arXiv:2611.29075v1 [math.GM] 21 Nov 2026

带多线性权重的大模数等差数列中的素数

RUNBO LI

Abstract. 我们研究模数 q 大于$\sqrt{x}$时，直到 x 的素数在等差数列中的平均分布，其中 $q = q_1 \cdots q_n$ $(n \geqslant 2)$具有大小适宜的因子 $q_1, \ldots, q_n$，且平均值由任意一个受因子数界约束的多线性权重加权。具体而言，我们证明，当平均值由双线性权重加权，且 q_1 和 q_2 的大小位于一个明确给出的区域内时，直到 x 的素数在剩余类 a (模 q_1q_2)中均匀分布，平均范围涵盖最大为 $x^{8/15-\varepsilon}$ 的模数q_1q_2；这改进了 Li 最近为双线性权重得到的指数 $9/17$。这里的新关键在于，我们为两个因子大小都约为$x^{1/2}$的 II 型卷积和给出了一个估计。借助这一估计，双线性情形下的分布水平 $8/15$ 不再受 II 型和的限制，而是受 I 型$_3$ 和的限制，或者说受三元因子问题当前已知范围的限制。我们还结合 Harman 筛法的一个简单形式与各种算术信息（包括上述 II 型估计），进一步改进了 $n \geqslant 3$。我们以不同方式对因子$q_1, \ldots, q_n$ 分组，以便更有效地利用算术信息。具体而言，我们将三线性权重的结果推进至 $x^{145/266-\varepsilon}$，四线性权重推进至 $x^{457/814-\varepsilon}$，五线性权重推进至 $x^{3614/6353-\varepsilon}$。随着因子数目增加，该指数趋近于 $4/7$；这是由 Bombieri、Friedlander 和 Iwaniec 证明的、针对良可分解权重的经典结果。

1. Introduction

1.1. **背景**。对于互素整数 a和 $q > 1$，令 $\pi(x;\ q,\ a)$ 表示素数的数量$p \leqslant x$ 满足 $p \equiv a$ (模 q)。著名的 Bombieri–Vinogradov 定理 [2] [24] 断言，对于每个$A > 0$ 都存在 $B = B(A)$ 使得

$$\sum_{q \leqslant x^{1/2}(\log x)^{-B}} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x;q,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{1}$$

Elliott–Halberstam猜想 [9] 预言求和范围可以扩展到$q \leqslant x^{1-\varepsilon}$，但对于任何 $x^{1/2}$ 替换为 $x^{1/2+\delta}$ 时，尚不知道对（1）能够得到何种强度的估计 $\delta > 0$。

从 Fouvry 和 Iwaniec [12] [10] 以及 Bombieri、Friedlander 和 Iwaniec [3] [4] [5], 的工作开始，人们仍然能够超越 $x^{1/2}$，对于一个固定的 非零剩余类 a，前提是将（1）中的绝对值替换为具有适当分解性质的权重，或者限制模数。因此，对于良可分解权重，人们已经知道这类结果

级别为 $x^{4/7-\varepsilon}$ [3]的三重良可分解权重、级别为 $x^{3/5-\varepsilon}$ [19]和 $x^{5/8-\varepsilon}$ [20]的权重、光滑模数 [25] [21] [23], 以及具有适当大小因子的模数：Maynard [18]证明了

$$\sum_{\substack{q_1 \leqslant Q_1 \\ q_2 \leqslant Q_2 \\ (q_1q_2,a)=1}} \left| \pi(x;q_1q_2,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q_1q_2)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{2}$$

2020 Mathematics Subject Classification. **11N05**，**11N13**，**11N36**，**11L05**。*Key words and phrases.* **算术级数中的素数**，**Bombieri–Vinogradov 定理**，**离散法**，**克洛斯特曼和之和**。

每当

$$Q_1^2Q_2 < x^{1-\varepsilon}, \quad Q_1^7Q_2^{12} < x^{4-\varepsilon}, \quad Q_1^{19}Q_2^{20} < x^{10-\varepsilon},$$

这使得 Q_1Q_2 可以达到 $x^{11/21-\varepsilon}$。

介于（2）与良可分解权重之间的一种情形是双线性权重：我们要求形如以下的估计

$$\sum_{\substack{q_1\leqslant Q_1\\ q_2\leqslant Q_2\\ (q_1q_2,a)=1}} \lambda_1(q_1)\lambda_2(q_2)\left(\pi(x;q_1q_2,a)-\frac{\pi(x)}{\varphi(q_1q_2)}\right) \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{3}$$

对于任意除数有界序列 λ_1，λ_2。1986年，Bombieri、Friedlander 和 Iwaniec [3] 首次证明了当3时（3）成立。

$$Q_1 < x^{1/3}, \quad Q_2 < x^{1/5}, \quad Q_1^5Q_2^2 < x^2, \quad Q_1Q_2 < x^{29/56}.$$

1987年，Fouvry [11] 证明了当以下任一条件成立时，（3）成立

$$Q_1Q_2^3 < x, \quad Q_1Q_2 < x^{29/56}, \quad Q_1 < \max\left(x^{1/2}Q_2^{-1}, x^{2/5}Q_2^{-2/5}\right)$$

or

$$Q_1Q_2^3 < x, \quad Q_1Q_2 < x^{29/56}, \quad Q_1^4Q_2 < x^{403/266}, \quad Q_1^{7/4}Q_2 < x^{403/532}.$$

1998年，Baker 和 Harman [1] 改进了 Bombieri、Friedlander 和 Iwaniec 的结果 [3]，去掉了 $Q_1^5Q_2^2 < x^2$ 他们上述结果中的条件。他们证明了当3时（3）成立。

$$Q_1 < x^{1/3}, \quad Q_2 < x^{1/5}, \quad Q_1Q_2 < x^{29/56}.$$

显然，在 Maynard区域内，（2）蕴含（3）。最近，Li [15] 结合 [18], [11], [13] 和 [16] 的算术信息，并改进 Harman 筛法，证明了只要3，则（3）成立。

$$Q_1^2Q_2 < x^{1-\varepsilon}, \qquad Q_1^7Q_2^{12} < x^{4-\varepsilon}, \tag{4}$$

因此，Q_1Q_2 可以达到 $x^{9/17-\varepsilon}$这么大。对于四线性权重，Lichtman [16]将模数的规模推进到了 $x^{17/32-\varepsilon}$，而 Li [15]则为三线性权重取得了相同的指数 $17/32$。

1.2. 主要结果。 本文的主要目的之一是证明，对于双线性权重，可以达到指数 $8/15$。

定理 1.1。 设 a 为固定非零整数，并设 $\varepsilon > 0$、$A > 0$、$B_0 > 0$。令 Q_1、$Q_2 \geqslant 1$满足

$$Q_1^2Q_2 \leqslant x^{1-\varepsilon}, \qquad Q_1^8Q_2^{14} \leqslant x^{5-\varepsilon}, \qquad Q_1^{16}Q_2^{107} \leqslant x^{41/2-\varepsilon}, \qquad Q_1Q_2 \leqslant x^{8/15-\varepsilon}. \tag{5}$$

设 λ_1、λ_2 为复数序列，且 $|\lambda_i(q)| \leqslant \tau(q)^{B_0}$。那么

$$\sum_{\substack{q_1\leqslant Q_1\\ q_2\leqslant Q_2\\ (q_1q_2,a)=1}} \lambda_1(q_1)\lambda_2(q_2)\left(\pi(x;q_1q_2,a)-\frac{\pi(x)}{\varphi(q_1q_2)}\right) \ll_{a,\varepsilon,A,B_0} \frac{x}{(\log x)^A}.$$

写出 $Q_i = x^{\theta_i}$。用 θ_1 表示，θ_2，区域（5）由以下条件给出：$2\theta_1+\theta_2 < 1$，$8\theta_1+14\theta_2 < 5$，$16\theta_1+107\theta_2 < 41/2$ 以及 $\theta_1+\theta_2 < 8/15$。第一个条件迫使 $\theta_1 < 1/2$，因此当 q_1 时，q_2 分别是“大”因子和“小”因子。按层级参数化，我们得到如下结果。

推论 1.2。 令 $0<\delta<1/30$，并令 θ_2 满足

$$2\delta<\theta_2<\min\left(\frac{1-8\delta}{6},\ \frac{25-32\delta}{182}\right).$$

那么 (3) 在 $Q_1=x^{1/2+\delta-\theta_2}$ 且 $Q_2=x^{\theta_2}$的条件下成立。特别地，对于每个固定的 $\theta_2\in(1/15,11/90)$以及任意充分小的 $\varepsilon>0$，估计式 (3) 在 $Q_2=x^{\theta_2}$ 和 $Q_1Q_2=x^{8/15-\varepsilon}$的条件下成立。

事实上，在 $\theta_1=1/2+\delta-\theta_2$ 下，这四个条件写作 $\theta_2>2\delta$, $\theta_2<(1-8\delta)/6$, $\theta_2<(25-32\delta)/182$ 和 $\delta<1/30$，定理 1.1 适用于充分小的 ε。简单验证可知，Li 的 $9/17$ 区域 (4)（其中 $Q_1Q_2\leqslant x^{1/2-\varepsilon}$ 的部分由 Bombieri–Vinogradov 定理覆盖）包含于 (5) 中：若 $2\theta_1+\theta_2<1$, $7\theta_1+12\theta_2<4$和 $\theta_1+\theta_2\geqslant 1/2$，则 $\theta_2<1/10$ 和 $\theta_1>2/5$，从而有 $8\theta_1+14\theta_2<72/17+3/5=411/85<5$,$16\theta_1+107\theta_2<144/17+91/10=2987/170<41/2$ 和 $\theta_1+\theta_2<9/17<8/15$。表 1 对已知结果进行了比较。

	平均类型	θ_i的条件	$\sup(\sum\theta_i)$
B–F–I [3]	双线性权重	$\theta_1<\frac{1}{3}$, $\theta_2<\frac{1}{5}$, $5\theta_1+2\theta_2<2$, $\theta_1+\theta_2<\frac{29}{56}$	$29/56\approx 0.5179$
Fouvry [11]	双线性权重	$\theta_1+3\theta_2<1$, $\theta_1+\theta_2<\frac{29}{56}$, $\theta_1<\max(\frac{1}{2}-\theta_2, \frac{2}{5}(1-\theta_2))$;	$29/56\approx 0.5179$
		$\theta_1+3\theta_2<1$, $\theta_1+\theta_2<\frac{29}{56}$, $4\theta_1+\theta_2<\frac{403}{266}$, $\frac{7}{4}\theta_1+\theta_2<\frac{403}{532}$	$29/56\approx 0.5179$
B–H [1]	双线性权重	$\theta_1<\frac{1}{3}$, $\theta_2<\frac{1}{5}$, $\theta_1+\theta_2<\frac{29}{56}$	$29/56\approx 0.5179$
Maynard [18]	绝对值	$2\theta_1+\theta_2<1$, $7\theta_1+12\theta_2<4$, $19\theta_1+20\theta_2<10$	$11/21\approx 0.5238$
Lichtman [16]	四线性权重	$\theta_1+\theta_2<\frac{1}{2}$, $\theta_1+2\theta_3<\frac{1}{2}$, $2\theta_3<\theta_2<\frac{1}{32}$	$17/32=0.53125$
Li [15]	双线性权重	$2\theta_1+\theta_2<1$, $7\theta_1+12\theta_2<4$	$9/17\approx 0.5294$
	三线性权重	复杂，见 [15]	$17/32=0.53125$
定理 1.1	双线性权重	$2\theta_1+\theta_2<1$, $8\theta_1+14\theta_2<5$, $16\theta_1+107\theta_2<\frac{412}{}$, $\theta_1+\theta_2<\frac{8}{15}$	$8/15\approx 0.5333$
定理8.3–8.4	三线性权重	复杂的	$145/266\approx 0.5451$
定理 8.4	四线性权重	复杂的	$457/814\approx 0.5614$
定理 8.4	五线性权重	复杂	$3614/6353\approx 0.5688$
B–F–I [3]	良可分解权重		$4/7\approx 0.5714$

TABLE 1。 素数在固定剩余类模分解模数的平均等分布结果 li

由于除数有界序列的狄利克雷卷积仍然是除数有界序列，因此定理 1.1立即涵盖了多线性权重。

推论 1.3。 设 $k\geqslant 2$，设 Q_1，……，$Q_k\geqslant 1$ 并设 λ_1，……，λ_k 为满足 $|\lambda_i(q)|\leqslant\tau(q)^{B_0}$的复数序列。假设对于某个 $I\subset\{1,\dots,k\}$，数对 $\left(\prod_{i\in I}Q_i,\ \prod_{i\notin I}Q_i\right)$ 满足 （5）。那么，对于

每个固定非零整数 a 以及每个 $A>0$,

$$\sum_{\substack{q_i\leqslant Q_i\ (1\leqslant i\leqslant k)\\(q_1\cdots q_k,a)=1}}\lambda_1(q_1)\cdots\lambda_k(q_k)\left(\pi(x;q_1\cdots q_k,a)-\frac{\pi(x)}{\varphi(q_1\cdots q_k)}\right)\ll\frac{x}{(\log x)^A}.$$

证明。令 $\lambda^I(q):=\sum\prod_{i\in I}\lambda_i(q_i)$，其中求和遍及所有满足 $q_i\leqslant Q_i$ 的因式分解 $q=\prod_{i\in I}q_i$；并相对于 I 的补集类似地定义 λ^J。于是 $|\lambda^I(q)|,|\lambda^J(q)|\leqslant\tau(q)^{k(B_0+1)}$，这两个序列分别支撑在 $q\leqslant\prod_{i\in I}Q_i$ 和 $q\leqslant\prod_{i\notin I}Q_i$ 上，而所求的和等于定理 1.1 中将 (λ_1,λ_2) 替换为 (λ^I,λ^J) 后的和。□

事实上，通过以不同方式对因子分组并应用 Harman 筛法，我们可以为多线性权重得到更好的结果；详情将在第 8 节给出。

1.3. 接近 $x^{1/2}$ 的新 II 型估计。上述类型的结果是通过将素数的指示函数分解为卷积而证明的，而模数的范围则受到现有估计的限制，具体取决于

$$\Delta(q)=\Delta_{\alpha,\beta}(q;a):=\sum_{m\sim M}\sum_{n\sim N}\alpha_n\beta_m\left(\mathbb{1}_{mn\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}-\frac{\mathbb{1}_{(mn,q)=1}}{\varphi(q)}\right),\qquad MN\asymp x,\tag{6}$$

在 N 的不同范围内。当模数的大小为 $x^{1/2+\delta}$ 时，最棘手的区域是 $x^{1/2-\delta}\leqslant N\leqslant x^{1/2+\delta}$，对于一般模数，目前尚无已知估计。在 Zhang [25], 、Polymath8a[21] 和 Maynard [18] 的工作中，这一区域借助（不完全）Kloosterman 和的 Weil 界加以处理；而对于模数 q_1q_2 满足 $q_1\sim Q$ 时，$q_2\sim R$ 则需要 $Q^7R^{12}<x^4$（见 [[18],命题 8。2]）。这正是（4）中的第二个条件的由来，也正因为如此，区域（4）止于 $9/17$。我们的主要新结果消除了双线性权重所面临的这一障碍。

在全文中，我们记

$$z_0:=x^{1/(\log\log x)^3},\qquad y_0:=x^{1/\log\log x},$$

并且，如果一个支撑在 $n\sim N$ 上的复数序列 (α_n) 满足 *Siegel–Walfisz* 条件，则称其满足该条件：对任意 $d\geqslant 1$、$k\geqslant 1$，$(b,\ k)=1$ 以及任意 $A>1$，都有

$$\left|\sum_{\substack{n\sim N\\n\equiv b\,(\mathrm{mod}\,k)\\(n,d)=1}}\alpha_n-\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n\sim N\\(n,dk)=1}}\alpha_n\right|\ll_A\frac{N\tau(d)^{B_0}}{(\log N)^A}.\tag{7}$$

注意到，α_n 显然满足 Siegel–Walfisz 条件（7），如果 $\alpha_n=1$；如果 $\alpha_n=\mu(n)$，或者如果

$$\alpha_n=\sum_{\substack{p_1\cdots p_j=n\\p_i\sim P_i}}1$$

由 Siegel–Walfisz 定理可知。

对于 $q\in\mathbb{N}$，令 $\lambda_1=\lambda_1(q)$ 表示同余子群 $\Gamma_0(q)$ 的双曲拉普拉斯算子的最小正特征值，并令 $\vartheta_q:=\max(0,\ \sqrt{1-4\lambda_1})$。如果对所有 $q\in\mathbb{N}$ 都有 $\vartheta_q\leqslant\vartheta$，则称 $\vartheta\in[0,1/2]$ 是可容许的。Selberg 特征值猜想 [22] 断言 $\vartheta=0$ 是可容许的，而他的界 $\lambda_1\geqslant 3/16$ 则给出 $\vartheta=1/2$ 是可容许的。目前最佳的无条件结果归功于 Kim 和 Sarnak [14], ，他们证明了 $\vartheta=7/32$ 是可容许的。

定理 1.4（$x^{1/2}$附近的 II 型估计。设 ϑ 可容许。设 a 为固定非零整数，且设 $\varepsilon>0$、$A>0$、$B_0>0$。设 M、N、Q、$R\geqslant 1$ 满足 $MN\asymp x$ 以及

$$Qx^{\varepsilon}\leqslant N\leqslant x^{1/2+\varepsilon/100},\tag{8}$$

$$N^{1/2}Q^{1/2}R^4 \leqslant x^{1-\varepsilon}, \tag{9}$$
$$N^{1/2+\vartheta}Q^{1/2}R^{4-3\vartheta} \leqslant x^{1-\varepsilon}. \tag{10}$$

设 α_n、β_m、λ_q、ν_r 为复数序列，满足 $|\alpha_n|$、$|\beta_n|$、$|\lambda_n|$、$|\nu_n| \leqslant \tau(n)^{B_0}$，并假设 α_n 支撑在满足 $P^-(n) \geqslant z_0$ 的整数 n 上，且满足 *Siegel–Walfisz* 条件 *(7)*。于是，取 *(6)* 中的 $\Delta(q)$，有

$$\sum_{q\sim Q}\sum_{\substack{r\sim R\\(qr,a)=1}} \lambda_q\nu_r\Delta(qr) \ll_{a,\varepsilon,A,B_0} \frac{x}{(\log x)^A}.$$

取 $\vartheta = 7/32$时，条件（10）写作

$$N^{23/32}Q^{1/2}R^{107/32} \leqslant x^{1-\varepsilon}.$$

当 α 和 β 均属于上述类型时，可以互换 m 和 n的作用，从而得到一个关于 N 的估计，其取值范围关于 $x^{1/2}$对称。

推论 1.5。 设 $\varepsilon > 0$，并设 Q、$R \geqslant 1$ 满足

$$QR^8 \leqslant x^{3/2-3\varepsilon}, \qquad Q^{16}R^{107} \leqslant x^{41/2-17\varepsilon}.$$

设 $MN \asymp x$ 满足 $Qx^{\varepsilon} \leqslant N \leqslant x^{1-\varepsilon}/Q$，并设 α_n、β_m、λ_q、ν_r 如定理 *1.4*中那样满足除数有界条件，其中现在 α_n 和 β_m 均支撑在不含小于 z_0 的素因子的整数上，并满足 *Siegel–Walfisz* 条件 （7）。则

$$\sum_{q\sim Q}\sum_{\substack{r\sim R\\(qr,a)=1}} \lambda_q\nu_r\Delta(qr) \ll \frac{x}{(\log x)^A}.$$

1.4. **方法概述**。 我们在一个简化情形下描述定理1.4的证明，忽略互素条件和因子 $x^{o(1)}$。按照Linnik色散法，我们对关于 q 和 m的求和应用柯西不等式；这样便消去了未知系数 λ_q 和 β_m，并使 q 和 m 成为光滑 变量。对关于m的求和应用泊松求和，并减去预期的主项后，需要证明

$$\sum_{q\sim Q}\sum_{r_1,r_2\sim R}\frac{\nu_{r_1}\overline{\nu_{r_2}}}{qr_1r_2}\sum_{\substack{n_1,n_2\sim N\\ n_1\equiv n_2 \pmod q}}\alpha_{n_1}\overline{\alpha_{n_2}}\sum_{1\leqslant|h|\leqslant H} e\left(ah\frac{n_1-n_2}{q}\cdot\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2}\right), \qquad H \approx \frac{QR^2}{M}, \tag{11}$$

比平凡界 N^2H/Q 小，差不多小了 H倍。

文献中对类似（11）的和的处理方式各不相同，区别在于第二次应用柯西不等式时，选择哪些变量留在外面。在 [[3], 第8] 节 q 的第一种方法中，将光滑变量 $f =$ 替换为$n_1 - n_2$（$/q$） $n_1 - n_2$的互补因子n_1r_2，并将（n_2，f，h）留在外面、（r_1，$c = n_1r_2$）留在里面；非对角项是关于两个光滑变量 $d = n_2$ 和 [7], 的 Kloosterman 分式之和，并利用 Deshouillers和Iwaniec 的界 $N^2R < x$进行估计，但只有在 [25] 时，对角项才是可容许的。在 Zhang 的工作 [[18], 中（见 17]第q章），将变量（n_1，n_2，h）留在外面、（r_1，r_2，N）留在里面；此时，对于所有不超过约 $x^{1/2}$ q 的 n_1，对角项都是可容许的，但系数依赖于 n_2 （在含有绝对值的结果中，它们必然如此），而非对角项则通过补全关于 $Q^7R^{12} < x^4$、的和并应用 Weil 界进行估计，由此得到。

我们的观察是，对于双线性权重，可以将这两种方法结合起来。由于 q 是光滑的，我们可以转而考虑 $f =$ ($n_1 - n_2$)/q，这是一个较短的 变量，$|f| \leqslant N/Q$。接着，我们将 (f，n_1，n_2) 留在外面，将 (h，r_1，r_2) 放在里面，并利用正性舍去同余关系 $n_1 \equiv n_2$(模 f)，从而使 n_1 和 n_2 成为长度为 N的自由光滑变量。平方展开后，并且在

将数对 $(r_1,\ r_2)$ 按通常方式分解为若干类，使每一类中的所有互素条件均成立 [10],非对角项为

$$\sum_{f}\sum_{\substack{(h,r_1,r_2)\\(h',r_1',r_2')}}\xi(h,r_1,r_2)\overline{\xi(h',r_1',r_2')}\sum_{n_1,n_2}\Psi\left(\frac{n_1}{N}\right)\Psi\left(\frac{n_2}{N}\right)e\left(afk\frac{\overline{n_2r_1r_1'}}{n_1[r_2,r_2']}\right)$$

带有某些有界系数 ξ 以及

$$k=\frac{hr_1'r_2'-h'r_1r_2}{(r_2,r_2')}\neq 0.$$

这恰好是 [[7], 定理 12], 中所考虑类型的一个求和，其中两个“层级”变量$r=r_1r_1'$ 和 $s=[r_2,r_2']$ 均出现。所得界在(9)和(10)条件下是可容许的；这两个条件分别来自常规谱和（可能存在的）例外谱。只要 $N\leqslant x^{1/2-\varepsilon}$，对角项 $k=0$ 就是可容许的。为了达到 $N=x^{1/2+\varepsilon/100}$，我们使用 Maynard [[18], 第 14]章中的去放大装置：在第一次应用柯西不等式之前，将变量 n 按模 e 分成剩余类，其中模数为辅助模数 $e\sim E=x^{O(\varepsilon)}$，从而在(11)中得到更强的同余关系 $n_1\equiv n_2$ （模 qe）。模 e的同余关系不能省略；我们在外层求和中保留它，并利用 Lichtman [17], 将 Deshouillers–Iwaniec界推广到带同余条件的求和这一结果，其中对参数 ϑ的依赖是显式的。

1.5. **研究范围与局限**。 有了定理1.4 ，II型和在模数大小约至 $x^{223/396}$ （若 $Q^2R\approx x$）的范围内便得到了控制。定理 8/15 中的指数 1.1 则来自另一处：大小约为 $x^{1/3}$ 的三个素数之积，可借助关于三元除数函数的估计来处理；这些估计见 [[18], 章 20], ，目前仅适用于模数不超过 $x^{8/15}$的情形。条件 $Q_1^8Q_2^{14}\leqslant x^{5-\varepsilon}$ 和 $Q_1^{16}Q_2^{107}\leqslant x^{41/2-\varepsilon}$ 在应用其他算术信息时不可或缺（第二个条件在定理 1.4中也需要），而 $Q_1^2Q_2\leqslant x^{1-\varepsilon}$则保证定理 1.4的适用范围涵盖了 $x^{1/2}$附近的临界区间。

此方法本质上依赖于这样一个事实：在首次应用柯西不等式时，大模数的系数便被消去了。因此，对于一般模数（无论固定还是一致的剩余类，式（ 1/2 1）中的指数 ），以及带有绝对值的估计（如式（2），都不能带来新的结果；当 [3] [1], 满足 q_1 与 q_2 大小相当时，其所在区域也与式（5）不相交，而 29/56 此处仍以该指数为最佳。

第 2–6 节包含定理 1.4 的证明。新论证位于第 5 节；第 3 节中化归为指数和的处理是 [[18], 命题 144], 的一个变体，我们将准确指出其差异所在。第 7 节中，我们遵循 1.1 的整体架构，推导出定理 [18]。在第 8 节中，我们进一步应用一种简单形式的 Harman 筛法，以获得关于多线性权重的更好结果。唯一输入的新算术信息是定理1.4，其余要素取自
[3], [4], [10], [11], [13], [16], [17], [18]和 [20]。
记号。本文中，我们始终假设 x是充分大的实数，a是固定非零整数，而 ε、ε_0 是充分小的正实数。我们同时使用兰道记号和维诺格拉多夫记号，隐含常数可以依赖于 a、ε以及指数 A、B_0。记 $e(t):=\exp(2\pi it)$，并且 $n\sim N$ 表示 $N<n\leqslant 2N$。按惯例，τ、φ、μ 分别表示约数函数、欧拉函数和莫比乌斯函数；$P^-(n)$和 $P^+(n)$分别表示 n的最小素因子和最大素因子；(m,n)、$[m,n]$ 分别表示最大公约数和最小公倍数。若$(n,c)=1$，则 n 表示 n 模 c的一个逆元；对于复系数，上划线表示复共轭。若一个序列的所有项的模都不超过1，则称其为1-有界。记$\mathrm{sm}(n;z):=\prod_{p\leqslant z}p^{v_p(n)}$表示 n的 z-光滑部分。沿用 [18], 的记号，令$\psi_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 [[18], 第 6]章中的固定光滑函数；它的支集包含于 $[1/2,5/2]$ ，且

在 $[1,2]$, 上等于**1**，并且 $\widehat{\psi_0}(\xi) = \int \psi_0(t)e(-\xi t)\mathrm{d}t$ 是其傅里叶变换。最后，我们固定一个光滑函数 $\Psi\colon \mathbb{R}\to[0,1]$，其支集包含于 $[1/2,5/2]$，且在 $[1,2]$上 $\Psi = 1$。

2. Preliminary Lemmas

本节将证明若干引理，以供后续章节使用。

2.1. 互反性。

引理 2.1（贝祖等式）。 设 $(q_1,q_2) = 1$。则有

$$\frac{a}{q_1q_2} \equiv \frac{a\overline{q_1}}{q_2} + \frac{a\overline{q_2}}{q_1} \pmod 1.$$

下一个引理将用于计算离散法中由泊松求和产生的相位。在 [3] 和 [18] 中，相应的计算是借助引理 2.1在附加假设（$\ell r_1, r_2$） $= 1$下完成的；我们这里希望避免这一假设。

引理 2.2。 设 ℓ、r_1、r_2、n_1、$n_2 \geqslant 1$ 和 b 是整数，且

$$(r_1,r_2) = (n_1,n_2) = (n_1,r_1) = (n_2,r_2) = 1 \qquad and \qquad n_1 \equiv n_2 \pmod \ell,$$

并令 $f\colon = (n_1-n_2)/\ell$。于是 $(n_1n_2、\ \ell) = 1$，同余方程组

$$mn_1 \equiv b \pmod{\ell r_1}, \qquad mn_2 \equiv b \pmod{\ell r_2}$$

有唯一解 $m \equiv \mu$（模 ℓr_1r_2），并且

$$\frac{\mu}{\ell r_1r_2} \equiv bf\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2} + \frac{b}{\ell r_1r_2n_1} \pmod 1.$$

证明。 任何同时整除 ℓ和 n_1的素数都整除 $n_2 = n_1 - \ell f$，这是不可能的；因此 $(n_1n_2,\ \ell) = 1$。于是 $(n_1,\ \ell r_1) = (n_2,\ \ell r_2) = 1$，所以该方程组的两个解在模 ℓr_1 以及模 ℓr_2意义下相同，因而在模 $[\ell r_1, \ell r_2] = \ell r_1r_2$意义下也相同。我们的假设给出 $(n_2r_1,\ n_1r_2) = 1$。设 X 为满足 $Xn_2r_1 \equiv bf$ (模 n_1r_2) 的整数，即 $Xn_2r_1 = bf + tn_1r_2$。两边乘以 ℓ 并利用$\ell f = n_1 - n_2$，得到

$$\ell r_1Xn_2 + bn_2 = bn_1 + \ell tn_1r_2.$$

因此 n_1 整除 $(\ell r_1X + b)n_2$，且由于 $(n_1,\ n_2) = 1$ 数 $\mu := (\ell r_1X + b)/n_1$ 是一个整数。根据构造，$\mu n_1 = \ell r_1X + b \equiv b$(模 ℓr_1)，而所示恒等式给出 $\mu n_2 = b + \ell tr_2 \equiv b$(模 ℓr_2)。最后

$$\frac{\mu}{\ell r_1r_2} = \frac{\ell r_1X + b}{\ell r_1r_2n_1} = \frac{X}{n_1r_2} + \frac{b}{\ell r_1r_2n_1}.$$

□

引理 2.3. 设 $n_1, n_2, r_1, r_1', r_2, r_2' \geqslant 1$ 为整数，且 $(n_2r_1r_1', n_1r_2r_2') = 1$，并设 $h, h' \in \mathbb{Z}$。则

$$h\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2} - h'\frac{\overline{n_2r_1'}}{n_1r_2'} \equiv k\frac{\overline{n_2r_1r_1'}}{n_1[r_2,r_2']} \pmod 1, \qquad k := \frac{hr_1'r_2' - h'r_1r_2}{(r_2,r_2')}.$$

证明。 设 $s := [r_2,r_2']$，并设 Y 是 $n_2r_1r_1'$ 模 n_1s 的逆元。则 $r_1'Y$ 是n_2r_1 模 n_1r_2 的逆元，且 r_1Y 是 n_2r_1' 模 n_1r_2' 的逆元。因此，左边模 **1** 同余于

$$\frac{hr_1'Y}{n_1r_2} - \frac{h'r_1Y}{n_1r_2'} = \frac{Y}{n_1s}\left(hr_1'\frac{s}{r_2} - h'r_1\frac{s}{r_2'}\right),$$

以及 $s/r_2 = r_2'/(r_2,\ r_2')$、$s/r_2' = r_2/(r_2,\ r_2')$。 □

2.2. **拆分为互素集合。**

引理 2.4。 （*[*[18], 引理 *13。2]*）。设 $\mathcal{N}$ 是由以下正整数对组成的集合：（u，v），且 u，$v \leqslant x$，（u，v）$=1$ 以及 $P^-(uv) \geqslant z_0$。则存在一个划分 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_J$，满足

$$J \ll \exp\left(O(\log\log x)^7\right)$$

suc 使得 $(u, v') = (u', v) = 1$，只要 (u, v) 和 (u', v') 属于同一个类 $\mathcal{N}_j$.

2.3. **Kloosterman 和。**

引理 2.5 (不完全Kloosterman和)。设 $C_0 > 0$，且 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是一个支撑在 $[1/2, 5/2]$ 上的光滑函数，其中 $\|f^{(j)}\|_\infty \ll_j (\log x)^{jC_0}$ 对所有 $j \geqslant 0$ 均成立。则对所有整数 b 和 $1 \leqslant c \leqslant x^{C_0}$ 以及所有实数 $0 < Y \leqslant x^{C_0}$，有

$$\sum_{\substack{n \\ (n,c)=1}} f\left(\frac{n}{Y}\right) e\left(\frac{b\overline{n}}{c}\right) \ll x^{o(1)} \left(c^{1/2} + \frac{Y}{c}(b, c)\right).$$

证明。若 $Y < 1$，则该和有 $O(1)$ 项，结论显然。对于 $Y \geqslant 1$，此估计由求和补全和 Weil 界推出；参见 [[18], 引理 16.1]。□

以下关于克洛斯特曼和之和的深刻估计是本文的主要工具。该估计源自Deshouillers和Iwaniec的工作 [[7], 定理 12]，，其中通过库兹涅佐夫迹公式推导出该估计。带有同余条件和显式 ϑ 依赖性的版本归功于Lichtman [17]，，并且 $a = 1$。

定理 *2.6。*（*[*[17], 定理 *1.8]*）。设 ϑ 为可容许的。设 C、D、N、R、$S \geqslant 1$，且 q c_0、$d_0 \geqslant 1$ 为整数，并满足 $(c_0 d_0, q) = 1$。设 (b_n, r, s) 为一个复数序列，其支集包含于 $1 \leqslant n \leqslant N$、$R < r \leqslant 2R$、$S < s \leqslant 2S$。设 $g:\ \mathbb{R}^5_{>0} \to \mathbb{C}$ 为一个光滑函数，紧支撑于 $(C, 2C] \times (D, 2D] \times \mathbb{R}^3_{>0}$，满足

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_5} g}{\partial c^{\nu_1} \partial d^{\nu_2} \partial n^{\nu_3} \partial r^{\nu_4} \partial s^{\nu_5}}(c, d, n, r, s) \ll_{\nu_1,\ldots,\nu_5} \left(c^{-\nu_1} d^{-\nu_2} n^{-\nu_3} r^{-\nu_4} s^{-\nu_5}\right)^{1-\epsilon_0}$$

对于某个较小的 $\epsilon_0 > 0$，以及所有固定的 $\nu_j \geqslant 0$。于是

$$\sum_{\substack{c,d,n,r,s \\ c \equiv c_0, d \equiv d_0 \pmod{\mathsf{q}} \\ (\mathsf{q}rd, sc)=1}} b_{n,r,s} g(c, d, n, r, s) e\left(n\frac{\overline{rd}}{sc}\right) \ll_{\epsilon,\epsilon_0} (\mathsf{qCDNRS})^{\epsilon+O(\epsilon_0)} \mathsf{q}^{3/2} \mathsf{K} \|b\|_2,$$

其中 $\|b\|_2 := \left(\sum_{n,r,s} |b_{n,r,s}|^2\right)^{1/2}$ 并且

$$\mathsf{K}^2 := \mathsf{q}(\mathsf{CS}(\mathsf{N}+\mathsf{RS})(\mathsf{C}+\mathsf{DR}) + \mathsf{NRS}) + \mathsf{CS}(\mathsf{CD}\sqrt{\mathsf{R}})^{2\vartheta}(\mathsf{N}+\mathsf{RS})^{1-\vartheta}(\mathsf{C}+\mathsf{DR})^{1-2\vartheta} + \mathsf{D}^2\mathsf{NR} \tag{12}$$

Remark. 取 $\vartheta = 1/2$，可得 [[8], 定理 2.1]，并根据 [6]作出修正。

3. The dispersion method

本节将 $\sum \lambda_q \nu_r \Delta(qr)$ 的估计归约为两个指数和的估计。这一归约方法沿用自第 14]，章的 [[18]，，其中纳入了通过辅助模数 e进行的去放大；这里需要稍作改动的形式。

令 M，N，Q，R，D，$E \geqslant 1$ 其中 $MN \asymp x$，并令

$$H_1 := \frac{QDR}{M}(\log x)^5, \qquad H_2 := \frac{QDR^2}{M}(\log x)^5.$$

对于复数序列（α_n）、（$\lambda_{d,\,r}$）以及常数 $C \geqslant 0$，定义

$$\mathcal{E}_1 := \sum_{e\sim E} \mu^2(e) \sum_{\substack{q \\ (q,a)=1}} \psi_0\left(\frac{q}{Q}\right) \sum_{\substack{d\sim D \\ (d,a)=1}} \sum_{\substack{r_1,r_2\sim R \\ (r_1r_2,a)=1}} \frac{\lambda_{d,r_1}\overline{\lambda_{d,r_2}}}{\varphi(qder_2)\, qdr_1}$$
$$\times \sum_{\substack{n_1,n_2\sim N \\ (n_1,qder_1)=1 \\ (n_2,qder_2)=1}} \alpha_{n_1}\overline{\alpha_{n_2}} \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_1} \widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1}\right) e\left(\frac{ah\overline{n_1}}{qdr_1}\right)$$

and

$$\mathcal{E}_2 := \sum_{e\sim E} \mu^2(e) \sum_{\substack{q \\ (q,a)=1}} \psi_0\left(\frac{q}{Q}\right) \sum_{\substack{d\sim D \\ (d,a)=1}} \sum_{\substack{r_1,r_2\sim R \\ (r_1,r_2)=1 \\ (r_1r_2,ae)=1}} \frac{\lambda_{d,r_1}\overline{\lambda_{d,r_2}}}{qdr_1r_2} \sum_{\substack{n_1,n_2\sim N \\ n_1\equiv n_2 (\mathrm{mod}\, qde) \\ (n_1,n_2)=(n_1,r_1)=(n_2,r_2)=1 \\ |n_1-n_2|\geqslant N/(\log x)^C}} \alpha_{n_1}\overline{\alpha_{n_2}}$$
$$\times \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_2} \widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1r_2}\right) e\left(ah\frac{n_1-n_2}{qd}\cdot\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2}\right) e\left(\frac{ah}{qdr_1r_2n_1}\right).$$

注意，若 在 $\mathcal{E}_2$ 条件 $(n_1, n_2) = 1$ 和 $n_1 \equiv n_2$ (模 qde) 成立时，蕴含 $(n_1n_2, qde) = 1$.

命题 *3.1*（化归为指数和）。设 $\alpha_n, \beta_m, \gamma_{q,d}, \lambda_{d,r}$ 是复数序列，满足 $|\alpha_n|, |\beta_n| \leqslant \tau(n)^{B_0}$, $|\gamma_{q,d}| \leqslant \tau(qd)^{B_0}$ 以及 $|\lambda_{d,r}| \leqslant \tau(dr)^{B_0}$。假设 α_n 支撑在 $P^-(n) \geqslant z_0$ 上，且满足 *Siegel–Walfisz* 条件 *(7)*，并且 $\lambda_{d,r}$ 支撑在 $P^-(r) \geqslant z_0$ 上。令

$$\mathcal{S} := \sum_{\substack{d\sim D \\ (d,a)=1}} \sum_{\substack{q\sim Q \\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{r\sim R \\ (r,a)=1}} \lambda_{d,r}\gamma_{q,d} \sum_{m\sim M} \beta_m \sum_{n\sim N} \alpha_n \left(\mathbb{1}_{mn\equiv a (\mathrm{mod}\, qrd)} - \frac{\mathbb{1}_{(mn,qrd)=1}}{\varphi(qrd)}\right).$$

令 $A > 0$, $1 \leqslant E \leqslant x$，并令 $C = C(A, B_0)$ 足够大。若

$$N > QDE(\log x)^C \qquad \textit{and} \qquad M > (\log x)^C,$$

then

$$|\mathcal{S}| \ll_{A,B_0} \frac{x}{(\log x)^A} + MD^{1/2}Q^{1/2}(\log x)^{O_{B_0}(1)} \left(|\mathcal{E}_1|^{1/2} + |\mathcal{E}_2|^{1/2}\right).$$

证明。这是在系数 $\lambda_{q,d,r}$ 不依赖于 q 的特殊情形下的 [[18], 命题 14.4], ，但我们的和 $\mathcal{E}_2$ 与 [18] 中相应的和（记作 E_2）有三处不同：条件（r_1r_2, e） $= 1$ 存在；条件（r_2, qd） $= 1$ 不存在；相位的写法也不同。我们指出证明中需要作出的修改。

与 [[18], 命题 14.4], 的证明一样，以可忽略的代价加入条件（n, e） $=$ （r, e） $= 1$，将关于 n 的和拆分为模 qde 的剩余类 b，对平方自由的 $e \sim E$ 取平均，并对关于 e, b, m, q, d 的和应用柯西不等式。这便得到

$$|\mathcal{S}|^2 \ll MQD(\log x)^{O(1)} (\mathcal{S}_1 - 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3) + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^{2A}}\right),$$

其中 $\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$和$\mathcal{S}_3$是在 [[18], 引理 14.1–14.3] 中计算的和（其中 $\eta_{q、\,d、\,r} = \lambda_{d、\,r}$）。根据 [[18],引理 14.1–14.2], ，我们有

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_{MT} + O\left(\frac{MN^2}{QD(\log x)^{2A}}\right), \qquad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{MT} + O(M|\mathcal{E}_1|) + O\left(\frac{MN^2}{QD(\log x)^{2A}}\right),$$

主项 $\mathcal{S}_{MT}$ 来自 [[18], 引理 14.1]。剩下需要证明的是

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_{MT} + O(M|\mathcal{E}_2|) + O\left(\frac{MN^2}{QD(\log x)^{2A}}\right), \tag{13}$$

其中我们回顾一下

$$\mathcal{S}_3 = \sum_{e\sim E}\mu^2(e)\sum_{\substack{q\\(q,a)=1}}\psi_0\left(\frac{q}{Q}\right)\sum_{\substack{d\sim D\\(d,a)=1}}\sum_{\substack{r_1,r_2\sim R\\(r_1r_2,ae)=1}}\lambda_{d,r_1}\overline{\lambda_{d,r_2}}$$
$$\times\sum_{\substack{n_1,n_2\sim N\\n_1\equiv n_2 (\mathrm{mod}\, qde)\\(n_1,qder_1)=(n_2,qder_2)=1}}\alpha_{n_1}\overline{\alpha_{n_2}}\sum_{\substack{m\\mn_1\equiv a(\mathrm{mod}\, qdr_1)\\mn_2\equiv a(\mathrm{mod}\, qdr_2)}}\psi_0\left(\frac{m}{M}\right).$$

我们仿照 [[18], 引理 14.3]的证明。完全如同那里一样，可以将求和限制在 $(r_1, r_2) = 1$、$(n_1, n_2) = 1$ 以及 $|n_1 - n_2| \geqslant N/(\log x)^C$，代价是产生一个误差项$O(MN^2/(QD(\log x)^{2A}))$。我们在两处不同于 [18]：

(1) 我们不去掉条件 $(e, r_1r_2) = 1$。在 [18] 中，这个条件在证明第一部分的末尾被去掉，随后又在主项中重新引入；这两个步骤都没有必要。

(2) 我们不舍弃满足 $(qd, r_2) > 1$的项。在 [18] 中，这样做只是为了以引理 2.1的形式应用中国剩余定理；我们改用引理 2.2。事实上，经过上述限制后，引理 2.2 的假设在 $\ell = qd$ 和 $b = a$下得到满足，因此关于 m 的两个同余方程等价于 $m \equiv \mu$ (模 qdr_1r_2)，而泊松求和 [[18], 引理 13。4] 给出

$$\sum_{m\equiv\mu(\mathrm{mod}\, qdr_1r_2)}\psi_0\left(\frac{m}{M}\right) = \frac{M\widehat{\psi}_0(0)}{qdr_1r_2} + \frac{M}{qdr_1r_2}\sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_2}\widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1r_2}\right)e\left(\frac{h\mu}{qdr_1r_2}\right) + O(x^{-100}),$$

根据引理 2.2,

$$e\left(\frac{h\mu}{qdr_1r_2}\right) = e\left(ah\frac{n_1-n_2}{qd}\cdot\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2}\right)e\left(\frac{ah}{qdr_1r_2n_1}\right).$$

含有 $h \neq 0$ 的项对 $\mathcal{S}_3$ 的贡献为 $M\mathcal{E}_2$。对于含有 $h = 0$ 的项的贡献，如同在 [18], 中一样，插入因子

$$\frac{\varphi(qde)^2\varphi(qdr_1r_2)}{\varphi(qd)\varphi(qder_1)\varphi(qder_2)} = \frac{r_1r_2\prod_{p|r_1r_2,\ p\nmid qd}\frac{p-1}{p}}{r_1\prod_{p|r_1,\ p\nmid qde}\frac{p-1}{p}\cdot r_2\prod_{p|r_2,\ p\nmid qde}\frac{p-1}{p}},$$

在 [18] 中该因子为 $1+O(\log x/z_0)$，而在我们的情形下它恰好等于 1，因为 $(r_1, r_2) = (r_1r_2, e) = 1$。从这里开始，[18] 的论证可原样适用：以一个可容许的误差为代价，从含有 $h = 0$ 的项中去掉条件 $(r_1, r_2) = 1$、$(n_1, n_2) = 1$和 $|n_1 - n_2| \geqslant N/(\log x)^C$，并借助 Siegel–Walfisz 条件和大筛引理 13.8], 将条件 $n_1 \equiv n_2$ (mod qde) 替换为因子 $\varphi^{-1}(qde)$；这里用到了假设 $N > QDE(\log x)^C$。由此得到 (13)，命题 3.1 得证。□

4. The first exponential sum

和 $\mathcal{E}_1$ 很容易处理，因为对 q 求和是不完全Kloosterman和，带有一个光滑权重。下面的引理是 [[19],引理 5.10]的一个变体。

引理 4.1. 令 $\eta > 0$ 和 $1 \leqslant E \leqslant x$，并假设

$$DRN^{3/2} \leqslant x^{1-2\eta} \qquad and \qquad QDR \leqslant x^{1-2\eta}. \tag{14}$$

那么，对于所有1-有界序列(α_n) 以及$(\lambda_{d,\ r})$，我们有

$$\mathcal{E}_1 \ll_\eta \frac{N^2}{QDx^\eta}.$$

证明。固定 $e,\ d,\ r_1,\ r_2,\ n_1,\ n_2,\ h$，满足 $(n_1,\ der_1) = (n_2,\ der_2) = 1$，并令 $m_0 := der_2$。对 q 在 $\mathcal{E}_1$ 上的求和为

$$\Sigma := \sum_{(q,an_1n_2)=1} \psi_0\left(\frac{q}{Q}\right) \frac{1}{q\varphi(qm_0)} \widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1}\right) e\left(\frac{ah\overline{n_1}}{qdr_1}\right).$$

由引理 2.1 $(u,\ v) = (n_1,\ qdr_1)$，可得

$$e\left(\frac{ah\overline{n_1}}{qdr_1}\right) = e\left(-\frac{ah\overline{qdr_1}}{n_1}\right) e\left(\frac{ah}{qdr_1n_1}\right).$$

此外

$$\frac{1}{\varphi(qm_0)} = \frac{1}{q\varphi(m_0)} \sum_{\substack{g|q \\ (g,m_0)=1}} \frac{\mu^2(g)}{\varphi(g)}, \qquad \mathbb{1}_{(q,an_2)=1} = \sum_{t|(q,an_2)} \mu(t).$$

因此，记 $q = [g,t]q'$，

$$\Sigma = \frac{1}{\varphi(m_0)} \sum_{(g,m_0n_1)=1} \frac{\mu^2(g)}{\varphi(g)} \sum_{\substack{t|an_2 \\ (t,n_1)=1}} \mu(t) \sum_{(q',n_1)=1} W\left([g,t]q'\right) e\left(\frac{b\overline{q'}}{n_1}\right),$$

其中 $b := -ah\overline{dr_1[g,t]}$ (模 n_1)，且

$$W(q) := \psi_0\left(\frac{q}{Q}\right) \frac{1}{q^2} \widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1}\right) e\left(\frac{ah}{qdr_1n_1}\right).$$

对于 $q \asymp Q$，我们有 $|hM/(qdr_1)| \ll H_1M/(QDR) = (\log x)^5$，且 $|ah/(qdr_1n_1)| \ll 1$，因此函数 $f(u) := Q^2W(Qu)$ 的支集包含于 $[1/2, 5/2]$，并满足 $\|f^{(j)}\|_\infty \ll_j (\log x)^{5j}$。由于 $(b, n_1) = (ah, n_1)$，引理 2.5（取 $Y = Q/[g,t]$）表明，最内层的和为

$$\ll x^{o(1)}Q^{-2}\left(N^{1/2} + \frac{Q}{N}(ah, n_1)\right).$$

对 an_2 的因子 t 求和，并对 $g \leqslant 3Q$ 求和，我们得到

$$\Sigma \ll x^{o(1)} \frac{1}{\varphi(m_0)Q^2}\left(N^{1/2} + QN^{-1}(ah, n_1)\right).$$

因此，使用 $\sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_1}(ah,\ n_1) \ll H_1\tau(n_1)$，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &\ll x^{o(1)} \sum_{e\sim E} \sum_{d\sim D} \sum_{r_1,r_2\sim R} \frac{1}{dr_1\varphi(der_2)} \sum_{n_1,n_2\sim N} \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_1} \frac{1}{Q^2}\left(N^{1/2} + \frac{Q}{N}(ah, n_1)\right) \\
&\ll x^{o(1)} \frac{N^2H_1}{DQ^2}\left(N^{1/2} + \frac{Q}{N}\right) \\
&= x^{o(1)} \frac{N^2}{QD} \cdot \frac{DRN^{3/2} + QDR}{MN},
\end{aligned}$$

并且该引理可由（14）和 $MN \asymp x$推出。 □

5. The second exponential sum

本节我们证明 $\mathcal{E}_2$的一个上界，这是定理1.4和定理1.1证明中最关键的估计。

命题 5.1. 设 ϑ 为可容许的。设 $\eta > 0$和 $C \geqslant 0$ 为固定值。设 $M, N, Q, R, D, E \geqslant 1$满足 $MN \asymp x$ 且

$$Q \leqslant M, \qquad D \leqslant y_0, \qquad QDE \leqslant N, \tag{15}$$

$$ND \leqslant x^{-3\eta} ME, \tag{16}$$

$$E^{7/2}\left(1+\frac{N}{M}\right)^{1/2} N^{1/2} Q^{1/2} R^4 \leqslant x^{1-4\eta}, \tag{17}$$

$$E^{3}\left(1+\frac{N}{M}\right)^{1/2} N^{1/2+\vartheta} Q^{1/2} R^{4-3\vartheta} \leqslant x^{1-4\eta}. \tag{18}$$

设(α_n) 和$(\lambda_{d,r})$ 为有界于1的复数序列，使得 $\lambda_{d,r}$ 支撑在 $P^-(r) \geqslant z_0$上。则

$$\mathcal{E}_2 \ll_{a,\eta} \frac{N^2}{QDx^{\eta}}.$$

本节余下部分将用于证明。注意，(17) 推出 $R \leqslant x^{1/4}$，并且$H_2 = QDR^2(\log x)^5/M \leqslant DR^2 (\log x)^5 \leqslant x^{1/2+o(1)}$ 由 (15) 得出。

5.1. **转到互补因子**。对于 $\mathcal{E}_2$ 的平凡界为

$$\sum_{e\sim E}\sum_{d\sim D}\sum_{Q/2\leqslant q\leqslant 5Q/2}\frac{1}{qd}\sum_{r_1,r_2\sim R}\frac{1}{r_1r_2}\sum_{\substack{n_1,n_2\sim N\\ n_1\equiv n_2 (\mathrm{mod}\, qde)}}\sum_{1\leqslant |h|\leqslant H_2} 1 \ll \frac{N^2H_2}{QD},$$

因为 $QDE \leqslant N$。在 $\mathcal{E}_2$ 中我们有

$$\left|\frac{ah}{qdr_1r_2n_1}\right| \ll \frac{H_2}{QDR^2N} \ll \frac{(\log x)^5}{x}.$$

因此，因子 $e(ah/(qdr_1r_2n_1))$ 可以用 1 代替，代价是产生一个误差

$$O\left(\frac{N^2H_2(\log)^5}{QDx}\right) = O\left(\frac{N^2}{QDx^{1/3}}\right).$$

接下来，对于 d, e, n_1, n_2，如 $\mathcal{E}_2$ 中所述，我们有 $n_1 \neq n_2$，变量 q 遍历满足 qde 整除 $n_1 - n_2$ 的正整数。记

$$n_1 - n_2 = q,\ d,\ e,\ f, \qquad f \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

并用 f 作为变量代替 q；因此 $q = (n_1 - n_2)/(def)$。由于 $q \geqslant Q/2$、 $d > D$、 $e > E$ 和 $|n_1 - n_2| < N$，我们有

$$1 \leqslant |f| \leqslant F := \frac{2N}{QDE},$$

且 $(n_1 - n_2)/(qd) = ef$。因此

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2' + O\left(\frac{N^2}{QDx^{1/3}}\right), \tag{19}$$

其中

$$\mathcal{E}_2' := \sum_{e\sim E}\mu^2(e)\sum_{\substack{d\sim D\\ (d,a)=1}}\frac{1}{d}\sum_{1\leqslant |f|\leqslant F}\sum_{n_1,n_2}^{\mathbf{N}}\alpha_{n_1}\overline{\alpha_{n_2}}$$

$$\times \sum_{r_1,r_2}^{\mathbf{R}} \frac{\lambda_{d,r_1}\overline{\lambda_{d,r_2}}}{r_1 r_2} \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_2} \frac{1}{q}\psi_0\left(\frac{q}{Q}\right)\widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1r_2}\right) e\left(ahef\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2}\right), \qquad q := \frac{n_1-n_2}{def}.$$

这里 $\sum^{\mathbf{N}}$ 表示对 $n_1,\ n_2 \sim N$ 求和，其中

$$(n_1,n_2)=1,\ n_1\equiv n_2 (\mathrm{mod}\, def),\ \frac{n_1-n_2}{def}>0,\ \left(\frac{n_1-n_2}{def},a\right)=1,\ |n_1-n_2|\geqslant \frac{N}{(\log x)^C}, \tag{20}$$

而 $\sum^{\mathbf{R}}$ 表示对 $r_1,r_2\sim R$ 求和，其中

$$(r_1,r_2)=1, \qquad (r_1r_2,ae)=1, \qquad (r_1,n_1)=(r_2,n_2)=1. \tag{21}$$

注意到 (20) 蕴含 $(n_1n_2,e)=1$。

5.2. 变量分离与柯西不等式。变量 q 现在是关于 n_1,n_2,d,e,f 的函数$\widehat{\ }$，它通过因子 ψ_0 与 h,r_1,r_2 纠缠在一起。我们按如下方式将它们分离。根据傅里叶变换的定义以及变量代换 $t=q\tau$，

$$\widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1r_2}\right)=\int \psi_0(t)e\left(-\frac{thM}{qdr_1r_2}\right)\mathrm{d}t = q\int \psi_0(q\tau)e\left(-\frac{\tau hM}{dr_1r_2}\right)\mathrm{d}\tau.$$

由于 $\psi_0(q/Q)\psi_0(q\tau)$ 仅在 $1/(5Q)\leqslant\tau\leqslant 5/Q$ 时不为零，我们得到

$$\frac{1}{q}\psi_0\left(\frac{q}{Q}\right)\widehat{\psi}_0\left(\frac{hM}{qdr_1r_2}\right)=\int_{1/(5Q)}^{5/Q}\psi_0\left(\frac{q}{Q}\right)\psi_0(q\tau)e\left(-\frac{\tau hM}{dr_1r_2}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

对于 $\tau\in[1/(5Q),\ 5/Q]$ 和 $d\sim D$，我们定义 1-有界系数

$$\xi(h,r_1,r_2)=\xi_{\tau,d}(h,r_1,r_2):=\frac{R^2\lambda_{d,r_1}\overline{\lambda_{d,r_2}}}{r_1r_2}e\left(-\frac{\tau hM}{dr_1r_2}\right),$$

它们支撑在 $r_1,r_2\sim R$ 上，且 $P^-(r_1r_2)\geqslant z_0$。令 $\mathcal{N}$ 为由满足$r_1,r_2\sim R$ 的数对 (r_1,r_2)、满足 $=1$ 的数对 (r_1,r_2) 以及满足 $\geqslant z_0$ 的 $P^-(r_1r_2)$ 组成的集合，并令 $\mathcal{N}=\mathcal{N}_1\sqcup\cdots\sqcup\mathcal{N}_J$ 为引理 2.4 给出的划分。对于 $1\leqslant j\leqslant J$ 和满足 $(n_1,n_2)=1$ 的 e,f,n_1,n_2，令

$$I_j(f,n_1,n_2):=\sum_{\substack{(r_1,r_2)\in\mathcal{N}_j\\(r_1r_2,ae)=1\\(r_1,n_1)=(r_2,n_2)=1}}\ \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H_2}\xi(h,r_1,r_2)e\left(ahef\frac{\overline{n_2r_1}}{n_1r_2}\right).$$

将（22）代入 $\mathcal{E}_2'$ 的定义，我们得到

$$|\mathcal{E}_2'|\leqslant\frac{1}{R^2}\int_{1/(5Q)}^{5/Q}\sum_{e\sim E}\mu^2(e)\sum_{d\sim D}\frac{1}{d}\sum_{j\leqslant J}\sum_{1\leqslant|f|\leqslant F}\sum_{n_1,n_2}^{\mathbf{N}}\|\psi_0\|_\infty^2\,|I_j(f,n_1,n_2)|\,\mathrm{d}\tau.$$

固定 d和 e时，满足（f，n_1，n_2）且 $1\leqslant|f|\leqslant F$和 n_1，n_2并满足（20）且$Q/2\leqslant q\leqslant 5Q/2$的三元组个数为 $\ll N^2/(DE)$，因为这样的三元组由 $n_1\sim N$，$q\in[Q/2,5Q/2]$和 f唯一确定。利用柯西不等式，并根据正性扩大求和范围，我们得到

$$\mathcal{E}_2'\ll\frac{J}{R^2}\cdot\frac{1}{Q}\cdot E\cdot D\cdot\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{N^2}{DE}\right)^{1/2}\sup\mathcal{Z}^{1/2}=\frac{JNE^{1/2}}{QD^{1/2}R^2}\sup\mathcal{Z}^{1/2}, \tag{23}$$

其中 $\sup$ 上确界取遍 $\tau\in[1/(5Q),\ 5/Q]$, $d\sim D$、无平方因子的 $e\sim E$ 和 $j\leqslant J$，以及一个 d

$$\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(\tau,d,e,j):=\sum_{1\leqslant|f|\leqslant F}\ \sum_{\substack{n_1,n_2\\(n_1,n_2)=1\\n_1\equiv n_2(\mathrm{mod}\,e)\\(n_1n_2,e)=1}}\Psi\left(\frac{n_1}{N}\right)\Psi\left(\frac{n_2}{N}\right)|I_j(f,n_1,n_2)|^2. \tag{24}$$

从（20）转到（24）中的条件时，我们省略了同余关系 $n_1 \equiv n_2$ （模 df）以及涉及 q的条件，但保留了模 e的同余关系。我们将证明

$$\mathcal{Z} \ll \frac{R^4N^2}{DEx^{5\eta/2-o(1)}} \tag{25}$$

对 τ、d、e、j均一致成立。由（23）、（19）以及 $J = x^{o(1)}$ 可得 $\mathcal{E}_2 \ll N^2/(QDx^{5\eta/4-o(1)})$，从而证明命题 5.1。

5.3. 对角项。我们展开（24）中的平方。设（h，r_1，r_2）和（h'，r_1'，r_2'）是 I_j（f，n_1，n_2）中出现的两个三元组。由于（r_1，r_2）和（r_1'，r_2'）属于同一个类 $\mathcal{N}_j$，我们有（r_1，r_2'）$=$（r_1'，r_2）$=1$，此外还有（r_1，r_2）$=$（r_1'，r_2'）$=1$；因此

$$(r_1r_1', r_2r_2') = 1.$$

结合（n_1、n_2）$=$（n_1、r_1r_1'）$=$（n_2、r_2r_2'）$=1$ 可得（$n_2r_1r_1'$、$n_1r_2r_2'$）$=1$，而引理 2.3给出

$$\mathcal{Z} = \sum_{\substack{(h,r_1,r_2)\\(h',r_1',r_2')}} \xi(h,r_1,r_2)\overline{\xi(h',r_1',r_2')} \times \sum_{1\leqslant|f|\leqslant F} \sum_{\substack{n_1,n_2\\(n_1,n_2)=1\\ n_1\equiv n_2 (\mathrm{mod}\, e),(n_1n_2,e)=1\\(n_1,r_1r_1')=(n_2,r_2r_2')=1}} \Psi\left(\frac{n_1}{N}\right)\Psi\left(\frac{n_2}{N}\right) e\left(aefk\frac{\overline{n_2\rho}}{n_1\sigma}\right), \tag{26}$$

其中

$$\rho := r_1r_1', \qquad \sigma := [r_2, r_2'], \qquad k := \frac{hr_1'r_2' - h'r_1r_2}{(r_2, r_2')},$$

外层求和遍历所有满足 $1 \leqslant |h|, |h'| \leqslant H_2$ 的 h, h'，以及 $\mathcal{N}_j$ 中满足 $(r_1r_2r_1'r_2', ae) = 1$ 的所有数对 (r_1, r_2)、(r_1', r_2')。根据 $k = 0$ 还是 $k \neq 0$，我们将 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_= + \mathcal{Z}_{\neq}$ 写作相应形式。若 $k = 0$，则 $hr_1'r_2' = h'r_1r_2$。给定 (h, r_1', r_2') 后，整数 $h'r_1r_2$ 即确定，因此根据因子界，(h', r_1, r_2) 至多有 $x^{o(1)}$ 种可能。故满足 $k = 0$ 的三元组对至多有 $x^{o(1)}H_2R^2$ 个。对于其中每一对，式 (26) 中对 f, n_1, n_2 的求和显然为 $\ll FN(N/E + 1) \ll FN^2/E$。因此

$$\mathcal{Z}_= \ll x^{o(1)}H_2R^2\frac{FN^2}{E} = x^{o(1)}\frac{R^4N^3}{ME^2},$$

bec余 $H_2F = 2R^2N(\log)^5/(ME)$. 根据 (16) 可得 $N/(ME) \leqslant x^{-3\eta}/D$，因此

$$\mathcal{Z}_= \ll \frac{R^4N^2}{DEx^{3\eta-o(1)}}. \tag{27}$$

这是辅助模数 e 必不可少的唯一之处：对于 $E = 1$，界 (27) 将要求 $N \leqslant x^{-3\eta}M$。

5.4. **非对角项**。现在我们利用定理 2.6 来估计 (26) 中的求和，并按照 $\vartheta \in \{\pm 1\}$ 的符号 afk 以及 ρ 和 σ的大小进行划分。由于 $R^2 < \rho \leqslant 4R^2$ 且 $R < \sigma \leqslant 4R^2$，只需考虑 $O(\log x)$ 对 (R^*, S^*)，满足

$$R^2 \leqslant R^* \leqslant 2R^2, \qquad R \leqslant S^* < 4R^2, \qquad R^* < \rho \leqslant 2R^*, \qquad S^* < \sigma \leqslant 2S^*.$$

固定 ϑ、R^* 和 S^*。在相应的项中，我们有（r_2，r_2'）$= r_2r_2'/\sigma > R^2/(2S^*)$，因此 $|k| \leqslant 8H_2R^2/(r_2, r_2') < 16H_2S^*$，于是

$$1 \leqslant |aefk| \leqslant N^* := 32|a|EFH_2S^* = 64|a|(\log x)^5\frac{N}{M}R^2S^*.$$

对于整数 $n \geqslant 1$、 $\rho \sim R^*$、 $\sigma \sim S^*$，我们定义

$$b_{n,\rho,\sigma} := \sum \xi(h, r_1, r_2)\overline{\xi(h', r_1', r_2')},$$

其中 th e 总和遍历所有 f 满足 $1 \leqslant |f| \leqslant F$ 以及满足 (26) 的如上所有三元组对 t

$$r_1 r_1' = \rho, \qquad [r_2, r_2'] = \sigma, \qquad aefk = \vartheta n.$$

在 b_n、ρ、σ 的支集上，我们有 $(e, \sigma) = (\rho, \sigma) = 1$。因此，对于满足 $(n_1, e) = 1$ 的 (n_1, e)，(26) 中的条件 $(n_1, n_2) = (n_1, r_1 r_1') = (n_2, r_2 r_2') = 1$ 等价于单一条件 $(e\rho n_2, \sigma n_1) = 1$。将 $n_1 \equiv n_2$ (模 e) 划分为模 e 的既约剩余类 u，我们看到，所考虑的 $\mathcal{Z}_{\neq}$ 部分等于

$$\sum_{\substack{u \pmod e \\ (u,e)=1}} \sum_{n \leqslant N^*} \sum_{\rho \sim R^*} \sum_{\sigma \sim S^*} b_{n,\rho,\sigma} \sum_{\substack{n_1 \equiv u, n_2 \equiv u \pmod e \\ (e\rho n_2, \sigma n_1) = 1}} \Psi\left(\frac{n_1}{N}\right) \Psi\left(\frac{n_2}{N}\right) e\left(\vartheta n \frac{\overline{\rho n_2}}{\sigma n_1}\right). \tag{28}$$

若 $\vartheta = -1$，我们取复共轭，这会将 b 替换为 b。令 $\Psi = \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 + \Psi_3$ 为一个光滑划分，其中对于 $c_1 = 0.45$、 $c_2 = 0.8$、 $c_3 = 1.4$， Ψ_i 支持在 $[c_i, 1.9c_i]$ 中；令 $w(n, \rho, \sigma)$ 为一个在 $\mathbb{R}^3_{>0}$ 中紧支撑、在 $[1, N^*] \times [R^*, 2R^*] \times [S^*, 2S^*]$ 上等于 1 且满足 $\partial^\nu w \ll_\nu n^{-\nu_3} \rho^{-\nu_4} \sigma^{-\nu_5}$ 的光滑函数。于是，对于每个 u 以及每一对 (i, i')，(28) 的内部部分是定理 2.6 中所考虑类型的和，其中

$$(c, d, n, r, s) = (n_1, n_2, n, \rho, \sigma), \qquad g = \Psi_i\left(\frac{c}{N}\right) \Psi_{i'}\left(\frac{d}{N}\right) w(n, r, s),$$

$$(\mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{N}, \mathsf{R}, \mathsf{S}) = (0.99c_i N, 0.99c_{i'} N, N^*, R^*, S^*), \qquad \mathsf{q} = e, \qquad c_0 = d_0 = u.$$

现在我们计算K （12）中的 $R^* \leqslant 2R^2$， $S^* < 4R^2$ 和 $e \leqslant 2E$，得到

$$\mathsf{N} + \mathsf{RS} \ll (\log x)^5 \left(1 + \frac{N}{M}\right) R^2 S^*, \qquad \mathsf{C} + \mathsf{DR} \ll NR^2,$$

因此

$$\mathsf{q}(\mathsf{CS}(\mathsf{N} + \mathsf{RS})(\mathsf{C} + \mathsf{DR}) + \mathsf{NRS}) \ll (\log x)^5 \left(1 + \frac{N}{M}\right) EN^2 R^8,$$

$$\mathsf{D}^2\mathsf{NR} \ll (\log x)^5 \left(1 + \frac{N}{M}\right) N^2 R^6,$$

$$\mathsf{CS}(\mathsf{CD}\sqrt{\mathsf{R}})^{2\vartheta}(\mathsf{N} + \mathsf{RS})^{1-\vartheta}(\mathsf{C} + \mathsf{DR})^{1-2\vartheta} \ll (\log x)^5 \left(1 + \frac{N}{M}\right) N^{2+2\vartheta} R^{8-6\vartheta}.$$

第二项被第一项所支配，因此

$$\mathsf{K} \ll (\log x)^{5/2} \left(1 + \frac{N}{M}\right)^{1/2} \left(E^{1/2} NR^4 + N^{1+\vartheta} R^{4-3\vartheta}\right). \tag{29}$$

接下来我们估计 $\|b\|_2$。令 $\mathbf{r} := (r_1, r_1', r_2, r_2')$。由于 ξ 是 1-有界的，$|b_{n,\rho,\sigma}|$ 至多等于其定义中计数的元组 $(f, h, h', \mathbf{r})$ 的数量 $\nu(n, \rho, \sigma)$。给定 (n, ρ, σ)，$(f, k, \mathbf{r})$ 至多有 $x^{o(1)}$ 种可能，因为 f 整除 n， $r_1 r_1' = \rho$， 且 r_2, r_2' 整除 σ。对于给定的 $(k, \mathbf{r})$，令 $\nu_0(k; \mathbf{r})$ 表示满足 $1 \leqslant |h|, |h'| \leqslant H_2$ 且

$$hr_1' r_2' - h' r_1 r_2 = k(r_2, r_2').$$

该线性方程的解 $(h, \ h') \in \mathbb{Z}^2$ 构成由向量 $(r_1 r_2/g, \ r_1' r_2'/g)$ 生成的格的一个陪集，其中

$$g := (r_1 r_2, r_1' r_2') = (r_1, r_1')(r_2, r_2')$$

鉴于 $(r_1r_1',\ r_2r_2')=1$。由于 $r_1r_2>R^2$，我们得到

$$\nu_0(k;\mathbf{r})\leqslant 1+\frac{2H_2(r_1,r_1')(r_2,r_2')}{R^2}.$$

由柯西不等式 $\nu(n,\ \rho,\ \sigma)^2\leqslant x^{o(1)}\sum\nu_0(k;\mathbf{r})^2,,$ 求和遍及与 $(n,\ \rho,\ \sigma)$ 相容的元组 $(f,\ k,\ \mathbf{r})$。对 $(n,\ \rho,\ \sigma)$ 求和，并利用 $\sum_k\nu_0(k;\mathbf{r})\leqslant(2H_2)^2,,$ 得到

$$\begin{aligned}\|b\|_2^2&\ll x^{o(1)}\sum_{1\leqslant|f|\leqslant F}\sum_{\substack{r_1,r_1',r_2,r_2'\sim R\\(r_1r_1',r_2r_2')=1}}\Big(\max_k\nu_0(k;\mathbf{r})\Big)\sum_k\nu_0(k;\mathbf{r})\\&\ll x^{o(1)}FH_2^2\sum_{\substack{r_1,r_1',r_2,r_2'\sim R\\(r_1r_1',r_2r_2')=1}}\left(1+\frac{H_2(r_1,r_1')(r_2,r_2')}{R^2}\right)\\&\leqslant x^{o(1)}FH_2^2\sum_{r_1,r_1',r_2,r_2'\sim R}\left(1+\frac{H_2(r_1,r_1')(r_2,r_2')}{R^2}\right)\\&\ll x^{o(1)}FH_2^2R^4\left(1+\frac{H_2}{R^2}\right),\end{aligned}$$

由于 $\sum_{r,\ r'\sim R}(r,\ r')\ll R^2(\log x)$。由 (15) 可知 $H_2/R^2=QD(\log x)^5/M\leqslant x^{o(1)}$。代入 F 和 H_2 的值，得

$$\|b\|_2\ll x^{o(1)}F^{1/2}H_2R^2=x^{o(1)}\frac{(NQD)^{1/2}R^4}{ME^{1/2}}.\tag{30}$$

我们应用定理 2.6 ，取 ϵ 和 ϵ_0 充分小，使得 $(\mathsf{qCDNRS})^{\epsilon+O(\epsilon_0)}\leqslant x^{\eta/2}$。对 $\varphi(e)\leqslant 2E$ 类 u、对 $(i,\ i')$、对 ϑ 以及对 $O(\log x)$ 对 $(R^*,\ S^*)$ 求和，由 (29) 和 (30) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\neq}&\ll x^{\eta/2+o(1)}E^{5/2}\left(1+\frac{N}{M}\right)^{1/2}\left(E^{1/2}NR^4+N^{1+\vartheta}R^{4-3\vartheta}\right)\frac{(NQD)^{1/2}R^4}{ME^{1/2}}\\&=x^{\eta/2+o(1)}\frac{R^4N^2}{DE}\cdot\frac{D^{3/2}(1+N/M)^{1/2}}{MN}\left(E^{7/2}N^{1/2}Q^{1/2}R^4+E^3N^{1/2+\vartheta}Q^{1/2}R^{4-3\vartheta}\right).\end{aligned}$$

由（17）、（18）、 $D\leqslant y_0$ 以及 $MN\asymp x$，最后一个因子为 $\ll x^{-4\eta+o(1)}$。因此

$$\mathcal{Z}_{\neq}\ll\frac{R^4N^2}{DEx^{7\eta/2-o(1)}},$$

并且　　再结合（27），即可证明（25）。命题5.1 的证明至此完成。

6. Proof of Theorem 1.4 and Corollary 1.5

定理*1.4*的证明。令 $\mathcal{S}_0$ 表示待估计的和。注意到（8）和 $MN\asymp x$ 给出

$$\frac{N}{M}\ll x^{\varepsilon/50},\qquad Q\leqslant Nx^{-\varepsilon}\leqslant M,\qquad R\leqslant x^{1/4},\qquad QR\leqslant x^{3/4+\varepsilon/100},\tag{31}$$

其中， R 的界由 (9) 得出。若 $R\leqslant x^{\varepsilon/2}$，则所有模数 qr 均至多为 $4QR\leqslant 4Nx^{-\varepsilon/2}\leqslant x^{1/2-\varepsilon/3}$，由广义 Bombieri–Vinogradov 定理（见 [[3], 定理 0]）可得所述结论。因此，我们可以假设 $R>x^{\varepsilon/2}$。我们将每个 $r\sim R$ 唯一地写成 $r=dr'$，其中 $d=\mathsf{sm}(r;\ z_0)$，故 $P^+(d)\leqslant z_0<P^-(r')$。满足 $d\geqslant y_0$ 的模数 qr 符合 $\mathsf{sm}(qr;\ z_0)\geqslant y_0$；又由于模数 n 的系数 $\sum_{qr=n}\lambda_q\nu_r$ 有界于 $\tau(n)^{2B_0+1}$，由 [[18],引理 13.10] 可知，这些模数对 $\mathcal{S}_0$的贡献为 $O(x/(\log x)^A)$。我们将剩余部分拆分为

范围 d 划分为 $O(\log x)$ 个二进区间 $d\sim D$, $D\leqslant y_0$ （相同的结论对 $d=1$ 也成立）；于是$r'\sim R'$ 对于某个 $R/(2D)\leqslant R'\leqslant R/D$ 且 $R'\geqslant 1$。对于每个这样的（D, R'）， $\mathcal{S}_0$ 相应的部分是一个和， $\mathcal{S}$ 如命题 3.1 中所示，其中以 R' 代替 R，并且

$$\gamma_{q,d}:=\lambda_q,\qquad \lambda_{d,r'}:=\nu_{dr'}\mathbb{1}_{P^+(d)\leqslant z_0<P^-(r')}\mathbb{1}_{R<dr'\leqslant 2R}.$$

只需证明这些和中的每一个都是 $O(x/(\log x)^{A+1})$。

我们应用命题 3.1，其中 $E:=x^{\varepsilon/10}$。其假设成立，因为 $N\geqslant Qx^{\varepsilon}>QDE(\log x)^C$且 $M\gg x^{1/2-\varepsilon/100}$。由于 $|\alpha_n|$, $|\lambda_{d,\ r'}|\leqslant \tau(\cdot)^{B_0}\leqslant x^{o(1)}$，接下来只需验证引理 4.1和命题 5.1（应用于经过适当归一化的序列，其中以 R' 代替 R，并且 $\eta:=\varepsilon/100$）可得

$$\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\ll\frac{N^2}{QDx^{\eta-o(1)}},\tag{32}$$

因为这样命题 3.1 便给出 $\mathcal{S}\ll x/(\log\ x)^{A+1}+MNx^{-\eta/2+o(1)}$。

对于引理 4.1，注意由 (8)、(9) 和 (31)

$$DR'N^{3/2}\leqslant RN^{3/2}\leqslant\left(x^{1-\varepsilon}N^{-1/2}\right)^{1/4}N^{3/2}\leqslant x^{1/4}N^{11/8}\leqslant x^{15/16+\varepsilon/50},$$
$$QDR'\leqslant QR\leqslant x^{3/4+\varepsilon/100},$$

从而 (14) 成立。对于命题 5.1，我们验证 (15)–(18)。条件 (15) 可由 (31) 以及 $QDE\leqslant Qy_0x^{\varepsilon/10}\leqslant N$推出。由 (31),

$$ND\leqslant x^{\varepsilon/50+o(1)}M\leqslant x^{-3\eta}ME,$$

这就是（16）。最后，由（9）、（10）和（31），

$$E^{7/2}\left(1+\frac{N}{M}\right)^{1/2}N^{1/2}Q^{1/2}R'^4\ll x^{7\varepsilon/20+\varepsilon/100}\cdot x^{1-\varepsilon}\leqslant x^{1-4\eta},$$
$$E^{3}\left(1+\frac{N}{M}\right)^{1/2}N^{1/2+\vartheta}Q^{1/2}R'^{4-3\vartheta}\ll x^{3\varepsilon/10+\varepsilon/100}\cdot x^{1-\varepsilon}\leqslant x^{1-4\eta}.$$

这就证明了（32），从而证明了定理 1.4。 □

推论 *1.5* 的证明。若 $N\leqslant x^{1/2+\varepsilon/200}$，则将定理 1.4 中的 $\varepsilon/2$ 换成 ε：条件（8）成立，并且我们有

$$N^{1/2}Q^{1/2}R^4\leqslant x^{1/4+\varepsilon/400}(QR^8)^{1/2}\leqslant x^{1-\varepsilon/2},$$
$$N^{23/32}Q^{1/2}R^{107/32}\leqslant x^{23/64+\varepsilon/200}(Q^{16}R^{107})^{1/32}\leqslant x^{1-\varepsilon/2}.$$

若 $N>x^{1/2+\varepsilon/200}$，则 $M\ll x^{1/2-\varepsilon/200}$ 且 $M\gg x/N\geqslant Qx^{\varepsilon}$，并以同样的方式应用定理 1.4，但将 M 与 N 的角色互换。□

7. Proof of Theorem 1.1

在本节中，我们根据定理 1.1 、定理 1.4以及其他已知的算术信息，推导出定理 [18], 我们定义

$$S_n:=\mathbb{1}_{n\equiv a(\mathrm{mod}\,q)}-\frac{\mathbb{1}_{(n,q)=1}}{\varphi(q)},\qquad S_d(z):=\sum_{\substack{n\sim x/d\\ P^-(n)\geqslant z}}S_{dn}.$$

在本节及下一节中，我们在 S_n 的定义中有 $q = q_1 \cdots q_k$，其中 $k = 2$ 在本节中，而 $k \geqslant 3$ 在下一节中。令 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\varepsilon_0)$ 为由实数对 (Q_1, Q_2) 构成的集合$Q_1, Q_2 \geqslant 1$ 满足

$$Q_1^2 Q_2 \leqslant x^{1-\varepsilon_0}, \qquad Q_1^8 Q_2^{14} \leqslant x^{5-\varepsilon_0}, \qquad Q_1^{16} Q_2^{107} \leqslant x^{41/2-\varepsilon_0}, \qquad x^{1/2-\varepsilon} \leqslant Q_1 Q_2 \leqslant x^{8/15-\varepsilon_0}. \tag{33}$$

对于 $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{Q}$，我们也有

$$Q_2 = \left(\frac{Q_1^8 Q_2^{14}}{(Q_1 Q_2)^8}\right)^{1/6} \leqslant x^{1/6+2\varepsilon}, \qquad Q_1^3 Q_2^2 = (Q_1^2 Q_2)(Q_1 Q_2) \leqslant x^{23/15-2\varepsilon_0},$$

$$Q_1^{11} Q_2^{12} = (Q_1 Q_2)^{29/3} (Q_1^8 Q_2^{14})^{1/6} \leqslant x^{6-1/90}. \tag{34}$$

通过采用 [[18], 第 7], 章中的 Harman 筛法论证，我们只需证明以下四个命题：

命题 7.1 (II 型估计)。 设 $A > 0$ 和 $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{Q}$。设 $P_1, \ldots, P_J \geqslant x^{1/7+10\varepsilon}$ 满足 $P_1 \cdots P_J \ll x$ 且

$$x^{3/7+\varepsilon} \leqslant \prod_{j \in \mathcal{J}} P_j \leqslant x^{4/7-\varepsilon}$$

对于某个子集 $\mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, J\}$。设 λ_q, ν_q 为复数序列，满足 $|\lambda_q|, |\nu_q| \leqslant \tau(q)^{B_0}$。那么我们有

$$\sum_{\substack{q_1 \sim Q_1 \\ q_2 \sim Q_2 \\ (q_1 q_2, a) = 1}} \lambda_{q_1} \nu_{q_2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_J \\ p_i \sim P_i \forall i}} S_{p_1 \cdots p_J}(p_J) \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

这里 $\sum^*$ 表示求和受到 $O(1)$ 个形如 $p_1^{\alpha_1} \cdots p_J^{\alpha_J} \leqslant B$ 的不等式限制。隐含常数可以依赖于所有此类指数 α_i，但不依赖于任何量 B。

命题 7.2 (筛法渐近公式)。 设 $A > 0$ 以及 $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{Q}$。设 $x^{3/7+\varepsilon} \geqslant P_1 \geqslant \cdots \geqslant P_r \geqslant x^{1/7+10\varepsilon}$ 满足 $P_1 \cdots P_r \leqslant x^{5/7}$，并且满足 $r = 1$ 或 $P_r \leqslant x^{1/4+\varepsilon}$。设 λ_q, ν_q 为满足 $|\lambda_q|, |\nu_q| \leqslant \tau(q)^{B_0}$ 的复数序列。则有

$$\sum_{\substack{q_1 \sim Q_1 \\ q_2 \sim Q_2 \\ (q_1 q_2, a) = 1}} \lambda_{q_1} \nu_{q_2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_r \\ p_i \sim P_i \forall i}} S_{p_1 \cdots p_r}(x^{1/7+10\varepsilon}) \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

这里 $\sum^*$ 表示求和受到 $O(1)$ 形式不等式的限制，其中 $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \leqslant B$，并且 α_1、.....、α_r为某些常数。隐含常数可以依赖于所有此类指数 α_i，但不依赖于 B 中的任何量。此外，我们还有相关估计

$$\sum_{\substack{q_1 \sim Q_1 \\ q_2 \sim Q_2 \\ (q_1 q_2, a) = 1}} \lambda_{q_1} \nu_{q_2} S_1(x^{1/7+10\varepsilon}) \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

命题 7.3 （含有四个或更多素因子的数）。 设 $A > 0$ 以及 $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{Q}$。设$J \geqslant 4$和 $P_1 \geqslant \cdots \geqslant P_J \geqslant x^{1/7+10\varepsilon}$，其中 $P_1 \cdots P_J \asymp x$。设 λ_q、ν_q为复数序列，满足$|\lambda_q|$、$|\nu_q| \leqslant \tau(q)^{B_0}$。则有

$$\sum_{\substack{q_1 \sim Q_1 \\ q_2 \sim Q_2 \\ (q_1 q_2, a) = 1}} \lambda_{q_1} \nu_{q_2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_J \\ p_i \sim P_i \forall i}} S_{p_1 \cdots p_J} \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

这里 $\sum^*$ 表示求和受到 $O(1)$ 形式为 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_J^{\alpha_J}\leqslant B$的不等式的限制。隐含常数可以依赖于所有此类指数 α_i，但不依赖于任何数量 B。

命题 7.4（含三个素因子的数）。设 $A>0$ 及 $(Q_1、Q_2)\in\mathcal{Q}$。设$P_1、P_2、P_3\in[x^{1/4},x^{3/7+\varepsilon}]$ 满足 $P_1P_2P_3\asymp x$。设 $\lambda_q、\nu_q$ 为复数序列，满足 $|\lambda_q|、|\nu_q|\leqslant\tau(q)^{B_0}$。则有

$$\sum_{\substack{q_1\sim Q_1\\ q_2\sim Q_2\\ (q_1q_2,a)=1}}\lambda_{q_1}\nu_{q_2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{p_1,p_2,p_3\\ p_i\sim P_i\forall i}}S_{p_1p_2p_3}\ll_A\frac{x}{(\log x)^A}.$$

这里，$\sum^*$ 表示求和受到 $O(1)$ 个形如 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\leqslant B$的不等式的限制，其中常数为 $\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3$。隐含常数可以依赖于所有此类指数 α_i，但不依赖于任何量 B。

我们提到，在应用定理1.4 以及其他地方证明的算术信息时，我们通常需要 [[18], 引理 8。11] 来消除变量之间的依赖关系（交叉条件）。本节及下一节中，我们将省略这一过程的细节。

命题的证明 *7.1.*我们可以将 $S_{p_1\cdots p_J}(p_J)$ 写成 $S_{p_1\cdots p_{J'}}$之和，其中 $J\leqslant J'\leqslant 6$，由拆分论证可知，因此我们可以假设 $P_1\cdots P_J\asymp x$。由于 $Q_1Q_2<x^{8/15}<x^{127/224-\varepsilon}$，[[18], 引理 813] 给出了 $Q_1Q_2x^{\varepsilon}<\prod_{j\in\mathcal{J}}P_j\leqslant x^{4/7-\varepsilon}$所需的结果。现在，由对称性可假设 $x^{1/2}\ll\prod_{j\in\mathcal{J}}P_j\leqslant Q_1Q_2x^{\varepsilon}$。在这种情况下，我们应用定理 1.4，取 $Q=Q_1$，$R=Q_2$，$m=\prod_{j\in\mathcal{J}}p_j$ 以及 $n=\prod_{j\notin\mathcal{J}}p_j$。由（33）和（34），可得

$$\begin{aligned}
&N\gg\frac{x^{1-\varepsilon}}{Q_1Q_2}\geqslant Q_1x^{\varepsilon_0-\varepsilon},\qquad N\ll x^{1/2},\\
&N^{1/2}Q_1^{1/2}Q_2^4\ll x^{1/4}(Q_1^{16}Q_2^{107})^{1/32}Q_2^{21/32}\leqslant x^{1/4+41/64+7/64-\varepsilon_0/32+2\varepsilon}=x^{1-\varepsilon_0/100},\\
&N^{23/32}Q_1^{1/2}Q_2^{107/32}\ll x^{23/64}(Q_1^{16}Q_2^{107})^{1/32}\leqslant x^{1-\varepsilon_0/32}.
\end{aligned}$$

因此（8）–（10成立，命题7.1 得证。 □

命题 *7.2* 的证明。注意，命题7.2 是 I/II 型估计与小因子 II 型估计的结合。我们首先利用 Fouvry [10] [11]和 Iwaniec–Pomyka-la [13]的 II 型估计，建立一个改进的小因子 II 型估计。

引理 *7.5*（小因子 *II* 型估计）。设 $A>0$ 和 $Q_1、Q_2\geqslant 1$ 满足（*33*）的前三个条件。设 $MN\asymp x$ 满足 $x^{\varepsilon/2}\leqslant N\leqslant x^{1/6+11\varepsilon}$。设 $\lambda_{q_1}、\nu_{q_2}$ 为 *1-*有界，且设 $\alpha_n、\beta_m$ 为复数序列，并满足 $|\alpha_n|、|\beta_n|\leqslant\tau(n)^{B_0}$。假设 α_n 支集在 $P^-(n)\geqslant z_0$上，并满足 *Siegel–Walfisz* 条件（*7*）。则有

$$\sum_{\substack{q_1\sim Q_1\\ q_2\sim Q_2\\ (q_1q_2,a)=1}}\lambda_{q_1}\nu_{q_2}\Delta(q_1q_2)\ll_{a,\varepsilon,A,B_0}\frac{x}{(\log x)^A},$$

其中 Δ由 (6)给出。

引理 *7.5* 的证明。首先假设 $x^{\varepsilon/2}\leqslant N\leqslant(Q_1Q_2)^2x^{-1+5\varepsilon}$。我们应用 [[11], 定理(C.4)]，其中 $R=Q_1$ 且 $S=Q_2$。我们需要

$$\max\left(Q_1^2Q_2,N^{5/2}Q_1Q_2^{5/2},N^{5/4}Q_1^{3/2}Q_2^2\right)\leqslant x^{1-\varepsilon/3}.$$

由（33），我们得到

$$N^{5/2}Q_1Q_2^{5/2}\leqslant(Q_1Q_2)^6Q_2^{3/2}x^{-5/2+25\varepsilon/2}\leqslant x^{16/5+1/4-5/2-6\varepsilon_0+16\varepsilon}=x^{19/20-6\varepsilon_0+16\varepsilon},$$

$$N^{5/4}Q_1^{3/2}Q_2^2 \leqslant (Q_1Q_2)^4Q_2^{1/2}x^{-5/4+25\varepsilon/4} \leqslant x^{32/15+1/12-5/4-4\varepsilon_0+8\varepsilon} = x^{29/30-4\varepsilon_0+8\varepsilon},$$

所需条件得到满足。

接下来假设 $(Q_1Q_2)^2x^{-1+5\varepsilon} < N \leqslant Q_2x^{2\varepsilon}$。由于 $Q_1^8Q_2^{14} \leqslant x^{5-\varepsilon_0}$，我们有

$$Q_2x^{2\varepsilon} < x^{5/6-8\varepsilon}(Q_1Q_2)^{-4/3}.$$

现在 [[10], 该定˙理˙涵 1] 盖了这种情况。

现在假设 $Q_2x^{2\varepsilon} < N \leqslant x^{1/6+11\varepsilon}$。我们以 [[16],命题 11.1] （其中 $R = Q_1$ 和 $Q = Q_2$）的形式应用 [[13], 命题] 。我们需要

$$N^6Q_1^8Q_2^4 < x^{5-\varepsilon}, \qquad Q_1^2Q_2 < Nx^{1-\varepsilon}.$$

由（33），我们有

$$N^6Q_1^8Q_2^4 = N^6(Q_1^2Q_2)^4 \leqslant x^{5-4\varepsilon_0+66\varepsilon}, \qquad Q_1^2Q_2 \leqslant x^{1-\varepsilon_0},$$

并且所需的条件得到满足。现在引理7.5 的证明完成。 □

结合命题 7.1 和引理 7.5，命题 7.2可以用与 [[18],命题 7.2] 相同的方法证明，但需要进行一些修改。绝对值替换为双线性权重，并且 Q_1，Q_2 中的条件 [18] 替换为（Q_1，Q_2）$\in \mathcal{Q}$。在 [[18], 引理 10.4] 中，我们将条件 $N \leqslant x^{3/7+\varepsilon}x/$（$Q_1Q_2$）$^{15/8}$ 替换为 $N \leqslant x^{3/7+2\varepsilon}$，并且有

$$\begin{aligned}
&KL \gg \frac{x}{N} \geqslant x^{4/7-2\varepsilon} \gg Q_1Q_2x^{\varepsilon},\\
&K^3Q_1Q_2 = \frac{K^4Q_1Q_2N}{x^{2-2\varepsilon}} \cdot \frac{x^{2-2\varepsilon}}{NK} \ll \frac{x^{1+8/15+3/7-\varepsilon_0+6\varepsilon}}{x^{2-2\varepsilon}}Lx^{1-2\varepsilon} < Lx^{1-2\varepsilon},\\
&K(Q_1Q_2)^2 = \frac{K^2(Q_1Q_2)^2N}{x^{2-2\varepsilon}} \cdot \frac{x^{2-2\varepsilon}}{NK} \ll \frac{x^{1/2+16/15+3/7-2\varepsilon_0+4\varepsilon}}{x^{2-2\varepsilon}}Lx^{1-2\varepsilon} < Lx^{1-2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

在 [[18], 命题 101] 中，我们将条件 $DEP > x^{1-2\varepsilon}/(Q_1Q_2)^{15/8}$ 替换为 $DEP > x^{\varepsilon}$。命题7.2 现在可由 [[18],第 10]章中的论证直接推出。□

命题7.3的证明。由于 $Q_1Q_2 < x^{8/15} < x^{4/7-5\varepsilon}$，命题7.3 可利用命题 [[18], 第 9] 章中的论证，结合命题7.1和 [[18], 命题 83]，，很容易得到，只需作两处修改：在情况 *1* ($J = 4$) 中，我们有

$$Q_1Q_2KL^4 < x^{8/15}P_1P_4(P_2P_3)^{3/2} \ll x^{8/15+1+3/14+2\varepsilon} = x^{367/210+2\varepsilon} < x^{57/32-10\varepsilon}.$$

在情况 *2* ($J = 5$) 中，我们有

$$Q_1Q_2KL^4 < x^{8/15}\frac{(P_1P_2P_3P_4P_5)^{4/3}}{(P_4P_5)^{1/3}} \ll x^{8/15+4/3-2/21} = x^{62/35} < x^{57/32-10\varepsilon}.$$

□

命题 7.4 的证明。由于我们有（34），命题 7.4 由 [[16], 命题 12。2],命题 7.3 推出；后者是 [[18], 命题 10。1] 的一个变体，使用引理 7.5 证明（将绝对值替换为双线性权重，将 $DEP > x^{1-2\varepsilon}/(Q_1Q_2)^{15/8}$ 替换为 $DEP > x^{\varepsilon}$，并将 [18] 中关于 (Q_1, Q_2) 的条件替换为 $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{Q}$），再结合 [[18], 第 11] 章中的论证即可。□

8. From bilinear to multilinear

在本节中，我们将通过以不同方式对因子进行分组，证明对于多线性权重可以得到优于推论 1.3 的结果。我们仍然需要 Harman 筛法来产生素数，但第 [[18], 章 7]中的论证在 $8/15$处失效，因为在此之后我们无法处理含有三个平衡素因子的数之和。幸运的是，当 Type-II 范围足够宽时，我们仍然可以产生素数。下面的命题表明，对于任意 $[1/3-\delta, 1/2+\delta]$，只要有一个 $\delta>0$ 就足够了。

命题 *8.1*（一个简单的 *Harman* 筛法）。设 $A>0$、$k\geqslant 2$、$q_1\cdots q_k\leqslant x^{3/5}$ 和 $0<\delta\leqslant 1/100$。设 M、N、$Q_i\geqslant 1$ 满足 $MN\asymp x$。令 α_n、β_m、$\lambda_i(q)$ 为复数序列，满足 $|\alpha_n|$、$|\beta_n|$、$|\lambda_i(n)|\leqslant \tau(n)^{B_0}$，并假设 α_n 支持在满足 n 且 $P^-(n)\geqslant z_0$ 的整数上，并满足 *Siegel–Walfisz* 条件（7）。假设对于 $x^{1/3-\delta}\leqslant N\leqslant x^{1/2+\delta}$，有

$$\sum_{\substack{q_1,\dots,q_k\\ q_i\sim Q_i\forall i\\ (q_1\cdots q_k,a)=1}} \lambda_1(q_1)\cdots\lambda_k(q_k)\Delta(q_1\cdots q_k)\ll_A \frac{x}{(\log x)^A}$$

其中 $\Delta(q)$ 如 (6) 所示。那么，

$$\sum_{\substack{q_1,\dots,q_k\\ q_i\sim Q_i\forall i\\ (q_1\cdots q_k,a)=1}} \lambda_1(q_1)\cdots\lambda_k(q_k)\sum_{p\sim x} S_p\ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

证明。由于 $\sum_{p\sim x}S_p=S_1(2x^{1/2})$，我们可以反复应用 Buchstab 恒等式（见 [[15], 引理 2.13]），从而得到两类和：

$$\sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_j<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j<2x^{1/3-\delta}}} S_{p_1\cdots p_j}(x^{\delta/4}) \qquad\text{and}\qquad \sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_{j+1}<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j<2x^{1/3-\delta}\leqslant p_1\cdots p_{j+1}}} S_{p_1\cdots p_{j+1}}(p_{j+1}).$$

对于第二类求和，我们有

$$2x^{1/3-\delta}\leqslant p_1\cdots p_{j+1}<p_1\cdots p_j^2\leqslant (p_1\cdots p_j)^2<4x^{2/3-2\delta}.$$

由于该和计算的是形如 $p_1\cdots p_{j+1}d$ 且满足 $P^-(d)$ 的数 $\geqslant p_{j+1}$，当$n=p_1\cdots p_{j+1}$时，我们可以使用带有 $p_1\cdots p_{j+1}\leqslant 2x^{1/2}$的假设；当 $n=d$时，则使用带有 $p_1\cdots p_{j+1}>2x^{1/2}$的假设。显然，$\alpha_n$在两种情况下都满足 Siegel–Walfisz 条件（7）。现在我们有

$$\sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_{j+1}<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j<2x^{1/3-\delta}\leqslant p_1\cdots p_{j+1}}} S_{p_1\cdots p_{j+1}}(p_{j+1})\ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

对所有 j。

对于第一类和式，我们应用 [[18], 引理 10.2]，取 $z_1=x^{\delta/4}$、$z_2=z_0$ 和 $y=2x^{1/3-\delta}$，得到另外两类和式：

$$\sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_j<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j<2x^{1/3-\delta}}}\ \sum_{d<2x^{1/3-\delta}}\alpha_d\sum_{\substack{p_1\cdots p_j dm\sim x\\ P^-(m)\geqslant z_0}} S_{p_1\cdots p_j dm}$$

and

$$\sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_j<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j<2x^{1/3-\delta}}}\ \sum_{z_0\leqslant p<x^{\delta/4}}\ \sum_{\substack{d<2x^{1/3-\delta}\leqslant dp\\ P^-(d)>p}}\beta_d\sum_{\substack{p_1\cdots p_j pdm\sim x\\ P^-(m)\geqslant p}} S_{p_1\cdots p_j pdm},$$

其中 α_d、 β_d 是 1- 有界且支撑于 $P^-(d) \geqslant z_0$。对于关于 $p_1\cdots p_j pdm$ 的求和，我们有 e

$$2x^{1/3-\delta} \leqslant dp < 2x^{1/3-\delta+\delta/4}.$$

类似地，我们可以使用关于 $n = dp$ 的假设，得到

$$\sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_j<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j<2x^{1/3-\delta}}} \sum_{z_0\leqslant p<x^{\delta/4}} \sum_{\substack{d<2x^{1/3-\delta}\leqslant dp\\ P^-(d)>p}} \beta_d \sum_{\substack{p_1\cdots p_j pdm\sim x\\ P^-(m)\geqslant p}} S_{p_1\cdots p_j pdm} \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

对所有 j 都成立。对于关于满足 $p_1\cdots p_j d \geqslant 2x^{1/3-\delta}$ 的 $p_1\cdots p_j dm$ 的求和部分，同样有此上界，因为我们有

$$2x^{1/3-\delta} \leqslant p_1\cdots p_j d < 4x^{2/3-2\delta}.$$

最后，我们可以使用筛法基本引理 [[18], 引理 10。3] 来处理关于满足 $p_1\cdots p_j dm$ 的 $p_1\cdots p_j d < 2x^{1/3-\delta}$ 的求和部分。我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{x^{\delta/4}\leqslant p_j<\cdots<p_1<x^{1/2}\\ p_1\cdots p_j d<2x^{1/3-\delta}}} \alpha_d \sum_{\substack{p_1\cdots p_j dm\sim x\\ P^-(m)\geqslant z_0}} S_{p_1\cdots p_j dm}\\ &= \sum_{l<2x^{1/3-\delta}} c_l \sum_{\substack{lm\sim x\\ P^-(m)\geqslant z_0}} S_{lm}, \qquad c_l = \sum_{\substack{l=p_1\cdots p_j d\\ x^{\delta/4}\leqslant p_j<\cdots<p_1<x^{1/2}}} \alpha_d.\end{aligned}$$

对每个 [[18], 引理 10。3] 使用 $\sum_{lm\sim x} S_{lm}$ 并对 $q_1, \ldots, q_k$ 和 l 求和，得到 $P^-(m)\geqslant z_0$

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{q_1,\ldots,q_k\\ q_i\sim Q_i\forall i\\ (q_1\cdots q_k,a)=1}} \lambda_1(q_1)\cdots\lambda_k(q_k) \sum_{l<2x^{1/3-\delta}} c_l \sum_{\substack{lm\sim x\\ P^-(m)\geqslant z_0}} S_{lm}\\ &\ll x(\log x)^{O(1)-\log\log x} + x^{3/5+1/3} y_0 (\log x)^{O(1)}\\ &\ll \frac{x}{(\log x)^A},\end{aligned}$$

因为 $q_1\cdots q_k \leqslant x^{3/5}$。现在命题 8.1 的证明完成。 □

借助命题 8.1，我们将原问题归约为证明一个 Type-II 范围 $[1/3-\delta, 1/2+\delta]$。除定理 1.4外，我们还需要以下来自 Lichtman [17] 和 Pascadi [20]的 Type-II 信息输入。

引理 8.2 (三线性权重的 Type-II 估计)。 设 ϑ 为可容许的。设 a 为固定非零整数，并设 $\varepsilon > 0$、$A > 0$、 $B_0 > 0$。设 M、 N、 Q、 R、 $S \geqslant 1$ 满足 $MN \asymp x$，且以下两组条件中的任意一组成立：

$$Qx^{\varepsilon} \leqslant N, \qquad N^2RS^2 \leqslant N^{1-\varepsilon}, \qquad NQR^5S^2 \leqslant N^{2-\varepsilon}, \qquad N^{1+2\vartheta}QR^{5-2\vartheta}S^{2+2\vartheta} \leqslant N^{2-\varepsilon};$$

$$Qx^{\varepsilon} \leqslant N, \qquad N^2RS^2 \leqslant N^{1-\varepsilon}, \qquad N^{\frac{2+\vartheta}{2-2\vartheta}}R^{\frac{4-5\vartheta}{2-2\vartheta}}S \leqslant N^{1-\varepsilon}, \qquad N^{\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}}Q^{\frac{1-3\vartheta}{1-\vartheta}}R^5S^2 \leqslant N^{2-\varepsilon}.$$

设 α_n、 β_m、 λ_q、 ν_r、 η_s 为复数序列，满足 $|\alpha_n|$、 $|\beta_n|$、 $|\lambda_n|$、 $|\nu_n|$、 $|\eta_n| \leqslant \tau(n)^{B_0}$，并假设 α_n 支持于满足 $P^-(n) \geqslant z_0$ 的整数 n 上，且满足 *Siegel–Walfisz* 条件 *(7)*。那么，令 $\Delta(q)$ 如 *(6)* 所示，

$$\sum_{q\sim Q}\sum_{r\sim R}\sum_{\substack{s\sim S\\ (qrs,a)=1}} \lambda_q\nu_r\eta_s\Delta(qrs) \ll_{a,\varepsilon,A,B_0} \frac{x}{(\log x)^A}.$$

此外，假设以下两组条件中的任意一组成立：

$$Qx^{\varepsilon}\leqslant N,\qquad N^2R\leqslant N^{1-\varepsilon},\qquad NQR^5\leqslant N^{2-\varepsilon},\qquad N^{1+2\vartheta}QR^{5-2\vartheta}\leqslant N^{2-\varepsilon};$$
$$Qx^{\varepsilon}\leqslant N,\qquad N^2R\leqslant N^{1-\varepsilon},\qquad N^{\frac{2+\vartheta}{2-2\vartheta}}R^{\frac{4-5\vartheta}{2-2\vartheta}}\leqslant N^{1-\varepsilon},\qquad N^{\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}}Q^{\frac{1-3\vartheta}{1-\vartheta}}R^5\leqslant N^{2-\varepsilon}.$$

于是，令 $\Delta(q)$ 如 (6)所示，

$$\sum_{q\sim Q}\sum_{\substack{r\sim R\\(qr,a)=1}}\lambda_q\nu_r\Delta(qr)\ll_{a,\varepsilon,A,B_0}\frac{x}{(\log x)^A}.$$

证明。这由 [[17], 命题 5.2]和 [[20],命题 4.4]得出。 □

现在，由定理 1.4和引理 8.2产生了三个不同的 Type-II 范围：

$$\left[Qx^{\varepsilon},\ x^{-\varepsilon}\min\left(x^{1/2+101\varepsilon/100},\ x^2Q^{-1}R^{-8},\ x^{\frac{2}{1+2\vartheta}}Q^{-\frac{1}{1+2\vartheta}}R^{-\frac{8-6\vartheta}{1+2\vartheta}}\right)\right],\tag{35}$$
$$\left[Qx^{\varepsilon},\ x^{-\varepsilon}\min\left(x^{1/2}R^{-1/2}S^{-1},\ x^2Q^{-1}R^{-5}S^{-2},\ x^{\frac{2}{1+2\vartheta}}Q^{-\frac{1}{1+2\vartheta}}R^{-\frac{5-2\vartheta}{1+2\vartheta}}S^{-\frac{2+2\vartheta}{1+2\vartheta}}\right)\right],\tag{36}$$
$$\left[Qx^{\varepsilon},\ x^{-\varepsilon}\min\left(x^{1/2}R^{-1/2}S^{-1},\ x^{\frac{2-2\vartheta}{2+\vartheta}}R^{\frac{4-5\vartheta}{2+\vartheta}}S^{-\frac{2-2\vartheta}{2+\vartheta}},\ x^{\frac{2-2\vartheta}{1+\vartheta}}Q^{-\frac{1-3\vartheta}{1+\vartheta}}R^{-\frac{5-5\vartheta}{1+\vartheta}}S^{-\frac{2-2\vartheta}{1+\vartheta}}\right)\right].\tag{37}$$

因此，只要我们能以不同方式将 $Q_1,\dots,Q_k$ 分组成 Q,R 或 Q,R,S，使得 (35)–(37) 中所有可用 Type-II 范围的并集覆盖 $[1/3-\delta,1/2+\delta]$（其中 $\delta>0$取某个值），就能得到关于素数的多线性结果。这会在 θ_i 上导出一组线性不等式：$=\log Q_i/\log x$。这类不等式解的完整显式区域极其复杂；类似情况见 [[15],第 5] 节。我们将证明三线性情形下所有解的一个子区域，并仅指出四线性和五线性情形的一些特殊解值。请注意，我们并未对参数进行完全优化，因此指数 $145/266$、$457/814$和 $3614/6353$ 仍有进一步改进的可能。

定理 8.3。 设 a 为固定非零整数，并设 $\varepsilon>0$、 $A>0$、 $B_0>0$。令 Q_1、 Q_2、 $Q_3\geqslant 1$ 满足

$$Q_2Q_3\leqslant x^{1/3-\varepsilon},\tag{38}$$
$$Q_1^3Q_3^2\leqslant x^{1-\varepsilon},\qquad Q_1^{96}Q_2^{16}Q_3^{39}\leqslant x^{32-\varepsilon},\tag{39}$$
$$Q_1^2Q_2^3\leqslant x^{1-\varepsilon},\qquad Q_1^{39}Q_2^{96}Q_3^{16}\leqslant x^{32-\varepsilon},\tag{40}$$
$$Q_1Q_2Q_3^8\leqslant x^{3/2-\varepsilon},\qquad Q_1^{16}Q_2^{16}Q_3^{107}\leqslant x^{41/2-\varepsilon}.\tag{41}$$

设 λ_1、 λ_2、 λ_3 为复数序列，且 $|\lambda_i(q)|\leqslant\tau(q)^{B_0}$。那么

$$\sum_{\substack{q_1\leqslant Q_1\\q_2\leqslant Q_2\\q_3\leqslant Q_3\\(q_1q_2q_3,a)=1}}\lambda_1(q_1)\lambda_2(q_2)\lambda_3(q_3)\left(\pi(x;q_1q_2q_3,a)-\frac{\pi(x)}{\varphi(q_1q_2q_3)}\right)\ll_{a,\varepsilon,A,B_0}\frac{x}{(\log x)^A}.$$

注。 在条件 (38)–(41) 下，我们有

$$(Q_1Q_2Q_3)^{133}=(Q_1^3Q_3^2)^{13}(Q_1^2Q_2^3)^{39}Q_1^{16}Q_2^{16}Q_3^{107}\leqslant x^{145/2-53\varepsilon},$$

因此 $Q_1Q_2Q_3\leqslant x^{145/266-\varepsilon}$，最大值在

$$Q_1=x^{230/931-\varepsilon},\qquad Q_2=x^{157/931-\varepsilon},\qquad Q_3=x^{241/1862-\varepsilon}.$$

证明。令 $\varepsilon' = \varepsilon/1000$。我们将使用三个不同的 Type-II 范围来覆盖 $[1/3-\delta, 1/2+\delta]$：第一个范围是 (36)，其中 $Q = Q_2Q_3$，$R = Q_1$ 且 $S = 1$，因此需要 (38) 来覆盖 $1/3-\delta$。第二个范围是 (36)，其中 $Q = Q_1Q_3$，$R = Q_2$ 且 $S = 1$，我们需要

$$Q_1Q_3x^{2\varepsilon'} \leqslant \min\left(x^{1/2}Q_1^{-1/2},\ x^2(Q_2Q_3)^{-1}Q_1^{-5},\ x^{32/23}(Q_2Q_3)^{-16/23}Q_1^{-73/23}\right).$$

这由 (39) 满足，因为我们有

$$Q_1^6Q_2Q_3^2 \ll Q_1^6Q_2Q_3^{39/16} = (Q_1^{96}Q_2^{16}Q_3^{39})^{1/16} \leqslant x^{2-\varepsilon/16}.$$

第三个范围是 (35)，其中 $Q = Q_1Q_2$ 和 $R = Q_3$，且我们需要

$$Q_1Q_2x^{2\varepsilon'} \leqslant \min\left(x^{1/2}Q_2^{-1/2},\ x^2(Q_1Q_3)^{-1}Q_2^{-5},\ x^{32/23}(Q_1Q_3)^{-16/23}Q_2^{-73/23}\right).$$

这由 (40) 满足，因为我们有

$$Q_1^2Q_2^6Q_3 \ll Q_1^{39/16}Q_2^6Q_3 = (Q_1^{39}Q_2^{96}Q_3^{16})^{1/16} \leqslant x^{2-\varepsilon/16}.$$

我们还需要

$$x^{1/2+\varepsilon'} \leqslant \min\left(x^2(Q_1Q_2)^{-1}Q_3^{-8},\ x^{32/23}(Q_1Q_2)^{-16/23}Q_3^{-107/23}\right)$$

以覆盖 $1/2+\delta$，这由 (41) 满足。 □

定理 8.4。设 a 是一个固定非零整数，并且设 $\varepsilon > 0$、$A > 0$、$B_0 > 0$。设 $k \geqslant 3$ 和 Q_1、…、$Q_k \geqslant 1$ 满足以下三个条件之一：

$$k = 3, \quad Q_1 = x^{83/250-\varepsilon}, \quad Q_2 = x^{69/500-\varepsilon}, \quad Q_3 = x^{13/200-\varepsilon}; \tag{42}$$

$$k = 4, \quad Q_1 = x^{439/1628-\varepsilon}, \quad Q_2 = x^{225/1628-\varepsilon}, \quad Q_3 = x^{175/1628-\varepsilon}, \quad Q_4 = x^{75/1628-\varepsilon}; \tag{43}$$

$$k = 5, \quad Q_1 = x^{1789/6353-\varepsilon}, \quad Q_2 = x^{750/6353-\varepsilon}, \quad Q_3 = x^{675/6353-\varepsilon},$$
$$Q_4 = x^{225/6353-\varepsilon}, \quad Q_5 = x^{175/6353-\varepsilon}. \tag{44}$$

设 λ_1，…，λ_k 为复数序列，满足 $|\lambda_i(q)| \leqslant \tau(q)^{B_0}$。则

$$\sum_{\substack{q_1,\dots,q_k \\ q_i \leqslant Q_i \forall i \\ (q_1\cdots q_k, a)=1}} \lambda_1(q_1)\cdots\lambda_k(q_k)\left(\pi(x; q_1\cdots q_k, a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q_1\cdots q_k)}\right) \ll_{a,\varepsilon,A,B_0} \frac{x}{(\log x)^A}.$$

注。容易看出，定理 8.4 的第一种情形并未包含在定理 8.3中。若其被包含在内，则为满足（$Q_1 = x^{83/250-\varepsilon}$，在定理 8.3 中必须有（38）。但此时我们有

$$Q_1^3Q_3^2 \geqslant x^{249/250+13/100-5\varepsilon} = x^{563/500-5\varepsilon} > x,$$

这与（39）矛盾。

证明。我们以不同方式对 Q_1，…，Q_k 进行分组，并应用 II 型范围（35）和（36）来覆盖 $[1/3-\delta, 1/2+\delta]$。所使用范围的数值边界见表 2 。 □

最后，我们证明，当 $Q_1\cdots Q_k$ 足够大时，$x^{4/7}$ 的最大规模可以任意接近 k。假设 $\theta_1+\cdots+\theta_k = \theta$，其中 $1/2 \leqslant \theta < 4/7$。令 $S = 1$ 并写作 $Q = x^{\theta'}$，$R = x^{\theta''}$。于是，II 型范围（35）和（36）变为

$$\left[\theta'+\varepsilon,\ \min\left(\frac{1}{2}+\frac{101\varepsilon}{100},\ 2-\theta'-8\theta'',\ \frac{2-\theta'-(8-6\vartheta)\theta''}{1+2\vartheta}\right)-\varepsilon\right] \tag{45}$$

and

$$\left[\theta'+\varepsilon,\ \min\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta''}{2},\ 2-\theta'-5\theta'',\ 1-\frac{\theta'}{2}-2\theta''\right)-\varepsilon\right]. \qquad (\vartheta = 1/2) \tag{46}$$

k	II 型范围的应用	下界	上界
3	(36), $Q=Q_1$, $R=Q_2Q_3$, $S=1$	83/250	797/2000
	(35), $Q=Q_1Q_3$, $R=Q_2$	397/1000	5441/11500
	(35), $Q=Q_1Q_2$, $R=Q_3$	47/100	1/2
4	(36), $Q=Q_1Q_4$, $R=Q_2Q_3$, $S=1$	257/814	307/814
	(36), $Q=Q_1Q_3$, $R=Q_2Q_4$, $S=1$	307/814	166/407
	(36), $Q=Q_1Q_2$, $R=Q_3Q_4$, $S=1$	166/407	689/1628
	(35), $Q=Q_1Q_3Q_4$, $R=Q_2$	689/1628	739/1628
	(35), $Q=Q_1Q_2Q_4$, $R=Q_3$	739/1628	1/2
5	(36), $Q=Q_1Q_4$, $R=Q_2Q_3Q_5$, $S=1$	2014/6353	54272/146119
	(36), $Q=Q_1Q_4Q_5$, $R=Q_2Q_3$, $S=1$	2189/6353	2464/6353
	(36), $Q=Q_1Q_3$, $R=Q_2Q_4Q_5$, $S=1$	2464/6353	5203/12706
	(36), $Q=Q_1Q_2$, $R=Q_3Q_4Q_5$, $S=1$	2539/6353	2639/6353
	(36), $Q=Q_1Q_3Q_5$, $R=Q_2Q_4$, $S=1$	2639/6353	2689/6353
	(36), $Q=Q_1Q_3Q_4$, $R=Q_2Q_5$, $S=1$	2689/6353	2714/6353
	(35), $Q=Q_1Q_2Q_5$, $R=Q_3Q_4$	2714/6353	2764/6353
	(35), $Q=Q_1Q_2Q_4$, $R=Q_3Q_5$	2764/6353	68122/146119
	(35), $Q=Q_1Q_2Q_4Q_5$, $R=Q_3$	2939/6353	1/2

TABLE 2. 证明定理中使用的 II 型范围8.4

令 $\nu\in[1/3-\delta,1/2+\delta]$ 并置

$$\nu_0:=\max\left(\frac{4\theta-1}{3},\ \frac{(4-3\vartheta)\theta-1}{3-4\vartheta}\right).$$

由于 $\theta<4/7$，我们有 $\nu_0<1-\theta$。令 $\theta_1=\cdots=\theta_k=h:=\theta/k$，并令 k 足够大，使得 $h<\min(1/1000,\ (1-\theta-\nu_0)/3)$。令 m 为满足 $mh<\nu<(m+1)h$ 的唯一整数，并令 $Q=Q_1\cdots Q_m$ 和 $R=Q_{m+1}\cdots Q_k$。因此，我们有 $\nu-h\leqslant\theta'<\nu$ 和 $\theta''\leqslant\theta-\nu+h$。

如果 $\nu<1-\theta-h$，那么我们有

$$\frac{1-\theta''}{2}\geqslant\frac{1-\theta+v-h}{2}>v,$$

$$2-\theta'-5\theta''\geqslant 2-5\theta+4(\nu-h)>\nu\qquad\text{and}\qquad 1-\frac{\theta'}{2}-2\theta''\geqslant 1-2\theta+\frac{3(\nu-h)}{2}>\nu$$

因为 $\nu\geqslant 1/3-\delta$，$\theta<4/7$ 且 $h<1/1000$。现在 ν 属于（46）。

如果 $\nu>\nu_0+2h$，那么我们有

$$2-\theta'-8\theta''\geqslant 2-8\theta+7(\nu-h)>\nu$$

and

$$2-\theta'-(8-6\vartheta)\theta''\geqslant 2-(8-6\vartheta)\theta+(7-6\vartheta)(\nu-h)>(1+2\vartheta)\nu.$$

现在 ν 属于 (45)。由于 $\nu_0+2h<1-\theta-h$，每个 $\nu\in[1/3-\delta,1/2+\delta]$ 都属于 (45) 或 (46)，因此得证下述定理。

定理 8.5。设 a 为一个固定非零整数，并设 $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $B_0 > 0$。设 λ_i 为复数序列，满足 $|\lambda_i(q)| \leqslant \tau(q)^{B_0}$。那么，对每个 $1/2 \leqslant \theta < 4/7$，都存在一个正整数 k，使得

$$\sum_{\substack{q_1,\dots,q_k \\ q_i \leqslant x^{\theta/k} \forall i \\ (q_1\cdots q_k,a)=1}} \lambda_1(q_1)\cdots\lambda_k(q_k)\left(\pi(x;q_1\cdots q_k,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q_1\cdots q_k)}\right) \ll_{a,\varepsilon,A,B_0} \frac{x}{(\log x)^A}.$$

AI declaration

在定理 1.4 部分内容的证明及手稿编写过程中（包括语言编辑和排版）使用了 Claude Fable 5.2 (Anthropic)。作者还要感谢 Shuishan Jiang 在人工智能使用方面给予的帮助。

References

[1] R. C. Baker 和 G. Harman. 不含大素因子的平移素数. *Acta Arith.*, 83(4):331–361, 1998. [2] E. Bombieri. 关于大筛. *Mathmatika*, 12:201–225, 1965. [3] E. Bombieri, J. Friedlander 和 H. Iwaniec. 大模数下算术级数中的素数. *Acta Math.*, 156 3 4 203 251, 1986 (–): – . [4] E. Bombieri, J. Friedlander 和 H. Iwaniec. 大模数下算术级数中的素数. II. *Math. Ann.*, 277 3 361 393, 1987 ( ): – . [5] E. Bombieri, J. Friedlander 和 H. Iwaniec. 大模数下算术级数中的素数. III.

J. Amer. , ( ): – *Math. Soc.* 2 2 215 224, 1989

. [6] E. Bombieri, J. Friedlander 和 H. Iwaniec. 对一篇旧论文的一些更正 . *arXiv e-prints*, 第 arXiv:1903.01371 页 , 2019. [7] J.-M. Deshouillers 和 H. Iwaniec. 尖点形式的克洛斯特曼和与傅里叶系数 . *Invent. Math.*, 70 219 288, 1982 : – .[8] S. Drappeau. 等差数列中的克洛斯特曼和之和，以及离散法中的误差项. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 114(4):684–732, 2017. [9] P. D. T. A. Elliott 和 H. Halberstam. 素数理论中的一个猜想. 载于

Symposia Mathematica Vol. , , *IV (INDAM, Rome, 1968/69)* 59 72 1970

第 – 页. Academic Press, 伦敦, .[10] ´E. Fouvry. 关于 Bombieri–Vinogradov 定理´的`周边问题. *Acta Math.*, 152(3–4):219–244, 1984.[11] ´E. Fouvry. 关于 Bombieri–Vinogradov 定理的周边问题. II. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, ( ): – .[12] ´E. Fouvry 和 H. Iwaniec. 算术级数中的素数 . *Acta Arith.*, 42:197–218, 1983. [13] H. Iwaniec 和 J. Pomyka-la. 四次范数的和与差. *Mathematika*, 40:233–245, 1993. [14] H. H. Kim. GL_4 的外平方与 GL_2的对称四次幂的函子性，附录一由 D. Ramakrishnan 撰写，附录二由 H. H. Kim 和 P. Sarnak 撰写. *J. Amer. Math. Soc.*, 16:139–183, 2003. [15] R. Li. 大模数下算术级数中的素数与 Harman 筛法的改进. *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2602.20917 页, 2026. [16] J. D. Lichtman. 大模数下算术级数中的素数，以及不含大素因子的平移素数. *Mathematische Annalen*, *to appear. arXiv e-prints*, 第 arXiv:2211.09641 页, 2022. [17] J. D. Lichtman. 大模数下算术级数中的素数，以及超越平方根障碍的哥德巴赫猜想. *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2309.08522 页, 2023. [18] J. Maynard. 大模数下算术级数中的素数 I：固定剩余类. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 306 1542 2025( ), . [19] J. Maynard. 大模数下算术级数中的素数 II：良因子化估计.

Mem. Amer. Math. , ( ), . *Soc.* 306 1543 2025

[20] A. Pascadi. 关于素数与光滑数的分布指数 . *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2505.00653 页 , 2025. [21] D. H. J. Polymath. 张益唐型的新均匀分布估计. *Algebra & Number Theory*, 8:2067–2199, 2014. [22] A. Selberg. 关于模形式傅里叶系数的估计. 载于 *Proc. Symposia in Pure Math. VIII*, 第 1–15 页. American Mathematical Society, Providence, 1965. [23] J. Stadlmann. 关于算术级数中的素数与许多素数之间的有界间隔. *Adv. Math.*, 468 110190, 1 74, 2025 :Paper No. – .

[24] A. I. Vinogradov. Dirichlet L-级数的密度假设。 *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 29:903–934, 1965年。
[25] Y. Zhang. 素数之间的有界间隔。 *Ann. of Math.*, 179(2):1121–1174, 2014年。

Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ, UK
Email address: runbo.li26@imperial.ac.uk, runbo.li.carey@gmail.com