面哈密顿向量场的周期函数的单调性，《微分方程杂志》69 (1987), 310–321.[15] Z. Opial，关于微分方程 $x'' + g(x) = 0$解的周期，《波兰数学年刊》10 (1961), 49–72.[16] R. Schaaf，一类具有递增周期的哈密顿系统，《纯粹与应用数学杂志》363 (1985), 96–109.[17] S.-N. Chow 和 J. A. Sanders，关于周期的临界点个数，《微分方程杂志》64 (1986), 51–66.[18] F. Mañosas 和 J. Villadelprat，界定临界周期个数的判据，《微分方程杂志》246 (2009), 2415–2433.[19] A. Cima、F. Mañosas 和 J. Villadelprat，若干类哈密顿系统的等时性，《微分方程杂志》157 (1999), 373–413.[20] N. Kalinin、E. Lupercio 和 M. Shkolnikov，凸域上热带ζ函数的留数，arXiv:2604.21709 (2026)。