arXiv:2611.29087v1 [math.HO] 21 Nov 2026

# 数学家在数学中的作用

Carlo Gasbarri

2026年11月24日

**摘要**

对于在一个由机器发现并验证证明的时代，数学家所扮演的角色，我们进行了一些思考。

据说，安德烈·韦伊曾说过，年轻时，他希望证明黎曼猜想；到了晚年，他只要能理解该猜想的一个证明就会感到满足；而在老年时，如果知道确实存在一个证明，他便心满意足了。人们通常讲述这个故事，是为了表现其中关于抱负与年龄的温和讽刺，但它也提出了一个不那么令人自在的问题：当一个定理得到证明时，我们究竟获得了什么？以近几十年来最著名的案例为例。方程 $x^n + y^n = z^n$ 在正整数中没有解这一事实，真的改变了任何人的生活，或改变了生活中的任何实质性事物吗？有人可能会反驳说，它当然改变了安德鲁·怀尔斯、理查德·泰勒以及许多直接参与该证明及其漫长后续工作的数学家的生活；其中一直到 Kevin Buzzard，他已经着手让计算机验证整个论证。他们的事业为他们带来了学术声望、奖项与荣誉，以及重要职位。然而仔细观察便会发现，真正改变他们生活的，并不是不存在解这一事实，而是他们 找到了证明，是他们 理解了为什么不存在解，并且他们 能够向数学界其他成员解释这一点。

我属于一个不同且规模大得多的群体。和大多数职业数学家一样（我说的是大多数：我们中的绝大多数，而不是某个倒霉的小众群体），我既没有能力，也没有好运气去证明一个重大猜想。无论过去还是现在，我所做的都是些更为平凡的工作：将某个理论稍稍向前推进，让它有所发展，真正理解它，并且常常向其他数学家解释它。这不是承认失败，而只是这个职业的常态。多年来，看着朋友和同事取得那些将以他们的名字流传的结果，我不止一次问自己：我在数学界真的有一席之地吗？后来有一天，我明白了，确实有。我的职责是理解，并帮助他人理解，为什么这么多数学结果如此重要。没有像我这样的人，那些所谓的数学天才和英雄就不会有称职的听众，也不会有人真正懂得欣赏他们的发现。

人们曾多次尝试阐明数学中什么最重要。一种常见的
答案诉诸时间的判决：很久以前发展起来的理论，往往当时完全没有考虑过其用途，如今却显得迫切相关，并且有着无数应用。最常举的例子几乎好得令人难以置信。在《一个数学家的辩白》（1940年）中，G. H. Hardy 对数论的无用性怀有一份平静的自豪感；他将数论视为最纯粹、最无害的学科，认为无论哪场战争都绝不可能派上它的用场。看来，命运颇有幽默感。几十年后，数论竟成了

现代密码学的支柱。如今，它守护着银行、政府和军事通信，而哈代那无害的消遣竟成了国家安全攸关之事。

哈代的故事是真实的，而且经常被人讲起。但它是个例外，而人们之所以记得它，恰恰是因为它是个例外。每一位其“无用”的数学后来在现实世界中派上用场的哈代背后，都有无数种理论依然毫无用处，而且很可能永远如此——正如它们的作者曾欣然承认的那样。对于数学的大部分领域而言，诉诸后世的认可，与其说是一种辩护，不如说是一种希望。我不禁觉得，那些依赖这种说法的人，有点像一位默默无闻的诗人，只能以这样的梦想安慰自己：几个世纪后，会有人偶然发现他被遗忘的手稿，而他也将于身后荣耀地被誉为其时代最伟大的诗人。这想法令人宽慰。但从本质上说，活着的人永远无法验证它。

哈代那句名言真正揭示的另有所在，物理学史也讲述着同样的故事。马克斯·普朗克当时当然没有想到，量子物理学日后会有无数种应用。他只是试图弄明白受热物体如何辐射。至于爱因斯坦，他发展相对论并非为了让我们有朝一日能借助GPS接收器找到方向，尽管这种设备要想正常工作，完全离不开他的理论。驱使这些科学家以及哈代的，是理解自然和他们所研究的数学的渴望。他们的兴趣从来不只是知道是否某件事为真，而是要理解它为何为真，并探究如何证明它。

然而，在过去几个月里，这个问题以一种紧迫得多的形式重新浮现，因为人工智能已迅速进入数学领域。2026年7月19日，任职于 Anthropic 的数学家 Levent Alpöge 在 X 上发布了一则言简意赅的消息，宣布在人工智能模型 Claude Fable 5 [1]的帮助下，找到了三维情形下雅可比猜想的一个明确反例。9月8日，OpenAI 宣布，其一个尚未发布的内部模型解决了克雷千禧年大奖难题之一——纳维–斯托克斯存在性与光滑性问题：它证明了一个最初光滑的流可以在有限时间内产生奇点 [2]。10月6日，同一家公司发布了一个包含722份手稿的代码库，这些手稿被归为372个“结果系列”，其中似乎包含了数量惊人的未解猜想的解决方案 [3]。最后，11月20日，Alpöge 在个人网站上发布了一篇四页的短文，读起来颇像意识流。在文中，他表示自己与 Claude 合作，相信已经找到了黎曼猜想，乃至广义黎曼猜想的证明 [4]。这个证明目前只以 Lean代码的形式发布。数小时内，独立数学家报告称，该代码能够编译，且只依赖标准公理；短文中的一条脚注还提到，过程中生成的书面版本超过了25万页 [5]。看来，Weil 或许终能如愿以偿，了却晚年心愿：得知黎曼猜想已被证明。但是否有人终有一天能够理解 这个证明，则完全是另一回事。

过去六个月里，整个数学界似乎已经从安德烈·韦伊人生的第一阶段走到了第三阶段，而且几乎没有察觉自己跳过了第二阶段。如果还需要更多证据来证明韦伊对世界有着非凡的洞察力，那么证据就在这里：他似乎不仅预见了一位数学家人生的轨迹，也预见了数学本身的命运。人工智能最初取得的成功，我们任何人都还能自行检验。雅可比猜想的反例只有寥寥数行，只需一个下午用纸笔推演，或者在任何计算机代数系统上运行几秒钟，就足以让人相信它确实成立。如今呈现在人性面前的却是截然不同的东西：一位神谕，一位古义上的先知，告诉我们黎曼猜想为真。我们无法追随这套论证，也不可能指望读懂它。

我们只能接受这个判决，同时相信另一台机器的保证：每一步都已经过检验。晚年的韦伊若知道有一份证明存在，想必就会满足。但这真的是我们所向往的境况吗？人性，或者至少数学界，如今是否愿意把自己看作一位退休的老人，满足于听别人告知，自己年轻时的问题已经由他人解决？

幸运的是，数学界似乎有一部分人正在对 Alpöge 的声明作出反应。就在同一天，Ravi Vakil 公开了 Alessandro Masullo 长达 940 页的预印本《素数之歌》，该预印本提出了广义黎曼猜想的一个证明；这是十二年左右工作的成果，而用 Vakil 的话说，这完全是人类完成的。Masullo 的工作并非没有争议。多年来，他所谓的证明与其说是一篇文本，不如说更像是一个传闻；它仓促发布后受到了公开的质疑，而在数小时内，读者们就已经指出了其中可能存在的漏洞。但这一切恰恰就是关键所在。围绕 Masullo 手稿所发生的一切，是一种由辩论与理解构成的人类活动。数学家们逐页阅读，提出异议，建议修正，围绕一个不等式展开争论，即使他们会借助机器来帮助自己。也许 Masullo 错了；也许他没有。重要的是，人类仍在继续理解和讨论那些拓展人类知识的问题；无论结果如何，所有参与其中的人最终都会比之前知道得更多。想想另一种情况。假设有一天，一个程序报告说，借助 Claude 生成的证明是错误的，或是不完整的：某个陈述形式化有误，存在一个隐藏假设，或者某一步并未真正表达它声称表达的内容。那时我们能做什么？几乎什么也做不了。我们只能耸耸肩，说“算了，我对此无能为力”，然后忘掉整件事。没有人会从中学到任何东西，因为一开始就没有人真正理解过任何东西。再假设相反的情况：一切都成立；专家们一致认为，这个形式化陈述确实就是黎曼猜想，而 Lean 也证明了它的真实性，且达到了任何合理怀疑都无法动摇的程度。那么，我们究竟会了解到关于黎曼猜想的什么？它为真，仅此而已。关于<STYLE_PLACEHOLDER>ζ函数的零点为何位于临界线上、是什么隐藏结构迫使它们在那里，以及这对素数意味着什么，我们不会比以前知道得更多。我们学科中最著名的问题将得到解答，而我们的无知程度将与前一天一模一样。

数学史上充满了这样的错误：它们最终发挥的作用，胜过许多正确的定理。1848年，Jakob Steiner提出，在一般位置给定的五条圆锥曲线中，有多少条圆锥曲线与它们相切？他的答案是7,776。这个答案错了。16年后，Michel Chasles证明正确答案是3,264。人们努力探究Steiner为何出错，以及这类数目究竟该如何计数，这项工作正处于后来发展成交叉理论的开端。这个故事极具代表性，David Eisenbud和Joe Harris因此选取这个数字作为他们的著作《*3264*及其他：代数几何学第二课程》的书名。一个世纪后的20世纪50年代，比利时数学家Lucien Derwidué发表了一篇证明，声称证明了任意维数代数簇的奇点消解。这个证明有缺陷。Beniamino Segre和Oscar Zariski曾长篇驳斥，而Zariski在一篇评论中逐点剖析了它；这篇评论至今仍是此类文章中的小杰作。很难相信，与这个错误证明的深入交锋没有帮助他们——并通过他们帮助整个学界——更好地理解这个问题；而这一切发生在Heisuke Hironaka最终于特征零情形解决该问题的十年前。还有Fermat本人，这篇文章正是从他讲起的。要不是他在自己的丢番图著作页边潦草写下，自己有一个绝妙的证明，只是页边空白太窄，写不下，那么许多数学成果——从库默尔理想数到椭圆曲线的模性——或许都不会出现。几乎可以肯定是错的主张，鲜有像这一条这样富有成效。再往前追溯，我们会发现

一场持续近两千年的探寻：人们试图为欧几里得第五公设找到一个“证明”。从普罗克洛到萨凯里、兰伯特，这是一连串漫长的错误、功亏一篑的尝试和巧妙的失败；最终，非欧几何由此诞生，高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基的工作更催生了现代几何。再比如化圆为方，这个问题几个世纪以来错误百出，其中许多出自业余爱好者之手，也有一些出自杰出人物之手。直到1882年，林德曼证明 $\pi$ 是超越数，这个问题才告终；这一证明也为超越数理论注入了决定性的推动力。在所有这些例子中，错误都不是死胡同。它开启了一场对话，而正是这场由渴望理解的人们持续进行的对话，推动了数学的发展。如果这些错误只是由机器简单地报告为错误，我们从中什么也学不到。

这并非是在为错误开脱，更不是在赞美人类的弱点。重点在于另一件事。数学知识并不是一份罗列真命题的百科全书，每一个新定理都只是在上面添上一行。它是辩论的推进，是人们缓慢而集体地获得理解的过程；在这个过程中，一份错误的证明、一条含糊的页边注，或长达数百年的失败，都可能与一个正确的结果同样重要，因为它们每一个都迫使我们去理解一些此前尚未理解的东西。J. 罗伯特·奥本海默在他的文章《科学中的类比》中，优美地描绘了这一过程。他指出，我们从直觉出发，随后研究它、钻研它，并使它变得理性；在这个过程中，直觉原有的魅力会消退许多。但作为交换，我们获得了更高层次的直觉，知识的增长便能由此重新开始。在我看来，这就是真正的数学：它不是对真理的占有，而是从一种直觉不断迈向更深层直觉的过程。也正因如此，无论神谕多么无误，它都无法给予我们这一切。一条被认证为真的陈述，若无人理解，丝毫不能提升我们的直觉。它只是了结了一个问题，却没有开启新的问题。

这篇短文并非又一次要谴责在数学中使用人工智能。人工智能已经到来，它是一种新工具，而且极其有用、强大。我们过去也曾见证工具改变数学的研究方式。年长的同事仍记得，最新的文章寄到后，他们花上好几个小时在图书馆里手抄下来。他们会带着几分怀旧告诉你，他们当年从中学到了很多；而年轻人只会下载那些永远不会读的论文。再往前追溯，欧拉在生命最后一段时期双目失明，却仍在脑中完成繁长而复杂的计算，再口述给助手，他的工作效率似乎并未因此受到太大影响。这些做法以及许多类似的做法，都随着时代变迁而消逝；而时代的变迁如今又让我们开始与人工智能“对话”。这样的对话已经让我们能够在研究中迈出有趣且往往出乎意料的步伐。对于我们这些依我所述肩负理解与阐释职责的人来说，它们还有另一重珍贵之处：帮助我们理解艰深的结果，补上作者留给读者的空白，并核查冗长而细致的计算。我想要抵制的，完全是另一回事：一种日益盛行的倾向——将人类排除在知识演进之外，仿佛人类在文化进步与理解发展中所起的作用微不足道，只是坐在看台上旁观他人比赛的观众。

构建现代语言模型和证明助手的科学家和数学家正在进行非凡的工作，而且这已经在改变几乎所有人类活动领域；我怀着由衷的钦佩这样说。关键在于让人始终处于科学、数学乃至理性本身的中心。可以说，五百年来，自伽利略以来，科学一直正是这样做的。它摒弃了中世纪的权威断言——即某个陈述之所以为真，只因亚里士多德或其他某位权威这样说——并以人类理性和人类理解取而代之。一个命题应当……

被接受，不是因为是谁说出了它，而是因为任何愿意用望远镜观察、重复实验或追随证明的人，都能亲自看出它成立。倘若五百年后，我们又回到了某种新式的权威断言，那将是种奇怪的讽刺：权威不再是哲学家，而是机器。请允许我明确表态：我认为，我们有权使用任何自己喜欢的方法来寻找定理的证明或构建理论。灵感可能来自书桌前数月的执着钻研，可能是在独自工作时，也可能是在团队协作中；也可能出现在繁重的体力劳动之中：据说，Chebotarev发现其著名密度定理的关键时，并非身处书房，而是在搬家时双臂搬满东西——这说明灵感并不总是等到头脑清闲时才会到来。它也可能出现在梦中，似乎有不少数学家都曾有过这样的经历。它还可能来自与机器的对话（……）。结果是如何发现的，除了发现者，谁也无权过问。我认为至关重要的是另一件事：一个结果、一篇文章或一种理论，必须有一位或多位人类为之负责：他们能够解释它、为它辩护以回应质疑，并在此基础上继续推进。雅可比猜想的反例就是一个很好的例子。这个反例是在机器的帮助下找到的，但它并未长期停留在神秘的判决状态。短短几天内，数学家们便将其推广为一个无限族，并给出了几何解释 [7], ；而自1985年起一直研究该猜想的Arno van den Essen，则写了一份说明，试图理解完全不借助人工智能如何也能发现这个反例 [6]。可以说，这一结果经过消化，变得人性化，因此成为人类知识的一部分。莫里茨·石里克在呼应维特根斯坦时主张，一个命题的意义就在于它的验证方法。若果真如此，那么一个只能由机器验证、且验证过程无人能够跟随的定理，或许对那台机器有意义，但对我们而言还没有意义。所关乎的还不止单个定理的意义。数学始终在走向简化，而且必须继续如此。曾经困难重重、是少数专家历尽艰辛才取得的成果，随着时间推移会成为标准章节，继而成为课堂主题，有时甚至只是教科书末尾的一道练习。曾经需要穷尽一生才能得到的结果，如今学生一下午就能证明。这并不意味着深度的丧失，而是数学思想已被人类真正吸收、消化，并成为任何愿意学习的人都能共享的共同遗产。我们必须让这一过程继续下去。我们不能接受机器仅仅通过向我们交付真理保证，就让这一过程停滞不前，无论这些保证看起来多么无可辩驳。一份长达25万页、永远无人能够简化的证明，因为永远无人能够理解它，并不是这一漫长人类进程的终点，而是对它的中断。

我们人类希望并且必须保持自己在知识中的核心地位。我们必须要求并接受这样一条原则：一个定理、一种理论或一个结果，无论它是如何发现的，只有当我们能够理解它、解释它、发展它并消化它时，才会成为我们知识的一部分。这种理解可能来自讨论——有时是激烈的讨论——也可能来自对话、解释，或来自数学家一贯彼此争辩的无数种方式。它当然也可能在机器的帮助下产生。但无论如何，都不应由神谕强加给我们。人们常说，数学是一门极其民主的学科。它的大门向任何愿意进入、学习并努力理解它的人敞开，无论其出身、经济条件或头衔如何。任何权威，无论多么显赫，都不能使一个陈述成为真理。必须以任何愿意费力跟随的人都能理解的方式，证明它确实为真。一个无人能够理解、却由无人能够质疑的声音认证的结果，将会成为我们这门学科历史上对这一原则的第一个真正例外。作为人类，我们有责任继续要求数学向所有希望理解它的人开放，并拒绝让它变成机器之间的私人对话。

这终于把我带到了本文标题：数学家在数学中的作用。我希望自己已经清楚地表达了立场。数学家在数学中所扮演的角色，与人类在人性中所扮演的角色相同。这句话听起来像一个重言式，而从某种意义上说它确实是，这正是要点所在。没有数学家，数学不仅会失去意义；它根本不会存在。物理学家喜欢说，询问大爆炸之前发生了什么是没有意义的，因为时间本身就是从大爆炸开始的。科学家完全理解这一论点。街头的普通人却不理解，仍然凭着顽固的常识追问之前究竟有什么。如今，奇怪的是，街头的普通人有了一个全新而且相当显赫的同伴。他如今还包括人工智能最热忱的拥护者——这些人往往才华横溢、履历 impressive——他们期待着这样一个未来：证明由机器生成，由其他机器检查，并在不需要任何人理解的情况下被认证为真。他们想象着一种会不断发展的数学，在一个没有人留下来理解它的世界里，一个定理接着一个定理地增长。就像那个追问大爆炸之前发生了什么的普通人一样，他们提出了一个毫无意义的问题。一个无人理解、由一台机器证明并由另一台机器验证的定理，并不比一本用任何人都永远不会说的语言写成的书更属于数学；后者也不属于文学。神谕越多，我们就越需要能够把它们的判决转化为理解，并与他人分享这种理解的人。没有数学家的数学，并不是效率更高的数学。它根本什么都不是。

## 参考文献

[1] L. Alpöge 在 X 上的帖子（@___alpoge___），2026年7月。[2] OpenAI，《纳维–斯托克斯千禧年大奖问题》，openai.com，2026年9月8日。[3] OpenAI，数学代码库，github.com/openai/math，于2026年10月6日发布。[4] L. Alpöge，其个人网站上的说明，2026年11月20日。[5] “Anthropic 数学家声称证明了黎曼猜想——数学界最著名的问题”，《科学美国人》，2026年11月20日。[6] A. van den Essen，《一种寻找雅可比猜想反例的初等方法》，arXiv:2609.17795，2026年9月。[7] S. Gao，《大于二的维数中雅可比猜想的反例》，arXiv:2608.00222，2026年7月（2026年11月修订）。

Carlo Gasbarri, IRMA, UMR7501，7 rue René-Descartes，67084 斯特拉斯堡 Cedex电子邮件地址：gasbarri@math.unistra.fr