arXiv:2611.29090v1 [physics.plasm-ph] 21 Nov 2026

单次单级仿星器

Pedro F. Gil, [1] Lanke Fu, [2] 和 Alan A. Kaptanoglu[1,2]

[1] *William E. Boeing Department of Aeronautics and Astronautics,University of Washington, Seattle, Washington 98195, USA*[2] *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, New York 10012, USA*

在仿星器设计中，等离子体和线圈的几何形状都非常复杂，因此通常需要分别进行设计。这使得高性能等离子体可能无法通过实际可制造、可组装的线圈来实现。我们提出了一种弥合这一差距的新方法。在这一框架下，等离子体形状在优化的同时，针对每一种候选形状，都会寻找满足严格工程限制的近最优线圈。该方法无需手动调谐权重，便能引导等离子体趋向实际线圈能够产生的形状。此外，我们展示了首次从托卡马克"冷启动"开始的单次优化运行。从单次冷启动出发，我们设计出一种有限-β 仿星器，其性能可与反应堆尺度NCSX媲美；还设计出一种紧凑型仿星器，其长宽比为 2.5、准轴对称性为 $\langle\beta\rangle = 2\%$，具有一个场周期和自洽自举电流。从基于 W7-X 得出的边界出发，我们设计出一种具有反应堆相关稳定性特性的准等动力学仿星器。随后，我们以此为热启动，优化得到一个单组线圈解；该解在从真空到 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 的每个压力值下，都能产生高性能准等动力学仿星器，从而直接应对反应堆的"启动"阶段。这些仿星器的自洽自由边界解通常比传统的分开设计方法具有更好的线圈，同时等离子体性能相当或更优，表明稳健的单阶段方法切实可行，并为反应堆尺度仿星器的设计提供了直接途径。

I. 引言

仿星器是一种环形磁约束装置，是实现可控核聚变的有前景候选方案 [1–4]。与托卡马克不同，仿星器主要依靠外部线圈产生的三维磁场，因此不需要可能导致破裂的大电流 [5–8]。这使其能够稳态运行，对于未来的发电厂而言是一项显著优势 [6, 9]。然而，这项优势并非唾手可得。一般的三维磁场无法良好地约束等离子体。由于缺少托卡马克的连续对称性，俘获粒子的轨道会漂移出等离子体，从而造成巨大的输运损失 [2, 10]，并使氘氚（D–T）聚变反应产生的高能阿尔法粒子在加热等离子体之前就流失 [11, 12]。约束磁场必须经过精心设计，而产生这种磁场的线圈是复杂的三维曲线，也必须经过设计，才能实际建造 [13–16]。

仿星器优化的最新进展表明，磁场能够以非凡的精度进行塑形。准对称性（QS）是场强的一种性质，能够约束无碰撞俘获粒子；如今，在整个等离子体体积内已可实现非常高程度的准对称性 [17, 18]。同样，准等磁动力学（QI）构型中，场强的等值线在极向上闭合。由于其较低的自举电流和良好的快粒子约束，这类构型正受到科研界和工业界的共同关注 [19–21]。然而，这些结果仅针对等离子体本身获得。是否存在一组可行的线圈来复现这样的磁场，则是另一个问题。

传统上，仿星器设计被细分为两个阶段。在第一阶段，通过在固定边界 [17, 22] 中求解磁流体力学（MHD）力平衡方程，根据物理性质优化等离子体边界。在第二阶段，寻找能够复现该边界的线圈 [23–25]。迄今建造的几乎所有仿星器都采用了这一两阶段流程，包括 Wendelstein 7-X [26, 27], Wendelstein 7-AS [28],HSX [29, 30], LHD [31]。两个阶段仅通过目标等离子体边界相互耦合。对于等离子体性质而言非常理想的边界，可能难以用长度、曲率和间距均受限的线圈实现；而对边界进行细微且不影响物理性质的改变，可能会使线圈问题容易得多。此外，线圈问题是一个适定性不佳的磁静力学逆问题，其大多数解从工程角度来看都不切实际 [32]。后果可能十分严重。线圈复杂度和严格的公差是导致 NCSX 成本大幅增长并最终被取消的主要原因，也是 Wendelstein 7-X 建造长期延误的主要原因 [27, 33, 34]。

因此，鲁棒联合优化（单阶段）方法有望显著改进仿星器设计。单阶段方法对等离子体进行优化

同时优化边界和线圈。从历史上看，这类方法往往需要"热启动"（以与目标设计点高度相似的等离子体及其相关线圈作为初始条件）、大量计算，并假设是真空仿星器 [35–40]。单阶段优化正越来越多地用于真实实验的设计。哥伦比亚仿星器实验（CSX）和优化仿星器中的电子与正电子（EPOS）装置，采用固定边界和 Boozer 磁面单阶段方法设计 [41], ，并对超导带材的应变施加约束 [42–45]。此外，对于某些

方法，线圈自由度和等离子体边界自由度都通过同一个代价函数进行优化，其中磁通平方、线圈工程惩罚项和等离子体目标通过权重进行平衡，而这些权重通常需要手动调整。此类权重通常多达 15–20 个，而且由于“优良”权重的类别往往强烈依赖于具体的等离子体设计，因此无法预先知道其最优值。采用增广拉格朗日法的线圈问题约束形式可自动调整这些权重 [46, 47], ，避免手动选择和调整权重；以这种方式获得的线圈组，其磁场精度和工程指标通常都优于已发表的线圈设计。

另一类研究则将这两个阶段分开，并在第一阶段加入线圈复杂度的代理指标，引导边界优化趋向于更易通过线圈实现的形状。这类代理指标的计算方式有两种：一种是在绕组面上定义电流势，如 REG- COIL；在固定边界优化中，可以将其电流密度或线圈—等离子体距离设为目标 [24, 48] ，并对边界求导 [49, 50], ；另一种则仅依据等离子体磁场计算。后一种情况下，边界上磁场 $\mathbf{B}$ 梯度的最短尺度长度与可实现的线圈—等离子体距离相关 [51, 52],，磁力线的测地挠率则与线圈的非平面性相关 [53]。这些代理指标计算成本低，已用于设计研究，但它们只反映与线圈之间的相关性，并未建立与线圈的直接联系。代理指标表现良好的边界，并不保证能由满足给定长度、曲率和间隙限制的细丝线圈良好拟合；因此，仍需在第二阶段求得线圈并检查拟合效果。

准单阶段（QSS）方法仅直接优化等离子体自由度，将线圈优化视为一个可通过确定性求解、并针对等离子体边界求导的子问题。Yu 等人最初将 QSS 方法用于设计永磁仿星器 [54], ，近期又将其扩展至模块化线圈的设计 [55]。线圈可行性通过一个代理量纳入边界优化：该代理量是在距等离子体均匀偏移处的绕组面 [24] 上的最大归一化法向磁场。Fu 等人基于 QUADCOIL 绕组面方法 [56, 57], 构建了一个可微代理量，用于估算线圈复杂度及其相对于边界的梯度，同时满足曲率、力和线圈间距约束。

在这两种情况下，进入等离子体优化的量都是在电流片或偏置磁面上评估的，而不是基于更为真实的丝状线圈组进行评估。这意味着线圈仍须在之后设计；只有到那时，才能确定它们与等离子体设计的一致性，以及线圈是否满足工程限制。不过，它们有一个显著优势，也是本文所采用的做法：线圈自由度，即线圈形状和线圈电流，始终不会成为优化变量。对于每个候选边界，它们都是线圈问题的解，而该问题将工程要求作为硬约束施加。

II. 本工作的贡献

本文提出一种新颖的 QSS 公式，其中对等离子体进行优化，并将完整规模的丝状线圈优化作为确定性子问题求解。本工作的主要贡献包括以下进展：

- **有限等离子体压力下等离子体与丝状线圈的单阶段优化**。优化等离子体边界的同时，使线圈在每个候选边界对应的硬性工程限制下保持（局部）最优。

- **从简单起始点出发的单次优化性能**。无论优化是从带有圆形线圈的轴对称圆形环面（下文称为“冷启动”）、已发表的优化构型（热启动），还是完全不同类型的仿星器开始，我们的 QSS 方法似乎都能稳健地找到精确的准轴对称、准螺旋和准等动力学设计，尽管事先并不了解或偏向最终形状。据我们所知，此前尚未有人通过单阶段优化，从如此简单的轴对称起始构型或不同对称类别的设计出发，同时找到高性能仿星器及其线圈。

- **自动权重调节**。传统上，优化问题中的 15–20 个目标权重都需要手动调节，以使线圈达到工程公差。通过这种方式获得最优解需要投入大量精力并进行多次计算。相比之下，在我们的工作中，等离子体和线圈目标函数的所有权重均由 QSS 算法自动处理，以满足规定的硬性工程限制。

- **加速**。 从冷启动开始，完成真空构型的 QSS 设计约需一个 GPU小时。有限压力设计和反应堆相关设计通过连续阶段运行，耗时约 5 至 10 GPU 小时。附录 H3 将其与其他方法的成本进行了比较。

- **全面验证**。 每项设计在优化后都会经过验证。我们报告了所有验证指标，这些指标来自使用 DESC代码 [58], 计算的高分辨率收敛自由边界平衡态，以及来自反应堆 D–T 聚变出生剖面下的导引中心阿尔法粒子轨道；这些平衡态能够分辨离散线圈产生的磁场波纹。

- **通过单次运行寻找高性能有限-β 反应堆尺度仿星器**。我们介绍

两种反应堆相关设计。第一种是在 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 下的准轴对称设计，其性能在反应堆尺度上可与 NCSX 相媲美。该设计通过冷启动单次运行获得，采用 18 个模块化线圈，而 NCSX 设计需要 78 个线圈才能得到收敛的自由边界解。第二种是准等动力学设计，通过从 W7-X 衍生边界进行热启动，在单次运行中获得。随后，等离子体与一组线圈共同设计，使其能够在从真空到 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 的所有压力下产生反应堆相关等离子体，只有线圈电流发生变化。这两种设计的等离子体和线圈指标均可与现有已发表设计及现实中的仿星器实验相媲美。

我们在表 I 中将该方法与最接近的四种单阶段方法进行了比较。我们的工作极大受益于借鉴了这方面文献中的思路，而这些研究也帮助我们找出并弥补了尚存的不足。例如，先前的四种方法都仅限于真空磁场，不进行后续自由边界平衡计算，也不验证快粒子轨道；此外，它们通过必须手动调整的权重来平衡物理目标与线圈因素。在 Jorge 等人提出的单阶段方法中，细丝线圈的工程限制通过二次惩罚项处理，而平衡态梯度则通过有限差分计算。Giuliani 等人用线圈产生的真空磁场的 Boozer 曲面表示等离子体，并采用伴随梯度，但也将线圈限制作为二次惩罚项。在 Yu 等人和 Fu等人提出的方法中，等离子体优化只考虑绕组面上的电流片；细丝线圈则在之后、等离子体形状固定的情况下通过单独阶段求得，因此可能引入等离子体优化过程中无法察觉的误差。

相比之下，我们的方法在严格工程约束下将细丝线圈保留在优化循环中，无需手动调谐权重，通过包络定理获得线圈项的梯度，可处理有限等离子体压强，并且能够从简单的轴对称起始构型开始。本工作随后利用高分辨率自由边界 DESC 平衡态和 α粒子轨道对线圈组进行验证。

本文结构如下。第 III 章节介绍嵌套优化问题、线圈求解器、连接等离子体与线圈的梯度、平衡以及外层优化器。第IV章节介绍冷启动设计，第 V 章节介绍类 NCSX 设计，第 VI章节介绍类反应堆准等动力学设计、其权衡，以及用于升压过程的单一线圈组。附录给出约束、从 Landreman 和 Paul 的准轴对称构型热启动得到的设计 [17]，（下文称为 LP QA）、梯度推导及其泰勒检验、自由边界与阿尔法粒子计算，以及与单阶段优化 [37]和增广拉格朗日线圈 [46, 47]的基准测试。

III. 优化方法

现在我们介绍优化问题的公式及其算法求解方法。

III.A 嵌套优化公式

III.A.1 物理问题：其变量为等离子体边界，通常称为最后闭合磁通面（LCFS），它是嵌套磁面的区域与遍历场线区域之间的边界。在柱坐标中，该边界由仿星器对称傅里叶级数表示，

$$\begin{aligned} R(\theta,\phi) &= \sum_{m,n} r_{mn}\cos(m\theta - nN_{\text{fp}}\phi), \\ Z(\theta,\phi) &= \sum_{m,n} z_{mn}\sin(m\theta - nN_{\text{fp}}\phi), \end{aligned} \tag{1}$$

其中，θ 为极向角，ϕ为环向角，N_{fp} 为场周期数。自由系数r_{mn} 和 z_{mn} 构成边界向量$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s}$，其中$r_{00}$ 固定以设定大半径。基于这些自由度，我们将等离子体优化问题定义为

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \\ &\text{subject to } \mathbf{h}(\mathbf{s}) \le 0, \quad J_f^\star(\mathbf{s}) \le \epsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

这里 f 是物理目标函数。对于准轴对称和准螺旋对称构型，它是参考文献 f_{QS} 中的准对称性（QS）误差 [17, 60] ；对于准等动力学构型，它是准等动力性（QI）误差 f_{QI}，其构造遵循 Goodman等人 [61], 的方法。两者均在附录A中定义，附录还给出了本工作采用的其他物理约束。向量$\mathbf{h}$ 汇集了其他物理约束，每个约束均写作 $h_i(\mathbf{s}) \le 0$。附录A中定义的典型物理约束包括：纵横比的上限 A；平均旋转变换的目标值$\bar{\iota}$（以两个不等式施加）；轴上和边缘处旋转变换的取值范围；横截面最大伸长率的上限 E；准等动力学构型的镜比上限 Δ；以及磁阱的下限W。最后一个约束限制 $J_f^\star(\mathbf{s})$，即边界$\mathbf{s}$ 对应的局部最优线圈的磁通平方；该值由下文介绍的线圈问题求得。

III.A.2 工程问题：其变量是三维电磁线圈的形状和电流。这些线圈是细丝曲线，每条曲线都用笛卡尔坐标下的截断傅里叶级数描述，

$$x^i(t) = \sum_{l=0}^{M} x_{c,l}^i \cos(lt) + \sum_{l=1}^{M} x_{s,l}^i \sin(lt), \tag{3}$$

表一。单阶段优化方法的能力。AD 表示自动微分，FD 表示有限差分。

	Jorge *et al.* [37]	Giuliani *et al.* [59]	Yu *et al.* [55]	Fu *et al.* [57]	本工作
优化循环中的线圈	丝状体	丝状体	电流片	电流片	丝状体
严格工程约束	×	×	×	有限的	✓
无需手动调节权重	×	×	×	×	✓
线圈项的梯度	FD	伴随	未报告	伴随，自动微分	包络定理
有限等离子体压强	×	×	×	✓	✓
快粒子约束	×	×	×	×	阿尔法粒子损失
初始点	优化 平衡与线圈	优化平衡 或近轴设计	旋转椭圆	优化 平衡	轴对称环面 或已发表设计

而 y^i 和 z^i也采用类似的表示，本文的每种设计都使用傅里叶阶数 $M = 5$，但第 VI章节中类似反应堆的设计使用 $M = 8$。值得注意的是，这比大多数已发表的线圈解所用的阶数低。虽然很容易将阶数提高，但无论如何，本工作都找到了高性能解。我们还从经验上观察到，保持傅里叶阶数 M 相对较低，会减少最终解中的线圈波纹；其后续影响是，自由边界计算往往能在较低分辨率下收敛。例如，在第 $M = 16$IV A 2章节中与我们进行比较的已发表 QUASR线圈，其自由边界计算和α损失要到边界分辨率非常高时才会收敛，约为 $n = m = 28$。分辨率的影响很显著：在 $n = m = 16$ 处进行的首次计算报告损失为 20%α，而在 $n = m = 28$ 处， α损失已收敛至 4。5%。

每个半个场周期包含 N_c 个基础线圈。基础线圈的傅里叶系数及其电流构成线圈向量 $\mathbf{c}$，完整的 $2N_{\mathrm{fp}}N_c$ 线圈组则通过场周期对称性和仿星器对称性生成。基础线圈的总电流在优化开始前已固定，因此只有 $N_c - 1$ 电流是自由度，无需等式约束。

对于给定的边界， $J_f^\star$ 是线圈问题的结果

$$J_f^\star(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{c}} \; J_f(\mathbf{c}, \mathbf{s}) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{s}) \le 0, \qquad (4)$$

其中， J_f 是局部磁通平方。它是边界上法向场平方的面积分，并按场强进行归一化，

$$J_f = \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{|\mathbf{B}|^2} \, d\Gamma. \qquad (5)$$

磁场的法向分量必须在等离子体边界 Γ 上为零，而有限数量的线圈无法精确实现这一点。因此，这个单一标量可以将线圈信息纳入等离子体优化，而无需将线圈自由度纳入其中。该积分通过数值求积在边界唯一的半个场周期上均匀的角网格中计算。此处，**磁场** 是根据毕奥-萨伐尔定律计算得到的线圈磁场

和 $\hat{\mathbf{n}}$等离子体边界的单位法向量。向量 $\mathbf{g}$ 汇总了表 II中定义的工程限制，以确保线圈能够制造并安装。我们将 $J_f^\star(\mathbf{s})$ 称为边界 $\mathbf{s}$ 的最优磁通平方，因为它是针对该等离子体、满足所有工程限制的局部最优线圈所产生的磁通平方。

III.A.3 耦合：式 ϵ （2）中的界限将两个问题耦合起来，图1 概述了由此形成的嵌套算法的组织方式。在两阶段方法中，不带磁通约束求解式（2），并在所得边界上求解一次式（4）。在 QSS 方法中，每次评估等离子体问题的函数时，都会通过求解式（4）来评估最优磁通平方。因此，等离子体优化器看到的是针对当前边界局部最优的线圈所产生的磁通平方，而不是拟合到较早边界的固定线圈组所产生的磁通平方。将界限设为约束而非加权目标函数，是为了使其表示设计者愿意接受的法向场。

III.B 内层线圈问题

我们从最内层问题开始，即式（4）中的线圈问题；该问题在每次评估等离子体问题的函数时求解。在真空中， J_f 不随电流的尺度变化，因此电流大小的选择不会影响优化。在有限压力下，等离子体电流会产生自身的磁场 $\mathbf{B}_{\mathrm{pl}}$，我们通过虚拟包层 [62]，根据收敛的 VMEX 状态在边界上计算该磁场。等离子体磁场除以 $\lambda_G = I_G/I$后进入线圈问题； $\lambda_G = I_G/I$是平衡的净极向电流（$I_G = 2\pi|G|/\mu_0$ 在最后闭合磁通面处的值，其中 G为附录C中的极向电流函数）与所有线圈电流总和 I之比，它使固定的线圈总电流与平衡的尺度相匹配。于是，线圈残差变为 $(\mathbf{B}_{\mathrm{coil}} + \sigma\mathbf{B}_{\mathrm{pl}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}/|\mathbf{B}_{\mathrm{coil}} + \sigma\mathbf{B}_{\mathrm{pl}}|$，其中符号$\sigma = \mathrm{sign}\langle \mathbf{B}_{\mathrm{coil}} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{pl}} \rangle$ 确定等离子体磁场相对于线圈的方向。

线圈问题由 XCoil 求解。XCoil 是一款用 JAX 编写、为速度而构建的新型线圈求解器，将成为一篇即将单独发表的论文的

表 II. 线圈问题的工程约束，作为硬约束施加且不设裕度。这里，$\mathbf{r}_i(t)$ 是线圈 i 的中心线，而 $\kappa = |\mathbf{r}_i' \times \mathbf{r}_i''|/|\mathbf{r}_i'|^3$ 是其曲率。本文中，$\kappa_{\max}$、κ_{MSC}、$\bar{\tau}$ 和 γ_c 报告为所有线圈中的最大值，L_i 报告为其在线圈间的取值范围，而 d_{cc} 和 d_{cs} 按定义为最小值。加权扭转和非凸性在优化中并不常用，但我们仍报告它们以供比较。最后一行并非约束，而是以 10^{-3}为权重添加到目标函数中的规范项。

约束	定义
长度 L_i [米]	$L_i = \oint \lvert\mathbf{r}_i'(t)\rvert\, dt$，每个线圈的长度
	线圈，它决定了约束的数量-
	导体。每半个场周期的总
	长度为 $L_{\mathrm{total}} = \sum_{i=1}^{N_c} L_i$。
最大曲率	$\kappa_{\max,\ i} =$ 最大值$_t\ \kappa_i(t)$，即
度 $\kappa_{\max}$ [米$^{-1}$]	沿一条曲线最小弯曲半径的倒数
	线圈，受超导
	电缆可弯曲程度的限制
	$\kappa_{\mathrm{MSC},\ i} = L_i^{-1} \oint \kappa_i^2\, d\ell$，其惩罚
均方	
曲率 κ_{MSC}	使线圈来回绕行
[米$^{-2}$]	即使没有任何一处弯曲特别尖锐。
线圈–线圈 dis-	$d_{cc} =$ 最小$_{i\neq j,\ t,\ t'} \lvert\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t')\rvert$，
距离 d_{cc} [米]	为绕组包留出空间，并
	它们的支撑结构，以及对
	相邻线圈之间的力设定直接限值
	相邻线圈。
线圈—磁面距	$d_{cs} =$最小值$_{i,\ t,\ \mathbf{x}\in\Gamma} \lvert\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{x}\rvert$ 在
离 d_{cs} [m]	等离子体边界 Γ，为.....留出空间
	真空室 ，包层和屏蔽层-
	ing.
加权挠率	$\bar{\tau}_i = \left(\oint \kappa_i^2 \tau_i^2\, d\ell / \oint \kappa_i^2\, d\ell\right)^{1/2}$，该
$\bar{\tau}$ [米$^{-1}$]	曲率加权 均方根
	线圈的挠率平方 τ_i ，它
	衡量线圈偏离某个
	平面的程度，在该平面内线圈会发生强烈弯曲。
非凸性 γ_c	$\gamma_{c,i} = L_i^{-1} \oint$最大值$(0, -\sigma_i k_{s,i})^2\, d\ell$，
[m^{-2}]	其中 $k_{s,i}$ 线圈的曲率
	投影到其最佳拟合平面上，并且
	σ_i 其均值的符号，用来衡量线圈的
	向内弯曲。
弧长规范	$R_{\mathrm{arc}} = \frac{1}{N_c N_q} \sum_{i\ q} \left(\lvert\mathbf{r}_i'(t_q)\rvert/\bar{\ell}_i - 1\right)^2$，
	with $\bar{\ell}_i$ $\lvert\mathbf{r}_i'\rvert$在各
	N_q 线圈的求积点上的均值
	N_c 基础线圈的弧长，其归一化方差
	沿每个
	线圈。它确定了参数化
	线圈的参数化不会改变
	它们的形状。

主题。在单个 NVIDIA H200 GPU 上，线圈求解在真空中通常耗时 ~ 0.2 秒，在有限压力下耗时 ~ 1 秒，耗时短于与其并行运行的平衡求解。它采用一种遵循参考文献 [46] 思路的增广拉格朗日法，自动调整目标权重，以达到硬约束限值。

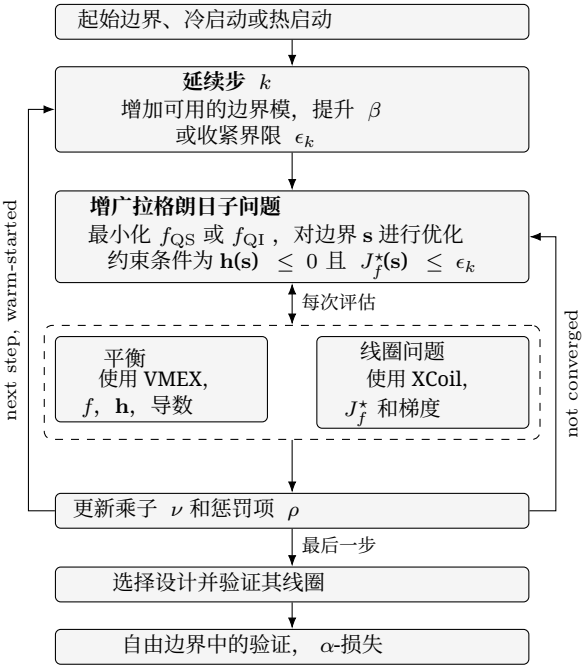

图 1. 准单阶段方法的结构。子问题的每次函数评估（虚线框）都会求解 VMEX 平衡以及式（4）中的线圈问题，并且每个延续步都从上一步热启动。

III.B.1 初始化：由于在等离子体优化过程中必须求解数千次线圈问题，因此启动方式至关重要。冷启动求解从随形线圈开始：沿边界法向偏移边界得到线圈，再将其缩放至长度限制的 85%；此外最多使用两个备用起始方案（倾斜、较短或受间隙限制的偏移）。对于轴对称圆形托卡马克的冷启动，这会生成圆形轴对称线圈。在等离子体优化过程中，只要边界每个系数的变化小于 10^{-5}，就会将上一次求解得到的线圈、乘子和惩罚项作为热启动重复使用；否则便从冷启动开始求解。

III.B.2 线圈认证：本文报告的线圈指标来自对线圈进行的最终、更全面的验证阶段。我们通过在更严格的公差下重新进行冷启动的第二阶段线圈优化，检验最终获得的线圈解是否具有路径依赖性；求解持续进行，直至认证违规量低于 10^{-5}，并保留拉格朗日值最低的线圈组。我们在完整环面的网格上评估这些线圈的法向场，并不断细化网格，直至连续两组网格的结果相差不超过 10^{-3}。结果表明，我们的解不存在路径依赖性；认证线圈组与回路内优化得到的线圈组也一致，在约束和目标方面的差异均在 1% 以内，这意味着认证线圈和回路内线圈始终处于同一局部极小值。

本工作中展示的几乎所有最终线圈解都满足所有规定的约束和目标

，且精度极高；每项归一化约束的最大违反量均在 10^{-6} 以内，且通常更接近 10^{-9}。唯一的例外是章节 VIE 中的共享线圈组，其最大曲率仅超出限值 0.7%。

线圈求解给出 $J_f^\star$ 当前边界对应的值。要使用基于梯度的优化器求解式（2），我们需要最优磁通平方关于等离子体边界的导数。附录 E给出了利用包络定理推导高效梯度的方法。真空和有限β 梯度已在附录F中通过泰勒检验进行了全面验证。

III.C 平衡及其导数

等离子体问题中的所有物理量，以及有限压力下等离子体磁场的贡献，均来自给定等离子体边界的平衡。理想磁流体动力学（MHD）平衡是指在给定边界内，等离子体压力梯度与磁力 $\nabla p = \mathbf{J} \times$**磁场**相平衡的状态。它决定了嵌套磁面的分布及其上的场强，进而决定等离子体问题中的每个物理量，例如准对称性误差或旋转变换。在固定边界平衡中，最外层磁面的形状是预先指定的，并在其内部求解平衡。本文始终以归一化环向磁通 $s = \psi/\psi_{\mathrm{LCFS}}$标记磁面，其中 $2\pi\psi$ 表示磁面所包围的环向磁通，因此磁轴处 $s = 0$，最后闭合磁通面（LCFS）处 $s = 1$。

III.C.1 平衡设置：优化采用固定边界平衡，并使用自由边界平衡对最终设计进行验证（章节 IIIF）。固定边界平衡使用 VMEX 计算；VMEX 是 VMEC 的 JAX 重实现版本，[22, 62], 其设置采用附录 A1中给出的 VMEC2000 设置。

结合附录 $\nabla_{\mathbf{s}} J_f^*$ 中的梯度 E，即可得到方程（2）所需的每个值及其导数。

III.D 外层优化器

现在，我们说明如何在固定边界 ϵ的情况下求解等离子体问题。我们采用 Powell–Hestenes–Rockafellar（PHR）增广拉格朗日法 [63]进行求解。物理目标函数是平方和，$f(\mathbf{s}) = \|\mathbf{q}(\mathbf{s})\|^2$。残差向量 q 汇集了所有评估磁面上的准对称性误差残差，或式（A8）中的准等动力学误差残差。物理约束为 $h_i(\mathbf{s}) \le 0$，其中 $i = 1$、……、n_h，如式（2）所示。磁通约束写为 $c_f(\mathbf{s}) = S\,[J_f^\star(\mathbf{s}) - \epsilon] \le 0$，其中尺度因子 S将磁通行缩放至与其他行相当的大小，且不会改变可行集。由于 $J_f^\star$ 只有在边界形状能够由符合工程限制的线圈产生时才能保持较小，因此磁通约束也起到了外层问题的强正则化作用，使边界远离任何可行线圈都无法复现的形状。外层乘子为 $\nu_i \ge 0$和 $\nu_c \ge 0$，惩罚项为 $\rho_i > 0$ 和 $\rho_c > 0$。在乘子和惩罚项固定时，每个子问题都是如下非线性最小二乘问题

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{q}(\mathbf{s})\|^2 + \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{2\rho_i} \max\left(0,\, \nu_i + \rho_i h_i(\mathbf{s})\right)^2 \\ + \frac{1}{2\rho_c} \max\left(0,\, \nu_c + \rho_c c_f(\mathbf{s})\right)^2,\end{aligned} \tag{6}$$

这是图 1中的子问题。该问题通过信赖域反射最小二乘方法求解，[64, 65] 对于此处介绍的所有设计，每次外层迭代最多进行 30 次函数评估。每个子问题求解后，乘子更新为 $\nu_i \leftarrow \min(\max(\nu_i + \rho_i h_i,\ 0), 10^3)$，$\nu_c$同样如此。惩罚项 ρ_i 仅在其违反量超过 10^4,且超过前一次违反量的四分之一时才加倍，最大加倍至 10^{-4}，从而保持子问题的良好条件性。每次外层迭代后，都会测量当前点的可行性、互补性和驻点性，并通过有界最小二乘拟合活动约束的乘子。因此，子问题的每次函数评估都需要进行一次带有精确雅可比矩阵的 VMEX 平衡计算和一次线圈求解，如图 1中的虚线框所示。当一个点的可行性低于 10^{-4} 且其相对驻点性低于 0.1 时，我们称其为已认证点。该优化器针对 ϵ的一个取值和一个边界分辨率求解等离子体问题。连接连续问题的延拓将在下文介绍。

本文还将始终与一种基线方法进行比较，该方法采用传统的两阶段优化问题版本，并使用相同的优化器，但不包含磁通行。

III.E 延续步

众所周知，仿星器优化的性能可能对优化变量的缩放、等离子体边界或线圈形状的傅里叶分辨率，以及等离子体与线圈的自洽要求十分敏感。遵循相关文献中的做法，我们沿着一系列问题求解等离子体问题，每个问题都以先前问题及其乘子作为热启动（图1）。在磁通约束延拓中，边界分辨率保持不变，并逐步收紧式（2）中的约束，$\epsilon_k = r^k J_{f,\,0}$，其中 k 是延拓点的索引，$r < 1$ 是相邻约束之比，默认为 0.85，而$J_{f,\,0}$ 是起始边界的最优磁通平方，由循环内线圈求解评估得到。每个点在真空情况下进行六次外层迭代，在有限压力下进行四次；当连续两次未达到磁通目标，或当 ρ_c 达到其上限时，延拓即停止。采用较小步长进行延拓似乎有显著影响。我们发现，单次运行若

直接跳到较紧的约束，最终可能落在准对称性误差高出3.5 倍的驻点上。在边界模数延拓中，则逐步增加边界自由系数的最大极向模数和环向模数， m， $|n| \leq 1$，2，.....，每一步开始时都设定磁通约束，通常取当前边界最优磁通平方的一半，使等离子体的大尺度形状先稳定下来，再允许更精细的细节发生变化。这是一种常见的技术 [17, 66, 67]。与 DESC代码 类似，我们有时也采用压力延拓，即依次求解压力逐渐增大的问题 β。

磁通约束延拓适用于起点已经是良好设计的情况，例如已发表的设计。它从该点出发，追踪物理性能与磁通平方之间的权衡，并给出一条可供选择的设计曲线（附录 B1）。边界模和压力延拓适用于远离良好设计的冷启动或形状发生较大变化的情况，因为每一步都接近前一个解，并且线圈会随着边界的变化而跟随其演化。

III.F 验证

每个选定的设计都会独立于优化过程进行检查。在最终线圈阶段的收敛网格上，评估其线圈的平均法向场 $\langle|$**磁场**$\cdot\hat{}$**法向量**$|\rangle/\langle|$**磁场**$|\rangle$。由于目标边界上的低法向场并不能保证线圈能够复现目标等离子体，我们还会计算每组线圈的自由边界平衡，并采用能够解析离散线圈磁场波纹的分辨率。我们使用 DESC [58, 68] 的自由边界求解器，采用径向分辨率 $l_\rho = 16$ 以及最大的极向和环向模数 $m_\theta = n_\phi = 16$，并使用设计的剖面；在有限压力下，还会将线圈电流按 λ_G进行缩放。在此分辨率下，这些计算能够解析每个场周期内最高达 $n = 16$的离散线圈磁场波纹。我们选择 DESC 的自由边界计算，是因为在这些分辨率下，它在自由边界问题中能够稳定收敛，而我们尚未在其他求解器（如 VMEC）中观察到这一点。为支持这一结论，我们在表 XII 中报告了本工作所有结果的极低自由边界残差。

本文所有最终的等离子体性质均直接根据这些自由边界计算结果进行评估。这些性质包括准对称性或准等动力学误差、 f_{QS} 或 f_{QI}轴上和边缘处的旋转变换、纵横比 A、截面的最大伸长率 E 、最内侧磁通面上的镜比 Δ 、磁阱 W、归一化Mercier判据$\hat{D}_{\mathrm{Merc}}$（其为正表示稳定性），以及 α损失率，即在0.2 s内损失的聚变产生的α粒子所占的比例，和 δ_{LCFS} 自由边界最后闭合磁面与目标之间的均值和最大距离。其定义见附录A。本工作中用于比较的现有仿星器设计（HSX、W7-X、NCSX等）均以完全相同的方式进行评估。我们根据它们各自的线圈组重新计算自由边界平衡，并且不引用已发表的自由边界数值。因此，本文中引用的每一个等离子体量，无论是在正文还是表格中，均为认证线圈的收敛自由边界平衡值，除非明确标注为固定边界。该 α损失率通过计算反应堆氘氚出生分布下聚变产生的α粒子的无碰撞导引中心轨道获得：在自由边界平衡中跟踪0.2 s，具体方法见附录C。

III.F.1 缩放： 本工作中的所有构型，包括已发表设计，均按 ARIES-CS反应堆的尺寸进行缩放 [3]，，其小半径为 1.704 m，体积平均磁场为 5.865 T。本文中的所有尺寸量均指该尺寸。

IV. 冷启动与鲁棒性

至此，方法的描述完成。现在，我们将其应用于从冷启动初始化的设计，以展示该方法的灵活性和鲁棒性。从已发表的准轴对称构型进行热启动的设计见附录 B。该方法之所以灵活 ，是因为它能够在不同对称类别、纵横比、线圈数量和等离子体压力范围内达到极为多样的目标；它之所以具有鲁棒性，是因为从非常一般的起始状态出发也能达到这些目标。图2 展示了这些设计，表 IX 列出了它们的线圈、自由边界误差、法向磁场和阿尔法粒子损失。它们涵盖了全俘获场的三类：准轴对称、准螺旋对称和准等动力性；磁场周期数从 1 到 5，纵横比从 2.5 到 10，并且 N_c 线圈数量从 4 到 6，其中一些处于真空状态，另一些具有有限压力。每次运行均从带有小幅破坏对称性的扰动和圆形线圈的圆形环面开始。没有任何设计需要经过精心设计的初始形状、调谐权重或单独的线圈阶段，并且每个设计最终都得到可行线圈。为充分展示冷启动性能，我们通过连续优化从冷态出发，依次经过全部三类对称类别，最后回到起始状态。

IV.A 准轴对称仿星器

IV.A.1 低纵横比： 图2中的设计（a），在 A =2.5处，具有 $N_c = 4$ 是极少数在如此低的纵横比下、配备已认证模块化线圈的 $N_{\mathrm{fp}} = 2$准轴对称构型之一。该范围内的紧凑型准轴对称等离子体大多仅针对等离子体本身进行了研究，因为要让任何线圈穿过中心都极具挑战性。一个例外是，ARIES-CS研究中的MHH2系列首次发现了该纵横比下的模块化线圈。该研究具有两个场周期， $A \approx 2.6$ 以及16个模块化线圈，且 $\langle\beta\rangle = 5\%$的电流为类似自举的电流 [69, 70]。遗憾的是，我们无法找到原始文件来验证这些计算，具体而言，

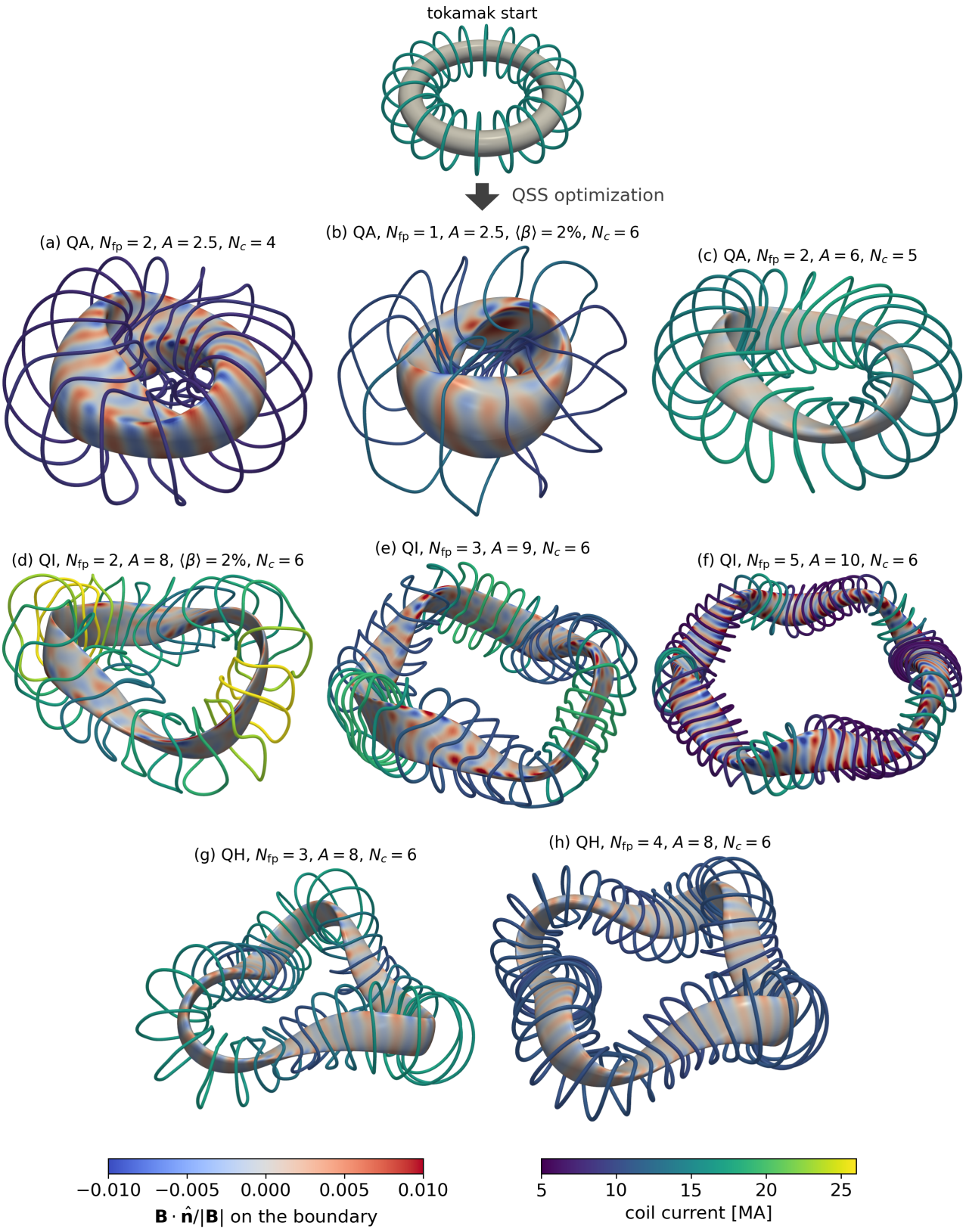

图 2. 从冷启动优化得到的仿星器：以带有圆形线圈的圆形环面为起点，以下各项设计均由此获得。(a)–(h) 展示了 ARIES-CS 尺度下带有认证线圈的设计。(b) 和 (d) 中的法向场包含等离子体磁场。所有面板使用相同的色标。(a) 准轴对称，$N_{fp} = 2$, $A = 2.5$, $N_c = 4$。(b) 准轴对称，$N_{fp} = 1$, $A = 2.5$, $\langle\beta\rangle = 2\%$ 及自洽引导电流，$N_c = 6$。(c) 准轴对称，$N_{fp} = 2$, $N_c = 5$ $N_{fp} = 2$ $\langle\beta\rangle = 2$ $N_c = 6$ $N_{fp} = 3$ $N_c = 6$ 。(d) 准等动力学，，%，。(e) 准等动力学，，。(f) 准等动力学，$N_{fp} = 5$, $N_c = 6$。(g) 准螺旋对称，$N_{fp} = 3$, $N_c = 6$。(h) 准螺旋对称，$N_{fp} = 4$, $N_c = 6$。

近来，研究者优化了具有两个至五个场周期的紧凑型准轴对称等离子体$A \approx 2.4$ [71]。在这些设计中，等离子体电流提供了大部分旋转变换，三维整形增加了约 0.05 至 0.2 的外部旋转变换，而磁场则由托卡马克线圈与香蕉线圈共同产生 [72, 73] ，或由模块化线圈产生 [71]。设计（a）没有电流，其约 0.4 的旋转变换完全来自三维整形。

设计（a）有两个场周期，采用冷启动，伸长率为 1.3，因为在此纵横比下，圆形初始种子无法得到收敛的 VMEX 平衡。其物理约束和四个基础线圈的限制见表 IX。请注意，这些线圈限制不适用于反应堆尺度（或者内侧只能采用屏蔽而不设置中子吸收包层）；它们可能仅适用于实验尺度的仿星器，例如 HSX，其主半径为 1.2 米，线圈间距与此相近 [47]。该设计使用经过认证的线圈满足了所有约束。在自由边界条件下，准对称性误差增加了数倍，而最后闭合磁通面仍接近其目标。表 IX 给出了其法向场、准对称性误差和阿尔法粒子损失。在此纵横比下，每个半个场周期配置四个线圈，产生的磁场波纹会影响快粒子。尽管如此，对于如此具有挑战性的低长径比区域，这是一个出人意料的好方案；8% 的阿尔法粒子损失尚可接受，准对称性也相当不错，而且尽管线圈非常短，仍能与等离子体边界良好匹配。

IV.A.2 单个场周期与自洽自举电流：图 2 中的设计（b）将紧凑型准轴对称设计扩展到单个场周期，并扩展到经过优化且具有自洽自举电流的有限压力等离子体。在本文的各项设计中，这可能是对模块化线圈几何要求最高的一种。该设计每半个场周期有六个基准线圈，纵横比为 2.5，约束条件见表 III。设计（b）的最终边界呈现出平均为 0.24 的真空旋转变换，而自举电流在边缘贡献的旋转变换最高可达 0.14。

该设计通过从冷启动开始的单次优化得以实现，但优化过程分为五个连续阶段。首先从冷启动开始，在真空条件下进行优化。随后将其压力提高至 $\langle\beta\rangle = 1\%$ 和 2%，并令 $p \propto 1 - s$ 且净环向电流为零。第三阶段通过提高线圈间距离和线圈—磁面距离的下限来改进该解，同时分三步提高磁阱下限，并将曲率上限减半，达到表 III所列数值。第四阶段在 coil 目标函数中加入针对线圈挠率和非凸性的弱惩罚项。

在这种压力下，等离子体会产生自举电流；在紧凑的准轴对称构型中，自举电流会显著改变旋转变换。第五阶段将其纳入计算。使用漂移动理学求解器 yancc [74], 计算自举电流，该求解器在八个磁通面上给出 $\langle$**电流**·**磁场**$\rangle$。密度和温度参-

布数据采用参考文献 [75], 中的数据，并经过缩放，使设计的体积平均 β 接近 2%。通过迭代进行自举电流计算和固定边界求解，直至连续两轮之间的自举电流变化小于 2%。

表 III 列出了本轮优化后设计的等离子体和线圈性质。据我们所知，尚未有文献报道过具有自洽自举电流和模块化线圈的有限压力单场周期准轴对称仿星器。我们在表中将其与我们找到的最相似解进行比较：来自 QUASR、纵横比为 2.86 的真空准轴对称仿星器 [76]。QUASR 设计的准对称性误差更低，法向场更低，阿尔法粒子损失也更少。我们的设计纵横比更低，具有有限压力和自举电流，并形成磁阱；其线圈更短，傅里叶阶数也低得多。在我们的实验中，我们发现，以 Mercier 稳定性为优化目标往往会大幅降低准对称性，因此最终没有直接将其设为目标。文献中与之最相近的有限压力$\langle\beta\rangle$ 等离子体—线圈解是 $N_{\mathrm{fp}} = 2$ 纵横比为 3 的装置。4 [77] 该装置每半场周期使用 8 个线圈（共 32 个模块化线圈），另设 4 个极向场线圈，但其 $\langle|$**磁场** $\cdot$ $\hat{}$**法向量**$|\rangle/\langle|$**磁场**$|\rangle$ 误差仍远高于我们报告的结果，而阿尔法粒子损失相当。Henneberg等人 还提出了若干其他有前景的有限压力$\langle\beta\rangle$ $N_{\mathrm{fp}} > 1$ 等离子体—线圈设计，但由于我们无法找到全部最终线圈指标以进行比较，因此未在此列出 [71, 72]。

这里以及其他地方，我们并未声称所得解是最优的；我们强调的是，即使在极具挑战性的参数空间中，例如长细比极低、有限压力以及自洽自举电流的情况下，XCoil 也能让我们快速找到合理的单次求解方案。

IV.A.3 从冷启动得到的 *Landreman* 和 *Paul* 准轴对称构型：图2 中的设计 (c) 从冷启动开始，重复了附录B2 中的真空 LP 准轴对称问题，以检验在没有已发表设计先验知识的情况下该方法是否有效；我们还将其与从相同起点出发的两阶段设计进行了详细比较。它从一个圆形托卡马克和圆形线圈开始，其中 $A = 6$ 以及 LP 准轴对称构型的环向磁通，采用相同的物理约束和 $N_c = 5$。不到两个 GPU 小时，优化便达到了较低的法向场，同时满足了所有物理约束，且固定边界准对称性误差较低。因此，QSS 方法从冷启动出发，得到了一个类似 LP 准轴对称构型且线圈性能出色的设计。在自由边界平衡中，其最后闭合磁通面接近目标；与附录 B2中从 LP 准轴对称构型热启动得到的 QSS 设计相比，它损失的 α粒子仅略多一些；两者的准对称性误差相近，且 $\langle|$**磁场** $\cdot$ $\hat{}$**法向量**$|\rangle/\langle|$**磁场**$|\rangle$也相近。事实上，两个最后闭合磁通面平均相距小半径的 1.5%，其傅里叶系数相差 4%。线圈也十分相似：它们平均相距各自长度的 0.2%，电流平均相差 0.5%。无论采用热启动还是冷启动，QSS 实际上都会生成相同的仿星器。

先进行第一阶段再进行第二阶段的相同起始设置最终得到一个

表 III. 图中反应堆尺度准轴对称设计（b）2 与 QUASR 的真空构型 134070 [76] 及其线圈的比较。约束列给出了设计（b）在最终阶段所采用的限制值。本文中，粗体表示比较中明显更优的值。彼此相差几个百分点以内，或阿尔法粒子损失在抽样误差两倍以内的数值，不以粗体标示。正如第IIIF章节所述，QUASR 134070 的平衡采用 28 个极向和环向模态，以解析其线圈产生的磁场波纹。

	约束	设计（b）	QUASR 134070
A / E	2.5 / ≤ 6	2.50 / 4.25	2.86 / 3.80
$\langle\beta\rangle$ [%]		2.06	0
自举电流 [兆安]		-3.46	0
$\iota(0)$ / $\iota(1)$	$0.27 \leq \bar{\iota} \leq 0.33$	0.24 / 0.39	0.31 / 0.29
W [%]	≥ 1	**4.4**	-14.5
$\hat{D}_{\mathrm{Merc}}$ $[10^{-3}]$		-100	**-1.5**
f_{QS} $[10^{-3}]$		1.3	**0.18**
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [mm]		6.1 / 24	**1.0**/ **3.9**
α-损失 [%]		7.1 ± 0.3	**4.5 ± 0.2**
N_c / 线圈总数 / 傅里叶阶数 M		6 / 12 / 5	6 / 12 / 16
L_i [米]	≤ 35.7	**32.2–35.6**	39.5–44.1
L_{total} [m]		**206.3**	247.7
$\kappa_{\max}$ / κ_{MSC} [米$^{-1}$ / 米$^{-2}$]	≤ 0.89 / ≤ 0.51	0.89 / 0.16	**0.75** /**0.11**
$\bar{\tau}$ / γ_c [米$^{-1}$ / 10^{-3} 米$^{-2}$]		**0.48** /6.0	0.61 /**4.4**
d_{cc} / d_{cs} [米]	≥ 0.49 / ≥ 1.28	0.49 / 1.29	0.48 / **1.42**
$\langle$|**磁场** · ˆ**法向量**|$\rangle$/$\langle$|**磁场**|$\rangle$ [%]		0.17	**0.053**

明显更差的解。在使用相同随机种子、模态调度和物理约束，但不包含线圈项的情况下，该边界达到低得多的固定边界准对称性误差，但其认证线圈产生了更大的法向量磁场，这导致自由边界准对称性误差比 QSS解高出一个数量级。事实上，最后闭合磁通面严重偏离目标，并且损失的 α粒子数量是 QSS 设计的两倍以上。其等离子体本质上与 LP QA 的相同，损失的 α粒子数量也与 LP QA 的两阶段参考设计一样多。表 X 附录 B2 列出了这两个设计的等离子体和线圈性质，以及附录 B2中的热启动设计。

IV.B 准螺旋对称仿星器

设计 (g) 和 (h) 具有准螺旋对称性，分别有三个和四个场周期，$A = 8$以及 $N_c = 6$。两者都实现了较低的固定边界准对称性误差，其线圈对于准螺旋对称性而言看起来格外简单（图2）。表 IV 中给出了它们的自由边界准对称性误差及法向磁场；尽管自由边界最后闭合磁通面仍接近其目标值，这些误差仍远高于固定边界值。然而，设计 (h) 几乎实现了完美的阿尔法粒子约束，且由冷启动获得。因此，良好的快粒子约束并不需要极低的法向磁场和自由边界准对称性误差。线圈波纹使设计 (g) 的阿尔法粒子损失升至百分之几。不过，鉴于其三个场周期。

表 IV 比较了两个设计：Landreman 和 Paul 提出的精确准螺旋对称构型 [17]，（此处称为 LP QH，其线圈取自 Wied-man 等人 [78], 以及 HSX [29]。设计 (h) 采用 LP QH 的纵横比、平均旋转变换、伸长率和磁阱进行优化，但以冷启动作为初始条件。该设计还要求线圈形状为凸形，如图 3 所示，图中还展示了 HSX。它使用的线圈数比每半个场周期多一个，但线圈更短、总线圈长度更小，却达到了相近的固定边界准对称性误差。其线圈彼此之间以及与等离子体的距离都更近，且其 $\langle$|**磁场** · ˆ**法向量**|$\rangle$/$\langle$|**磁场**|$\rangle$ 约为 Wiedman 线圈的两倍。在能够解析磁场波纹的线圈自由边界平衡中，Wiedman 线圈的准对称性误差比 (h) 小一个数量级。尽管如此，Wiedman 和 (h) 的两组线圈都能约束几乎所有 α粒子。与下文讨论的 Wiedman 解相比，(h) 的线圈数相差一个，且线圈指标有所改善，但其等离子体设计与原始 LP QH 仿星器非常相似。

与小半径相同的 HSX 相比，(g) 和 (h) 两种设计的 $\langle$|**磁场**·ˆ**法向量**|$\rangle$/$\langle$|**磁场**|$\rangle$ 均较低，均方曲率约为其一半，挠率更小，最大曲率则相近。HSX 的线圈与等离子体相距更远。在其线圈的自由边界平衡中，HSX 的准对称性误差比 (g) 和 (h) 高一个数量级，最后闭合磁通面偏移的距离是它们的数倍，损失的 α 粒子也远多于它们。
HSX 是一项于20世纪90年代设计的小规模实验，其设计考虑了维护通道要求，且未以阿尔法粒子约束为目标

表 IV。图中 (g) 和 (h) 的准螺旋对称设计 2 [17] *et al.* [78] [79] [78] 与采用 Wiedman 线圈的 LP QH 以及 Geiger 等人在反应堆尺度下提出的 HSX 设计进行比较。LP QH 线圈即参考文献中发表的线圈。以下所有等离子体和线圈指标均根据已发表的线圈文件和等离子体文件，并采用章节 IIIF 中的默认设置计算。 †参考文献 [78] 在这些单位下报告的数值为 0.56，但在解析线圈波纹后，该数值会降低。 ‡HSX 团队的固定边界 VMEC 平衡在 9.6×10^4 收敛分辨率下（$m_\theta = 18$， $n_\phi = 24$）给出了这些单位下的数值。

	约束 (g)/(h)	(g) 准螺旋	(h) 准螺旋	LP QH，Wiedman	HSX
设计		冷启动 QSS	冷启动 QSS	两阶段	两阶段
N_{fp}		3	4	4	4
A / $\bar{\iota}$ / E	8 / 0.93, 1.24 / ≤ 3.42	8.0 / 0.93 / 3.42	8.0 / 1.24 / 3.39	8.0 / 1.24 / 3.42	9.6 / 1.06 / 3.60
$\iota(0)$ / $\iota(1)$		0.92 / 0.94	1.24 / 1.24	1.24 / 1.24	1.05 / 1.09
W [%]	≥ -1.4	-1.4	-1.3	-1.4	**0.5**
N_c / 线圈总数 / 傅里叶阶数 M		6 / **36**/ 5	6 / 48 / 5	**5**/ 40 / 7	6 / 48 / 16
L_i [m]		28.7–35.2	25.8–27.8	35.1–36.3	27.7–31.4
L_{total} [m]	$\leq$ 196.0/162.0	196.0	**162.0**	177.7	181.2
$\kappa_{\max}$ / κ_{MSC} [m^{-1} / m^{-2}]	$\leq$0.95/0.12, 0.94/0.18	0.95 / 0.12	**0.79** / 0.098	0.82 / **0.079**	0.91 / 0.25
$\bar{\tau}$ / γ_c [米$^{-1}$ / 10^{-3} 米$^{-2}$]	– / (h) 时为 0	1.1 / 1.4	**0.56** / **0.00**	1.2 / 4.3	5.3 / 2.3
d_{cc} / d_{cs} [米]	$\geq$0.68/1.37, 0.69/1.38	**1.41** / 1.87	0.85 / 1.57	1.08 / 1.61	1.25 / 1.90
⟨**磁场** · ˆ**法向量**⟩/⟨**磁场**⟩ [%]		0.15	0.12	**0.056**	0.56
固定边界 f_{QS} [10^{-5}]		33	5.3	**2.7**	$3.6 \times 10^{4\ddagger}$
f_{QS} [10^{-3}]		33	27	**3.0**†	280
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [mm]		2.6 / 11	**2.0** / **5.8**	2.4 / 6.1	20 / 83
α-损失 [%]		4.0	0.09	0.01	17

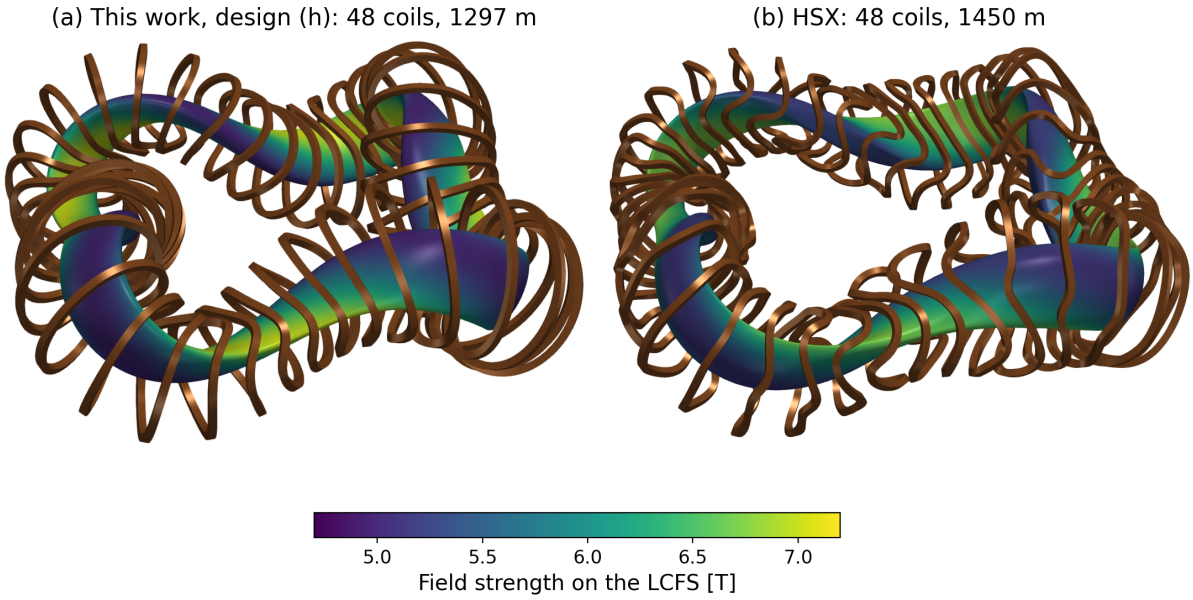

图 3. (a) 第四节B部分的准螺旋对称设计 (h)，其 48 个已认证的完全凸模块化线圈采用有限尺寸的绕组包构建，面积为 0.47 × 0.47 m2。(b) HSX 及其 48 个模块化线圈 [29]。两者均按 ARIES-CS 的小半径和体积平均磁场缩放。标题中的线圈长度为所有线圈的总长度，是表 IV 中每个半个场周期数值的八倍。

也未以反应堆尺度为目标，因此这一比较展示了 QSS 方法所能达到的水平，并非对 HSX 设计的批评。最后，我们想强调，(h) 的线圈完全凸。值得注意的是，存在一种中等长宽比的准螺旋线圈解，可以采用凸线圈。我们在此比较的其他四线圈准螺旋设计则具有明显的非凸性挠率至少是其两倍。

IV.C 准等动力学仿星器

设计 (d)–(f) 均为准等动力学设计，分别具有两个、三个和五个场周期，纵横比为 8、9 和 10，且

具有 $N_c = 6$。设计 (d) 具有两个场周期，从冷启动开始，在 $\langle\beta\rangle = 2\%$ 处进行优化，并在 $A = 8$时沿延拓过程逐步升高压力。从第三个延拓步起，它还采用了附录 J 中的最大值约束 [80]，并使用逐步提高的约束上限，同时要求磁阱中部深度处的 A等值线闭合 J 等值线[1]。设计 (d) 尤为突出，因为其自由边界平衡具有磁阱，并呈现最大值J性质，尽管其阿尔法粒子损失约为 9% α。只有采用更大的纵横比和更低的镜比，才能使损失降至适中水平；这两项因素减少了深俘获 α 粒子的比例。此外，逐步提高上限的最大值J约束在 $A = 8$时也使固定边界准等动力误差降低了一半以上。设计 (e) 具有三个场周期，在 $A = 9$时达到较低的自由边界准等动力学误差。与设计 (h) 一样，它几乎能约束所有 α 粒子。表 IX 列出了设计 (d)–(f) 的准等动力学误差和阿尔法粒子损失。

耦合方法不可或缺的一个典型例子是设计 (f)，它有五个场周期。其物理约束与参考文献 [19], here中精确准等动力学构型的约束相同，并对镜比设有独立的上限。在五个场周期下，其他设计所用的圆形初始种子恰好会将优化引向准等动力学的次优分支，这是局部优化的一个表现。采用带有小幅旋转椭圆和螺旋轴偏移的初始种子即可避开这一问题；这种变化几乎难以察觉。使用该初始种子后，此方法找到了一个准等动力学设计，其固定边界的准等动力学误差较低，且具有磁丘，并配有已认证的线圈。在自由边界情况下，其准等动力学误差会上升，且损失的α粒子不多。

使用相同的初始种子、调度和物理约束，但不包含线圈项时，边界可达到更低的固定边界准等动力学误差。然而，两阶段替代方案在这一长度下失败，未能找到已认证的线圈；而且其自由边界平衡在我们其他设计所用的分辨率下无法收敛。在两阶段设计中，没有任何因素能阻止等离子体优化得到一种边界，而工程限制范围内的任何线圈都无法实现这种边界；这一点只有之后在线圈阶段才会被发现。

IV.D 对起始点的鲁棒性

第IV 章节中的所有设计都从冷启动开始。为了进一步考察对起始条件的依赖性，我们将三个场周期的四次优化串联成一个闭环。一个圆形托卡马克被优化为准轴对称仿星器，并以此作为准—

[1] 我们在优化过程中稍后再加入它，因为从第一个延续步开始就启用最大-J，可能会产生方向不利的梯度，或严重违反约束；这是因为只有少数傅里叶模态可用的圆形托卡马克几乎没有余地满足这一要求。对于类似的项，如 J-闭合和 Mercier 稳定性，我们通常也采取相同做法。

等动力学设计的随机种子；该设计又作为准螺旋对称设计的随机种子，后者再为准轴对称设计提供随机种子（图4）。每个阶段都从前一阶段的最终边界和认证线圈开始，采用 $N_c = 6$，且只改变准对称性目标和纵横比；准轴对称阶段的纵横比为 $A = 6$，准等动力学阶段为 8，准螺旋对称阶段为 7。线圈限制采用设计 (e) 的限制，并一如既往地按小半径缩放。作为鲁棒性测试的补充，准螺旋对称阶段还将压力从真空提高到 $\langle\beta\rangle = 2\%$，其中$p \propto 1 - s$；最后一个阶段则将压力逐步降回真空，每个边界模态阶段降低一步。

四条路径均已收敛，且每个最终线圈组都通过了认证。此循环中给出的误差为固定边界值。准等动力学设计达到的准等动力学误差与设计 (e) 在 $A = 9$ 时相当，而准螺旋对称设计在$\langle\beta\rangle = 2\%$ 时达到的误差则远低于真空中的类似运行结果。最后一条路径中，随着压力降低至真空，准对称性误差下降了几个数量级。图 4 展示了沿循环变化的这些误差。请注意，$\langle|\textbf{磁场}\cdot\hat{}\textbf{法向量}|\rangle/\langle|\textbf{磁场}|\rangle$在初始阶段有所增加，但这并无大碍，因为我们的起点是托卡马克构型，其磁场误差天然极低。在优化的其余阶段，$\langle|\textbf{磁场}\cdot\hat{}\textbf{法向量}|\rangle/\langle|\textbf{磁场}|\rangle$ 始终低于其上限。由于每个阶段开始时压力固定，而边界在移动，这条路径的最初几个阶段中，$\langle\beta\rangle$会逐渐升高；当形状脱离准螺旋对称构型族时，误差最高达到 4%，随后便随升压过程降低。绕完整个循环后，设计回到了与起始状态基本相同的准轴对称构型，纵横比和旋转变换剖面几乎不变，准对称性误差也相近。因此，该方法有力地表明，它不需要良好的初始猜测，甚至不需要中性的初始猜测。它能够在具有三种对称性的迥异仿星器之间，以及真空和有限压力状态之间切换，同时在每一步都使线圈符合所有工程限制。

V. 在反应堆尺度上重新审视 NCSX

NCSX 展示了线圈会在多大程度上影响仿星器项目。其等离子体先经过优化，随后才设计线圈，最终需要 78 个线圈：18 个由三种形状组成的模块化线圈、18 个环向场线圈和 42 个极向场（PF）线圈。这些线圈的复杂性促成了成本增长，并最终导致项目被取消 [33]。我们想知道，仅使用 18 个模块化线圈，一次冷启动运行能否找到具有可比性的设计。

该设计旨在以反应堆尺度复现 NCSX 构型 [81]。它有三个场周期，且 $A = 4.4$，在 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 的 $p \propto 1 - s$ 条件下，采用与 NCSX 相同的等离子体电流，并施加表中所列的旋转变换、伸长率、磁阱和 Mercier 判据约束V。轴对称

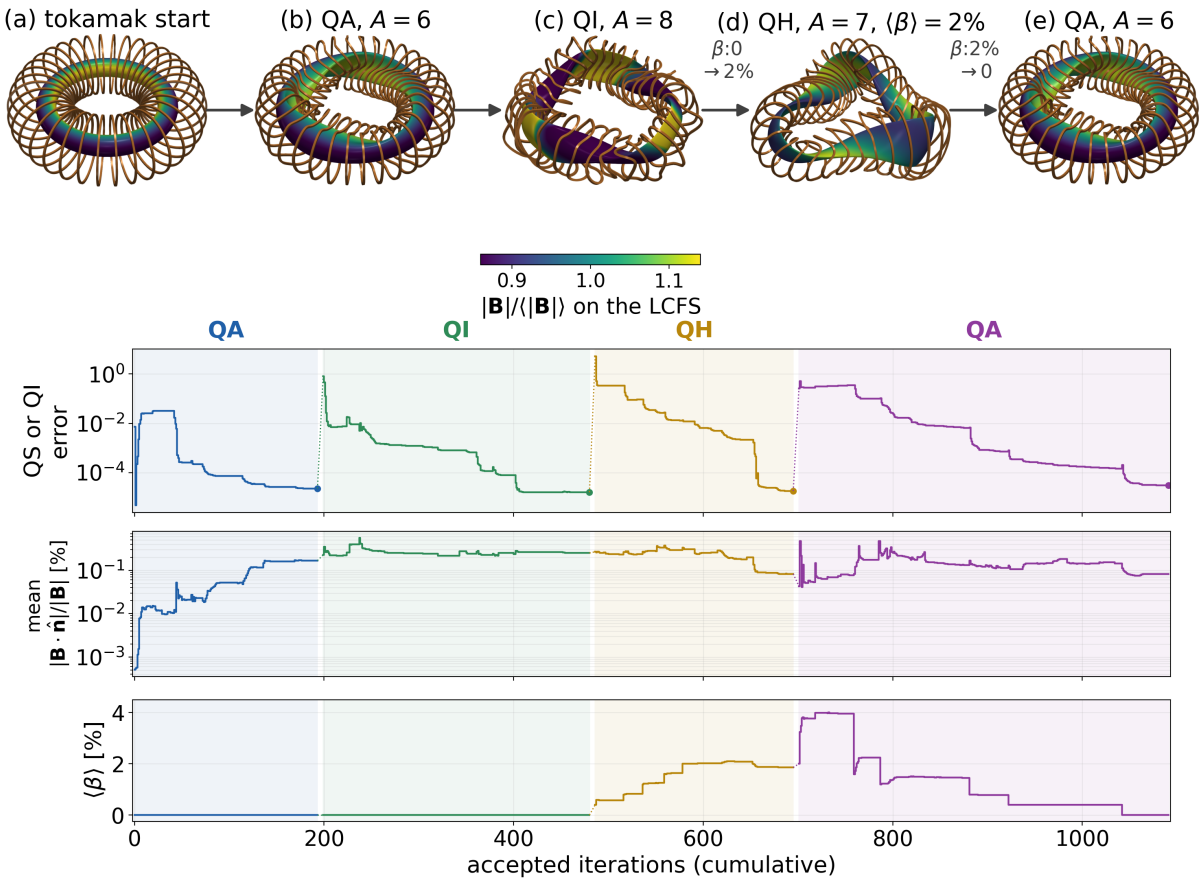

图4. 第IVD章节的闭合对称性回路，包含三个场周期，$N_c = 6$。顶行显示：(a) 起始托卡马克以及四条路径的最终设计；(b) 准轴对称设计，$A = 6$；(c) 准等动力学设计，$A = 8$；(d) 准螺旋对称设计，$A = 7$ 和 $\langle\beta\rangle = 2\%$；(e) 真空中的准轴对称设计，$A = 6$。底行显示固定边界 QS 或 QI 误差、回路内线圈的均值$\boldsymbol{磁场}\cdot\hat{}\boldsymbol{法向量}/|\boldsymbol{磁场}|$，以及 $\langle\beta\rangle$ 随接受迭代次数累积变化的情况。点线连接每条路径的终点与下一条路径的起点。

在此压力和电流下，等离子体不存在平衡，因此沿延拓过程提高压力，同时增强塑形。我们仅采用 18 个模块化线圈，也就是说 $N_c = 3$，每个线圈都比 NCSX 的模块化线圈更短、弯曲度更小、间距更大。NCSX 的模块化线圈数量相同，但仅使用这些线圈时，自由边界平衡无法收敛。其额外的环向场线圈和极向场线圈本身就是构型的一部分，而不仅仅是为了提供实验灵活性。

结果如图5 和表V所示。NCSX 所需的线圈数量是我们设计的数倍，线圈总长度也达到数倍；而我们设计中的线圈总长度甚至短于 NCSX 单独使用的 18 个模块化线圈。这些线圈也更简单，曲率低得多，彼此间距更远，且与等离子体的距离至少同样远。尽管我们的线圈在各项指标上都更简单，等离子体性能仍至少与原始设计一样好。其准对称性误差在固定边界和自由边界下都更低，而且其自由边界

最后闭合磁通面更接近其目标。阿尔法粒子损失非常相似，处于抽样误差范围内，而其 Mercier 裕度较小。在这些计算中，使用更短且正则化程度更高的线圈，若要实现 Mercier 稳定性，准对称性就会付出超过一个数量级的代价，因此我们没有对 Mercier 判据进行强力优化。

NCSX 的旋转变换在等离子体中穿过 3/5 和 3/6 这两个有理数值。因此，我们使用非嵌套平衡代码诊断并展示该解。一次自由边界 MRX 计算 [82], 不假设存在嵌套磁面，如图5c 所示，存在显著的内部和外部磁岛链。核心区附近的 3/6 共振基本保持嵌套状态（在数值网格尺度上可以看到一条 3/6 磁岛链），这可能是高剪切所致。此外还存在一个内部 3/5 共振，而在外部，该解实际上呈现出两个相互重叠的 3/5 共振。这两条相互重叠的 3/5 磁岛链形成了一层环绕约束等离子体的磁岛和混沌磁力线。这样的磁岛层类似于磁岛偏滤器的边缘 [83, 84]。

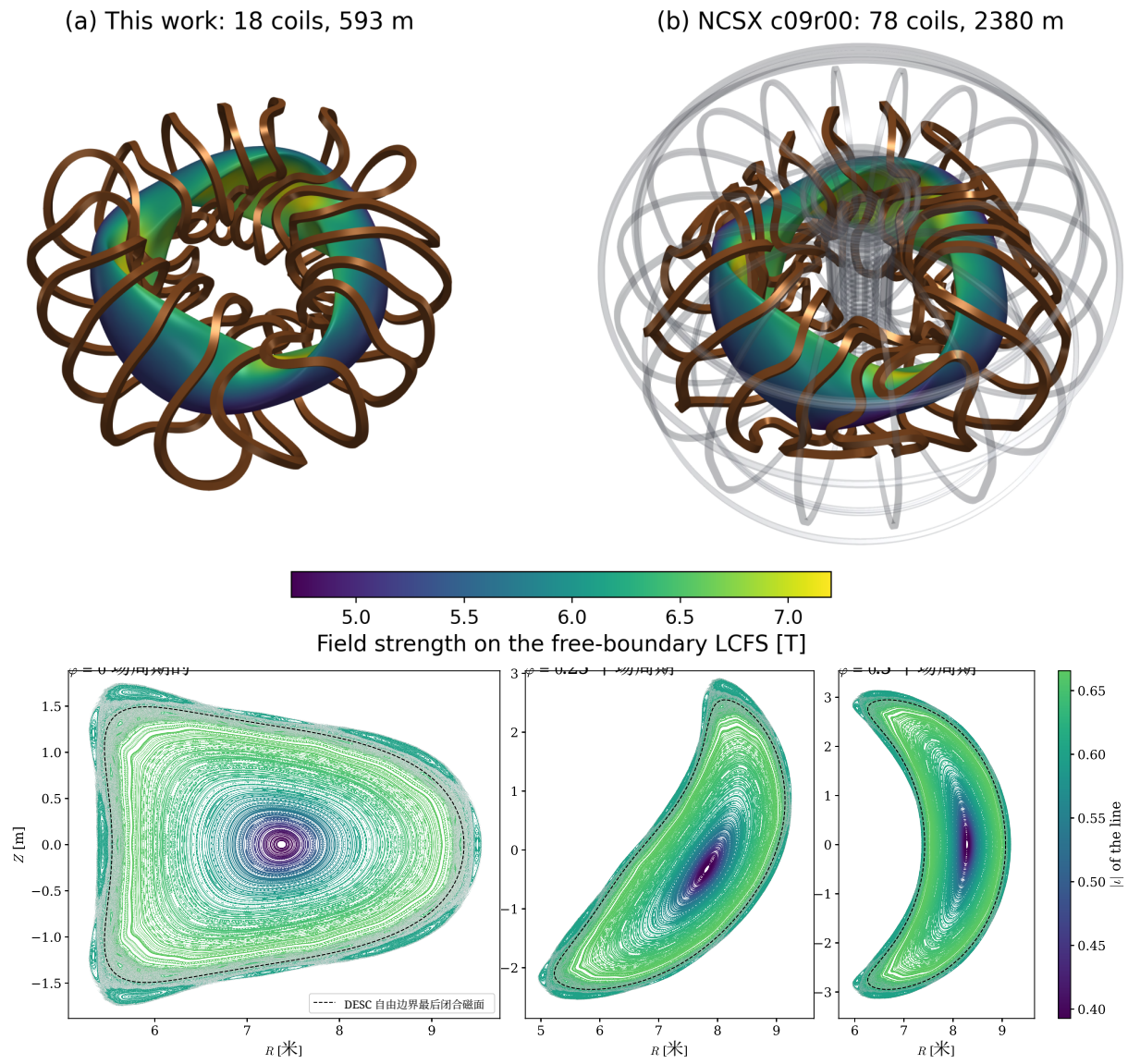

图 5. (a) 第 V 章节中的类 NCSX 设计，从冷启动开始单次运行优化得到，其 18 个已认证模块化线圈以有限制造绕组包形式呈现，尺寸为 $0.47 \times 0.47\ \mathrm{m}^2$. (b) NCSX 参考构型 c09r00，包含完整的 78 个线圈组：18 个模块化线圈（铜色）、18 个环向场线圈和 42 个极向场线圈（灰色）。(c) 设计（a）在一个场周期的环向角 ′处的庞加莱截面，来源于自由边界 MRX $\phi = 0$， $1/4$ 和 $1/2$，其初始状态取自 DESC 自由边界平衡。

NCSX 的设计需要多年进行等离子体和线圈设计；而这里的方法只需从冷启动单次计算，就能以四分之一的线圈数获得质量相当的解。

VI. 面向反应堆设计

在本节中，我们将探讨该方法能否同时生成满足反应堆多项要求的构型：在自由边界条件下具有良好的快粒子约束、俘获电子模（TEM）稳定性、Mercier 稳定性，以及在有限压力下形成磁阱，并采用间距充足的已认证线圈，以便容纳线圈间支撑结构，同时在线圈与等离子体之间设置包层和中子屏蔽层。近期准等动力学仿星器的反应堆研究 [4, 21] 表明，这种组合确实存在，但通常需要通过一系列彼此独立的等离子体和线圈优化才能实现。本文在单次运行中共同设计等离子体和线圈，并以源自 W7-X 的四场周期边界为基础进行热启动。

表 V. 章节 V 中的反应堆尺度类 NCSX 设计，以及包含全部 78 个线圈的 NCSX 参考构型 c09r00。约束列给出了本工作的限制。c09r00 的线圈指标对应其模块化线圈，并以点丝表示。 †用于其自由边界平衡的丝状体傅里叶拟合阶数。 *括号内为最长的极向场线圈。

	约束	本工作	NCSX c09r00
N_c / 线圈总数 / 傅里叶阶数 M		3 /**18** / 5	3 / 78 / 40†
所有线圈的总长度 [m]		**593**	2,380
L_i [m]	≤ 34.0	**31.9–34.0**	34.7–38.5 (90.3)*
$\kappa_{\max}$ / κ_{MSC} [米$^{-1}$ / 米$^{-2}$]	≤ 0.69 / ≤ 0.15	**0.69**/ **0.15**	1.70 / 0.53
$\bar{\tau}$ / γ_c [米$^{-1}$ / 10^{-3} 米$^{-2}$]		**0.68** /**13**	1.02 / 32
d_{cc} / d_{cs} [米]	≥ 0.90 / ≥ 1.13	**0.91**/ **1.13**	0.80 / 1.11
$\langle\beta\rangle$ [%]	4	4.0	4.1
A / E	**4.4** / ≤ 4.5	4.41 / **4.49**	4.47 / 5.56
固定边界 f_{QS} [10^{-5}]		**4,600**	9,400
W [%]	≥ 1	10.1	9.9
ι(0) / ι(1)	0.40 / 0.65	0.41 / 0.63	0.36 / 0.65
f_{QS} [10^{-3}]		**58**	96
$\hat{D}_{\mathrm{Merc}}$ [10^{-3}]	≥ 0	4.3	**13**
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [毫米]		**11**/ **54**	14 / 74
α-损失 [%]		23.6 ± 0.5	**22.5 ± 0.5**

VI.A 问题与优化

该构型有四个场周期，$A = 11$，$\langle\beta\rangle = 2.2\%$ 具有 $p \propto 1 - s$ 且净环向电流为零，每半个场周期有五个线圈。物理约束限定镜比、轴上和边缘处的伸长率及旋转变换，并加入最大值-J 约束和 Mercier 稳定性。其数值见表VI。每个线圈的长度和曲率，以及线圈—线圈距离和线圈—磁面距离的限值见表VII。此外，还有一项线圈约束要求相邻线圈之间至少保持一定的环向角（附录D）。优化以源自 W7-X 并缩放至 $A = 11$的四场周期边界为起点，并通过三个延拓阶段运行嵌套方法，第二阶段加入 Mercier 稳定性。

在接下来的几个小节中，我们将把该设计与标准构型下的 W7-X 进行比较。其线圈组由 50 个非平面线圈构成，线圈电流为设计电流，几何形状由 SIMSOPT 分布 [25] ，且不包括平面线圈。其自由边界平衡按照第 III F 节的方法计算，取值为 $\langle\beta\rangle = 2\%$，其中 $p \propto 1 - s$ 且净环向电流为零；计算起始于该构型已发表的、具有完整分辨率的真空边界。

对于我们的四场周期最终设计，我们还绘制了等离子体外部的磁场，这决定了受限区域的边缘位置以及磁力线如何到达壁面。图 6 显示了最后闭合磁通面内外磁力线的庞加莱截面。在最后闭合磁通面内，该设计的旋转变换几乎是平坦的，并且在等离子体内部避开了低阶共振。在最后闭合磁通面外，旋转变换达到 1，并且由 $\iota = 1$ 组成的四个磁岛链靠近该位置。它们被开放磁力线包围，这些磁力线在几次环向穿越内即可到达线圈。由于具有四个场周期，这个 $\iota = 1$ 磁岛链是 W7-X 磁岛偏滤器中 5/5 磁岛链的对应物 [83, 84]。

VI.B 俘获粒子、稳定性与 α粒子约束

反应堆等离子体必须在压力升高时保持稳定，并充分约束粒子和热量，才能达到并维持点火。在准等动力学仿星器中，这两方面很大程度上都取决于俘获粒子。当它们的第二绝热不变量 J 向外递减时，最大值-J 性质（附录 A），俘获粒子会沿着能够稳定俘获电子模和由密度梯度驱动的离子温度梯度模的方向进动，从而降低湍流输运 [6, 19]。磁阱和 Mercier 稳定性则能保护等离子体免受压力驱动的交换模影响，而较低的有效波纹可使热等离子体的新古典输运保持在较小水平。一旦用离散线圈产生的磁场取代目标边界，这些性质就都无法保证，因此我们在自由边界平衡上对它们逐一进行评估。

俘获粒子的第二绝热不变量 J 从深度俘获程度最高的粒子（$K = 0.02$）到勉强被俘获的粒子（$K = 0.9$），如附录 10 中的图 C1所示。除深度俘获程度最高的粒子外，J 在整个横截面或几乎整个横截面上均向外递减。即使是深度俘获程度最高的粒子，其反弹点靠近 |**磁场**| 的极小值，因此它们

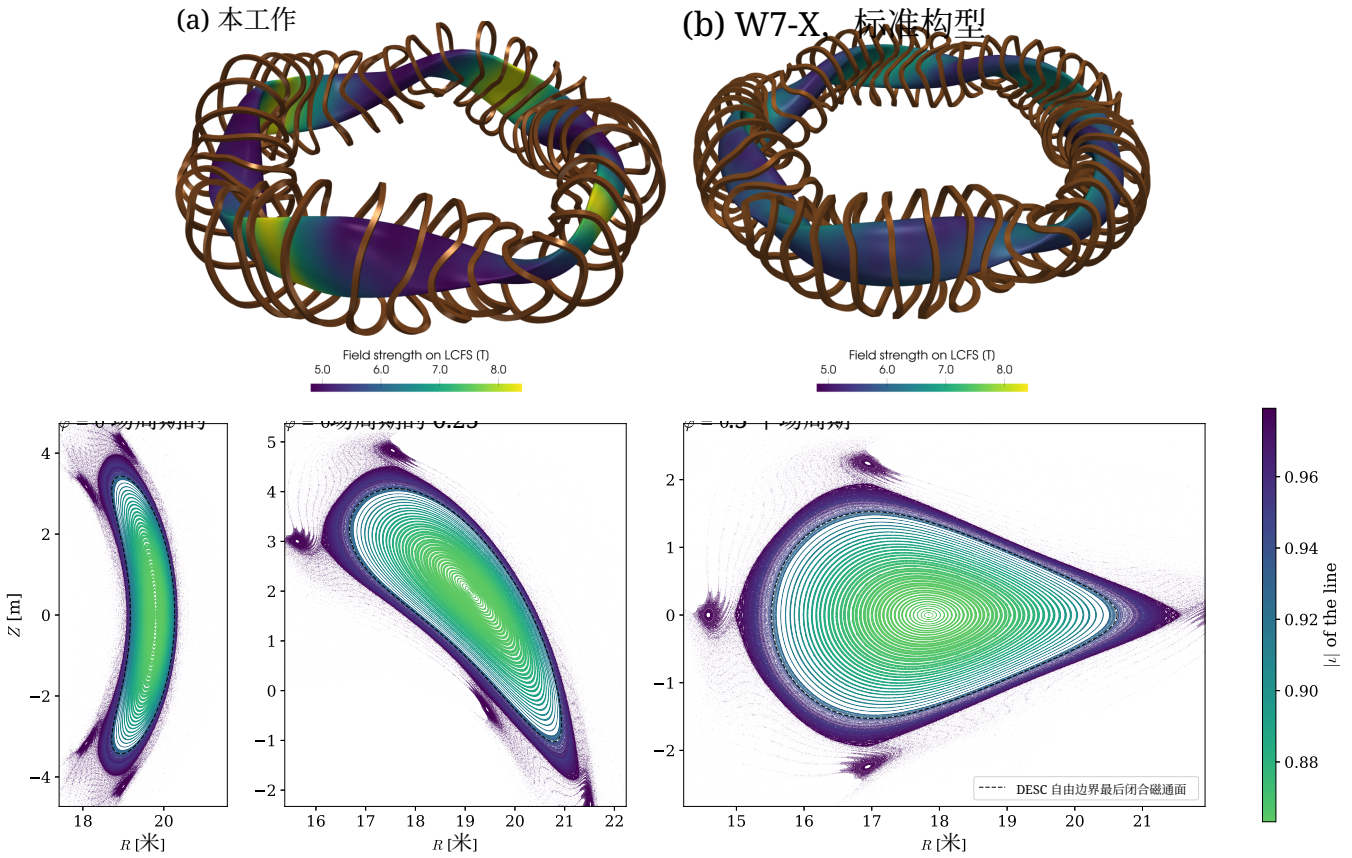

图 6. 类反应堆准等动力学设计。(a) 其认证线圈的自由边界平衡的最后闭合磁通面，按**磁场**|着色；40 个线圈以有限制造绕组包形式呈现，横截面为边长 0.47×0.47 米的正方形。(b) 标准构型下的 W7-X，展示其 50 个非平面线圈；尺寸和体积平均磁场强度相同，并以相同方式、从相同视角和采用相同色标绘制。其平面线圈不通电，因此未绘出。底排展示了该设计在一个场周期内环向角 $\phi = 0$、 $1/4$ 和 $1/2$ 处的庞加莱截面。

表 VI. 类反应堆准等动力学设计与 W7-X。约束列给出了设计的限制。W7-X 是其标准构型线圈在 $\langle\beta\rangle = 2\%$ 条件下的自由边界平衡， $p \propto 1 - s$ 且无净环向电流。最大值-J 行给出了横截面中 $0.05 < s < 0.9$ 上 J 向外增加的占比，俘获深度为$K = 0.02$、附录 A中的 0.15 和 0.3。W7-X 在此压力下没有目标边界，因此未给出 δ_{LCFS}。

	约束	本工作	W7-X
A / E	11 / ≤ 6	10.95 / 5.79	10.79 / **3.80**
$\langle\beta\rangle$ [%]	2.2	2.22	2.02
ι(0) / ι(1)	0.86 / 0.95	0.86 / 0.93	0.86 / 0.96
Δ	≤ 0.25	0.242	0.042
W [%]		4.0	4.1
$\hat{}D_{\mathrm{Merc}}$ 在 $s = 0.5/0.9$ $[10^{-3}]$	$\hat{}sD_{\mathrm{Merc}} \geq 20$	42 / 11	**68/ 11**
f_{QI} $[10^{-3}]$		**0.64**	110
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [毫米]		25 / 100	–
ϵ_{eff}, $s = 0.25/0.5/0.9$ [%]		2.0/2.7/3.6	**0.46/0.52/0.95**
最大值-J 违反量 [%]	0	**8.1/1.9/0**	100/93/66
α-损失 [%]		**4.7 ± 0.2**	27.1 ± 0.5

对线圈波纹最敏感，但在横截面的大部分区域仍保持这一性质，例外仅限于一些小区域。在 W7-X 中， $\langle\beta\rangle = 2\%$ 不会在此压力下具有这一性质， J 对于深度和中度俘获粒子，横截面的大部分区域都向外增加。表VI 列出了这些占比，

当最大值-J 性质处处成立时，这些量会消失。表VIII报告了最大值-J 约束本身的数值；该约束在其不为正时得到满足。该构型在自由边界条件下具有磁阱，尽管优化并未要求这一点；除最后一个磁面外，其余磁面均为 Mercier 稳定，$s = 0.99$。有效波纹 ϵ_{eff} [10]由 NEO JAX [85]，（NEO 的 JAX 实现） [10], 计算得出，几乎不受线圈影响。

在自由边界情况下，该设计基本保持了固定边界平衡中的α粒子损失。表VI 给出了总损失，而附录XI 表给出了按出生半径划分的C 损失情况。与其他设计一样，核心区具有良好的约束。作为比较，在 $\langle\beta\rangle = 2\%$时，反应堆尺度的准等动力学设计 Stellaris [21]损失的α粒子比例相近，出生分布也相似，尽管 Stellaris 的轴上磁场为9 T，小半径为 1.3 m，因此其相对于小半径的阿尔法粒子回旋半径约小 15%。

VI.C 线圈

反应堆能够采用的线圈很难获得。在 线圈与等离子体之间，必须为第一壁、包层和中子屏蔽层留出空间；在近期的反应堆研究中，这一空间约为一米 [21, 86]。相邻线圈之间必须留出空间，以容纳宽达数十厘米的绕组包、其钢制外壳，以及能够承受每个线圈100–350 MN合力的支撑结构 [21]。线圈还必须保持平缓弯曲，以便在不造成损伤的情况下缠绕超导带。这些要求中的每一项都会将线圈推离等离子体并彼此分开；在线圈所处的位置，磁场更加平滑，因而只有在很大困难下才能复现准等动力学边界的强烈成形。

表七将我们的线圈与近期三项反应堆研究中的线圈进行了比较 [4, 21, 87]以及 W7-X 的线圈，均按 ARIES-CS 的尺度进行比较，小半径为 1.704 m。我们强调，作为比较对象的反应堆研究采用的是集成设计。它们还满足本工作范围之外的要求，例如有限制造绕组包、导体限制、结构载荷、维护通道、动力学与湍流输运，以及时变磁流体稳定性。此处的比较仅涉及线圈中心线几何形状。

在这一狭窄范围内，我们现在比较细丝线圈解。在反应堆研究的设计中，只有 Infinity Two 报告了均方曲率，其数值约为我们的四倍。与 Goodman等人 [4]的五个线圈或 Stellaris [21],的六个线圈相比，我们的线圈间距最小值约为其两倍（为绕组包及其支撑结构留出的空间也约为两倍），而曲率不到其一半。这一优势部分只是纵横比不同所致：我们的纵横比为 11，而另外两者约为 10.5 和 9.8，因为较大的纵横比会为线圈之间留出更多空间。

VI.D 设计权衡

该设计是一个解族中的一点，而嵌套方法可以沿着该解族移动。每个新点都以其经认证的相邻解为热启动，再用完整方法重新求解，因此无需重启优化或重新调整权重，就能延拓已收敛的设计，使其在任一单项限制下继续变化。这样一来，设计就成为一幅图谱，展示工程限制与等离子体质量之间的邻近权衡。我们针对对反应堆尺寸和成本影响最大的四项限制延拓设计：线圈长度、纵横比、线圈曲率和线圈间距；每次都固定其他所有限制（图 7）。在曲率延拓中，均方曲率的限制按 $\kappa^2_{\max}$进行缩放。

四条前沿回答了不同的问题。增加线圈长度可显著降低准等动力学误差，直到长度略高于该设计的长度；此后误差趋于平稳，继续增加长度只会降低 $\langle|\mathbf{磁场}\cdot\hat{}\mathbf{法向量}|\rangle/\langle|\mathbf{磁场}|\rangle$。线圈稍短时，便无法在磁通平方界限内重现目标。因此，该设计处于这样一个位置：线圈每增加一米，仍能提升准等动力学性能。就纵横比而言，准等动力学误差在略高于设计值时最低，低于该值后则急剧上升，因此等离子体变得更紧凑，远在损害线圈性能之前，就会损害准等动力学性能。在两项间隙限制中，制约该设计的是线圈间距。减小线圈间距起初会显著降低准等动力学误差，但随后改善便会停止；增大间距则会使误差升高数倍。曲率的调整余地已经不大：放宽限制几乎没有收益，而收紧限制会使准等动力学误差迅速恶化，直至线圈无法在磁通平方界限和物理限制内重现目标。沿着全部四条前沿，每个已认证设计在固定边界下都保持 Mercier 稳定，具有最大值-J 性质，并存在磁阱。因此，设计者可以直接看出，例如，增大线圈间距或采用更紧凑的等离子体会牺牲多少准等动力学性能。

VI.E 用于压力爬升过程的一组线圈

反应堆不会在单一压力下运行。它从真空磁场开始，逐渐提高等离子体压力，直至达到运行点。因此，在某一数值下优化的构型 β，例如第VIA节中的设计，并不能充分说明其线圈在较低压力下约束的等离子体情况。本节将嵌套方法扩展到同时处理多个压力。我们将一组线圈形状与五种状态下的等离子体一同设计，范围从真空到 $\langle\beta\rangle = 4\%$，每种状态都有各自的边界和线圈电流。

VI.E.1 公式：状态 $j = 0$、.....、4 的压力剖面为 $p_j(s) = P_j(1-s)$，其中 P_j 的选取使状态 j 的体积平均 β 为 $j\%$。所有状态的环向磁通均与设计相同，且环向电流净值为零，因此随着压力升高，场强保持不变，而压——

表 VII. 反应堆尺度 QSS 设计的认证线圈，与其他反应堆尺度 QI 设计进行比较，所有设计均处于 ARIES-CS 尺度。每个单元格给出半个场周期内各线圈的范围。对于所有比较设计，均未报告 $\bar{\tau}$ 和 γ_c，因此此处省略。空白单元格表示未报告；此外，W7-X 平面线圈不纳入这些指标的统计。

	N_c / 傅里叶阶数 M	L_i / L_{total} [米]	d_{cc} [m]	d_{cs} [米]	$\kappa_{\max}$ [米$^{-1}$] / κ_{MSC} [米$^{-2}$]
本工作	5 / 8	33.0–33.1 / 165.4	**1.73–1.74**	1.68–1.97	**0.475 /0.10**
参考文献 [4]	5	30.8–38.9 / 180.5	0.83–1.01	1.48–1.69	0.98–1.19
Stellaris [21]	6	~ 33 / ~ 197	0.88	**1.80**	1.19 / 0.20
Infinity Two [87]	6		0.90	1.65	1.41 / 0.43
W7-X [4]	5	~ 27 / $\sim$ **136**	~ 1.2	~ 0.94	~ 0.76 / 0.19
limits of this work		≤ 33.1	≥ 1.66	≥ 1.65	≤ 0.475 / ≤ 0.10
and adjacent coils of this work at least 1.5° *apart in toroidal angle*					

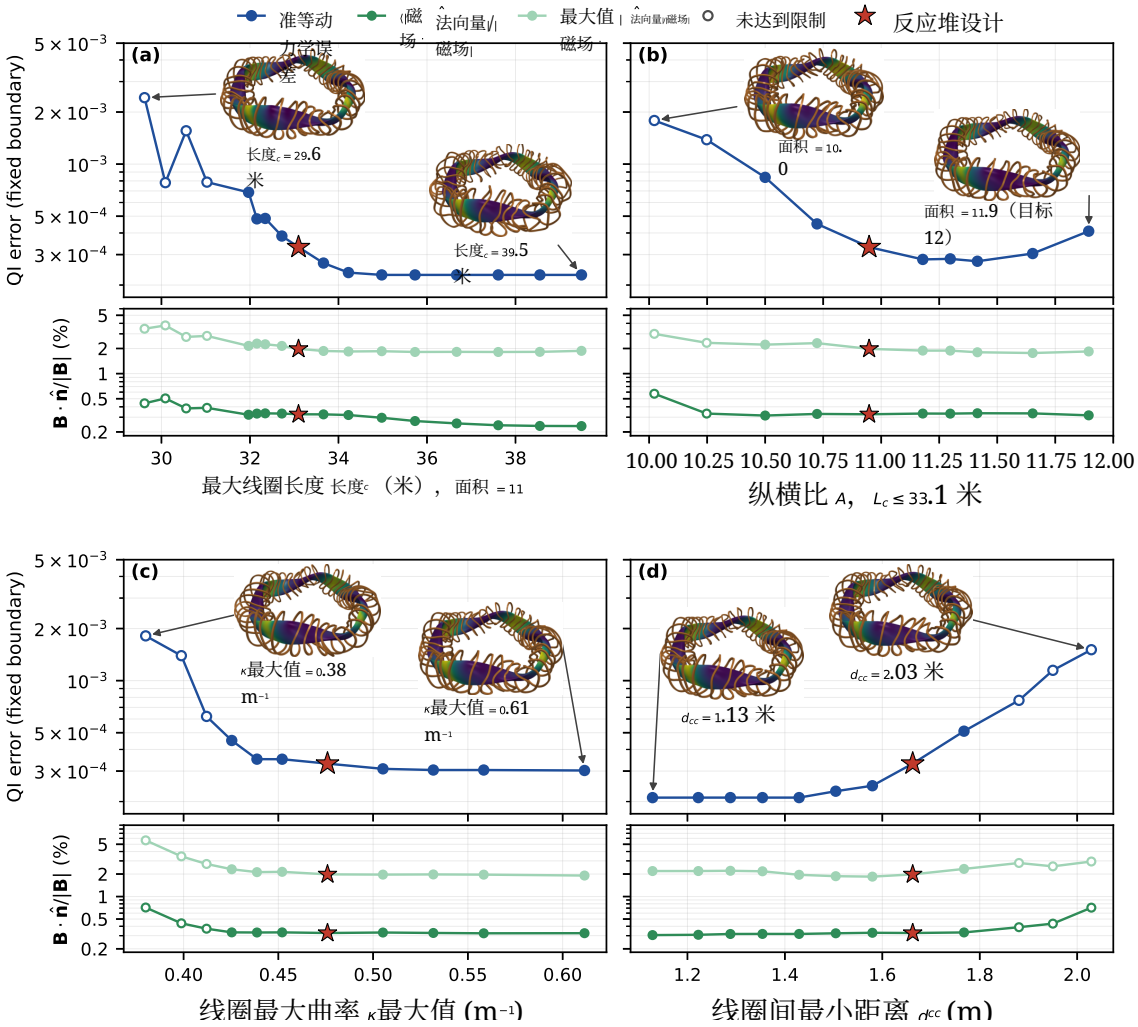

图 7. 反应堆式设计的延拓（以星号标记）：(a) $A = 11$处的最大线圈长度；(b) 线圈长度不超过 33.1 m 时的纵横比；(c) 线圈最大曲率；(d) 线圈间最小距离 d_{cc}。上方各图显示固定边界准等动力误差，下方各图显示目标边界上认证线圈的法向场 $\langle|\mathbf{磁场}\cdot\hat{}\mathbf{法向量}|\rangle/\langle|\mathbf{磁场}|\rangle$。空心符号表示磁通平方超出界限 25% 以上，或未满足某项物理或线圈限制的点。渲染图显示了以 $|\mathbf{磁场}|$ 着色的最后闭合磁通面，以及每条延拓路径末端的认证线圈。

力升高。每个状态都有各自的边界 $\mathbf{s}_j$，它可能像自由边界等离子体那样随压力变化而移动和变形。所有状态共用相同的线圈几何 $\mathbf{c}$，并且

每个状态都有其自身的电流$\mathbf{I}_j$，每个基准线圈对应一个。每个状态的总电流通过第 λ_G III B节中的因子由其自身的平衡设定，因此每个状态都有

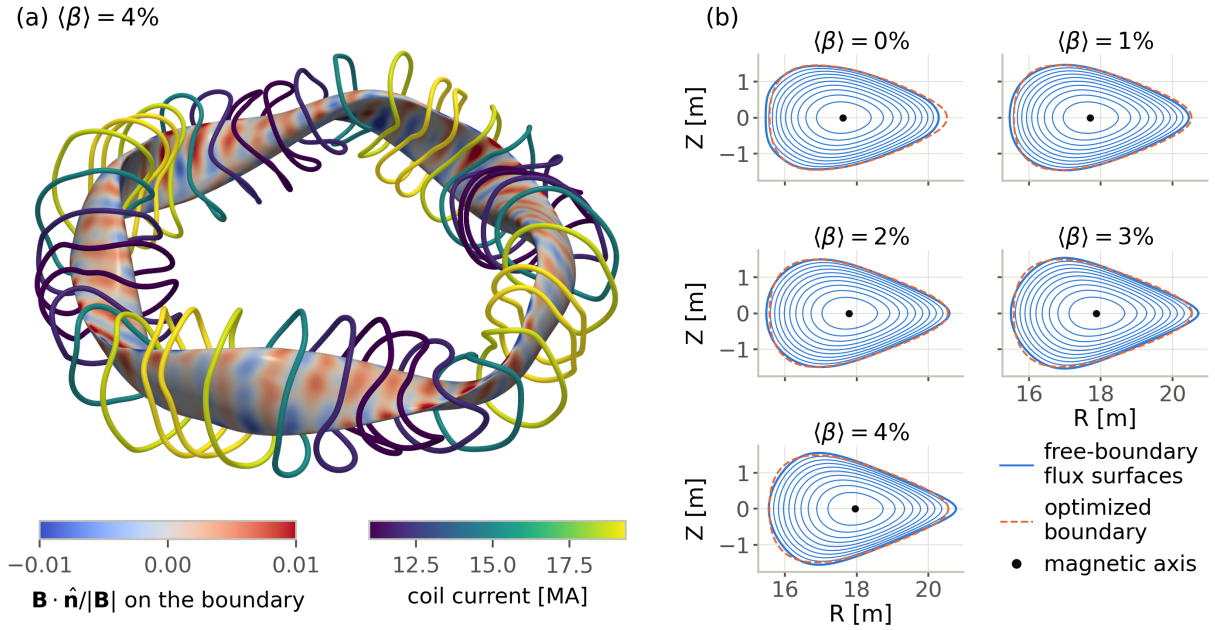

图 8. 采用一组线圈形状、 $\langle\beta\rangle$ 从 0 升压至 4% 的热启动反应堆尺度准等动力学设计。(a) 4% 状态，以及共享线圈和等离子体在最后闭合磁通面上的法向场。(b) 五种状态的 DESC 自由边界平衡的磁通面；在场周期的环向角 $\phi = 1/2$ 处，使用共享线圈和各状态的电流。虚线曲线为优化边界。

$N_c - 1$ 自由电流比。方程（4）的线圈问题变为

$$J^{\star}_{\text{tot}}(\mathbf{s}_0,\ldots,\mathbf{s}_4) = \min_{\mathbf{c},\,\mathbf{I}_0,\ldots,\mathbf{I}_4} \sum_{j=0}^{4} w_j\, J_f(\mathbf{c},\mathbf{I}_j;\mathbf{s}_j) \qquad (7)$$
$$\text{subject to } \mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{s}_j) \le 0, \quad j = 0,\ldots,4,$$

其中 $J_f(\mathbf{c},\ \mathbf{I}j;\ \mathbf{s}j)$ 是状态 j边界上、采用该状态等离子体磁场时，公式（5）的磁通平方，而 w_j 是状态 j 的权重。线圈—磁面距离是相对于每个边界施加的。公式（2）的等离子体问题变为

$$\min_{\mathbf{s}_0,\ldots,\mathbf{s}_4} \sum_{j=0}^{4} f_{\text{QI}}(\mathbf{s}_j;p_j)$$
$$\text{subject to } \mathbf{h}_j(\mathbf{s}_j;p_j) \le 0, \quad j = 0,\ldots,4, \qquad (8)$$
$$J^{\star}_{\text{tot}}(\mathbf{s}_0,\ldots,\mathbf{s}_4) \le \epsilon,$$

整个升压过程仅设置一个磁通约束。附录E 的包络定理适用于求和后的问题。若要对每个状态的磁通平方分别设置界限，就需要共享线圈对每个边界的响应，因此该公式保留单一界限，并监测每个状态的磁通平方。

物理约束 $\mathbf{h}j$ 以及线圈限制与第VI节设计在每种状态下的约束相同，但有两个例外。对真空状态和 1% 状态分别进行的优化采用了完整的约束集，结果表明，在这些压力下无法满足该设计的 Mercier界限和最大值-J 约束。因此，这两种状态只要求达到边际 Mercier 稳定性，且不包含最大值-J 约束。我们认为，对于低压力状态，采用不那么激进的优化是合理的，因为这些状态不是最终运行状态，而且良好的阿尔法粒子损失并非特别重要。

VI.E.2 优化：该次运行以第 VI 章中介绍的反应堆尺度准等动力学解为热启动。我们发现，先针对每个$\langle\beta\rangle$使用独立线圈进行优化很有帮助，由此得到五个等离子体解和五组线圈解。随后，将针对 $\langle\beta\rangle = 2\%$ 得到的线圈解用于对所有五个等离子体进行单线圈组运行的热启动。该次运行首先采用相等权重 w_j ，随后将 3% 状态的权重加倍、4% 状态的权重增至四倍，以优先考虑压力最高的两个设计点，最终降低了所有状态的磁通平方。

VI.E.3 结果：表 VIII列出了五个状态及其对应线圈的自由边界特性。有趣的是，五个边界彼此之间仅相差几厘米，而在升功率阶段，电流的变化幅度也只有百分之几。两个最大的电流随压力升高而略有增加，另外三个则基本保持不变。图8a 展示了采用共享线圈的 4% 状态。

每个状态都使用 DESC 在自由边界条件下进行了验证，具体如第 IIIF 节所示。图 8b 展示了磁通面

表VIII. 暖启动 QI 反应堆设计的五种状态，共用一组线圈形状，每种状态均对应其线圈电流。

	0%	1%	2%	3%	4%
A / E	10.93 / 5.82	10.97 / 5.74	10.96 / 5.76	10.97 / 5.80	10.99 / 5.96
f_{QI} $[10^{-3}]$	0.84	0.65	0.57	0.68	0.75
Δ	0.218	0.227	0.236	0.245	0.253
最大值-J	0.091	0.036	-0.004	-0.024	-0.048
$\iota(0)$ / $\iota(1)$	0.90 / 0.94	0.89 / 0.94	0.88 / 0.94	0.87 / 0.94	0.85 / 0.93
W [%]	0.43	1.95	3.49	4.98	6.44
$\hat{D}_{\mathrm{Merc}}$ $[10^{-3}]$	-0.3	5.0	8.8	11.8	6.8
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [mm]	47 / 231	33 / 138	28 / 104	37 / 178	38 / 216
α-损失 [%]	17.0 ± 0.4	16.8 ± 0.4	8.2 ± 0.3	2.0 ± 0.2	1.8 ± 0.1
$\langle$**磁场** $\cdot$ $\hat{}$**法向量**$\rangle$/$\langle$**磁场**$\rangle$ [%]	0.34	0.28	0.29	0.27	0.29
线圈电流 1 [MA]	18.27	18.62	18.81	19.05	19.32
线圈电流 2 [MA]	17.73	18.05	18.24	18.53	18.80
线圈电流 3 [MA]	14.72	14.85	14.83	14.89	14.96
线圈电流 4 [MA]	12.11	12.10	12.04	12.03	12.03
线圈电流 5 [MA]	11.02	11.08	10.99	10.99	11.01
共享线圈形状： $N_c = 5$, $M = 5$, $L_i = 33.3$–34.1 m, $d_{cc} = 1.71$ m, $d_{cs} = 1.68$–1.69 m,$\kappa_{\max} = 0.479\,\mathrm{m}^{-1}$, $\kappa_{\mathrm{MSC}} = 0.10\,\mathrm{m}^{-2}$, $\bar{\tau} = 0.55\,\mathrm{m}^{-1}$, $\gamma_c = 6.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2}$					

五个自由边界平衡的情况。在每个状态下，最后闭合磁通面与优化边界之间的均值偏差都略大于第 VIA 节设计中的偏差，但在较高的 $\langle\beta\rangle$设计点处，阿尔法粒子损失仍然非常低。真空状态和 1% 状态会损失更多 α粒子。由于反应堆在升功率阶段含有的 α粒子很少，因此这些损失不如运行点处的损失重要。这些状态不受最大值J约束，其最大值J 为正。此外，磁阱会随压力升高而加深，等离子体在 $0.15 \le s \le 0.95$ 的 1% 到 4% 范围内是 Mercier 稳定的，而真空状态在接近$s = 0.15$处处于临界 Mercier 稳定状态。

这些结果表明，一组线圈形状可以为从真空状态到 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 的、与反应堆相关的准等动力学等离子体提供服务，同时仅需适度改变电流，并且每种状态的准等动力学误差代价较小。

VII. 结论

表 IX 列出了本文每种设计的限制、认证线圈、准等变性或准等动力学误差、法向磁场和阿尔法粒子损失，以及讨论每种设计的章节。

本工作提出了一种用于仿星器设计的单阶段方法：针对每个候选边界，在严格的工程限制下，将细丝线圈保持在最优状态，同时优化等离子体边界。这些线圈的磁通平方作为约束纳入等离子体问题，其精确梯度在真空和有限压力条件下均可由包络定理得到，因此该方法无需在物理与线圈之间设置权重，并且最终得到的线圈始终满足工程限制。

从一项已发表的准轴对称设计出发，该方法找到了线圈与其匹配得更好、准等变性更强，并且在自由边界平衡中能更好地约束阿尔法粒子的构型。在等离子体和线圈均采用冷启动的情况下，它在广泛的纵横比、场周期和压力范围内实现了全磁俘获仿星器的三类构型；在附录H的基准测试中，其表现优于近期的单级设计和线圈设计方法；此外，它还通过一条依次经过三种对称性的闭环回到起始设计，表明该方法对起始点具有鲁棒性。它还实现了一类全新的、极为紧凑的准轴对称仿星器，具有一个场周期和自洽引导电流。

随后，我们将该方法应用于反应堆尺度。一次从冷启动开始的运行，在 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 处得到一个准轴对称设计，其性能可与 NCSX 相媲美，而线圈数从 78 个减至 18 个模块化线圈。第二次运行得到一个反应堆级准等动力学设计，表明稳定性、快粒子约束以及彼此充分分离且弯曲平缓的线圈可以兼得；围绕该设计进行延拓，则可描绘等离子体质量与工程限制之间的权衡。第三次运行设计出一组线圈形状，使其等离子体从真空状态一直适用于 $\langle\beta\rangle = 4\%$，升压过程中仅需改变电流。等离子体和线圈性质与已发表的反应堆尺度 QI 设计相当。

仍有若干限制和未解决的问题。优化是局部的，而线圈问题是非凸的，因此结果可能取决于延拓所沿的线圈分支，详见附录 E。线圈

表IX. 本文中每个线圈组（按半个场周期计），以及 N_c 基准线圈的数量。斜体行给出了对其下方所列线圈组施加的线圈限制。字母 (a)–(h) 对应图2中的设计。 ‡对 L_{total}的限制，取代逐个线圈施加的限制。 §一组线圈形状适用于从真空到 $\langle\beta\rangle = 4\%$ 的五种状态，每种状态都有各自的电流。范围覆盖这五种状态。 ¶模块化线圈，以及装置内的 18 个环向场线圈和 42 个极向场线圈。其 M 是其丝状体傅里叶拟合的阶数，而其 $\langle|\textbf{磁场}\cdot\hat{}\textbf{法向量}|\rangle/\langle|\textbf{磁场}|\rangle$ 则对应全部 78 个线圈。未显示 c09r00 的限制，因为其线圈并非按照本问题的限制进行设计。

线圈组	Sec.	N_{fp}	N_c / M	L_i [m]	$\kappa_{\max}$ / κ_{MSC}	d_{cc} / d_{cs} [米]	f_{QS}, f_{QI} $[10^{-3}]$	$\langle\textbf{磁场}\cdot\hat{}\textbf{法向量}|\rangle/\langle|\textbf{磁场}|\rangle$ [%]	α-损失 [%]
LP QA coil limits				≤ 40.6	≤ 0.30 / ≤ 0.039	≥ 1.01 / ≥ 1.52			
LP QA 真空，两阶段	B 2	2	5 / 5	40.6	0.30 / 0.039	1.47 / 1.90	7.9	0.22	20.6
LP QA 真空，QSS	B 2	2	5 / 5	40.6	0.28 / 0.039	1.12 / 2.38	0.62	0.053	6.1
LP QA β，两阶段	B 2	2	5 / 5	40.6	0.30 / 0.039	1.42 / 2.06	3.4	0.13	16.3
LP QA β，QSS	B 2	2	5 / 5	40.6	0.30 / 0.039	1.19 / 2.43	0.68	0.054	3.3
（c）准轴对称、冷启动	IV A 3	2	5 / 5	40.6	0.28 / 0.039	1.16 / 2.32	0.74	0.056	8.0
(f) coil limits				≤ 22.2	≤ 0.76 / ≤ 0.12	≥ 0.68 / ≥ 1.03			
（f）QI，冷启动	IV C	5	6 / 5	22.2	0.56 / 0.12	0.74 / 1.11	1.06	0.49	2.1
(a) coil limits				≤ 25.7	≤ 1.2 / ≤ 0.46	≥ 0.21 / ≥ 0.63			
(a) 准轴对称，$A = 2.5$	IV A 1	2	4 / 5	25.7	1.2 / 0.35	0.23 / 0.63	10	0.27	8.3
(b) coil limits				≤ 35.7	≤ 0.89 / ≤ 0.51	≥ 0.49 / ≥ 1.28			
(b) 准轴对称，自举电流	IV A 2	1	6 / 5	32.2–35.6	0.89 / 0.16	0.49 / 1.29	1.3	0.17	7.1
(d) coil limits				≤ 45.6	≤ 0.57 / ≤ 0.067	≥ 0.70 / ≥ 2.04			
(d) 准等螺旋对称，$\langle\beta\rangle = 2\%$	IV C	2	6 / 5	42.0–45.6	0.57 / 0.067	0.86 / 2.49	0.34	0.17	8.8
(e) coil limits				≤ 34.4	≤ 0.83 / ≤ 0.14	≥ 0.78 / ≥ 1.39			
(e) QI	IV C	3	6 / 5	31.6–34.4	0.83 / 0.14	0.87 / 1.61	0.068	0.25	0.02
(g) coil limits‡				≤ 196.0	≤ 0.95 / ≤ 0.12	≥ 0.68 / ≥ 1.37			
(g) 准螺旋	IV B	3	6 / 5	28.7–35.2	0.95 / 0.12	1.41 / 1.87	33	0.15	4.0
(h) coil limits‡				≤ 162.0	≤ 0.94 / ≤ 0.18	≥ 0.69 / ≥ 1.38			
（h）准螺旋	IV B	4	6 / 5	25.8–27.8	0.79 / 0.098	0.85 / 1.57	27	0.12	0.09
reactor coil limits				≤ 33.1	≤ 0.475 / ≤ 0.10	≥ 1.66 / ≥ 1.65			
反应堆样 QI	VI	4	5 / 8	33.0–33.1	0.475 / 0.10	1.73 / 1.68	0.64	0.33	4.7
start-up coil limits				≤ 34.1	≤ 0.475 / ≤ 0.10	≥ 1.66 / ≥ 1.65			
启动，0–4%§	VI E	4	5 / 5	33.3–34.1	0.479 / 0.10	1.71 / 1.68	0.57–0.84	0.27–0.34	1.8–17.0
NCSX-like coil limits				≤ 34.0	≤ 0.69 / ≤ 0.15	≥ 0.90 / ≥ 1.13			
类似 NCSX	V	3	3 / 5	31.9–34.0	0.69 / 0.15	0.91 / 1.13	58	0.21	23.6
NCSX c09r00	V	3	3¶ / 40	34.7–38.5	1.70 / 0.53	0.80 / 1.11	96	0.22	22.5

是丝状体，不考虑有限制造尺寸、力或公差，除非另有说明。这里的优化均未直接以有效波纹为目标。在低纵横比下，Mercier 稳定性和准轴对称性似乎很难同时满足。设计（b）不是 Mercier 稳定的；在类似 NCSX 的计算中，Mercier 稳定性使准对称性的代价增加了一个数量级以上。只有在设计（b）中，自举电流才是自洽的。对于反应堆设计，还必须将湍流和其他微观不稳定性作为进一步的约束，而阿尔法粒子计算是无碰撞的。除类似 NCSX 的 QSS 解中的 MRX 计算外，这里计算的所有平衡态都假设存在嵌套磁通面。最后，该方法无法调和相互不兼容的要求。如果预先规定的物理和工程限制不存在共同解，任何算法都无法提供这样的解。此时，优化将返回违反量最小的点，而限制条件本身必须重新审视。

致谢

感谢 Tobias Blickhan、Matt Landreman 和 Joshua Burby 富有成效的讨论。我们感谢西蒙斯基金会通过项目编号 560651 以及通过一项面向 Ma- chine Learning Research and Education with TPUs 的 Google 奖项提供的资金支持。本工作还获得了 Google.org“影响力挑战：科学人工智能”项目的资助，该项目为“高β仿星器的输运一致性优化”，由德克萨斯大学奥斯汀分校的 J. W. Burby 负责。本工作还部分得到了德克萨斯大学奥斯汀分校 Tillicum 图形处理器加速研究计算平台的支持，该平台由 UW-IT Research Comput- ing 运营。本工作使用了超级计算应用国家中心的 DeltaAI 系统；该系统的项目编号为 OAC 2320345，所用计算资源来自美国国家科学基金会资助的“先进网络基础设施协调生态系统：服务与支持”计划（ACCESS）下的分配额度 PHY260492。

AI 使用声明

我们使用了 Anthropic 的大语言模型 Claude Opus 5.5 来润色代码并准备稿件，包括起草和修改稿件文本。作者全程指导其使用，根据梯度测试和此处报告的结果检查代码的每一处改动，并审阅和修改了所有文本。作者对本文内容承担全部责任。

数据可用性

XCoil 线圈求解器和 QSS 优化代码可在 GitHub 上获取，版本为本文所用的标记发布版本：qss-filaments，发布版本 v1.0.0（https://github.com/PedroFranciscoGil/qss-filaments/releases/tag/v1.0.0），以及 XCoil，发布版本 v2.0.0（https://github.com/PedroFranciscoGil/XCoil/releases/tag/v2.0.0），

qss-filaments v1.0.0 依赖于该版本。表 IX 中每种设计的固定边界目标边界和平衡态、DESC 自由边界平衡、认证线圈组及其电流，以及 α损失表，均存档于 Zenodo：IX，网址为https://doi.org/10.5281/zenodo.24418301。

A. 快粒子与平衡约束

准对称性误差是参考文献中的双项残差 [17, 60]。当磁场具有螺旋度（M_B，N_B）时，若 $|\mathbf{B}|$ 仅通过附录 C 中的 Boozer角 $M_B\theta_B - N_B\phi_B$依赖于一组磁面 s_i，

$$f_{\mathrm{QS}} = \sum_i \left\langle \frac{1}{B^6}\Big[(N_B - \iota M_B)\,\mathbf{B}\times\nabla B\cdot\nabla\psi - (M_B G + N_B I)\,\mathbf{B}\cdot\nabla B\Big]^2 \right\rangle_{s_i}, \tag{A1}$$

其中，$\langle\cdot\rangle_{s_i}$ 表示磁面 s_i上的磁通面平均，ψ 表示第三节C中的环向磁通函数，ι 表示旋转变换，G和 I 分别表示附录C中的极向和环向电流函数。对于准等变磁场，该括号中的表达式在每个磁面上均为零。第三节D中的残差向量 q 收集了该表达式在每个磁面角网格上的取值，并除以 B^3；其权重经过设置，使这些值的平方和等于磁通面平均，因此 $f_{\mathrm{QS}} = \|\mathbf{q}\|^2$。该方法无需进行 Boozer变换，因为该表达式是直接根据平衡的 VMEC表示计算得出的。对于准轴对称构型，螺旋度为（M_B，N_B）=（1，0），并在 11 个磁面 $s = 0$、0.1、……、1 上计算 f_{QS}。对于准螺旋对称构型，螺旋度为（1，$-N_{\mathrm{fp}}$）。

纵横比和伸长率描述了等离子体的形状。纵横比采用 VMEC 的定义，

$$A = \frac{R_0}{a}, \qquad a = \sqrt{\bar{\mathcal{S}}/\pi}, \qquad R_0 = \frac{V}{2\pi^2 a^2}, \tag{A2}$$

其中，V是等离子体体积，$\mathcal{S}$ 是其截面面积的环向平均值。伸长率遵循参考文献 [61]。在环向角 ϕ处，垂直于磁轴的平面与边界的横截面面积为 $\mathcal{S}(\phi)$，周长为 $\mathcal{P}(\phi)$。具有相同面积和周长的椭圆半轴为 $a_e \geq b_e$，伸长率是两者之比中的较大值，

$$E = \max_{\phi} \frac{a_e(\phi)}{b_e(\phi)}. \tag{A3}$$

在这些约束中，h镜比遵循参考文献 [61]，磁阱遵循参考文献 [88]。磁面的镜比为

$$\Delta = \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}}, \tag{A4}$$

其中，在该磁面上 |**磁场**| 取极值。我们在最内侧磁面上对其进行评估并设定界限。磁阱为

$$W = \frac{V'(0) - V'(1)}{V'(0)}, \tag{A5}$$

其中，$V(s)$是磁面 s 所围成的体积，撇号表示 d/ds。正的 W 表示 V'向外减小，即为磁阱，这有利于交换稳定性。负的 W 表示磁丘。Mercier 判据报告为

$$\hat{D}_{\mathrm{Merc}} = D_{\mathrm{Merc}}\,\Psi_{\mathrm{edge}}^2, \tag{A6}$$

其中，D_{Merc} 是由 VMEC 计算的 Mercier 系数，即其剪切、电流、势阱和测地曲率项之和；$\Psi_{\mathrm{edge}} = 2\pi\psi_{\mathrm{LCFS}}$ 是总环向磁通。该系数为正表示稳定。除非给定半径，否则表格报告其在 $0.15 \leq s \leq 0.95$ 上的最小值。

自由边界最后闭合磁面 Γ_{fb} 与目标边界 Γ 之间的距离，是在每个场周期的 32 个极向平面上测量的。对于其中一个平面内 Γ_{fb} 的点 $\mathbf{x}$，

$$d(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}'\in\Gamma} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tag{A7}$$

其中$\mathbf{x}'$ 位于同一平面内，δ_{LCFS} 表示所有平面上各点的 d 的均值和最大值。

对于准等动力学构型，目标函数是准等动力学误差。在每个磁面 s_i上，沿着 N_α 磁力线$\alpha_j = \theta_B - \iota\phi_B$ 在一个场周期内的 N_ϕ 个点 ϕ_l，以 Boozer 坐标评估场强，并利用该磁面的极值将其归一化为 $b = (B - B_{\min})/(B_{\max} - B_{\min})$。基于该场，通过参考文献 [61] 中的压缩、拉伸和重排操作，构造出一个完全准等动力学的目标 b^{QI}。每个磁阱都被拉伸到 b的完整范围，并将其弹跳

距离替换为沿磁力线取平均后的距离，并关于磁阱中心对称放置，使 b 的最大值位于场周期的两端。准等动力学误差是两个场之间的距离，

$$f_{\mathrm{QI}} = \frac{1}{N_\alpha N_\phi} \sum_{i,j,l} \left[b(s_i, \alpha_j, \phi_l) - b^{\mathrm{QI}}(s_i, \alpha_j, \phi_l) \right]^2, \quad \text{(A8)}$$

对于精确的准等动力学磁场，该值为零。因子 $1/(N_\alpha N_\phi)$ 使每个磁面都贡献其网格上的均方差，因此该值不依赖于角分辨率。本文所引用的所有准等动力学误差均采用这一归一化。表中的准等动力学误差是自由边界平衡在五个磁面 $s = 0.1$、0.3、0.5、0.7 和 0.9 上的误差之和。不同于原始构造中将每条磁力线在其最小值所在的网格点处分割，我们根据 b的分段线性插值函数的次水平集的精确测度，求出每个磁阱的反弹点，从而使 f_{QI} 成为边界的连续可微函数。与 f_{QS}一样， f_{QI} 是平方和，其残差用于准等动力学情形下第 IIID 章节的最小二乘子问题。

两个快粒子约束作用于第二绝热不变量。俘获粒子守恒 $B^* = \mathcal{E}/\mu$，即其能量与磁矩之比，并且

$$J(s, \alpha, B^*) \propto |G + \iota I| \int \sqrt{1 - B/B^*}\, \frac{d\phi_B}{B}, \quad \text{(A9)}$$

其中，积分沿磁力线 α 在一个磁阱中相邻反弹点之间进行，省略的因子 $\sqrt{2\mu B^*/m}$ 在固定 B^*时为常数。我们根据俘获粒子反弹点的深度 K 对其进行标记，即 $B^* = B_{\min} + K\,(B_{\max} - B_{\min})$，其中 $|\mathbf{B}|$ 是在磁面上的极值，因此 $K \to 0$ 是深度最大的俘获粒子，而 $K \to 1$ 是临界俘获粒子。因此，在固定 B^*时，粒子沿着 J的等值线漂移；如果该等值线是闭合的，粒子便会受到约束，因此从内侧磁面开始的等值线无法到达边缘。

该 J-闭合约束用于第 IVC 章节中磁阱中部深度处的设计 (d)，要求平衡磁场上的 J等值线闭合。如果粒子在核心区产生，那么只要经过其产生点的 J 等值线在到达边缘前闭合，粒子就会受到约束。最大-J性质可以保证这一点，但它是更强的要求；低准等动力学误差只有在磁场完全满足准等动力学条件的极限情况下才能保证这一点。闭合约束直接要求满足这一条件，适用于在最内侧磁面上产生的粒子，因为大多数聚变反应都发生在那里。我们在 15 个磁面上评估 J，这些磁面位于 $s = 0.02$ 与 0.9 之间；沿 36 条磁力线，并在 B^*的多个取值下进行评估，所取深度为 $K = 0.03$磁阱中每条磁力线均能约束的磁场范围的 0.1、0.2、0.35、0.5、0.65 和 0.8 倍。若某个最内侧八个磁面上的起始点（s_i， α_j）被包围，则存在某个外侧磁面 s_c，其 J 位于 $J(s_i,\ \alpha_j)$ 的一侧，也就是说，若

$$o_{ij} = \min_{c>i} \min \left[\frac{\max_\alpha J(s_c) - J(s_i, \alpha_j)}{\bar{J}_{ic}}, \frac{J(s_i, \alpha_j) - \min_\alpha J(s_c)}{\bar{J}_{ic}} \right] < 0, \quad \text{(A10)}$$

其中， $\bar{J}_{ic}$ 是两个磁面上 J 的均值。于是，约束为平均开口量 $\delta = \langle \ln(1 + e^{o_{ij}/w}) \rangle_{i,\ j}$，其中 $w = 10^{-3}$。当每个起始点都处于包络内时，该量为零；在包络边缘处约为$\ln 2$。因此，对于每个B^*，强制施加的不等式为 $\delta \le 0.1$。

该最大J 约束，用于第IVC 章节的设计 (d) 以及类反应堆构型，遵循参考文献 [19] 并要求 J 向外侧减小，$\partial J/\partial s < 0$该量闭合等值线，有利于俘获粒子模的稳定性，并提供对俘获电子模（TEM）（一种漂移波微观不稳定性）的稳定性。它在构造场 b^{QI}上对准等动力学误差的 J 进行评估，其中 α不依赖于。在每个磁面上，构造场由其势阱的均值弹跳距离确定；这些距离关于 b的水平分段线性，因此式（A9）在 Boozer 谱中具有光滑的闭式表达。对于准等动力学误差中每对相邻磁面， $s = 0.1$、0。3、.....、0。9， B^*的取值位于0.35、0.55 和 0.65处，即 $|\mathbf{B}|$在两个磁面上均被俘获，并从其顶部开始测量，分别位于 $K = 0.65$、0.45 和 0.35 处；该约束要求

$$\frac{1}{\bar{J}} \frac{J(s_{i+1}, B^*) - J(s_i, B^*)}{s_{i+1} - s_i} \le -0.06, \quad \text{(A11)}$$

对于每一对以及每个 B^*，其中 $\bar{J}$ 是两个值的均值。

在这两个约束中，所有最大值和最小值都替换为对数和指数软最大值和软最小值，因此每个约束都是边界的单个可微函数。对外侧磁面以及包络测试两侧取软最小值，使测试略微不如硬测试保守；而对磁力线取软极值则使测试更为保守。在所用的锐度下，软值与硬值之差相较于 δ 的容差很小。

A.1 平衡设置

该优化中的固定边界平衡采用以下 VMEX 设置：径向阶梯包含 16 个和 50 个磁面，力容差为 10^{-16} 和10^{-11}；在冷启动中，当最高至 m、 $|n| \le m_{\max}$ 的边界模态处于自由状态时，最大极向和环向模态数为 $m_\theta = n_\phi = m_{\max} + 2$。角向网格对于 $m_{\max} \le 4$ 为 16×14，并遵循 VMEC 的规则（$2\,m_\theta + 6 \times 2\,n_\phi + 4$，即 20×18），适用于 $m_{\max} = 5$。

在这些设置下，VMEX 将 VMEC2000 的准对称性、纵横比、旋转变换和伸长率复现至 10^{-8}。

B. 热启动的准轴对称设计

本附录将该方法应用于一个已发表的构型，即 Landreman 和 Paul 提出的精确准轴对称设计， [17], 包括真空和有限压力情形。这些热启动方案补充了IV章节中的冷启动方案。它们展示了在等离子体与线圈共同设计时，该方法能在多大程度上改进一个已经高度优化的设计。

B.1 比较方法

在本附录的比较中，两阶段基线和 QSS 设计均从同一个已发表构型开始。两阶段参考设计保留已发表的边界，并使用IIIB章节中的最终线圈阶段为其拟合线圈。对于 LP QA 设计，QSS 设计通过IIIE章节中的磁通约束延拓获得，延拓从相同边界开始，边界模截至 m, $|n| \le 5$ 保持自由（120 个系数），更高阶模态则固定为已发表的取值。QSS 设计的目标是改变等离子体形状，以获得更适合线圈的平衡形状；而两阶段参考设计保留已发表的形状。对于 LP QA，我们选择延拓中已认证且最优磁通平方最低的点作为 QSS 设计，其固定边界准对称性误差不超过 5×10^{-4}，这是我们在本次比较中所接受的准对称性放宽幅度。附录G中使用 DESC 独立验证了所有最终设计及其两阶段参考设计的自由边界平衡。

B.2 真空和有限压力下的准轴对称仿星器

我们研究 Landreman 和 Paul 提出的精确准轴对称设计 [17], ，其场周期数为两个，分别针对真空情况和有限压力变体， $\beta = 1.05\%$，$p \propto 1 - s$ 并采用自洽的 Redl自举电流，大小为 -1.15 MA。该变体的固定边界目标为 $\langle\beta\rangle = 0.91\%$。其自由边界平衡态采用线圈的设计电流计算，环向磁通为线圈磁场穿过目标横截面的磁通，比目标的磁通低 7%。在相同压力下，场强也按相同比例降低，体积平均值变为 $\langle\beta\rangle = 1.05\%$。本文始终报告这一自由边界值。物理约束为各设计本身的相应数值，列于表X。所有线圈组的 $N_c = 5$ 均相同，且线圈限制也相同。表中还列出了图2中的设计 (c)：它在相同问题上以冷启动方式运行，以及与之对应的两阶段设计。在真空条件下，冷启动的 QSS 设计在所有等离子体和线圈属性上都与热启动设计接近，而两种两阶段设计也彼此接近。本文报告的所有有限压力下的 $\langle|\textbf{磁场}\cdot\hat{}\textbf{法向量}|\rangle/\langle|\textbf{磁场}|\rangle$ 均包含等离子体磁场。

两条通量约束延拓曲线和两个选定设计如图 9所示。它们的最初步骤同时降低了固定边界准对称性误差和 $\langle|\mathbf{B}\cdot\hat{}\mathbf{n}|\rangle/\langle|\mathbf{B}|\rangle$，因此，即使是这些经过高度优化、已发表的设计，对于线圈而言也并非最优。法向场 $\langle|\mathbf{B}\cdot\hat{}\mathbf{n}|\rangle/\langle|\mathbf{B}|\rangle$ 随后持续下降；将表 X中的 QSS 设计与两阶段参考设计进行比较可见，QSS方法在真空和有限压力下均将 $\langle|\mathbf{B}\cdot\hat{}\mathbf{n}|\rangle/\langle|\mathbf{B}|\rangle$ 降低了数倍。所有物理约束均得到满足，并且由于在全部四个设计中，每个线圈的长度和均方曲率限制均处于激活状态，这种改进完全来自等离子体形状。采用 QSS 线圈后，真空中的自由边界准对称性误差降低了一个数量级，在有限压力下降低了数倍，并且最后闭合磁通面更接近其目标。在真空中，两级线圈会在目标边界外侧产生较大的磁岛，而 QSS 线圈的磁力线则保持在其附近（附录 G）。因此，只需使等离子体形状略微偏离 LP QA，在联合优化线圈后，自由边界准对称性就能提高最多一个数量级。

只有当较低的法向场能够转化为更优的等离子体时，它才有意义。为了检验快粒子情况下是否如此，我们按照附录 C中的描述，在表 X所列线圈组的自由边界平衡中追踪聚变产生的阿尔法粒子。这些平衡态必须包含离散线圈产生的磁场波纹；对于 $n = 2N_c$，每个场周期的磁场波纹约为；当每半周期有 N_c 个线圈时（$n = 10$ 对于 LP QA），其在约 $n = 9$–14 的宽频带内。VMEX 在 $n_\phi = 8$ 处的自由边界平衡无法表示这种磁场波纹。因此，我们在能够解析该磁场波纹的 DESC 自由边界平衡中追踪阿尔法粒子。

按出生半径划分的阿尔法粒子损失数据见附录 C的表 XI。在线圈限制相同的情况下，0.2 秒内，QSS 线圈损失的阿尔法粒子数量比真空中的两阶段线圈少 3.4 倍；在 $\langle\beta\rangle = 1.05\%$ 时少 4.9 倍。这些结果表明，QSS方法适用于采用细丝线圈的优化，并且可以用于高效设计仿星器。

C. 阿尔法粒子计算

本附录介绍阿尔法粒子损失的计算方法，按出生半径列出损失情况，并说明磁场表示中的一个细节，该细节会影响在磁轴附近出生的 α粒子。

α粒子按反应堆D–T分布生成，燃料密度为 $n_D = n_T \propto 1 - s^5$，温度为$T = 11.5\,(1 - s)$ keV，如参考文献 [89], 和 Bosch–Hale 反应性所述 [90]。轨道在 Boozer

表 X. LP QA 系列的六种设计，均具有 $N_{\mathrm{fp}}=2$ 和 $N_c=5$。约束列给出了真空和有限压力下的数值。冷启动设计是图 2 中的设计 (c) 及其在第 IV A3节中的两阶段对应设计。

	约束 真空，β	热启动，真空 两阶段 LP QA	热启动，真空 QSS LP QA	冷启动，真空 两阶段 冷启动	冷启动，真空 QSS 冷启动	热启动，$\beta=1.05\%$ 两阶段 LP QA	热启动，$\beta=1.05\%$ QSS LP QA
起始 $\langle\beta\rangle$ [%]		–	–	–	–	1.05	1.04
A/ E	6 / ≤ 4.6	6.01 / 4.59	6.00 / 3.78	6.01 / 4.74	6.00 / 3.99	6.00 / 4.42	6.00 / 3.91
$\iota(0)$ / $\iota(1)$	$\bar{\iota}=0.42, 0.50$	0.43 / 0.41	0.43 / 0.40	0.43 / 0.40	0.43 / 0.40	0.39 / 0.51	0.37 / 0.50
W [%]	$\geq -3.0, \geq 1.6$	**−2.8**	−3.0	−2.9	**−2.6**	2.3	**2.6**
固定边界 f_{QS} $[10^{-5}]$		**0.051**	8.1	**0.069**	12	9.6	**3.1**
f_{QS} $[10^{-3}]$		7.9	**0.62**	8.0	**0.74**	3.4	**0.68**
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [毫米]		37 / 159	**2.7** / **8.9**	51 / 209	**3.7**/ **14**	19 / 86	**8.0** / **27**
α-损失 [%]		20.6	**6.1**	20.6	**8.0**	16.3	**3.3**
$\kappa_{\max}$ / κ_{MSC} [米$^{-1}$ / 米$^{-2}$]		0.30 / 0.039	**0.28**/ 0.039	0.30 / 0.039	**0.28**/ 0.039	0.30 / 0.039	0.30 / 0.039
$\bar{\tau}$ / γ_c [米$^{-1}$ / 10^{-3} 米$^{-2}$]		0.18 / 0.00	**0.14**/ 0.01	0.18 / 0.00	**0.14** / 0.01	0.18 / 0.00	0.17 / 0.00
d_{cc} / d_{cs} [米]		**1.47**/ 1.90	1.12 / **2.38**	**1.48** /1.91	1.16 / **2.32**	**1.42**/ 2.06	1.19 / **2.43**
$\langle$磁场 · $\hat{}$法向量$\rangle$/$\langle$磁场$\rangle$ [%]		0.223	**0.053**	0.20	**0.056**	0.133	**0.054**
shared coil limits	$M=5$, $L_i\leq 40.6$ 米, $\kappa_{\max}\leq 0.30$ 米$^{-1}$, $\kappa_{\mathrm{MSC}}\leq 0.039$ 米$^{-2}$, $d_{cc}\geq 1.01$ 米, $d_{cs}\geq 1.52$ 米						

坐标（s, θ_B, ϕ_B） [91]中追踪。在这些坐标中，磁力线为直线，磁场为**磁场** $=G\,(s)\,\nabla\phi_B+I\,(s)\,\nabla\theta_B+B_s\nabla s$，其中 $2\pi G/\mu_0$ 是磁面外的极向电流 s ，而 $2\pi I/\mu_0$ 是磁面内的环向电流。这些坐标的雅可比行列式与 $|G+\iota I|/B^2$成正比，其中 ι 为旋转变换。对于每个平衡，从按出生率 $n_D n_T\langle\sigma v\rangle$ 加权并乘以该雅可比行列式的分布中抽取 8,000 个起始点，俯仰角分布为各向同性。α粒子中约有 33%、35%、27% 和 5% 分别生成于 $0\leq s<0.1$、 $0.1\leq s<0.25$、$0.25\leq s<0.5$和 $s\geq 0.5$。随后使用 CATAPULT（FIRM3D 的 GPU轨道追踪器 [92], ），在 Boozer 坐标中对能量为 3.5 MeV 的无碰撞导引中心轨道进行积分，积分时间为 0.2 s，采用 m, $n\leq 32$ ，每个场周期包含 60 个环向单元（采用 30 个单元时，总数在抽样误差范围内一致）；当 α粒子到达 $s=1$时，即计为损失。

表 XI 列出了附录 B2 中 LP QA 对比中，反应堆式设计和 W7-X 在出生半径四个区间内 0.2 秒内损失的 α 粒子比例。总计还报告了每个平衡中追踪的 8,000 个 α粒子的二项抽样误差。

场表示中的一个细节最终被证明十分重要。FIRM3D通过对最内侧两个磁面进行线性外推，将 $|B|$的Boozer谐波延拓至磁轴，因此 $m\geq 1$谐波在 $s=0$ 处不会消失，而 $|B|$ 会绕磁轴变化。若不加修正，无论场表的分辨率如何，这都会使在 $s<0.011$处产生的α粒子损失四分之一甚至更多。因此，在构建插值函数之前，我们将每个 $m\geq 1$ 谐波的 $s=0$ 值设为零；在 $s\geq 0.2$处，这使谐波的变化小于10^{-7} T。经过这一修正，对于在两个源自Wendelstein 7-X的准等动力平衡中、分别从单个磁面（$s_0=0.1$–0.75）起始的1000个α粒子，CATAPULT与SIMPLE [93]的结果相差不超过每1000个粒子中的5个。

C.1 反应堆式设计中俘获粒子的稳定性

本附录展示了反应堆式设计的俘获粒子和稳定性特性，这些特性总结于章节 VIB。图 10 展示了认证线圈的自由边界平衡态中俘获粒子的第二绝热不变量。优化将 Mercier 判据的下界限制为 $sD_{\mathrm{Merc}}\geq 0.020$ 在 $0.15\leq s\leq 0.95$，而固定边界设计在该范围的大部分区域都处于这一界限上。有效波纹采用 NEO JAX [85] 在具有 m 的 *Boozer* 谱上计算，$n\leq 32$。

D. 环向排序约束

类 NCSX 设计（第 V 节）、反应堆式设计（第 VI 节）和启动线圈组（第VIE节）使用额外的线圈约束，以保持相邻线圈的环向顺序，避免它们相互交叉。这是必要的，因为在有限 β 下，准等动力学构型的线圈在满足线圈间距要求的同时，往往会沿环向交叉。每个线圈上的点由其环向角 ϕ和几何极向角 ϑ描述；后者不同于边界参数化中的角度 θ 。该角度是相对于边界的几何轴定义的，这条几何轴是由边界在每个 ϕ处的极向平均 R 和 Z 所描绘的曲线$R_0(\phi)=\sum_n r_{0n}\cos(nN_{\mathrm{fp}}\phi)$, $Z_0(\phi)=\sum_n z_{0n}\sin(nN_{\mathrm{fp}}\phi)$，也就是说，它由边界的 $m=0$ 傅里叶模态定义。对于一对相邻线圈（在 ϕ中分别位于左侧（L）和右侧（R）），以及左侧线圈上的每个点 p ，该约束要求

$$\Phi_p=\operatorname*{softmin}_{p'}\Big[\phi_{\mathrm{R},p'}-\phi_{\mathrm{L},p}+\gamma\big(1-\cos(\vartheta_{\mathrm{L},p}-\vartheta_{\mathrm{R},p'})\big)\Big]\geq\Delta\phi_{\min},\quad\text{(D1)}$$

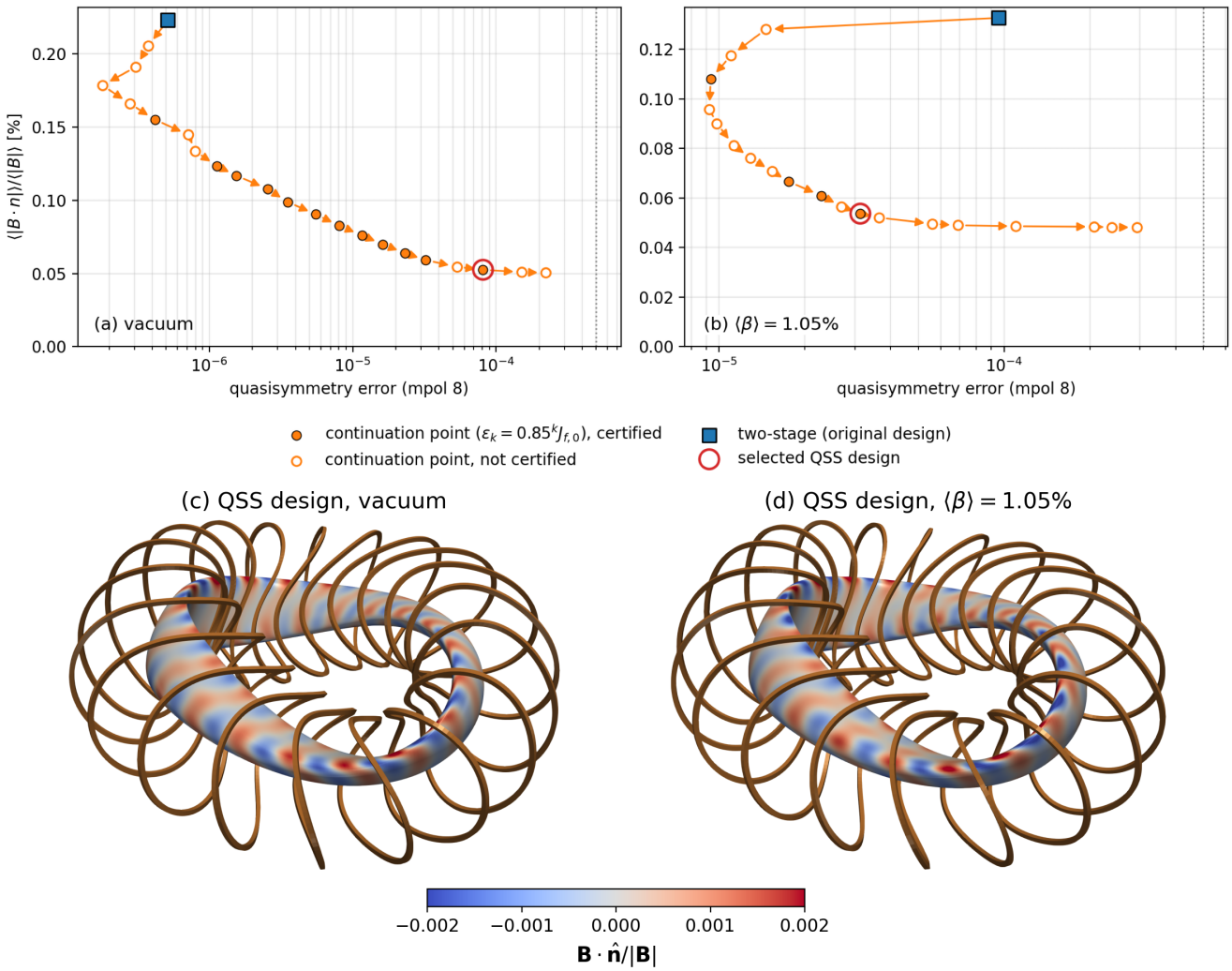

图9. LP QA 的通量约束延拓， $N_c = 5$ 从以往的线圈设计（方形标记）开始：(a) 真空中；(b) 在 $\beta = 1.05\%$ 时。实心点表示已认证，空心点表示未认证。圈出的点为 QSS 设计，即具有不超过 5×10^{-4} 固定边界准对称性误差的最低磁通量已认证点（虚线）。(c)、(d) 分别为选定的真空中（$k = 19$）和在 $\beta = 1.05\%$ 时（$k = 12$）的 QSS 设计。

表 XI。 α-损失率（按出生半径计，百分比），适用于表 X 中的热启动 LP QA 线圈组、章节 VI 中的反应堆式设计，以及表 VI 中的 W7-X。

	LP QA，真空		LP QA，$\langle\beta\rangle = 1.05\%$			
出生 s	两阶段	QSS	两阶段	QSS	反应堆式设计	W7-X
0–0.1	16.5	**0.5**	11.0	**0.0**	**0.7**	22.9
0.1–0.25	20.2	**3.7**	16.4	**1.1**	**3.9**	27.4
0.25–0.5	24.8	**12.7**	20.4	**7.6**	**8.3**	30.8
0.5–1	27.1	**22.3**	28.5	**17.2**	**16.2**	33.1
总计	20.6 ± 0.5	$\mathbf{6.1 \pm 0.3}$	16.3 ± 0.4	$\mathbf{3.3 \pm 0.2}$	$\mathbf{4.7 \pm 0.2}$	27.1 ± 0.5

使右侧线圈在相同极向角处沿 ϕ方向至少比左侧线圈多出 $\Delta\phi_{\min} = 1.5°$。含有 $\gamma = 20$ 的项会将右侧线圈上其他极向角处的点排除在最小值计算之外；软最小值是一种尖锐度为 500 rad^{-1} 的对数和指数，

低于硬最小值，因此该约束是保守的。这些线圈对均为半个场周期内的相邻线圈，以及跨越 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/N_{\mathrm{fp}}$ 的仿星器对称像对应的首末线圈。各行按可用的环向宽度 $\pi/(N_{\mathrm{fp}}N_c)$ 进行归一化

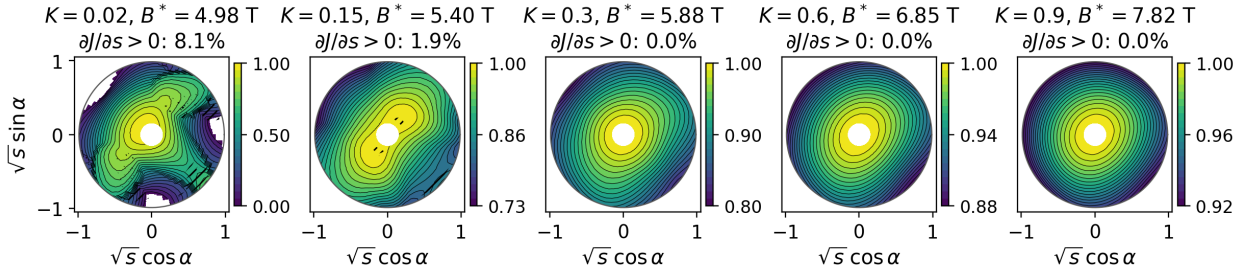

图10. 反应堆式设计的第二绝热不变量 $J(\sqrt{s},\ \alpha)$，见章节 VI；在其认证线圈的 DESC 自由边界平衡中，固定附录 A的俘获深度 K，对于 $K = 0.02$、0.15、0.30、0.6 和 0.9，各面板均按其最大值归一化。径向坐标为 $\sqrt{s}$，角度为磁力线标签 α。阴影区域表示 $\partial J/\partial s > 0$，其中最大值-$J$ 性质不成立。面板标题给出 $0.05 < s < 0.9$时其在横截面中的占比。

分配给每个线圈，并通过软最大值将每个线圈对减少至 16 个线段。由于参考轴是根据 $m = 0$ 边界的模态构建的，我们固定该轴，使约束不通过这些模态依赖于边界，从而避免这种依赖进入附录E中的包络梯度。

E. 包络梯度的推导

本附录推导线圈项 $J_f^\star$ 相对于等离子体边界的梯度，等离子体问题在每次迭代时都需要该梯度。首先讨论真空情形。在有限压力下，等离子体磁场会增加第二项，随后将对此进行推导。

E.1 真空磁场

XCoil 以缩放形式求解方程（4）：$\min_{\mathbf{c}} J_f(\mathbf{c},\mathbf{s})/J_{\text{ref}}$满足 $g_i(\mathbf{c},\mathbf{s}) \le 0,\ i \in \mathcal{I}$。线圈的总电流在优化前已固定，不属于$\mathbf{c}$，因此该问题不存在等式约束。其拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(\mathbf{c},\boldsymbol{\lambda};\mathbf{s}) = \frac{J_f(\mathbf{c},\mathbf{s})}{J_{\text{ref}}} + \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i\, g_i(\mathbf{c},\mathbf{s}). \tag{E1}$$

在局部解$\mathbf{c}^\star(\mathbf{s}_0)$处，KKT 条件成立，

$$\frac{1}{J_{\text{ref}}}\nabla_{\mathbf{c}} J_f + \sum_i \lambda_i^\star \nabla_{\mathbf{c}} g_i = 0, \tag{E2}$$

$$g_i \le 0, \quad \lambda_i^\star \ge 0, \quad \lambda_i^\star g_i = 0. \tag{E3}$$

令 $\mathcal{A} = \{i :\ g_i(\mathbf{c}^\star,\ \mathbf{s}_0) = 0\}$ 为活跃集。我们假设：(i) 梯度 $\nabla_{\mathbf{c}} g_i,\ i \in \mathcal{A}$线性无关；(ii) 严格互补性，$\lambda_i^\star > 0$ 对于 $i \in \mathcal{A}$成立；(iii) 活动约束的切空间上满足二阶充分条件。在假设 (i)–(iii) 下，将隐函数定理应用于系统（E2）以及 $g_i = 0\ (i \in \mathcal{A})$，可得到局部唯一且连续可微解（$\mathbf{c}^\star(\mathbf{s})$ $\boldsymbol{\lambda}^\star(\mathbf{s})$），且在$\mathbf{s}_0$ [94]的某个邻域内具有相同的活跃集。

沿方向$\mathbf{d}$对值函数 $J_f^\star(\mathbf{s}) = J_f(\mathbf{c}^\star(\mathbf{s}),\mathbf{s})$求导，记 $\dot{\mathbf{c}} = D\mathbf{c}^\star[\mathbf{d}]$，

$$\frac{dJ_f^\star}{d\mathbf{s}}\cdot\mathbf{d} = \nabla_{\mathbf{s}} J_f\cdot\mathbf{d} + \nabla_{\mathbf{c}} J_f\cdot\dot{\mathbf{c}}. \tag{E4}$$

第二项涉及未知的线圈响应 $\dot{\mathbf{c}}$。驻点性（E2）用约束梯度替代 $\nabla_{\mathbf{c}} J_f$，

$$\nabla_{\mathbf{c}} J_f\cdot\dot{\mathbf{c}} = -J_{\text{ref}}\sum_i \lambda_i^\star \nabla_{\mathbf{c}} g_i\cdot\dot{\mathbf{c}}. \tag{E5}$$

每一项要么为零，要么已知。对于非活动约束，$\lambda_i^\star = 0$。活动约束沿解路径保持活动，$g_i(\mathbf{c}^\star(\mathbf{s}),\mathbf{s}) = 0$，因此其全导数为零，

$$\nabla_{\mathbf{c}} g_i\cdot\dot{\mathbf{c}} + \nabla_{\mathbf{s}} g_i\cdot\mathbf{d} = 0, \qquad i \in \mathcal{A}. \tag{E6}$$

代入式（E4）后，

$$\frac{dJ_f^\star}{d\mathbf{s}} = \nabla_{\mathbf{s}} J_f(\mathbf{c}^\star,\mathbf{s}) + J_{\text{ref}}\sum_i \lambda_i^\star\,\nabla_{\mathbf{s}} g_i(\mathbf{c}^\star,\mathbf{s}), \tag{E7}$$

这就是等离子体优化中使用的包络梯度。线圈响应 $\dot{\mathbf{c}}$ 已消去，只剩下在线圈和乘子固定时的偏导数。等价地，在 KKT 点有 $dJ_f^\star/d\mathbf{s} = J_{\text{ref}}\,\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{L}$。在工程限制中，只有线圈—磁面距离依赖于$\mathbf{s}$（如果不固定轴，环向排序约束会通过边界的 $m = 0$模态依赖于$\mathbf{s}$）。随后，线圈—磁面距离通过其乘子进入梯度，其关于$\mathbf{s}$ 的偏导数通过自动微分获得。当该约束不活跃时，梯度在固定线圈下简化为 $\nabla_{\mathbf{s}} J_f$。

a. 备注。(a)当约束进入或离开活跃集时，假设（ii）失效。此时线圈会出现折点，但该约束的乘子在此处为零，因此公式（E7）在变化处保持连续

，并且在满足（i）和（iii）时保持连续可微 $J_f^\star$ [95]。本文的同伦点在活动长度行和均方曲率行上具有严格为正的乘子。（b）如果（i）失效，乘子并不唯一，但 $\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{L}$ 只要仅有与$\mathbf{s}$无关的约束退化，对于每个 KKT 乘子向量而言都是相同的。(c) XCoil 的目标函数还包含弧长规范项 $w_{\text{arc}}R_{\text{arc}}$（c），该项与 $\mathbf{s}$无关。将这一项纳入论证可知，公式（E7）恰好是已求解问题的值乘以J_{ref} 的梯度，该值与$J_f^\star$ 相差 $w_{\text{arc}}J_{\text{ref}}R_{\text{arc}}$（$\mathbf{c}^\star$）。泰勒检验将梯度与 $J_f^\star$ 其自身进行比较，结果显示差异未超过噪声底。（d）线圈问题是非凸的，公式（E7）是线圈求解器所跟随的局部极小值的梯度。热启动求解会沿着等离子体优化过程连续地跟随该极小值，并且 $J_f^\star$ 沿此过程保持平滑。如果求解器转移到另一个局部极小值，等离子体优化器所看到的值会出现跳变或折点，而公式（E7）随后给出新极小值的梯度。这类事件会影响信赖域方法的单个步长，因为该方法只有在目标函数下降时才接受步长。它不会影响认证线圈，因为认证线圈是在最终边界上通过冷启动重新求解得到的，并且与回路内线圈的一致性在 1% 以内，详见章节 IIIB。这种一致性是经验性的，并不能构成保证。

E.2 有限压力

在有限压力下，等离子体磁场通过向量$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_b}$ 进入线圈问题，并在其中保持固定。其条目是虚拟套管网格上$\mathbf{B}^{\text{pl}}$ 的柱坐标分量；该网格每个场周期包含 32×32 个点，再通过在该网格上拟合的傅里叶级数，将其插值到固定角度（θ，ϕ）处 XCoil 的表面点上。网格只选取一次，使$\mathbf{B}^{\text{pl}}$ 在起始边界上精确到六位数字，并在整个优化过程中保持不变，从而使$\mathbf{B}^{\text{pl}}$ 成为边界的光滑函数。内层问题变为

$$J_f^\star(\mathbf{s},\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{c}} J_f(\mathbf{c},\mathbf{s},\mathbf{b}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{c},\mathbf{s}) \le 0, \tag{E8}$$

其中 $\mathbf{b}$ 仅通过残差（$\mathbf{B}_{\text{coil}} + \sigma\mathbf{B}^{\text{pl}}$）$\cdot\hat{}\,\mathbf{n}/|\mathbf{B}_{\text{coil}} + \sigma\mathbf{B}_{\text{pl}}|$（章节 IIIB）进入，而不通过工程限制进入。在外层问题中，$\mathbf{b}$不是自由变量，而是根据平衡计算得到，

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}_{\text{pl}}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = 0, \qquad \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{s}), \tag{E9}$$

其中$\mathbf{F}$ 是 VMEX 力残差，$\mathbf{x}$ 是收敛状态，$\mathbf{p}$ 是运行参数，其中包含边界。外层问题所约束的量是$\widehat{\ }$复合量 $J_f^\star$（$\mathbf{s}$）$= J_f^\star$（$\mathbf{s}$，$\mathbf{b}$（$\mathbf{s}$））。

a. $(\mathbf{s},\mathbf{b})$中的包络定理。 将 $(\mathbf{s},\mathbf{b})$ 共同视为方程 (E8) 的参数。根据方程 (E1) 的拉格朗日函数，$\mathcal{L} = J_f/J_{\text{ref}} + \boldsymbol{\lambda}^\top\mathbf{g}$，以及附录 E中的假设 (i)–(iii)，其中的论证适用于每个参数分量线圈响应会消去，并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_f^\star}{\partial \mathbf{s}} &= J_{\text{ref}}\,\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{L}\big|_{\mathbf{c}^\star,\boldsymbol{\lambda}^\star,\mathbf{b}},\\ \frac{\partial J_f^\star}{\partial \mathbf{b}} &= J_{\text{ref}}\,\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{L}\big|_{\mathbf{c}^\star,\boldsymbol{\lambda}^\star} = \nabla_{\mathbf{b}}J_f(\mathbf{c}^\star,\mathbf{s},\mathbf{b}),\end{aligned} \tag{E10}$$

因为 $\mathbf{g}$ 不依赖于 $\mathbf{b}$。第一项是在等离子体磁场固定时的式（E7）。第二项是等离子体磁场 $\mathbf{b}$的余切向量，即线圈固定时最优磁通对等离子体磁场的敏感度。

b. 通过平衡应用链式法则。 沿方向 $\mathbf{d}$ 对复合函数求导，

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{J}_f^\star}{d\mathbf{s}}\cdot\mathbf{d} &= \frac{\partial J_f^\star}{\partial \mathbf{s}}\cdot\mathbf{d} + \Big\langle \frac{\partial J_f^\star}{\partial \mathbf{b}},\ \dot{\mathbf{b}}\Big\rangle,\\ \dot{\mathbf{b}} &= \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{pl}}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{pl}}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}},\end{aligned} \tag{E11}$$

其中 $\dot{\ }\mathbf{p} = (\partial\mathbf{p}/\partial\mathbf{s})\mathbf{d}$。状态切向量可通过对平衡条件求导得到：$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{s}),\mathbf{p}(\mathbf{s})) = 0$,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = 0 \implies \dot{\mathbf{x}} = -\Big(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\Big)^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}}, \tag{E12}$$

这正是第 IIIC 章中的精确平衡雅可比矩阵逐列计算每个边界系数所得的结果。将式（E10）和（E12）代入式（E11），得到有限压力梯度

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{s}}\widehat{J}_f^\star &= J_{\text{ref}}\,\nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{L}\big|_{\mathbf{b}}\\ &\quad + \Big\langle \nabla_{\mathbf{b}}J_f,\ \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{pl}}}{\partial \mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{pl}}}{\partial \mathbf{p}}\frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{s}}\Big\rangle,\end{aligned} \tag{E13}$$

其第一项是在等离子体磁场固定时的式（E7）。同样，线圈响应不会出现。等离子体磁场带来的是平衡的响应，而外层问题已经对其求导。磁场项只需通过虚拟包层进行一次向量—雅可比乘积运算，与边界系数的数量无关。由于虚拟包层的精度方案固定，$\mathbf{B}^{\text{pl}}$ 是平衡态的光滑函数，因此该乘积就是其精确导数。

c. 注释。 从网格到 XCoil 磁面点的插值使用固定角度（θ，ϕ），这些角度是 VMEX 中边界自身的角度（输入参数化保持在 $s = 1$）。点本身会随 $\mathbf{s}$移动，但这种运动仅通过磁面几何（点、法向量和权重）作用于 J_f，而这些几何信息已经包含在固定 $\mathbf{b}$下的 $\partial J_f^\star/\partial\mathbf{s}$ 中。因此不会产生交叉项。

F. 泰勒检验

我们在 LP QA 的两阶段最优解处（附录 E7）通过泰勒测试验证式（B2），此时长度和均方曲率限制均处于激活状态。我们在$\mathbf{d}$ 所处空间中随机抽取三个方向

表 XII. 本文线圈组的 DESC 自由边界平衡 ($l_\rho = m_\theta = n_\phi = 16$)。 L^2 力误差为 $\|\mathbf{F}\|_{L^2}/\|\nabla(B^2/2\mu_0)\|_{L^2}$，其中 $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times$ 磁场 $- \nabla p$。归一化残差 ε_n 和 ε_p 定义见式 (G1)。短横线表示设计 (f) 的两级线圈，其自由边界平衡未能收敛。

线圈组	Sec.	L^2 力误差 $[10^{-4}]$	ε_n $[10^{-5}]$	ε_p $[10^{-5}]$	$\langle$磁场 $\cdot$ 法向量$\rangle/\langle$磁场$\rangle$ $[10^{-5}]$
(a) 准轴对称，$A = 2.5$	IV A 1	6.0	9.6	5.9	7.4
(b) 准轴对称、自举电流	IV A 2	4.0	2.3	2.5	1.4
(c) 准轴对称、两阶段	IV A 3	2.6	4.3	0.88	2.9
(c) 准轴对称、冷启动	IV A 3	0.25	0.045	0.047	0.028
(g) 准螺旋	IV B	11	3.0	1.3	2.1
(h) 准螺旋	IV B	9.3	1.8	1.2	1.0
(d) QI，$\langle\beta\rangle = 2\%$	IV C	19	10	5.2	6.6
(e) QI	IV C	11	2.5	1.6	1.8
(f) QI，两阶段	IV C	–	–	–	–
(f) QI，冷启动	IV C	8.6	2.3	2.5	1.5
类似 NCSX	V	7.5	3.1	5.0	2.2
NCSX c09r00	V	12	8.9	9.9	5.8
反应堆样 QI	VI	15	7.4	6.2	4.6
启动，$\langle\beta\rangle = 0$–4%	VI E	7.1–15	1.4–6.8	1.3–5.3	0.99–4.1
LP QA 真空，两阶段	B 2	2.3	0.67	0.71	0.45
LP QA 真空，QSS	B 2	0.25	0.031	0.026	0.020
LP QA β，两阶段	B 2	2.3	0.92	0.72	0.71
LP QA β，QSS	B 2	1.9	0.35	0.50	0.27
LP QA，3个线圈，AL	H 2	0.042	0.0074	0.0068	0.0050
LP QA，3个线圈，QSS	H 2	0.040	0.0065	0.0061	0.0043

边界系数。每次抽取都是对边界的平滑扰动，由于 VMEX 中规范选择相关的一项技术细节，不包含 $m = 1$ 模态。对于每次抽取和每个步长 ϵ，我们都会重新求解平衡和线圈，并构造余项 $T_2 = |J_f^\star(\mathbf{s}_0 + \epsilon\mathbf{d}) - J_f^\star(\mathbf{s}_0) - \epsilon\, g \cdot \mathbf{d}|$，其中$g = \nabla_{\mathbf{s}} J_f^\star$。图11(a) 展示了 T_2 在三次抽取中的均值，误差条覆盖这三个值。对于 $3 \times 10^{-5} \le \epsilon \le 10^{-2}$，无论是均值还是每次抽取的结果，余项都以斜率为 2 的趋势递减，这与精确梯度的预期一致；而不精确梯度的斜率则为 1。如预期所示，当 ϵ较小时，数值舍入误差开始产生显著影响。因此，式（E7）的包络梯度通过了测试。它在 coil 求解的精度范围内是精确的，可用于等离子体优化，而无需通过线圈求解器进行微分。

图 11（a）中的真空泰勒测试仅检验了方程（E13）的第一项。当纳入有限压力时，第二项并不小。在测试方向上，其大小相当于 $g \cdot \mathbf{d}$ 的 7–40%，且与几何项符号相反。因此，我们在 LP QA 的有限压力变体 [75]，（$\beta = 1.05\%$，$p \propto 1 - s$ 以及自洽的 Redl自举电流 [96] 为 -1.15MA）上，在其边界上的两阶段最优点处重复进行泰勒测试。图 11（b）展示了三次同类随机抽样的结果。对于 $3 \times 10^{-5} \le \epsilon \le 10^{-2}$， T_2 的均值随斜率 2.08 增加，而不含磁场项时为 1.78。三次抽样分别得到 2.07 、 1.96 和 2.21 的斜率，而不含磁场项时分别为 1.46、1.70 和 2.19。因此，有限压力梯度在 线圈求解所允许的精度范围内是精确的。

G. 使用DESC的自由边界平衡

为验证本文中的自由边界平衡是否已收敛，以及它们的最后闭合磁通面是否确实为线圈产生的磁场的磁通面，我们使用DESC [68]的自由边界求解器计算了每个平衡态。每个平衡态均采用经认证的线圈组及其电流、设计的压力剖面和环向磁通，并使用傅里叶–泽尔尼克分辨率 $l_\rho = m_\theta = n_\phi = 16$。每次自由边界求解均以相同分辨率下对应目标的固定边界DESC平衡态作为起始。

对于每个平衡，表XII 列出了 DESC 报告的归一化力误差、式（G1）中的两个归一化自由边界残差，以及自由边界最后闭合磁面上的平均法向场。平均法向场是在每个场周期 64×64 网格上计算的。所有情况下，最后闭合磁面都是总场的磁通面，其平均相对法向场达到 7.4×10^{-5} 或更优；力误差在表中的 4.0×10^{-6} 和 1.9×10^{-3} 所示的归一化范围内XII。

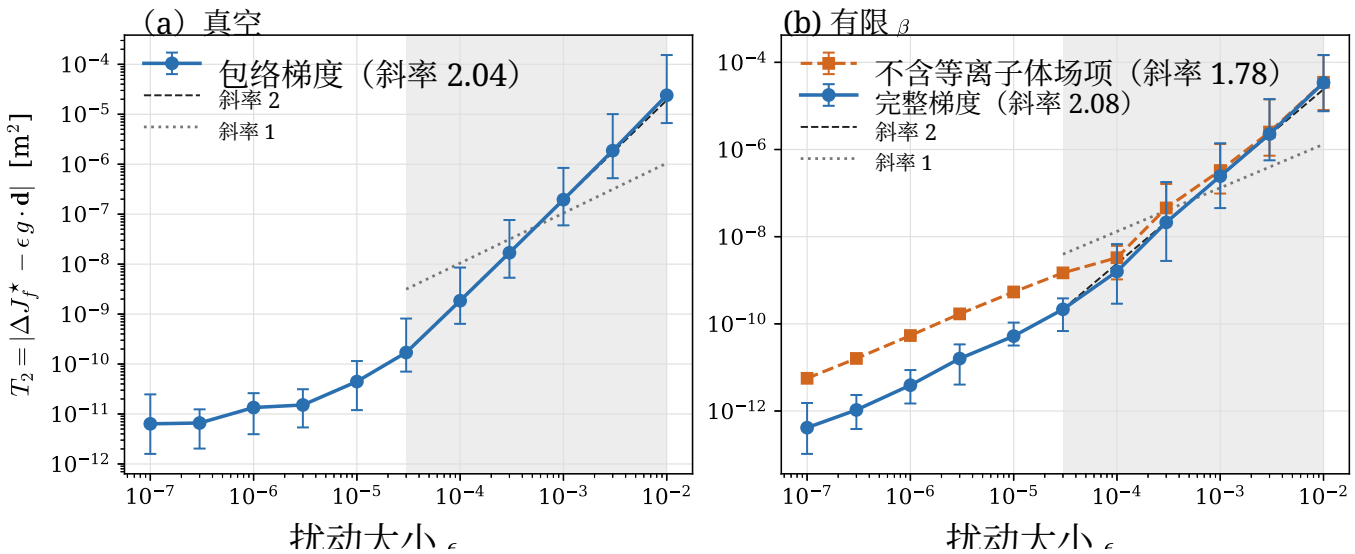

图 11. 沿光滑边界方向的三次随机抽样，对包络定理梯度进行泰勒检验 $\mathbf{d}$ 不含 $m = 1$ 模态。符号表示三次抽样的余项几何平均值 T_2，误差条覆盖三个数值。每个点都重新求解平衡和线圈。在阴影窗口内拟合斜率，直线表示斜率为 2 和 1 的参考线。(a) 真空情形：在已发表的 LP QA 边界的两阶段最优解处，即表 X 所示的真空两阶段设计。(b) 有限 β 情形：在 LP QA 变体的两阶段最优解处，该变体具有 $\beta = 1.05\%$ 的 Redl自举电流，并针对准对称性重新优化；它不是表 X 中的设计之一。采用式（E13）的完整梯度，以及不含等离子体场项的梯度。

DESC 的自由边界残差由两部分组成，二者均在最后闭合磁面上逐点计算。第一部分是外部磁场的法向分量，$\mathbf{磁场}_{\text{out}} \cdot \hat{}\mathbf{法向量}$。第二部分是最后闭合磁面两侧总压力的跃变，$B_{\text{in}}^2 + 2\mu_0 p - B_{\text{out}}^2$。这里，$\mathbf{磁场}_{\text{in}}$ 是平衡的磁场，$\mathbf{磁场}_{\text{out}}$ 则是边界上线圈和等离子体电流产生的磁场。我们报告每一部分的面积加权均方根值，并将其除以最后闭合磁面上相应磁场量的均值，

$$\varepsilon_n = \frac{\left\langle (\mathbf{B}_{\text{out}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \right\rangle^{1/2}}{\langle |\mathbf{B}_{\text{in}}| \rangle}, \qquad \varepsilon_p = \frac{\left\langle (B_{\text{in}}^2 + 2\mu_0 p - B_{\text{out}}^2)^2 \right\rangle^{1/2}}{\langle B_{\text{in}}^2 \rangle}, \tag{G1}$$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 是最后闭合磁通面上的均值。两个残差均为无量纲量，且不依赖装置尺寸或评估网格。第一个残差衡量最后闭合磁通面与外部磁场的磁通面有多接近。第二个残差衡量磁场压力与等离子体压力在该面上的平衡程度。表XII中的每个平衡，其两个归一化残差均不超过 1.0×10^{-4}，且压力平衡残差与法向磁场残差处于同一量级。

这些自由边界平衡是对线圈再现磁通面的能力最直接的检验。表XII中最低的法向磁场值分别对应于真空 LP QA设计和附录H2中的三线圈设计；在有限压力下，则对应于 $\langle \beta \rangle = 1.05\%$的 LP QA设计。最低的可比数值我们在文献中找到的最低值约为 10^{-5}。Hud- son等 [97] 报告了一个均值归一化法向磁场，其数值为1.0×10^{-5}，对应于使用细丝线圈并通过 VMEC、DESC 和 SPEC 计算得到的真空构型的自由边界最后闭合磁面。他们的有限压力平衡态仅相互进行了比较。Conlin等 [58] 仅以相对量比较了 DESC 和 VMEC 在有限压力下的自由边界残差。随 DESC 分发的自由边界示例 [68] 在真空中的均值归一化法向磁场误差达到 1.4×10^{-5}，在有限压力下达到 3.6–4.8×10^{-5}。我们在文献中没有找到法向磁场误差低于约 3×10^{-5}的有限压力自由边界平衡。就我们所知，这里报告的自由边界残差因此是由细丝线圈组计算得到的仿星器平衡中已报告的最低值。在真空中，它们低了 50 到 200 倍；对于 $\langle \beta \rangle = 1.05\%$下的 LP QA设计，在有限压力下则低了十倍以上。不同研究对法向磁场误差的定义略有不同。大多数已发表的自由边界计算还会从网格中插值线圈磁场，这可能将精度限制在约 10^{-5}；而我们则通过 Biot–Savart 积分直接计算线圈磁场。

热启动 LP QA 设计的真空线圈磁场的庞加莱截面如图所示：12。

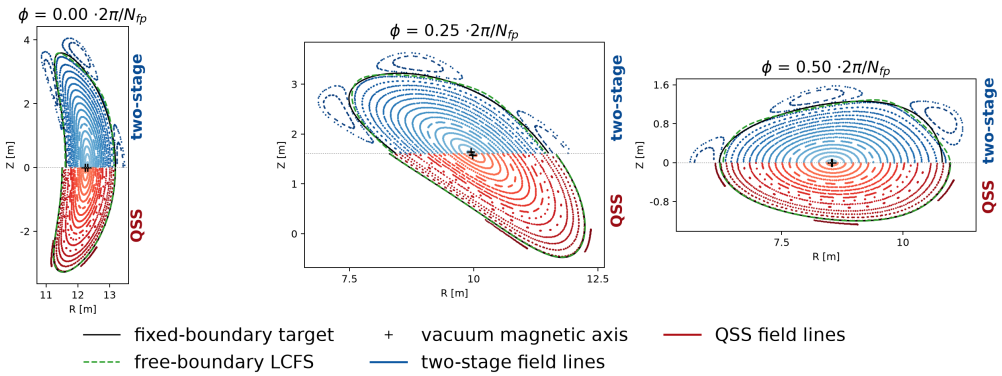

图 12. 真空线圈磁场的庞加莱截面，LP QA 在场周期内的环向角 $\phi = 0$， $1/4$ 和 $1/2$ 处。上半部分，蓝色：已发表的 LP QA 边界的两级线圈。下半部分，红色：真空设计 $k = 19$的 QSS 线圈。两者都是表X中的真空线圈组。

H. 基准测试

本附录将该方法与单阶段优化和增广拉格朗日函数线圈设计进行比较，并将其计算成本与其他耦合方法的计算成本进行比较。

H.1 与单阶段优化的比较

我们重复了 Jorge 单阶段优化中的两个真空问题等人 [37]，提出的准轴对称仿星器，其 $N_{\mathrm{fp}} = 3$， $A = 6$ 每半个场周期有两组线圈，每组长 56.2 m；以及准螺旋对称仿星器，其 $N_{\mathrm{fp}} = 4$， $A = 7$ 有三组长 41.7 m 的线圈。这里将它们的线圈限制设为硬约束。在 Jorge 等人的工作流程中，先对边界进行第一阶段优化，再对该边界上的线圈进行第二阶段优化，最后进行单阶段优化。因此，他们的单阶段优化从已经满足准对称性且达到目标的平衡状态，以及已拟合到该平衡状态的线圈开始。我们在此报告的运行时间不包括这两个先前阶段的耗时。我们的优化采用冷启动，所报告的时间包括整个边界模延拓过程。在自由边界条件下， f_{QS} 为 4.5×10^{-3}相较于 9.1×10^{-3}，对应准轴对称情形；而 15×10^{-3} 相较于 20×10^{-3}，对应准螺旋对称情形。附录H3 在相同边界分辨率下，对比了一次固定权重求解、Jorge等人的单阶段求解，以及我们方法的一次外层求解所需的时间。即使采用冷启动，我们每次求解所需时间也短数倍。他们的加权形式只能近似满足线圈间距和均方曲率限制，而这里使用的硬约束则能满足所有限制。

H.2 与增广拉格朗日线圈的比较

我们还将该方法与参考文献 [46, 47], 中的增广拉格朗日线圈设计进行了比较；该设计将每半个场周期的三组线圈拟合到原始 LP QA 边界。从冷启动开始，在一次运行中，我们施加相同的线圈数量和总长度，并将这些线圈达到的曲率、均方曲率和线圈间距设为限制，同时将线圈力限制设为其达到的数值。等离子体仅受准对称性 $A = 6$ 和 LP QA 的平均旋转变换约束，不施加任何形状约束。优化初始边界模时，对线圈拟合采用较宽松的界限，使等离子体可以稳定到较不细长的准轴对称形状；随后在最后一个边界模处收紧该界限。表XIII 比较了两种设计。在长度、曲率和力相同且自由度更少的情况下（线圈傅里叶阶数为 5，而非 16），QSS 线圈在表XIII的所有线圈指标上均不逊于对照设计，同时在抽样误差范围内对 α粒子的约束效果相当，自由边界准对称性误差也相近。增广拉格朗日设计的固定边界误差低了几个数量级，但在自由边界计算过程中会大幅恶化。在线圈波纹占主导的区域，也就是采用三组线圈时，自由边界下的准对称性由线圈的磁场误差决定，而非目标等离子体。

H.3 加速

如前所述，本工作的贡献之一是一个能够快速同时优化线圈和平衡的求解器。附录 H1 中的完整真空设计从冷启动开始，包含整个边界模连续延拓过程和最终线圈阶段，耗时 0.95–1.1 GPU 小时。在重新运行 Jorge 等人

表 XIII. 与参考文献 [46, 47]中用于 LP QA 的增广拉格朗日（AL）线圈进行比较；两者均为每个半场周期包含三个线圈，且总长度、曲率限值、线圈力和总电流相同。

	AL	QSS
起始	LP QA	冷启动
N_c / 线圈总数 / 傅里叶阶数 M	3/ 12 / 16	3 / 12 / **5**
⟨|磁场 · 法向量|⟩/⟨|磁场|⟩ [%]	0.082	**0.049**
$\kappa_{\max}$ / κ_{MSC} [米$^{-1}$ / 米$^{-2}$]	0.53 / 0.051	0.53 /**0.040**
$\bar{\tau}$ / γ_c [m^{-1} / 10^{-3} m^{-2}]	0.99 / 11	**0.37**/ **5.7**
d_{cc} / d_{cs} [米]	1.48 / 2.74	1.48 / 2.76
固定边界 f_{QS} [10^{-5}]	**0.06**	53
f_{QS} [10^{-3}]	**1.0**	1.2
δ_{LCFS} 均值 / 最大值 [毫米]	8.0 / 31.7	**3.2** /**9.6**
α-损失 [%]	11.2 ± 0.4	12.0 ± 0.4

的方法时，耗时 2.3–3.5 CPU核小时；其起点是一个平衡，该平衡已由更早的第一阶段优化变得准等变，线圈也已由第二阶段优化拟合到该平衡。这两个阶段的成本未计入其中。参考文献 [76]中的全局优化工作流程每个设计耗时 24–48 CPU核小时。这些数字比较的是针对不同问题和分辨率所耗费的 GPU 小时与 CPU核小时，只能说明数量级。我们并未声称其他方法无法进一步提高计算效率，也未声称我们是在最优设置下对这些代码进行比较。

[1]J. Spitzer, Lyman, 《仿星器概念》, 《流体物理》1, 253（1958）, https://pubs.aip.org/aip/pfl/article-pdf/1/4/253/12605179/253 1 online.pdf。[2] P. Helander, 《非轴对称磁场中的等离子体约束理论》, 《物理学进展报告》77, 087001（2014）。[3] F. Najmabadi, A. R. Raffray, S. I. Abdel-Khalik, L. Bromberg, L. Crosatti, L. El-Guebaly, P. R. Garabe- dian, A. A. Grossman, D. Henderson, A. Ibrahim, T. Ihli, T. B. Kaiser, B. Kiedrowski, L. P. Ku, J. F. Lyon, R. Maingi, S. Malang, C. Martin, T. K. Mau, B. Merrill, R. L. Moore, R. J. P. Jr., D. A. Petti, D. L. Sadowski, M. Sawan, J. H. Schultz, R. Slaybaugh, K. T. Slattery, G. Sviatoslavsky, A. Turnbull, L. M. Waganer, X. R. Wang, J. B. Weathers, P. Wilson, J. C. W. III, M. Yoda, 以及 M. Zarnstorff, 《ARIES-CS紧凑型仿星器聚变电站》, 《聚变科学与技术》54, 655（2008）。[4] A. G. Goodman, G. G. Plunk, P. Xanthopoulos, M. Drevlak, J. Geiger, R. Davies, H. M. Smith, C. N¨uhrenberg, C. D. Beidler, S. A. Henneberg, 以及 P. Helander, 《面向聚变电站的准等动力仿星器构型》, 《等离子体物理学杂志》91, E153（2025）。[5] A. H. Boozer, 《什么是仿星器? 》, 《等离子体物理学》5, 1647（1998）。[6] P. Helander, C. D. Beidler, T. M. Bird, M. Drevlak, Y. Feng, R. Hatzky, F. Jenko, R. Kleiber, J. H. E. Proll, Y. Turkin, 以及 P. Xanthopoulos, 《仿星器与托卡马克等离子体：比较》, 《等离子体物理与受控聚变》54, 124009（2012）。[7] F. C. Schuller, 《托卡马克中的破裂》, 《等离子体物理与受控聚变》37, A135（1995）。[8] T. C. Hender *et al.*, 《第3章：磁流体动力学稳定性、运行极限与破裂》, 《核聚变》47, S128（2007）。[9] C. D. Beidler, H. M. Smith, A. Alonso, T. Andreeva, J. Baldzuhn, M. N. A. Beurskens, *et al.*, 《Wendelstein中新经典能量输运降低的演示》7-x, 《自然》596, 221（2021）。[10] V. V. Nemov、S. V. Kasilov、W. Kernbichler 和 M. F. Heyn, 评估仿星器中的新古典输运, 《等离子体物理学》6, 4622（1999）。[11] A. Bader、M. Drevlak、D. T. Anderson、B. J. Faber、C. C. Hegna、K. M. Likin、J. C. Schmitt 和 J. N. Talmadge, 具有反应堆相关高能粒子损失的仿星器平衡, 《等离子体物理学杂志》85, 905850508（2019）。[12] C. G. Albert、S. V. Kasilov 和 W. Kernbichler, 采用非正则求积对磁约束装置中的导引中心轨道进行辛积分, 《计算物理学杂志》403, 109065（2020）。[13] D. J. Strickler、L. A. Berry 和 S. P. Hirshman, 紧凑型仿星器的线圈设计, 《聚变科学与技术》41, 107（2002）, https://doi.org/10.13182/FST02-A206。[14] D. Williamson、A. Brooks、T. Brown、J. Chrzanowski、M. Cole、H.-M. Fan、K. Freudenberg、P. Fogarty、T. Hargrove、P. Heitzenroeder、G. Lovett、P. Miller、R. Myatt、B. Nelson、W. Reiersen 和 D. Strickler, 国家紧凑型仿星器实验（NCSX）的模块化线圈设计进展, 《聚变工程与设计》75–79, 71（2005）。[15] C. Zhu、S. R. Hudson、Y. Song 和 Y. Wan, 无需绕组面的仿星器线圈设计新方法, 《核聚变》58, 016008（2018）。[16] F. Wechsung、A. Giuliani、M. Landreman、A. Cerfon 和 G. Stadler, 单阶段基于梯度的仿星器线圈设计：随机优化, 《核聚变》62, 076034（2022）。[17] M. Landreman 和 E. Paul, 用于等离子体约束的精确准对称磁场, 《物理评论快报》128, 035001（2022）。[18] M. Landreman, 利用优化的近轴展开描绘准等变仿星器的空间, 《等离子体物理学杂志》88, 905880616（2022）。[19] A. G. Goodman、P. Xanthopoulos、G. G. Plunk、H. Smith、C. Nuhrenberg、C. D. Beidler、S. A. Henneberg、G. Roberg-Clark、M. Drevlak 和 P. Helander,

具有低湍流的准等动力学仿星器：聚变反应堆候选方案，PRX Energy 3, 023010（2024）。[20] D. W. Dudt、A. G. Goodman、R. Conlin、D. Panici 和 E. Kolemen，具有一般全磁性的磁场，《等离子体物理学杂志》90, 905900120（2024）。[21] J. Lion、J.-C. Angles、L. Bonauer、A. Bañon Navarro、S. Cadena Ceron、R. Davies、M. Drevlak、N. Foppiani、J. Geiger、A. Goodman、W. Guo、E. Guiraud、F. Hernandez、S. Henneberg、R. Herrero、C. Hintze、H. Höchter、J. Jelonnek、F. Jenko、R. Jorge、M. Kaiser、M. Kubie、E. Lascas Neto、H. Laqua、M. Leoni、J. Lobsien、V. Maurin、A. Merlo、D. Middleton-Gear、M. Pascu、G. Plunk、N. Riva、M. Savtchouk、F. Sciortino、J. Schilling、J. Shimwell、A. Di Siena、R. Slade、T. Stange、T. Todd、L. Wegener、F. Wilms、P. Xanthopoulos 和 M. Zheng，Stellaris：面向原型聚变电站的高场准等动力学仿星器，《聚变工程与设计》214, 114868（2025）。[22] S. P. Hirshman 和 J. C. Whitson，三维磁流体动力学平衡的最速下降矩方法，《流体物理》26, 3553（1983），电子版：
h
t
t
p
s://pubs.aip.org/aip/pfl/article-pdf/26/12/3553/12590952/3553 1 online.pdf。[23] P. Merkel，采用外部电流求解仿星器边值问题，《核聚变》27, 867（1987）。[24] M. Landreman，一种用于快速计算仿星器线圈形状的改进电流势方法，《核聚变》57, 046003（2017）。[25] M. Landreman、B. Medasani、F. Wechsung、A. Giuliani、R. Jorge 和 C. Zhu，SIMSOPT：用于仿星器优化的灵活框架，《开放源代码软件杂志》6, 3525（2021）。[26] V. Erckmann、H.-J. Hartfuss、M. Kick、H. Renner、J. Sapper、F. Schauer、E. Speth、F. Wesner、F. Wagner、M. Wanner、A. Weller 和 H. Wobig，Wendelstein 7-X 项目：科学基础与技术实现，载于 *17th IEEE/NPSS Symposium Fusion Engineering (Cat. No.97CH36131)* 1 1997 40 48 1 ，第（）卷，第–页，卷。。[27] T. Klinger、C. Baylard、C. Beidler、J. Boscary、H. Bosch、A. Dinklage、D. Hartmann、P. Helander、H. Maßberg、A. Peacock、T. Pedersen、T. Rummel、F. Schauer、L. Wegener 和 R. Wolf，面向通往仿星器聚变电站之路的 Wendelstein 7-X 装置组装收尾与实验活动准备，《聚变工程与设计》88, 461（2013），第27届聚变技术研讨会（SOFT-27）论文集；比利时列日，2012年9月24日至28日。[28] J. Sapper 和 H. Renner，Wendelstein VII-AS 仿星器：物理与工程设计，《聚变技术》17, 62（1990）。[29] F. S. B. Anderson、A. F. Almagri、D. T. Anderson、P. G. Matthews、J. N. Talmadge 和 J. L. Shohet，螺旋对称实验装置（HSX）的目标、设计与现状，《聚变技术》27, 273（1995）。[30] A. F. Almagri、D. T. Anderson、F. S. B. Anderson、P. H. Probert、J. L. Shohet 和 J. N. Talmadge，一种螺旋对称仿星器（HSX），《IEEE等离子体科学汇刊》27, 114（1999）。[31] A. Iiyoshi、A. Komori、A. Ejiri、 *et al.*，大型螺旋装置项目概述，《核聚变》39, 1245（1999）。[32]L.-M. Imbert-G´erard、E. J. Paul 和 A. M. Wright，*An Introduction to Stellarators: From Magnetic Fields to Symmetries and Optimization*（工业与应用数学学会，费城，2024年）https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611978223。[33] R. Strykowsky、T. Brown、J. Chrzanowski、M. Cole、P. Heitzenroeder、G. Neilson、D. Rej 和 M. Viol，《NCSX 的工程成本与进度经验教训》，载于 *2009 23rd IEEE/NPSS Symposium on Fusion Engineering* 2009 1 4 （）第 – 页。[34] H.-S. Bosch、R. Brakel、T. Braeuer、V. Bykov、P. van Eeten、J.-H. Feist、F. F¨ullenbach、M. Gasparotto、H. Grote、T. Klinger、H. Laqua、M. Nagel、D. Naujoks、M. Otte、K. Risse、T. Rummel、J. Schacht、A. Spring、T. Sunn Pedersen、R. Vilbrandt、L. Wegener、A. Werner、R. Wolf、J. Baldzuhn、C. Biedermann、H. Braune、R. Burhenn、M. Hirsch、U. H¨ofel、J. Knauer、P. Korne-jew、S. Marsen、T. Stange、H. Trimino Mora 和 W.- X. Team，《Wendelstein 7-X 仿星器运行的最终集成、调试与启动》，《核聚变》57, 116015（2017）。[35] S. A. Henneberg、S. R. Hudson、D. Pfefferl´e 和 P. He-lander，《等离子体—线圈联合优化算法》，《等离子体物理学杂志》87，905870226（2021）。[36] A. Giuliani、F. Wechsung、A. Cerfon、G. Stadler 和 M. Landreman，《单阶段基于梯度的仿星器线圈设计：近轴准对称性优化》，《计算物理学杂志》459，111147（2022）。[37] R. Jorge、A. Goodman、M. Landreman、J. Rodrigues 和 F. Wechsung，《单阶段仿星器优化：结合线圈与固定边界平衡》，《等离子体物理与受控聚变》65，074003（2023）。[38] R. Jorge、A. Giuliani 和 J. Loizu，《采用单阶段优化的简化灵活仿星器线圈》，《等离子体物理学》31，112501（2024）。[39] C. B. Smiet、J. Loizu、E. Balkovic 和 A. Bail-lod，《有限-β 仿星器平衡中磁岛的高效单阶段优化》，《等离子体物理学》（），**32**, 012504 ，2025
h
t
t
p
s://
p
u
bs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0226402/20356029/012504 1 5.0226402.pdf。[40] P. F. Gil、J. Smoniewski、R. Jorge、P. Huslage 和 E. V. Stenson，《使用固定边界平衡的随机单阶段仿星器优化》，《等离子体物理与受控聚变》68，105009（2026）。[41] A. Giuliani、F. Wechsung、M. Landreman、G. Stadler 和 A. Cerfon，《Boozer 坐标中磁面的直接计算与准对称性线圈优化》，《等离子体物理学杂志》88，10 1017 0022377822000563 2022 。 /S ( )。[42] A. Baillod、E. J. Paul、G. Rawlinson、M. Haque、S. W. Freiberger 和 S. Thapa，《整合新型仿星器单阶段优化算法以设计哥伦比亚仿星器实验》，《核聚变》65，026046 2025( )。[43] A. Baillod、A. Veksler、R. Lopez、D. Schmeling、M. Cam-pagna、E. Paul 和 A. Knyazev，《哥伦比亚仿星器实验设计的最新进展》，arXiv 预印本 arXiv:2601.00673（2026）。[44] P. Huslage、E. J. Paul、M. Haque、P. F. Gil、N. Foppiani、J. Smoniewski 和 E. V. Stenson，《SIMSOPT 中稀土钡铜氧高温超导仿星器线圈的应变优化》，arXiv 预印本 arXiv:2409.01925（2024）。

[45] P. F. Gil、J. Smoniewski、P. Huslage、R. Jorge、T. Thun、E. Buglione-Ceresa、T. Schuler、S. Fingl、G.-H. Ducas 和 E. V. Stenson，《设计一种可建造的优化仿星器以约束正负电子等离子体》，《等离子体物理学杂志》92，E120（2026）。[46] P. F. Gil、W. Li、J. Stratton、A. A. Kaptanoglu 和 E. V. Stenson，《通过增广拉格朗日方法为未来聚变反应堆设计仿星器线圈》，《物理评论快报》137，065101（2026）。[47] P. F. Gil、W. Li、J. Stratton、A. A. Kaptanoglu 和 E. V. Stenson，《采用增广拉格朗日优化方法高效计算仿星器线圈》，《物理评论E》114，025202（2026）。[48] M. Drevlak、C. D. Beidler、J. Geiger、P. Helander 和 Y. Turkin，《使用 ROSE 优化仿星器平衡》，《核聚变》59，016010（2019）。[49] S. R. Hudson、C. Zhu、D. Pfefferl´e 和 L. Gunderson，《仿星器线圈形状相对于等离子体边界的微分》，《物理快报A》382，2732（2018）。[50]A. Carlton-Jones、E. J. Paul 和 W. Dorland，《计算仿星器线圈复杂度相对于等离子体边界的形状梯度》，《等离子体物理学杂志》87，905870222（2021）。[51] J. Kappel、M. Landreman 和 D. Malhotra，《磁场梯度尺度长度解释了为何某些等离子体需要靠近的外部磁线圈》，《等离子体物理与受控聚变》66，025018（2024）。[52] J. Kappel、M. Landreman、P. Jura˘si´c 和 S. A. Hen-neberg，《磁场梯度尺度长度如何影响仿星器细丝线圈的复杂度？》，arXiv 预印本 arXiv:2602.18974（2026）。[53] A. Pavone、S. Kwak 和 F. Warmer，《准等动力仿星器中磁力线的测地挠率及其他线圈非平面性预测指标》，arXiv 预印本 arXiv:2604.26763（2026）。[54]G. Yu、K. Liu、T. Qian、Y. Xie、X. Nie 和 C. Zhu，《永磁仿星器的准单阶段优化》，《核聚变》64，076055（2024）。[55] G. Yu、Y. Xie、H. Liu 和 C. Zhu，《先进仿星器的准单阶段优化》，arXiv 预印本 arXiv:2608.03122（2026）。[56] L. Fu、E. J. Paul、A. A. Kaptanoglu 和 A. Bhattachar-jee，《具有二次约束和目标函数的全局仿星器线圈优化》，《核聚变》65，026045（2025）。[57] L. Fu、D. Panici、E. J. Paul、A. A. Kaptanoglu 和 A. Bhattacharjee，《用于仿星器平衡优化的灵活可微线圈代理模型》，《等离子体物理学》33，062506（2026）。[58] R. Conlin、J. Schilling、D. W. Dudt、D. Panici、R. Jorge 和 E. Kolemen，《DESC 中的高阶自由边界 MHD 平衡》，arXiv 预印本 arXiv:2412.05680（2024）。[59] A. Giuliani、F. Wechsung、A. Cerfon、M. Landreman 和 G. Stadler，《针对嵌套磁面和精确准对称性的仿星器线圈直接优化》，《等离子体物理学》30，042511（2023）。[60] E. Rodr´ ıguez、E. Paul 和 A. Bhattacharjee，《仿星器准对称性的度量》，《等离子体物理学杂志》88，905880109（2022）。[61] A. Goodman、K. Camacho Mata、S. Henneberg、R. Jorge、M. Landreman、G. Plunk、H. Smith、R. Mackenbach、C. Beidler 和 P. Helander，《构造精确准等动力磁场》

，等离子体期刊

89，905890504（2023年）。[62] VMEX：VMEC2000 的 JAX 重新实现，https: //github.com/uwplasma/vmex（2026年）。[63] J. Nocedal 和 S. J. Wright，*Numerical Optimization*，《数值最优化》，第 2 版（施普林格科学与商业媒体，2006年）。[64] M. A. Branch、T. F. Coleman 和 Y. Li，《用于大规模有界约束最小化问题的子空间、内点和共轭梯度法》，《SIAM 科学计算杂志》21，1（1999年）。[65] P. Virtanen、R. Gommers、T. E. Oliphant、M. Haberland、T. Reddy、D. Cournapeau、E. Burovski、P. Peterson、W. Weckesser、J. Bright，*et al.*，《SciPy 1.0：Python 科学计算的基础算法》，《自然·方法》17，261（2020年）。[66] B. Jang、M. Landreman 和 R. Conlin，《指数谱缩放：通过模态依赖缩放实现稳健高效的仿星器边界优化》，《等离子体物理学杂志》10.1017/S0022377825101074（2025年）。[67] D. Panici、R. Conlin、D. W. Dudt、K. Unalmis 和 E. Kolemen，《DESC 仿星器代码套件。第 1 部分：快速且准确的平衡计算》，《等离子体物理学杂志》89，955890303（2023年）。[68] D. W. Dudt 和 E. Kolemen，《DESC：仿星器平衡求解器》，《等离子体物理学》27，102513（2020年），
h
t
t
p
s://
pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0020743/15926767/102513
1 online.pdf

[69] P. R. Garabedian、L. P. Ku 和 ARIES团队，《具有仿星器稳定性和托卡马克输运的反应堆》，《聚变科学与技术》47，400（2005年）。[70] L. P. Ku 和 ARIES-CS团队，《超低长宽比准轴对称仿星器 MHH 的模块化线圈设计》

2，*21st IEEE/NPSS Symposium on Fusion Engineering*（田纳西州诺克斯维尔）。[71] T. M. Schuett 和 S. A. Henneberg，《探索新型紧凑型准轴对称仿星器》，《物理评论研究》6，L042052（2024年）。[72] S. Henneberg 和 G. Plunk，《紧凑型仿星器—托卡马克混合装置》，《物理评论研究》6，L022052（2024年）。[73] A. Zettl、T. Schuett 和 S. Henneberg，《理解并量化用于提升优化效果的香蕉线圈磁场与力》，arXiv 预印本 arXiv:2606.18029（2026年）。[74] R. Conlin，yancc：用于仿星器新古典输运的 JAX 漂移动力学求解器，https://github.com/f0uriest/yancc（2026年），版本 0.0.3。[75] M. Landreman、S. Buller 和 M. Drevlak，《通过自洽自举电流和高能粒子约束优化准对称仿星器》，《等离子体物理学》29，082501（2022年）。[76] A. Giuliani，《通过全局优化直接设计仿星器线圈：对准轴对称装置的全面探索》，《等离子体物理学杂志》90，905900303（2024年）。[77] S. Henneberg、M. Drevlak、C. N¨ uhrenberg、C. D. Beidler、Y. Turkin、J. Loizu 和 P. Helander，《一种新型准轴对称构型的性质》，《核聚变》59，026014（2019年）。[78] A. Wiedman、S. Buller 和 M. Landreman，《准螺旋对称仿星器构型的线圈优化》，《等离子体物理学杂志》90，905900307（2024年）。[79]B. Geiger，《HSX仿星器：历史、设计、建造与运行——数据及配套代码

，

Zenodo 数据集（2026年）。[80] J. H. E. Proll、P. Helander、J. W. Connor 和 G. G. Plunk，《准等动力学仿星器抵御俘获粒子不稳定性的能力》，《物理评论快报》108，245002（2012年）。[81] M. C. Zarnstorff *et al.*，《紧凑型先进仿星器 NCSX 的物理》，《等离子体物理与受控聚变》43，A237（2001年）。[82] T. Blickhan、J. Stratton 和 A. A. Kaptanoglu，MRX：一种无需嵌套磁通面的可微三维磁流体力学平衡求解器，arXiv:2510.26986（2025年），arXiv:2510.26986。[83] Y. Feng、F. Sardei、P. Grigull、K. McCormick、J. Kisslinger 和 D. Reiter，《以 W7-AS 为例阐述磁岛偏滤器的物理》，《核聚变》46，807（2006年）。[84] T. Sunn Pedersen、R. K¨onig、M. Krychowiak、M. J akubowski、J. Baldzuhn、S. Bozhenkov、G. Fuchert、A. Langenberg、H. Niemann、D. Zhang、*et al.*，《Wendelstein 7-X 偏滤器运行的首批结果》，《等离子体物理与受控聚变》61，014035（2019年）。[85] NEO JAX：NEO 有效磁场波纹代码的 JAX 实现，https://github.com/uwplasma/NEO_JAX（2026年）。[86] D. T. Anderson、J. M. Canik、C. C. Hegna 和 C. M. Mowry，《Type One Energy 恒星器聚变示范电站“Infinity Two”的全面统一基线物理设计》，《等离子体物理学杂志》91，e65（2025年）。[87] C. C. Hegna、D. T. Anderson、E. C. Andrew、*et al.*，《Infinity Two 聚变示范电站基线等离子体物理设计》，《等离子体物理学杂志》91，E76（2025年）。[88] M. Landreman、B. Medasani 和 C. Zhu，《优化仿星器：同时实现良好的磁面和准对称性》，《等离子体物理学》28，092505（2021年）。[89] A. Bader、D. T. Anderson、M. Drevlak、B. J. Faber、C. C. Hegna、S. Henneberg、M. Landreman、J. C. Schmitt、Y. Suzuki 和 A. Ware，《优化仿星器中的高能粒子输运建模》，《核聚变》61，116060（2021年）。[90] H.-S. Bosch 和 G. M. Hale，《聚变截面和热反应率的改进公式》，《核聚变》32，611（1992年）。[91] A. H. Boozer，《具有有理磁面的等离子体平衡》，《流体物理》24，1999（1981年）。[92]FIRM3D，https://github.com/ColumbiaStellaratorTheory/firm3d，提交版本 0b71c0a（2026年）。[93] C. G. Albert、S. V. Kasilov 和 W. Kernbichler，《仿星器优化中直接计算聚变阿尔法粒子损失的加速方法》，《等离子体物理学杂志》86，815860201（2020年）。[94] P. Milgrom 和 I. Segal，《任意选择集的包络定理》，《计量经济学》70，583（2002年）。[95] J. F. Bonnans 和 A. Shapiro，*Perturbation Analysis of Optimization Problems*，《施普林格运筹学丛书》（施普林格，纽约，2000年）。[96] A. Redl、C. Angioni、E. Belli 和 O. Sauter，《用于计算托卡马克自举电流和新古典电导率的一组新解析公式》，《等离子体物理学》28，022502（2021年）。[97] S. R. Hudson、D. Panici、C. Zhu、G. S. Woodbury Saudeau、A. Baillod、M. Cianciosa 和 A. S. Ware，《椭圆几何下自由边界 VMEC、DESC 和 SPEC 计算中沙弗拉诺夫位移的验证》，《等离子体物理学》32，043906（2025年）。