arXiv:2611.29124v1 [math.DG] 22 Nov 2026

二阶及更高阶共形Killing张量的 Killing 尺度

SIMON C. W. GOODWIN、A. ROD GOVER 和 THOMAS LEISTNER

Abstract. 我们研究共形类中哪些度量存在一个无迹部分为指定共形 Killing 张量的 Killing 张量，并将这类度量称为 Killing 尺度。我们还探讨给定的共形 Killing 张量本身是否是共形类中某个度量下的 Killing 张量，以及共形 Killing–Yano 形式的类似问题。我们采用共形 tractor 和射影 tractor，并利用射影 Killing 算子与共形 Killing 算子的 BGG 分裂算子所给出的延拓来处理这一问题。对于二阶共形 Killing 张量，我们刻画了任意共形流形上任意尺度对应的局部 Killing 尺度，将近期仅限于共形平坦流形上的爱因斯坦尺度的结果加以推广。判据以尺度 tractor 和共形 Killing 张量的 BGG 延拓表示。我们还在涉及爱因斯坦尺度和正规解的附加假设下，得到了更高阶共形 Killing 张量及共形 Killing–Yano 形式的 Killing 尺度判据。我们描述了特殊爱因斯坦乘积（包括 Ricci平坦积）的 tractor 几何，并利用这些构造给出了共形平坦情形以外的例子。

1. Introduction

伪黎曼流形（M， g）上的对称张量 $r_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(S^\ell(T^*M))$ 是 Killing 张量，当且仅当

$$\nabla_{(a_0} r_{a_1\cdots a_\ell)} = 0,$$

其中， ∇ 是 g的 Levi-Civita 联络。Killing 张量为 g的测地线提供运动常数：若 γ: $[a,b] \to M$的速度为 $u = \dot\gamma$且 $\nabla_u u = 0$，则

$$\frac{d}{dt}(r(u,\dots,u)) = (\nabla r)(u,\dots,u) = 0$$

因为 ∇r 的对称部分为零。

Killing 张量 $r_{a_1\cdots a_\ell}$ 的无迹部分 $k^g{}_{a_1\cdots a_\ell}$ 是共形 *Killing* 方程的一个解

$$\nabla_{(a_0} k^g{}_{a_1\cdots a_\ell)_0} = 0, \tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。 主要分类 53C18；次要分类 35N10、53A20、53B15。本文部分得到了新西兰皇家学会 Te Ap¯arangi 的 Marsden 基金（项目编号 19-UOA-008 和 24-UOA-005）以及澳大利亚研究理事会（Discovery Projects 项目 DP190102360 和 DP260102671）的资助。本文部分工作是在第一作者访问阿德莱德大学以及第三作者访问奥克兰大学期间完成的；他们感谢各自接待方的热情款待。

其中下标 0 表示无迹部分（见第 2.1 节）。方程 (1.1) 是共形协变的，也就是说，当 $\hat{}g = \Omega^2 g$ 对某个正函数 Ω 成立时，张量$k^{\hat{g}} = \Omega^{2\ell} k^g$ 将满足度量 $\hat{}g$ 下的 (1.1)。

设 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个维数为 $n \geq 3$ 的共形流形 。共形结构由共形加权的共形度量 $\boldsymbol{g}_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}[2])$ 描述，其中 $\mathcal{E}[w]$ 为密度丛，参见第 2.4 节。每个度量 $g \in \boldsymbol{c}$ 都由一个正的尺度密度 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}_+[1])$ 确定，通过 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。共形 ***Killing*** 算子作用于截面 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell]$,

$$k \mapsto \nabla_{(a_0} k_{a_1\cdots a_\ell)_0} \tag{1.2}$$

它是共形不变的，也就是说，选取上述共形类中某个度量的 Levi-Civita 联络，不会改变该算子的输出。位于 (1.2) 的核中的 k 称为共形 ***Killing*** 张量。

若 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，则 (1.1) 的一个解 k^g 确定了位于 (1.2) 的核中的加权张量 $k = \sigma^{2\ell} k^g$ 。度量变为 $\hat{}g = \Omega^2 g$ 时，尺度变为 $\hat{}\sigma = \Omega^{-1}\sigma$，因此 $k^{\hat{g}}$ 的变换律给出

$$\hat{\sigma}^{2\ell} k^{\hat{g}} = (\Omega^{-1}\sigma)^{2\ell}\Omega^{2\ell} k^g = \sigma^{2\ell} k^g.$$

因此，加权张量 k 与度量的选择无关。现在我们提出逆向问题。给定一个共形 Killing 张量 k，对于哪些度量 $g \in \boldsymbol{c}$ ， k^g是某个 Killing 张量的无迹部分？我们将这样的度量称为 k的***Killing*** 尺度。本文的一个主要目标是刻画给定共形 Killing 张量的 Killing尺度。

我们还考虑由 Yano [26]引入的 Killing 张量的形式类比。在伪黎曼流形上，一个交替的 ℓ-形式 $\omega_{a_1\cdots a_\ell}$ $(1 \leq \ell \leq n-1)$ 若满足以下条件，则称为***Killing–Yano*** 形式:

$$\nabla_{(a_0}\omega_{a_1)a_2\cdots a_\ell} = 0.$$

Killing–Yano 方程并非共形不变的，但当赋予共形权 $\ell + 1$时，Killing-Yano 形式满足不变的共形 ***Killing–Yano*** 方程（现代综述参见 [25] ）

$$\text{trace-free}\left(\nabla_{(a_0}\omega_{a_1)a_2\cdots a_\ell}\right) = 0, \tag{1.3}$$

其中，具有任意对称性的张量的无迹部分定义于第 2.1 节。由于（1.3）的解 $\omega \in \Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1])$ 是斜对称的，因此它已经是无迹的。因此，如果 ω 是 g的 Killing–Yano 形式，我们就称 $g \in \boldsymbol{c}$为 ω 的 Killing 尺度。

伪黎曼流形（M， g）上的Killing 张量会产生测地流的第一积分。共形 Killing 张量确实能为零测地线确定第一积分 [16] ，因为迹项不可见。对于Killing 尺度，共形 Killing 张量通过恢复适当的迹项，为完整测地流提供第一积分。二阶 Killing张量还控制 Hamilton-Jacobi 方程的变量分离 [19] 与超可积性，其中具有多个Killing 尺度的共形 Killing 张量发挥着特殊作用 [11, 22]。

上述所有Killing方程和共形 Killing 方程都是有限型超定偏微分方程 [4], ，自然可以通过延拓来研究。延拓将超定偏微分方程替换为向量丛上的联络。延拓丛 的平行截面于是对应于偏微分方程的解。一个经典例子，也是本文所研究的所有延拓的原型，是1-形式上的Killing方程， $\nabla_{(a}k_{b)}=0$。此时延拓丛为 $T^*M\oplus\Lambda^2(T^*M)$，并配备联络

$$\nabla_a^{\mathrm{prol}}\begin{pmatrix}k_b\\ \mu_{bc}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nabla_a k_b-\mu_{ab}\\ \nabla_a\mu_{bc}-R_{bc}{}^{d}{}_{a}k_d\end{pmatrix}.$$

延拓映射随后将 Killing 1-形式 k_b 映射为一对 $(k_b,\ \nabla_{[b}k_{c]})$。

黎曼Killing算子是射影微分几何中的一阶 Bernstein–Gelfand–Gelfand（BGG）算子，而共形算子是共形几何中的一阶 BGG 算子。BGG机制 [5,27]以 tractor丛$\mathcal{V}$（见第2节）为输入，并构造一个不变微分算子 $\mathscr{D}_0\colon\Gamma(E_1)\to\Gamma(E_2)$，作用于带权张量丛的截面之间。

BGG机制还提供一个典范分裂算子， $L\colon\Gamma(E_1)\to\Gamma(\mathcal{V})$。截面 s 是 $\mathscr{D}_0 s=0$ 的解，当且仅当延拓 $L(s)$ 关于 [18]中推导出的延拓联络 是平行的。在平坦情形下，该联络与标准 tractor 联络 [3]一致。

每个度量 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{c}$ 都与正密度 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{E}_+[1])$ $\boldsymbol{g}$ 唯一对应。因此，利用 tractor D （见第 2.5 节），共形类中的每个度量都对应于其 尺度 *tractor* $I_A=D_A\sigma$；当且仅当 g 为爱因斯坦度量时，该 tractor 关于 tractor 联络平行。我们也允许尺度密度在一个无处稠密集上为零，并考虑 $\sigma\neq0$所在开集上的相应度量。

我们的方法是通过比较共形 Killing 张量的延拓 K与尺度 tractor I来刻画 Killing 尺度。当延拓与尺度 tractor 都平行时，判据是代数性的。在二阶情形下，我们确定了任意 K 和 I所需的微分项。

爱因斯坦尺度 σ对应于平行尺度 tractor I_A，它确定了一个保持联络的同构，将射影流形 $(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)\ [\nabla^g])$ 的射影 tractor 丛与共形 tractor 丛 [15] 的子丛 $I^\perp$ 联系起来（定理2.3）。通过此同构，我们可以用作用于 $I^\perp$中的 tractor 上的无迹映射来重新表述 Killing 尺度条件。

文献 [12], 研究了共形平坦流形上秩一和二阶Killing 张量的 Killing 尺度问题。他们关于二阶Killing张量的主定理如下。

定理 ([12,定理 4。25])。 在共形平坦流形上，设 k_{ab} 为具有完全延拓 K_{ABCD}的共形 ***Killing*** 张量。设 σ 为一个爱因斯坦尺度，其对应的尺度 *tractor* 满足 $|I|^2=I_AI^A\neq0$。那么，当且仅当 σ 是 k_{ab} 的 ***Killing*** 尺度时，

$$I^AK_{AB[CD}I_{E]}=0.$$

我们扩展并推广这一结果。我们证明，对于正规共形 Killing 张量，同一代数判据在弯曲共形流形上仍然成立。我们还

允许存在对应于里奇平坦尺度的零尺度拖拉机。若一个解的完全延拓在标准 t ractor 联络下平行，则称该解为正规。在共形平坦情形下，每个解都是正规解。

定理 A (定理 4.6)。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，设 k_{bd} 为共形 ***Killing*** 方程的正规解，且具有平行延拓 K_{ABCD} ，并设$I_A = D_A\sigma$ 为平行 ***tractor***。则当且仅当下式成立时， σ 是 k_{bd} 的局部 ***Killing*** 尺度

$$I^A K_{AB[CD} I_{E]} = 0. \tag{1.4}$$

若存在平行 ***tractor*** $\hat{}\ I_A$ 使得 $\hat{}\ I^A I_A = 1$，则当且仅当(1.4) 成立时， σ 是 k_{bd}的 ***Killing*** 尺度。

这里，局部 ***Killing*** 尺度 是一个全局定义的尺度，其中迹调整可能仅在局部存在。当 I 非零时，我们总可以取$\hat{}\ I = |I|^{-2} I$。我们还推导出当 K 或 I 不平行时，对 **(1.4)** 所需的完整调整。关于拖拉机投影算子 X 和 Z 以及 tractor 算子 D ，参见第 2.5 节。

定理 B (定理4.4和推论 4.5)。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，设k_{bd} 为一个共形 ***Killing*** 张量，其延拓为 K_{ABCD}。设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为一个尺度，其尺度 ***tractor*** 为 I_A。那么， σ 是 k_{bd} 的局部 ***Killing*** 尺度，当且仅当

$$X^E Z^A{}_a Z^B{}_b X^D \left(3I^C I_{[E} K_{AB]CD} - \sigma (D_{[E} I^C) K_{AB]CD} - \sigma I^C D_{[E} K_{AB]CD}\right) = 0. \tag{1.5}$$

当 K_{ABCD} 平行时，这可化简为

$$X^E Z^A{}_a Z^B{}_b X^D \left(3I^C I_{[E} K_{AB]CD} - \sigma (D_{[E} I^C) K_{AB]CD}\right) = 0. \tag{1.6}$$

第一和第二作者与 Jonathan Kress 合作，将这一判据应用于 K 平行的情形下的超可积系统，而不对 I [11]作平行性假设。

考虑秩为 $\ell \geq 3$的共形 Killing 张量的 Killing 尺度时，可供选择的迹调整空间是秩为 $\ell - 2$ 的对称张量。对于秩为 $\ell \geq 3$的共形 Killing 张量，我们寻求如下形式的 Killing 张量

$$r_{a_1 \cdots a_\ell} = k^g_{a_1 \cdots a_\ell} + g_{(a_1 a_2} q_{a_3 \cdots a_\ell)}, \qquad q \in \Gamma(S^{\ell-2} T^* M).$$

由于 $\nabla^g g = 0$， r 的 Killing方程变为

$$\nabla^g{}_{(a_1} q_{a_2 \cdots a_{\ell-1})} = -\frac{\ell}{n + 2\ell - 2} \nabla^g{}_b (k^g)_{a_1 \cdots a_{\ell-1}}{}^b.$$

因此，当且仅当 k^g 的散度属于秩为 $\ell - 2$的射影 Killing 算子的像时， g 才是 Killing 尺度。在射影平坦情形下，BGG 序列局部正合，因此，该像就是广义 Calabi 算子（在弹性力学研究中也称为广义 Saint-Venant 算子）的核。

定理 C (命题 6.3)。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形。设 $\ell \geq 3$。令$k_{a_1 \cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1 \cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 为一个共形 ***Killing*** 张量，并令 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$。那么，当且仅当使用 σ 平凡化密度丛后，$\nabla^g_a k^a{}_{a_2 \cdots a_\ell}$ 属于秩为 $\ell - 2$ 的射影 ***Killing*** 算子的像时， σ 才是 k 的 ***Killing*** 尺度。

当$(M, \boldsymbol{p} = [\nabla^g])$ 是射影平坦的时， σ 是局部 ***Killing*** 尺度，当且仅当$\mathscr{D}_1(\nabla^g_a k^a{}_{a_2 \cdots a_\ell}) = 0$，其中 $\mathscr{D}_1$ 是该射影 ***BGG*** 序列中的下一个算子，该序列包含秩 $\ell - 2$ 射影 ***Killing*** 算子。

近期研究 $[6,7]$ 在刻画秩一 Killing 算子的像方面取得了进展；根据上述结果，这项研究可应用于秩为 3 的共形 Killing 张量的 Killing 尺度。

尽管高阶情形更加复杂，我们仍证明了一个适用于爱因斯坦尺度的定理 A 的高阶代数类比。

定理D (定理 6.8)。 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为共形平坦。设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$为一个共形 *Killing* 张量，且 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 为其完全延拓。设 $I_A = D_A\sigma$为一个非零平行尺度 *tractor*。

那么， σ 是 k 的 *Killing* 尺度，当且仅当 *tractor*

$$I^{A_1}K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell} \tag{1.7}$$

对每个 $i \geq 2$，将每一对 A_iB_i 与 I_{C_i} 反对称化后为零；也就是说，滥用一下记号，

$$I^{A_1}K_{A_1B_1[A_2B_2}I_{C_2]}\cdots{}_{[A_\ell B_\ell}I_{C_\ell]} = 0, \tag{1.8}$$

其中所有指标 A_iB_i 都属于 K。

我们通过显式构造 Killing 张量 r从 tractor K出发的延拓，证明充分性方向可推广到任意共形流形上的正规解。

定理E (定理 6.9)。 设$(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，并设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 为共形 *Killing* 方程的一个正规解，其完全延拓 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$为（平行的）。令 $I_A = D_A\sigma$ 为一个非零平行尺度 *tractor*。若(1.8)成立，则 σ 是 k的 *Killing* 尺度。

Killing–Yano 方程（其中 $1 \leq \ell \leq n-1$）也适用于BGG框架。对于这些方程，延拓属于完全反对称的 tractor 丛。定理 5.1 给出了判定一个度量是否为给定共形 Killing–Yano 形式的 Killing 尺度的准则。由于 Killing–Yano 形式是反对称的，因此无法进行迹调整。任意阶数的 Killing–Yano 形式都可以平方，得到一个二阶 Killing 张量，

$$r_{ab} = \omega_a{}^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{ba_2\cdots a_\ell},$$

类似地，共形 Killing–Yano 形式的平方的无迹部分是一个二阶共形 Killing 张量。我们证明，对于共形 Killing–Yano 方程的正规解，所得到的共形 Killing 张量也是正规的，并在定理 5.2 中构造了其完全延拓。

本文的组织结构如下。第2节介绍射影与共形微分几何、它们的 tractor 丛以及 BGG机制。第3节讨论特殊爱因斯坦乘积，例如 $[1,13,14]$ 中讨论的共形积流形。我们为这些乘积显式构造 tractor丛、联络和投影算子，其形式也涵盖 Ricci平坦积。第 4 节给出二阶共形Killing张量的结果。第5节介绍共形 Killing–Yano 形式的结果，第6节介绍所有秩的高阶 Killing 张量的结果 $\ell \geq 2$。第7节利用特殊爱因斯坦乘积构造非共形平坦的实例。

2. Conformal and Projective Geometry

在全文中，我们将经常需要考虑具有由杨图给出的对称性的张量，包括迹和无迹部分。下一节将介绍我们所采用的记号和约定。

2.1. 多重线性代数。 设 V 是一个有限维实向量空间。设 $v \in V$ 和 $\omega \in V^*$。抽象指标记法 [23] 将上指标 v^a 赋予向量，将下指标 ω_a 赋予余向量。多个不同的指标表示高阶张量，例如 $\eta_{abc} \in \otimes^3(V^*)$ 或 $\phi_a{}^b \in V \otimes V^*$。

抽象指标可以简洁地表示许多自然运算，例如迹和张量积，

$$\omega(v) = \omega_a v^a, \quad \phi_a{}^a = tr(\phi), \quad v \otimes u = v^a u^b,$$

V 的恒等自同态记作 $\delta_a{}^b$，满足对所有 $v \in V$，$\delta_a{}^b v^a = v^b$。

对抽象指标 $a \cdots c$ 进行对称化和反对称化，分别记作 $(a \cdots c)$ 和 $[a \cdots c]$，其归一化因子为 $\frac{1}{\ell!}$，其中 $a \cdots c$ 中有 ℓ 个指标。例如，

$$\omega_{[ab]} = \tfrac{1}{2}\left(\omega_{ab} - \omega_{ba}\right), \quad u^{(a}v^{b)} = \tfrac{1}{2}\left(u^a v^b + u^b v^a\right),$$
$$\eta_{(abc)} = \tfrac{1}{6}\left(\eta_{abc} + \eta_{acb} + \eta_{bac} + \eta_{bca} + \eta_{cab} + \eta_{cba}\right).$$

群 $GL(V)$ 及其子群作用于 V 及其张量积。迹和对称化都是 $GL(V)$-等变映射，因此它们定义了张量积的 $GL(V)$-子模，例如

$$S^2(V) = \{u^{ab} \in V \otimes V : u^{ab} = u^{(ab)}\}, \quad \Lambda^2(V) = \{u^{ab} \in V \otimes V : u^{ab} = u^{[ab]}\}$$

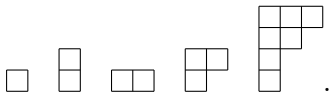
以及无迹 $(V \otimes V^*) := \{\eta^a{}_b \in V \otimes V^* : \ \eta^a{}_a = 0\}$。前一对给出了 $V \otimes V$ 到 $GL(V)$-不可约子模的完整 $GL(V)$-等变分解，

$$V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$$

将补充子模加入无迹自同态后，得到 $V \otimes V^*$ 分解为 GL-不可约子模的完整分解

$$V \otimes V^* = \text{trace-free}(V \otimes V^*) \oplus \mathbb{R} \cdot \delta_a{}^b$$

对于更高价的张量空间，我们可以使用杨图来确定所有不可约 $GL(V)$-等变子模。杨图 [9] 是由 ℓ 个方格组成的图形，这些方格排列成一个连通的左对齐网格，且各行长度不递增。例如，



每个杨图都表示 $GL(V)$ 的一个不可约表示同构类。只有一个方格的杨图表示 V。由 ℓ 个方格组成的单行表示 $S^\ell(V)$，由 ℓ 个方格组成的单列表示 $\Lambda^\ell(V)$。

我们将经常使用的另一个例子是

$$\boxplus(V^*) = \{R_{abcd} : R_{abcd} = R_{[ab][cd]} \quad \text{and} \quad R_{[abc]d} = 0\},$$

这意味着还具有对称性 $R_{abcd} = R_{cdab}$，即 $(V^*) \subset S^2(\Lambda^2(V^*))$。这些就是黎曼曲率张量的对称性。在第6节，我们还需要

$$\square\!\!\square\!\!\square(V^*) = \{R_{a_1b_1a_2b_2\cdots a_\ell b_\ell} \in S^\ell(\Lambda^2(V^*)) : R_{[a_1b_1a_2]b_2\cdots a_\ell b_\ell} = 0\}.$$

这里， R 在每一对指标内反对称，并在任意两对指标互换时保持对称。抽象指标的工具可以直接从向量空间 V 推广到纤维为 V 的向量丛 $E \to M$，方法是将所有运算、张量积、迹和对称化逐纤维地进行。

对称非退化双线性型 $g_{ab} \in S^2(V^*)$及其逆 g^{ab} 确定了一个同构 $V \cong V^*$，记作 $v^a \mapsto v_a := g_{ab}v^b$，其逆记作 $\omega_a \mapsto \omega^a := g^{ab}\omega_b$。利用 g，我们可以对一对上指标定义迹 $u^{ab} \mapsto g_{ab}u^{ab}$，下指标对也类似。

升指标、降指标和指标取迹都是 $O(V, g)$-等变运算。这些运算与 $GL(V)$-等变映射相结合，给出 $O(V, g)$-不可约分解，即 V的张量幂的不可约分解。设 λ 是一个杨图， V_λ 是由 λ 确定的张量空间，例如上述例子。于是我们定义

$$V^0_\lambda := \{u^{a_1\cdots a_\ell} \in V^\lambda : u^{a_1\cdots a_\ell} g_{a_i a_j} = 0 \text{ for all } 1 \le i < j \le \ell\}$$

那么，只要 λ处于杨图的稳定范围内（前两列的长度之和至多为 n），V^0_λ便是 $\otimes^\ell(V)$ 的一个 $O(V, g)$-不可约子模。稍后，我们将使用带下标 0 的杨图，而不使用 V_λ。例如，

$$\square\!\!\square_0(V^*) = \{W_{abcd} : W_{abcd} = W_{[ab][cd]}, \quad W_{[abc]d} = 0 \quad \text{and} \quad W_{ab}{}^a{}_d = 0\}.$$

这些是共形 Weyl 曲率的对称性，见第 2.4 节。双线性形式 g 也通过对所有指标求迹，在任意 λ 上定义了一个非退化双线性形式，

$$\langle \eta^{a\cdots c}, \xi^{a\cdots c} \rangle \mapsto \eta^{a_1\cdots c_1}\xi^{a_2\cdots c_2} g_{a_1a_2}\cdots g_{c_1c_2}$$

迹张量空间是与 V^λ_0 正交的 V^λ 子空间

$$V^\lambda_g := (V^\lambda_0)^\perp = \{u^{a_1\cdots a_\ell} \in V^\lambda : u_{a_1\cdots a_\ell} w^{a_1\cdots a_\ell} = 0 \text{ for all } w \in V^\lambda_0\}, \quad V^\lambda = V^\lambda_0 \oplus V^\lambda_g.$$

迹子空间 V^λ_g 关于 $O(V, g)$ 的作用通常并非不可约（完整的分支规则由 Littlewood 给出，参见例如 [10, §25.3]）。这个直和给出了一个典范的 $O(V, g)$-等变投影

$$\text{trace-free}\colon V^\lambda \to V^\lambda_0$$

对于全对称 $s \in S^\ell(V^*)$ 这一特殊情形，我们采用标准记号

$$s_{(a_1\cdots a_\ell)_0} = \text{trace-free}(s_{(a_1\cdots a_\ell)})$$

例如， $s_{ab} \in S^2(V^*)$ 的无迹映射为

$$\text{trace-free}(s)_{ab} = s_{(ab)_0} = s_{ab} - \tfrac{1}{n} s_c{}^c g_{ab}.$$

稍后我们将使用带有 g 下标的杨图来表示由该杨图确定的空间的迹部分；例如，根据 Kulkarni–Nomizu 积，我们有

$$\square\!\!\square_g(V^*) = \{g \owedge s = s_{ac}g_{bd} + s_{bd}g_{ac} - s_{ad}g_{bc} - s_{bc}g_{ad} : s_{ac} \in S^2(V^*)\}.$$

那么，映射 trace-free : $(\boxed{V}^*) \to {}_0(\boxed{V}^*)$ 可表示为

$$\text{trace-free}(R)_{abcd} = R_{abcd} - P_{ac}g_{bd} - P_{bd}g_{ac} + P_{ad}g_{bc} + P_{bc}g_{ad},$$

其中

$$P_{ac} = \frac{1}{n-2}\left(R_{abc}{}^{b} - \frac{R_{ab}{}^{ab}}{2(n-1)}g_{ac}\right).$$

在计算中，我们通常希望理解无迹运算的核。 V^λ 中任何具有两个自由度量指标的张量，例如 $\eta_{(ab}g_{cd)}$，都属于无迹运算的核。

同时考虑多个向量空间或向量丛时，我们将使用来自不同字母表的指标，例如大写拉丁字母 A, B, C ，或小写希腊字母 α, β, γ。因此，如果我们使用指标 a, b, c 表示 V，并使用 A, B, C 表示 W，那么$\phi \in$ Hom(V, W) 将具有指标 $\phi_a{}^A$。

特别地，在后续章节中，小写拉丁指标将专用于切丛的截面，$v^a \in \Gamma(TM)$ 和 $\omega_a \in \Gamma(T^*M)$；大写拉丁指标将用于共形 tractor，小写希腊指标将用于射影 tractor。

我们也用指标表示向量丛本身，平凡丛记作 $\mathcal{E} = M \times \mathbb{R}$，切丛和余切丛分别记作 $\mathcal{E}^a = TM$和 $\mathcal{E}_a = T^*M$。高阶丛会有更多指标，例如 $\mathcal{E}_a{}^b = \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}^b = T^*M \otimes TM =End(TM)$。这种记法也可以表示对称性，因此 $s^{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}^{(ab)})$ 是对称逆变张量场，而 $\omega_{abc} \in \Gamma(\mathcal{E}_{[abc]})$ 是一个 3-形式。

2.2. 射影几何。 设 M 是一个维数为 $n \geq 2$的光滑流形。流形上的两个无挠仿射联络若具有相同的无参数化曲线测地线，则称它们射影等价。射影等价联络的等价类称为射影类，通常记作 $\boldsymbol{p} = [\nabla]$。有序对 $(M, \boldsymbol{p})$ 是一个射影流形。

ˆ 两个无挠仿射联络 ∇, ∇ 射影等价，当且仅当它们通过一个 1-形式 $\Upsilon_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a)$ 相关联：

$$\hat{\nabla}_a\omega_b = \nabla_a\omega_b - \Upsilon_a\omega_b - \omega_a\Upsilon_b \tag{2.1}$$

对于所有 $\omega \in \Gamma(\mathcal{E}_a)$。反过来，两个如上所述通过一个 1-形式相关联的无挠仿射联络是射影等价的。由此还可得到其他变换律，例如

$$\hat{\nabla}_a u^b = \nabla_a u^b + \Upsilon_a u^b + \Upsilon_c u^c \delta_a{}^b$$

最高次形式 $\epsilon \in \Gamma(\Lambda^n(T^*M))$ 的变换律为

$$\hat{\nabla}_a\epsilon = \nabla_a\epsilon - (n+1)\Upsilon_a\epsilon$$

丛 $(\Lambda^n(T^*M))^{\otimes 2}$ 具有典范定向，其中平方为正。随后我们定义权重为$-2(n+1)$的 $\mathcal{E}(-2(n+1)) = \Lambda^n(T^*M)^{\otimes 2}$，即射影密度丛，其权重对应于变换律。接着令$\mathcal{E}(w) = \mathcal{E}(-2(n+1))^{-{}_2{}^w{}_{(n+1)}}$。这些实数次幂定义良好且带有定向，因为结构群 $\mathcal{F}(TM)$ 通过正标量作用。密度丛也可以构造为由标架丛通过表示ρ_w：$GL(n) \to \mathbb{R}_+$ 定义的伴随丛，其中 $\rho_w(A) = |\det A|^{w/(n+1)}$。仿射联络确定了一个

定义在所有与标架丛相关联的丛上的联络，包括密度丛。ˆ 那么，对于任意 $\tau \in \Gamma(\mathcal{E}(w))$ 以及由 2.1 相关联的联络 ∇，$\nabla \in \boldsymbol{p}$，

$$\hat{\nabla}_a \tau = \nabla_a \tau + w \Upsilon_a \tau.$$

射影权重对于定义不变微分算子非常有用。从 ˆ 1-形式的变换律可知，$\nabla_a \omega_b - \nabla_a \omega_b$ 是对称的，因此外微分 $\omega \mapsto \nabla_{[a}\omega_{b]}$ 是射影不变的。然而，如果我们改为考察$\omega \in \Gamma(\mathcal{E}_a(2))$，变换律则变为

$$\hat{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b + \Upsilon_a \omega_b - \omega_a \Upsilon_b,$$

且两者之差是反对称的。因此，作用于截面 $\omega_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a(2))$ 的一阶 *Killing* 算子：

$$\omega_a \mapsto \nabla_{(a}\omega_{b)}$$

是射影不变的。

An我们需要的另一个变换律是黎曼曲率的变换律，其定义为 b y

$$R_{ab}{}^c{}_d u^d = \nabla_a \nabla_b u^c - \nabla_b \nabla_a u^c$$

ˆ 因为所有联络都是无挠的。如果 $\nabla, \nabla \in \boldsymbol{p}$ 由 Υ关联，则它们的曲率满足

$$\hat{R}_{ab}{}^c{}_d = R_{ab}{}^c{}_d + 2\delta_{[a}{}^c \Upsilon_{b]} \Upsilon_d + 2\nabla_{[a}\Upsilon_{b]}\delta^c{}_d + 2\delta_{[b}{}^c \nabla_{a]}\Upsilon_d.$$

从上文可以立即看出，曲率的无迹部分在射影变换下保持不变。在 $SL_n(\mathbb{R})$ 的作用下，我们可以将曲率张量唯一地分解为一个无迹部分和两个迹项，一个对称，另一个反对称。

命题 2.1. 设 ∇ 是一个具有曲率张量 $R_{ab}{}^c{}_d$ 的无挠仿射联络。令

$$\tilde{\mathsf{P}}_{bd} = \frac{1}{n-1}\operatorname{Ric}_{(bd)} + \frac{1}{n+1}\operatorname{Ric}_{[bd]}, \quad \beta_{bd} = -\frac{2}{n+1}\operatorname{Ric}_{[bd]} = -2\tilde{\mathsf{P}}_{[bd]},$$

其中 $\operatorname{Ri}_{bd} = R_{ab}{}^a{}_d$。*en Th*

$$R_{ab}{}^c{}_d = \tilde{W}_{ab}{}^c{}_d + 2\delta_{[a}{}^c \tilde{\mathsf{P}}_{b]d} + \beta_{ab}\delta^c{}_d,$$

~ ~其中 W 是完全无迹的。张量 Ric、P 和 β 之间的关系为

$$(n-1)\tilde{\mathsf{P}}_{ab} = \operatorname{Ric}_{ab} + \beta_{ab}.$$

张量 β 作为密度丛上的曲率；也就是说，若 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}(w))$，则

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\sigma = w\beta_{ab}\sigma.$$

ˆ设 ∇、$\nabla \in \boldsymbol{p}$ 满足关系 Υ。则

$$\hat{\tilde{W}}_{ab}{}^c{}_d = \tilde{W}_{ab}{}^c{}_d, \quad \hat{\tilde{\mathsf{P}}}_{bd} = \tilde{\mathsf{P}}_{bd} - \nabla_b \Upsilon_d + \Upsilon_b \Upsilon_d \quad and \quad \hat{\beta}_{bd} = \beta_{bd} + 2\nabla_{[b}\Upsilon_{d]}$$

~ ~张量 W 是射影魏尔张量，P 是射影舒尔滕张量。由于本文还将讨论共形流形，而共形流形具有自己的魏尔张量和舒尔滕张量，因此我们将使用波浪号来表示射影张量。共形几何中不存在 β 曲率张量，因此 β 无需加波浪号。

2.3. 射影 tractor。射影流形有意不具有切丛上的特定联络。拖拉机构造为射影流形关联了一个自然的向量丛，并为其配备了联络。

标准射影余拖拉机丛为 $\tilde{\mathcal{T}}^* = J^1(\mathcal{E}(1))$。我们将使用小写˜希腊指标表示射影 tractor，因此 $\mathcal{T}^* = \mathcal{E}_\alpha$ 及其对偶 $\mathcal{T} = \mathcal{E}^\alpha$。tractor丛属于针对 $\mathcal{E}(1)$ 的典范一阶喷射正合序列，

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_a(1) \xrightarrow{Z_\alpha{}^a} \mathcal{E}_\alpha \xrightarrow{X^\alpha} \mathcal{E}(1) \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

典范投影算子是截面 $X^\alpha \in \Gamma(\mathcal{E}^\alpha(1))$ 和 $Z_\alpha{}^a \in \Gamma(\mathcal{E}_\alpha{}^a(-1))$。仿射联络 $\nabla \in \boldsymbol{p}$ 在 $\mathcal{E}(1)$ 上诱导一个联络，这等价于 (2.2)[24, 4.6.3] 的一个分裂。因此，每个 $\nabla \in \boldsymbol{p}$ 都确定截面 $Y_\alpha \in \Gamma(\mathcal{E}_\alpha(-1))$ 和 $W^\alpha{}_a \in \Gamma(\mathcal{E}^\alpha{}_a(1))$，它们满足

$$X^\alpha Y_\alpha = 1 \quad \text{and} \quad W^\alpha{}_a Z_\alpha{}^b = \delta_a{}^b.$$

ˆ如果 ∇ 和 ∇ 通过 Υ_a相关，则

$$\hat{W}^\alpha{}_a = W^\alpha{}_a + X^\alpha \Upsilon_a \quad \text{and} \quad \hat{Y}_\alpha = Y_\alpha - Z_\alpha{}^a \Upsilon_a.$$

固定一个联络后，即可确定同构 $\mathcal{E}(1) \oplus \mathcal{E}_a(1) \cong \mathcal{E}_\alpha$，其定义为 $(\sigma, \mu_a) \mapsto \sigma Y_\alpha + \mu_a Z_\alpha{}^a = U_\alpha$；我们将其记作 $U_\alpha \overset{\nabla}{=} (\sigma, \mu_a)$，或记作一个竖直向量。

射影不变拖拉机联络可通过此同构给出，

$$\nabla_a \begin{pmatrix} \sigma \\ \mu_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_a \sigma - \mu_a \\ \nabla_a \mu_b + \sigma \tilde{\mathsf{P}}_{ab} \end{pmatrix},$$

不过，我们更常使用以投影算子表示的联络，

$$\nabla_a X^\alpha = W^\alpha{}_a, \quad \nabla_a W^\alpha{}_b = -\tilde{\mathsf{P}}_{ab} X^\alpha, \quad \nabla_a Z_\alpha{}^b = -\delta_a{}^b Y_\alpha, \quad \nabla_a Y_\alpha = \tilde{\mathsf{P}}_{ab} Z_\alpha{}^b,$$

由于这些投影算子都是带权的，作用于它们的tractor联络并不具有不变性。

存在一个一阶射影不变微分算子 $D\colon \Gamma(\mathcal{E}(1)) \to \Gamma(\mathcal{E}_\alpha)$，定义如下：

$$D_\alpha \sigma|_p = j^1_p(\sigma) = (\sigma, \nabla_a \sigma),$$

射影Thomas D。

射影余拖拉机丛与联络构成射影不变偏微分算子的延拓丛

$$\tilde{A}(\sigma)_{ab} = \nabla_{(a} \nabla_{b)} \sigma + \sigma \tilde{\mathsf{P}}_{(ab)},$$

˜因此， $\mathcal{E}_\alpha$ 的平行截面对应于 A的解。这种对应关系由$\sigma \mapsto D_\alpha \sigma$给出。

2.4. 共形几何。 从此处起，我们要求 $n \geq 3$。两个伪黎曼度量 g_{ab}，$\hat{}g_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)})$若存在一个正的光滑函数 $\Omega > 0$ 使得 $\hat{}g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$，则称它们共形等价。共形等价度量的等价类称为共形类，通常记作 $\boldsymbol{c} = [g]$。对 $(M, \boldsymbol{c})$ 是一个共形流形。

设 $(M, \boldsymbol{c})$ 为一个共形流形，并令 $g, \hat{}g \in \boldsymbol{c}$。若 $\hat{}g = \Omega^2 g \in \boldsymbol{c}$，则 g 和 $\hat{}g$ 的 Levi-Civita 联络之间满足

$$\hat{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - \Upsilon_a \omega_b - \omega_a \Upsilon_b + \Upsilon_d \omega_c g^{cd} g_{ab},$$

其中 $\Upsilon_a = \Omega^{-1} \nabla_a \Omega$。向量的变换律为

$$\hat{\nabla}_a v^b = \nabla_a v^b + \Upsilon_a v^b - v_a \Upsilon^b + \Upsilon_c v^c \delta^b_a,$$

其中，指标目前使用共形类中的任意度量进行升降。

Re类似于射影情形，对于顶次微分形式，我们有 $\epsilon \in \Gamma(\Lambda^n(T^*M))$，

$$\hat{\nabla}_a \epsilon = \nabla_a \epsilon - n \Upsilon_a \epsilon.$$

因此，我们定义定向密度丛 $\mathcal{E}[-2n] = (\Lambda^n(T^*M))^2 = \mathcal{E}(-2(n+1))$，其对于任意 $w \in \mathbb{R}$ 都具有 $\mathcal{E}[w] = \mathcal{E}\left(\frac{n+1}{n} w\right)$ 次根。于是，若 $\tau \in \Gamma(\mathcal{E}[w])$，则有

$$\hat{\nabla}_a \tau = \nabla_a \tau + w \Upsilon_a \tau.$$

任意度量 $g \in \boldsymbol{c}$都会确定唯一的密度 $\tau^g \in \Gamma((\Lambda^n(T^*M))^2) = \Gamma(\mathcal{E}[-2n])$，即度量密度；当 M 取向时，它就是黎曼体积形式的平方。密度 τ^g 相对于 g 的 Levi-Civita 联络是平行的，并且满足

$$\frac{1}{n!} \tau_{a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n} g^{a_1 b_1} \cdots g^{a_n b_n} = (-1)^q,$$

其中 g的度量符号为 (p, q)。因此，若 $\hat{}g = \Omega^2 g$，则 $\tau^{\hat{}g} = \Omega^{2n} \tau^g$。我们称 $\sigma_g = (\tau^g)^{-1/2n}$ 为 $g \in \boldsymbol{c}$的尺度密度，它是处处不消失的截面 $\sigma_g \in \Gamma(\mathcal{E}_+[1])$。若 $\hat{}g = \Omega^2 g$，则 $\sigma_{\hat{g}} = \Omega^{-1} \sigma_g$。

对于任意 $g \in \boldsymbol{c}$，共形度量由 $\boldsymbol{g}_{ab} = \sigma_g^2 g_{ab}$ 定义。若 $\hat{}g = \Omega^2 g$，则

$$\sigma^2_{\hat{g}} \hat{g}_{ab} = \Omega^{-2} \sigma_g^2 \Omega^2 g_{ab} = \sigma_g^2 g_{ab}$$

因此，共形度量是一个不变的带权非退化截面；$\boldsymbol{g}_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}[2])$，其逆为 $\boldsymbol{g}^{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}^{(ab)}[-2])$。

对于共形类中的任意度量，共形度量也都是平行的，因此从现在起我们将用 $\boldsymbol{g}$ 升降指标，也就是说，升指标会使张量的权重降低二，而降指标会使张量的权重增加二。

正密度 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}_+[1])$通过 $g_{ab} = \sigma^{-2} \boldsymbol{g}_{ab}$ 确定一个度量，其中 $\sigma_g = \sigma$。因此，$\boldsymbol{c}$ 中的度量与正尺度密度一一对应。

更一般地，如果 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 且 σ 的零点集的补集在 M 中稠密，则称 σ 为一个尺度。度量 $g = \sigma^{-2} \boldsymbol{g}$ 在开稠密集 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上定义良好。

命题 2.2。 设 g 为一个曲率为 $R_{abcd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{[ab][cd]}[2])$ 的度量。设

$$\mathsf{P}_{bd} = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}_{bd} - \frac{\mathrm{Sc}}{2(n-1)}\boldsymbol{g}_{bd}\right),$$

其中 $\mathrm{Ric}_{bd} = R_{ab}{}^{a}{}_{d} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)})$ 以及 $\mathrm{Sc} = R_{ab}{}^{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}[-2])$。于是

$$R_{abcd} = W_{abcd} + 2\mathsf{P}_{a[c}\boldsymbol{g}_{d]b} + 2\mathsf{P}_{b[d}\boldsymbol{g}_{c]a},$$

其中 W 是完全无迹的。如果 $\Omega \in C^{\infty}_{+}(M)$ 和 $\hat{}g = \Omega^2 g$，那么

$$\hat{W}_{abcd} = W_{abcd}, \quad \hat{\mathsf{P}}_{bd} = \mathsf{P}_{bd} - \nabla_b \Upsilon_d + \Upsilon_b \Upsilon_d - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}_{bd}\Upsilon_c\Upsilon^c.$$

令 $J = \mathsf{P}_b{}^b \in \Gamma(\mathcal{E}[-2])$ 以及 $\mathsf{P}_{bd} = \mathsf{P}_{bd} - \frac{1}{n}J\boldsymbol{g}_{bd}$。于是

$$\hat{J} = J - \nabla_a\Upsilon^a + \frac{2-n}{2}\Upsilon_a\Upsilon^a \quad and \quad \hat{\mathsf{P}}_{(ab)_0} = \mathsf{P}_{(ab)_0} - \nabla_{(a}\Upsilon_{b)_0} + \Upsilon_{(a}\Upsilon_{b)_0}.$$

令 $(M,\ [\nabla^g])$ 为包含 g的 ***Levi-Civita*** 联络的射影流形。于是

$$\tilde{\mathsf{P}}_{ab} = 2\mathsf{P}_{ab} - \frac{n}{n-1}\overset{\circ}{\mathsf{P}}_{ab} = \mathsf{P}_{ab} + \frac{J}{n}\boldsymbol{g}_{ab} - \frac{1}{n-1}\overset{\circ}{\mathsf{P}}_{ab}$$

共形不变的张量 W_{abcd} 被称为共形 ***Weyl*** 曲率，根据构造它是完全无迹的。共形 ***Schouten*** 曲率 为 P_{bd}。

如果伪黎曼度量的 Ricci 曲率是纯迹，即 $\mathrm{Ric}_{(ab)_0} = 0$，那么该度量就是爱因斯坦度量。这显然等价于 $\mathsf{P}_{(ab)_0} = 0$。Schur 引理指出，爱因斯坦度量在每个连通分支上都具有常值标量曲率，也就是说，$\nabla_a \mathrm{Sc} = 0$ or$\nabla_a J = 0$。

2.5. 共形 tractor。 本节参考文献为 [3, 8]。爱因斯坦度量在共形几何中起着核心作用。共形类中爱因斯坦度量的尺度密度满足以下共形不变的微分方程

$$A_{ab}\sigma = \nabla_{(a}\nabla_{b)_0}\sigma + \mathsf{P}_{(ab)_0}\sigma = 0.$$

反过来，满足 $A_{ab}\sigma = 0$ 的尺度 σ 确定了 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上的爱因斯坦度量 $g_{ab} = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}_{ab}$。在 $\mathcal{Z}(\sigma)$ 之外，利用 Levi-Civita 联络 ∇^σ 进行计算可得

$$A_{ab}\sigma = \nabla_{(a}\nabla_{b)_0}\sigma + \mathsf{P}^g{}_{(ab)_0}\sigma = \mathsf{P}^g_{(ab)_0}\sigma = 0$$

偏微分算子 A 称为近似爱因斯坦算子，它给出了二阶喷射正合序列的一个共形不变的部分分裂

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{(ab)}[1] \xrightarrow{\ \iota\ } J^2(\mathcal{E}[1]) \longrightarrow J^1(\mathcal{E}[1]) \longrightarrow 0, \tag{2.3}$$

其中 $A \circ \iota$是 $\mathcal{E}_{(ab)_0}[1]$上的恒等映射。共形余拖拉克丛 为 $\mathcal{E}_A = \ker(A) \subset J^2(\mathcal{E}[1])$。我们有 $\ker(A) \cong J^2(\mathcal{E}[1])/\iota A(J^2(\mathcal{E}[1]))) = J^2(\mathcal{E}[1])/\iota(\mathcal{E}_{(ab)_0}[1])$。序列 (2.3) 化简为拖拉克正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}[-1] \xrightarrow{X_A} \mathcal{E}_A \longrightarrow J^1(\mathcal{E}[1]) \longrightarrow 0,$$

利用识别 $\mathcal{E}[-1]\cong\mathcal{E}[-1]\otimes \boldsymbol{g}_{ab}\subset\mathcal{E}_{(ab)}[1]$。

设 $g\in \boldsymbol{c}$ 且令 $j^2_p(\sigma)\in \ker(A)|_p=\mathcal{E}_A|_p$。共形tractor演算中的典范投影算子为 $X^A\in\Gamma(\mathcal{E}^A[1])$，其表达式为 $X(j^2_p(\sigma))=\sigma(p)$。第一个非不变投影算子为 $Z^A{}_a$：$\mathcal{E}_A\to\mathcal{E}_a[1]$ 其表达式为 $Z(j^2_p(\sigma))=\nabla_a\sigma$。最后一个投影算子为 $Y^A\colon\ \mathcal{E}_A\to\mathcal{E}[-1]$，其表达式为 $Y(j^2_p(\sigma))=-\frac{1}{n}(\Delta\sigma+J\sigma)$。利用 Levi-Civita 联络的变换律，我们得到

$$\hat{Z}^A{}_a=Z^A{}_a+X^A\Upsilon_a,\quad \hat{Y}^A=Y^A-Z^A{}_a\Upsilon^a-\tfrac{1}{2}\Upsilon_a\Upsilon^aX^A,$$

共形tractor丛配备了不变的*tractor*度量，

$$h^{AB}=X^AY^B+Y^AX^B+Z^A{}_aZ^B{}_b\boldsymbol{g}^{ab},$$

其度量符号为 $(p+1,\ q+1)$。我们用该度量升降指标，由此得到投影算子 X_A、$Z_A{}^a$ 和 Y_A，如图 1 所示。所有实线均为典范的，虚线则取决于度量 $g\in\boldsymbol{c}$ 的选择。根据公式

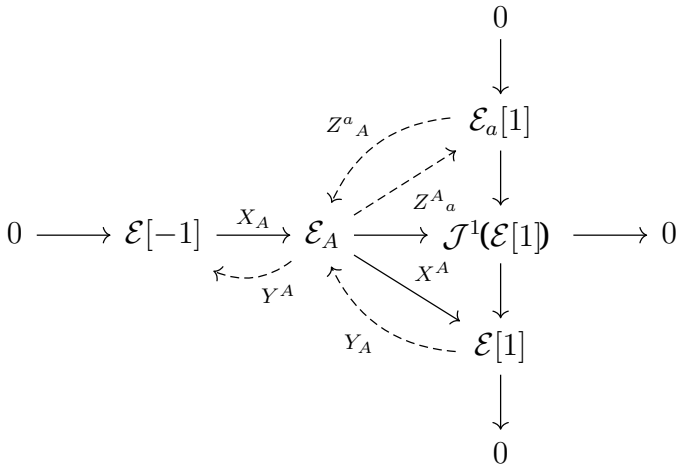


FIGURE 1. 拖拉机投影算子

对于 h_{AB}，其tractor缩并如下，我们将反复使用，

$$X^AY_A=1,\quad Z^A{}_aZ_A{}^b=\delta_a{}^b,$$

而投影算子之间的其他所有缩并均为零。

A metric $g\in\boldsymbol{c}$确定了一个同构$\mathcal{E}_A\cong\mathcal{E}[1]\oplus\mathcal{E}_a[1]\oplus\mathcal{E}[-1]$，其定义为

$$U_A=\sigma Y_A+\mu_aZ_A{}^a+\rho X_A\overset{g}{=}(\sigma,\mu_a,\rho),$$

或作为一个竖直向量。不变的*tractor*联络为

$$\nabla_a\begin{pmatrix}\sigma\\ \mu_a\\ \rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nabla_a\sigma-\mu_a\\ \nabla_a\mu_b+\sigma\mathsf{P}_{ab}+\rho\boldsymbol{g}_{ab}\\ \nabla_a\rho-\mathsf{P}_a{}^b\mu_b\end{pmatrix},$$

或者用投影算子表示，

$$\nabla_aX^A=Z^A_a,\quad \nabla_bZ^A{}_a=-\mathsf{P}_{ab}X^A-\boldsymbol{g}_{ab}Y^A\quad\text{and}\quad \nabla_aY^A=\mathsf{P}_a{}^bZ^A{}_b.$$

tractor度量对于tractor联络是平行的。

存在一个二阶共形不变微分算子 $D\colon\ \Gamma(\mathcal{E}[1]) \to\Gamma(\mathcal{E}_A)$，其表达式为

$$D_A\sigma|_p = (\sigma, \nabla_a\sigma, -\tfrac{1}{n}(\Delta\sigma + J\sigma)), \tag{2.4}$$

算子 D 在平行拖拉机与 $A_{ab}\sigma = 0$的解之间建立了一一对应。事实上，计算可得

$$\nabla_a D_A\sigma = \begin{pmatrix} \nabla_a\sigma - \nabla_a\sigma \\ \nabla_a\nabla_b\sigma + \mathsf{P}_{ab}\sigma - \frac{1}{n}(\Delta\sigma + J\sigma)\boldsymbol{g}_{ab} \\ -\frac{1}{n}(\nabla_a\Delta\sigma + \nabla_a(J\sigma)) - \mathsf{P}_a{}^b\nabla_b\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{ab}\sigma \\ * \end{pmatrix}.$$

因此，当 $\nabla_a D_A\sigma = 0$ 时，显然有 $A_{ab}\sigma = 0$。为证明逆命题，设 σ 是一个尺度，并利用 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上的度量进行计算，得到

$$\nabla_a D_A\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{P}^g{}_{(ab)_0}\sigma \\ -\frac{1}{n}\nabla_a J\sigma \end{pmatrix}.$$

微分方程 $A_{ab}\sigma = 0$ 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上化为 $\mathsf{P}_{(ab)_0} = 0$，换言之，即 $(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)\ g)$ 为爱因斯坦度量。于是Schur 的一个引理给出 $\nabla_a J = 0$，因此在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上有 $\nabla_a D_A\sigma = 0$，由连续性和密度可知， $D_A\sigma$ 在 M上是平行的。

令 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$。tractor $I_A = D_A\sigma$ 称为 σ的尺度 ***tractor***。度量$g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 无法延拓到 $\mathcal{Z}(\sigma)$。然而，对应于 σ 和g 的尺度 tractor 在整个 M上都有良好定义。利用 g 在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$上的 Levi-Civita 联络，我们有 $\nabla_a\sigma = 0$，因此

$$D_A\sigma = I_A = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ -\frac{J^g}{n}\sigma \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad I_A I_B h^{AB} = |I|^2 = -\tfrac{2}{n}J^g.$$

不变算子 D 可不变地扩展到一般的带权 tractor；（归一化的）***tractor*** D 算子为 $D\colon\ \Gamma(\mathcal{V}[w]) \to \Gamma(\mathcal{V} \otimes \mathcal{E}_A[w-1])$，其中 $\mathcal{V}$ 是任意共形 tractor 丛，且 $w \in \mathbb{R}$ 满足 $n + 2w - 2 \neq 0$ 由下式给出

$$D_A V = wY_A V + \nabla_a V Z_A{}^a - \frac{1}{n + 2w - 2}(\Delta V + wJV)X_A,$$

其中， ∇_a 是由 $\boldsymbol{c}$和$\Delta = \nabla^a\nabla_a$中的某个度量所确定的耦合的 tractor 与 Levi-Civita 联络。

2.6. **从射影tractor到共形tractor**。 本文将依赖以下结果，它使我们能够在近Einstein流形上识别射影 tractor 与共形 tractor。以下结果最初见于 [15], ；为使本文自成一体，并说明这种同构的障碍恰好是 $\mathsf{P}_{(ab)_0}$，我们在此给出证明。

定理2.3。 设(M, g) 为 ***Einstein*** 流形，并考虑共形流形$(M, \boldsymbol{c} = [g])$ 和射影流形$(M, \boldsymbol{p} = [\nabla^g])$。令 σ 为共形标度

密度，其对应于 g ，并使用 σ 来标识密度丛。由下式给出的线性丛映射 ϕ: $\mathcal{E}_\alpha \to \mathcal{E}_A$

$$\phi\left(\begin{pmatrix}\tau\\ \mu_a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\tau\\ \mu_a\\ \frac{J}{n}\tau\end{pmatrix}$$

是保联络的。设 $I_A = D_A\sigma$ 为与爱因斯坦尺度 σ对应的平行 ***tractor***。那么 ϕ 是 $\mathcal{E}_\alpha$ 与$I^\perp \subset \mathcal{E}_A$之间的保联络同构。

证明。 $\mathcal{E}_\alpha$与 $I^\perp$ 都是秩为 $n+1$的丛，并且 ϕ 显然是单射，因此是线性双射。

我们需要证明，若 $U_\alpha \in \Gamma(\mathcal{E}_\alpha)$，则

$$\nabla_a(\phi_A{}^\alpha U_\alpha) = \phi_A{}^\alpha \nabla_a U_\alpha,$$

这等价于证明$\nabla_a \phi_A{}^\alpha = 0$。在尺度 σ 下，我们有

$$\phi_A{}^\alpha = Y_A X^\alpha + Z_A{}^b W^\alpha{}_b + \frac{J}{n} X_A X^\alpha.$$

$$\begin{aligned}\nabla_a \phi_A{}^\alpha &= \mathsf{P}_{ab} Z_A{}^b X^\alpha + Y_A W^\alpha{}_a - \mathsf{P}_a{}^b X_A W^\alpha{}_b - \boldsymbol{g}_a{}^b Y_A W^\alpha{}_b - \tilde{\mathsf{P}}_{ab} Z_A{}^b X^\alpha \\ &\quad + \frac{\nabla_a J}{n} X_A X^\alpha + \frac{J}{n} Z_{Aa} X^\alpha + \frac{J}{n} X_A W^\alpha{}_a \\ &= -\mathring{\mathsf{P}}_a{}^b X_A W^\alpha{}_b + \frac{\nabla_a J}{n} X_A X^\alpha + \frac{1}{n-1}\mathring{\mathsf{P}}_{ab} Z_A{}^b X^\alpha.\end{aligned}$$

。对于爱因斯坦度量，按定义 $\mathsf{P} = 0$ ，并且由舒尔引理， $\nabla_a J = 0$ 。由于 $I_A = D_A\sigma = (\sigma,\ \nabla_a\sigma,\ -\frac{J}{n}\sigma)$，显然 ϕ映入 $I^\perp$，后者是一个平行子丛。□

上述对 $\nabla_a \phi_A{}^\alpha$ 的计算适用于任意伪黎曼流形，并表明

。， ϕ 保联络的障碍恰由 P 和 $\nabla_a J$ 衡量，它们是 g 成为爱因斯坦的障碍。

上述定理可以从延拓的角度来解释。共形tractor丛是近似爱因斯坦算子 A的延拓丛，而射影 tractor 丛是射影等价$\sim A$的延拓丛。

结果表明，可以仿照共形 tractor 的构造来构造射影tractor丛，取 $\tilde{\mathcal{T}}^* = \ker(\tilde{A}) \subset J^2(\mathcal{E}(1))$。在此情形下，$\tilde{A}$: $J^2(\mathcal{E}(1)) \to \mathcal{E}_{(ab)}(1)$ 是 $\mathcal{E}(1)$ 的二阶喷射正合序列的一个真正分裂，因此我们发现 $\ker(\tilde{A}) \cong J^2(\mathcal{E}(1))/\mathcal{E}_{(ab)}(1) \cong J^1(\mathcal{E}(1))$。

在爱因斯坦情形下，近爱因斯坦方程简化为

$$A_{ab}\tau = \nabla_{(a}\nabla_{b)_0}\tau = 0.$$

Th而射影方程也会得到简化，因为 $\tilde{\mathsf{P}}_{ab} = \frac{1}{n-1}\mathrm{Ric}^{ab} \equiv \frac{1}{n(n-1)}$ 标量曲率 $\boldsymbol{g}_{ab}$，

$$\tilde{A}_{ab}\tau = \nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau + \frac{1}{n(n-1)}\,\mathrm{Sc}\,\tau \boldsymbol{g}_{ab} = 0.$$

˜那么显然， $A_{ab}\tau = 0$ 的一个解也将满足 $A_{ab}\tau = 0$。

事实上，容易证明上面的包含映射只是子丛 ker($\tilde{A}$) ⊂ker(A) ⊂ $J^2(\mathcal{E}[1])$ 的包含映射，并利用 σ 将密度丛平凡化。

˜对于偏微分方程 $A\tau = 0$，上述定理刻画了其解。

2.7. **BGG序列**。 抛物几何 $[5, 27]$ 中的 Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG) 序列，是与任意不可约tractor丛相关联的微分算子不变序列。我们在共形几何中所考虑的tractor丛，是标准拖拉机丛某个张量幂的 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1, q+1)$ 不变子丛，并配备了度量符号为 $(p+1, q+1)$ 的双线性型 h_{AB}。我们始终不考虑旋量表示。特别地，我们所考虑的不可约tractor丛是具有杨图所给定对称性的无迹拖拉机。

我们在射影几何中考虑的 tractor 丛是标准拖拉机丛与余拖拉机丛的张量积的 $\mathfrak{sl}(n+1)$ 不变子丛。我们考虑的不可约射影 tractor 丛具有杨图对称性，上指标和下指标各对应一个杨图，并且对于上、下指标之间的缩并，它们都是无迹的。

设 $\mathcal{V}$ 是一个不可约（共形或射影）tractor 丛。与 $\mathcal{V}$相关联并配备其 tractor 联络 ∇ 的是扭曲德拉姆序列，

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \xrightarrow{d^\nabla} T^*M \otimes \mathcal{V} \xrightarrow{d^\nabla} \Lambda^2 T^*M \otimes \mathcal{V} \xrightarrow{d^\nabla} \cdots,$$

其中 $d^\nabla(V)_{a_0 a_1 \cdots a_k} = (k+1)\nabla_{[a_0} V_{a_1 \cdots a_k]}$，我们省略了 $\mathcal{V}$的 tractor 指标，而 ∇ 是与 M上的任意无挠仿射联络配对的 tractor 联络。当 tractor 联络平坦时，扭曲德拉姆序列构成一个复形。

Kost ant 余微分是一个反向作用的代数算子，

$$0 \xleftarrow{\partial^*} \mathcal{V} \xleftarrow{\partial^*} T^*M \otimes \mathcal{V} \xleftarrow{\partial^*} \Lambda^2 T^*M \otimes \mathcal{V} \xleftarrow{\partial^*} \cdots,$$

它满足 $\partial^* \circ \partial^* = 0$。对于共形 tractor 丛 $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}_{A_1 \cdots A_j}$ 和 $V \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes \mathcal{V})$，令

$$\partial^*(V)_{a_1 \cdots a_{k-1}\ A_1 \cdots A_j} = \sum_{i=1}^{j} 2\mathbb{X}_{A_i}{}^{B a_k} V_{a_1 \cdots a_k A_1 \cdots A_{i-1} B A_{i+1} \cdots A_j},$$

其中 $\mathbb{X}_{AB}{}^b = X_{[A} Z_{B]}{}^b$。tractor $\mathbb{X}_{AB}{}^b$ 是无权且不变的，因为 ˆ $\mathbb{X}_{AB}{}^b = \mathbb{X}_{AB}{}^b + X_{[A} X_{B]} \Upsilon^b = \mathbb{X}_{AB}{}^b$，并给出一个不变丛嵌入 $\mathbb{X}\colon\ \mathcal{E}_b \hookrightarrow \mathcal{E}_{[AB]}$。对于射影 tractor 丛 $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}_{\alpha_1 \cdots \alpha_j}{}^{\gamma_1 \cdots \gamma_\ell}$和 $V \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes \mathcal{V})$，令

$$\begin{aligned}\partial^*(V)^{\gamma_1 \cdots \gamma_\ell}_{a_1 \cdots a_{k-1}\ \alpha_1 \cdots \alpha_j} = &\sum_{i=1}^{j} 2\mathbb{X}^\beta{}_{\alpha_i}{}^{a_k} V_{a_1 \cdots a_k \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \beta \alpha_{i+1} \cdots \alpha_j}{}^{\gamma_1 \cdots \gamma_\ell} \\ &- \sum_{i=1}^{\ell} 2\mathbb{X}^{\gamma_i}{}_\beta{}^{a_k} V_{a_1 \cdots a_k \alpha_1 \cdots \alpha_j}{}^{\gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \beta \gamma_{i+1} \cdots \gamma_\ell}\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{X}^\beta{}_\alpha{}^b = X^\beta Z_\alpha{}^b$ 是无权不变量，因为 X^β 和 $Z_\alpha{}^b$ 都是典范的。与共形情形类似， $\mathbb{X}^\beta{}_\alpha{}^b$ 给出了一个不变丛嵌入， $\mathbb{X}\colon\ \mathcal{E}_b \hookrightarrow$无迹（$\mathcal{E}^\beta{}_\alpha$）。

同调丛为
$H_k(\mathcal{V})$ =核(∂^*: $\Lambda^k T^*M\otimes\mathcal{V}\to\Lambda^{k-1}T^*M\otimes\mathcal{V}$)/像($\partial^*$: $\Lambda^{k+1}T^*M\otimes\mathcal{V}\to\Lambda^k T^*M\otimes\mathcal{V}$).
我们将投影到同调的映射记为 Π: $\ker(\partial^*)\to H_k(\mathcal{V})$，并注意到对于$k=0$，这给出了一个映射 Π: $\mathcal{V}\to H_0(\mathcal{V})$。对于不可约抛物几何，包括共形几何和射影几何，同调丛 $H_k(\mathcal{V})$ 是不可约 $\mathfrak{g}_0$ 丛，但在偶数维共形情形下的 $k=\frac{n}{2}$ 除外。对于共形几何，$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{co}(p,\ q)=\mathfrak{so}(p,\ q)\oplus\mathbb{R}$，因此同调丛是无迹不可约带权张量丛。在射影几何中，$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{gl}(n)$，因此同调丛是带权不可约张量丛。

伯恩斯坦-盖尔范德-盖尔范德理论给出了两类重要的算子。第一类是 BGG 分裂算子。

定理 *2.4*（[27]中的定理 *2.5* 和引理 *2.7*）。存在不变分裂算子，L: $\Gamma(H_k(\mathcal{V}))\to\Gamma(\ker(\partial^*))$，使得 $\Pi\circ L=\mathrm{id}_{H_k(\mathcal{V})}$ 且 $\partial^*\circ d^\nabla\circ L=0$。子空间 $\mathrm{im}(L)\subset\Gamma(\Lambda^k(T^*M)\otimes\mathcal{V})$ 由满足以下条件的截面组成：s $\partial^*(s)=0$ 且 $\partial^*\circ d^\nabla(s)=0$。

我们称 $L_k(s)$ 为 s的完全延拓。上述条件足以计算分裂算子。取 $\mathcal{V}=\mathcal{E}_A$，即标准共形余拖拉克丛。我们可以在一个分裂下计算 ∂^* 在
$V_{aA}=\omega_a Y_A+\nu_{ab}Z_A{}^b+\tau_a X_A\in\Gamma(\mathcal{E}_{aA})$上的作用，

$$\partial^*(V)=2\mathbb{X}_A{}^{Ba}(\omega_a Y_B+\nu_{ab}Z_B{}^b+\tau_a X_B)=-\omega_b Z_A{}^b+\nu_a{}^a X_A. \tag{2.5}$$

因此，设 $\sigma\in\Gamma(H_0(\mathcal{E}_A))=\Gamma(\mathcal{E}[1])$，且 $L(\sigma)_A=(\sigma,\mu_a,\rho)$。那么 $d^\nabla\circ L(\sigma)=\nabla_a(\sigma,\mu_b,\rho)=(\nabla_a\sigma-\mu_a,\nabla_a\mu_b+\sigma\mathrm{P}_{ab}+\rho\boldsymbol{g}_{ab},\nabla_a\rho-\mathrm{P}_a{}^b\mu_b)$。于是，条件 $\partial^*\circ d^\nabla\circ L=0$ 变为 $\nabla_a\sigma-\mu_a=0$ and $\nabla_a\mu^a+J\sigma+n\rho=0$。因此，$\mu_a=\nabla_a\sigma$ and $\rho=-\frac{\Delta+J}{n}\sigma$。所以，$L$: $\Gamma(\mathcal{E}[1])\to\Gamma(\mathcal{E}_A)$ 由 ~~$L(\sigma)$~~ $=D_A\sigma$ 给出，如式 (2.4) 所示。类似地，分裂算子 L: $\Gamma(\mathcal{E}(1))\to\Gamma(\mathcal{E}_\alpha)$ 就是射影tractor D。

分裂算子产生第二族算子，即 BGG 微分算子 $\mathscr{D}_k:=\Pi\circ d^\nabla\circ L$: $\Gamma(H_k(\mathcal{V}))\to\Gamma(H_{k+1}(\mathcal{V}))$ 以及 BGG 序列，

$$0\longrightarrow\Gamma(H_0(\mathcal{V}))\xrightarrow{\mathscr{D}_0}\Gamma(H_1(\mathcal{V}))\xrightarrow{\mathscr{D}_1}\Gamma(H_2(\mathcal{V}))\xrightarrow{\mathscr{D}_2}\cdots$$

在平坦情形下它是一个复形。若 U 是平行的，则 $\partial^*(U)=0$ 且 $\partial^*\circ d^\nabla(U)=0$，因此 $U=L_0\circ\Pi(U)$ 和 $\mathscr{D}_0\circ\Pi(U)=\Pi\circ d^\nabla(U)=0$。$\mathscr{D}_0 s=0$ 的解若满足 正规 条件，则$L_0(s)$ 是平行的。

对于平坦几何，$d^\nabla\circ L_k=L_{k+1}\circ\mathscr{D}_k$，因此下图中的方块交换

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{V}) & \xrightarrow{d^\nabla} & \Gamma\big(\Lambda^1T^*M\otimes\mathcal{V}\big) & \xrightarrow{d^\nabla} & \Gamma\big(\Lambda^2T^*M\otimes\mathcal{V}\big) & \xrightarrow{d^\nabla} & \cdots \\ & & \uparrow L_0 & & \uparrow L_1 & & \uparrow L_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma\big(H_0(\mathcal{V})\big) & \xrightarrow{\mathscr{D}_0} & \Gamma\big(H_1(\mathcal{V})\big) & \xrightarrow{\mathscr{D}_1} & \Gamma\big(H_2(\mathcal{V})\big) & \xrightarrow{\mathscr{D}_2} & \cdots \end{array} \tag{2.6}$$

Howe然而，对于一般的曲几何，上述图表并不交换 .

定理 2.5. 设 $\mathcal{V}$ 是定义在共形平坦或射影平坦流形上的不可约*tractor*丛。则图表 (2.6) 交换。

映射 L_k 在属于第 k 个 ***BGG*** 算子 $\mathscr{D}_k\colon \Gamma(H_k(\mathcal{V})) \to \Gamma(H_{k+1}(\mathcal{V}))$ 的核的张量与 $\Lambda^k(T^*M) \otimes \mathcal{V}$ 的截面之间建立一一对应，这些截面属于 ∂^* 和 d^∇ 的核。

特别地，对于 $k = 0$ ，$\mathscr{D}_0 s = 0$ 的解与 $\mathcal{V}$中的平行拖拉机一一对应。因此， $\mathscr{D}_0 s = 0$ 的所有解都是正规的。

证明。 在平坦情形下，我们有 $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$，于是 $d^\nabla \circ L_k(s) \in \ker(\partial^*) \cap \ker(\partial^* \circ d^\nabla)$，因此由定理 2.4， $d^\nabla \circ L_k(s) \in \operatorname{im}(L_{k+1})$。接着注意到 $\Pi \circ d^\nabla \circ L_k(s) = \mathscr{D}_k(s) = \Pi \circ L_{k+1} \circ \mathscr{D}_k(s)$，而 $d^\nabla \circ L_k(s) = L_{k+1} \circ \mathscr{D}_k(s)$ 现在可由 Π 在 $\operatorname{im}(L_{k+1})$ 上是单射推出。

令 $s \in \Gamma(H_k(\mathcal{V}))$。则 $L_k(s) \in \ker(\partial^*)$，并且如果 $\mathscr{D}_k(s) = 0$，那么 $L_{k+1} \circ \mathscr{D}_k(s) = d^\nabla \circ L_k(s) = 0$，因此 $L_k(s)$ 同时位于 ∂^* 和 d^∇ 的核中。

逆向不要求几何是平坦的。令 $V \in \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes \mathcal{V})$ 同时位于 ∂^* 和 d^∇的核中，则根据定理 2.4， $V \in \operatorname{im}(L_k)$。因此，对于某个 $s \in \Gamma(H_k(\mathcal{V}))$，有 $V = L_k(s)$，并且 $\mathscr{D}_k(s) = \Pi \circ d^\nabla(V) = 0$。 □

对于 $\mathcal{V} = \mathcal{E}_A$，根据（2.5）可确定 ∂^* 的像是由 Z 和 X张成的子空间。因此，到同调上的投影由 $\sigma Y_A + \mu_a Z_A{}^a + \rho X_A \mapsto \sigma$给出，等价地，也可表示为 $U_A \mapsto X^A U_A$。

在共形几何中，对于具有由杨图给出的对称性的不可约 tractor 丛，投影 $\Pi\colon \mathcal{V} \to H_0(\mathcal{V})$ 的计算方法是：先应用对称性所允许的尽可能多的 X^A投影算子，然后对剩余指标应用 $Z^A{}_a$ 投影算子。对于射影 tractor 丛，下指标上的投影计算方法是：先应用对称性所允许的尽可能多的 X^α 投影算子，然后对剩余指标应用 $W^\alpha{}_a$ 投影算子。对于上指标，则对所有指标应用不变的$Z_\alpha{}^a$ 投影算子。

对于 tractor $V \in \Gamma(\mathcal{V})$，张量 $\Pi(V)$ 称为 V的顶层分量 。该投影总是不变的。以下引理常用于将张量方程转化为 tractor 方程。

引理 2.6。 设 $\mathcal{V}$ 是一个不可约 ***tractor*** 丛，且 $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ 是平行的。若$\Pi(V) = 0$，则 $V = 0$。

*Pr*唉。 由定理 2.4， $V = L \circ \Pi(V) = 0$，因为 $d^\nabla(V) = 0$ 且 $\partial^*(V) = 0$。 □

对于任何特定的 tractor丛，都可以通过直接求导并证明 V 的所有分量都为零，来证明上述引理。例如，如果 $V_A \in \Gamma(\mathcal{E}_A)$ 平行且 $X^A V_A = 0$，那么在任意尺度下，

$$\nabla_a(X^A V_A) = Z^A{}_a V_A = 0 \implies \nabla_b(Z^A{}_a V_A) = -\mathsf{P}_{ab} X^A V_A - \boldsymbol{g}_{ab} Y^A V_A = -\boldsymbol{g}_{ab} Y^A V_A = 0,$$

因此 $X^A V_A = 0$、 $Z^A{}_a V_A = 0$ 和 $Y^A V_A = 0$，所以 $V = 0$。随着 tractor 指标数量增加，计算会变得愈发繁琐，因此采用 BGG机制是一种便捷的途径。

本文将使用的 tractor 丛和 BGG 算子详述如下。

射影 Killing 向量算子和共形 Killing 向量算子分别是针对$\mathcal{E}_{[\alpha\beta]}$和 $\mathcal{E}_{[AB]}$的 BGG 算子。对于丛 $\mathcal{E}_{[AB]}$，当 $n \geq 4$时，BGG 序列为：

$$\Gamma(\mathcal{E}_a[2]) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[2]) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \Gamma\left(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}_0(\mathcal{E}_a)[2]\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_2} \cdots,$$

wher该算子 $\mathscr{D}_0$ 是共形不变的共形 *Killing* 算子

$$k_a \mapsto \nabla_{(a}k_{b)_0}.$$

位于上述共形 Killing 算子核中的张量 $k_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$ 是一个共形 *Killing* 向量。在射影情形下， $\mathcal{E}_{[\alpha\beta]}$ 的 BGG 序列为

$$\Gamma(\mathcal{E}_a(2)) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}(2)) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \Gamma\left(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}(\mathcal{E}_a)(2)\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_2} \cdots,$$

wher该算子 $\mathscr{D}_0$ 是射影不变的射影 *Killing* 算子，

$$r_a \mapsto \nabla_{(a}r_{b)}.$$

位于上述算子核中的张量 $r_a \in \Gamma(\mathcal{E}_a(2))$ 是一个射影 *Killing* 向量。

当射影结构是度量射影结构时，也就是说，对于伪黎曼度量 g，有 $\boldsymbol{p} = [\nabla^g]$，那么一旦我们使用 g 的体积形式将密度丛平凡化，$(M, \boldsymbol{p})$ 的射影 Killing 向量就与 (M, g) 的 Killing 向量相同。去掉权重后，上述序列就成为黎曼变形序列，即克罗内克序列 [20], 算子 $\mathscr{D}_1$ 通常称为不相容算子，在弹性力学研究中具有重要作用 [2]。

Killing 向量存在对称和反对称推广。设 $1 \leq \ell \leq n-1$。考虑完全反对称的 tractor 丛 $\mathcal{E}_{[A_0A_1\cdots A_\ell]}$ 和 $\mathcal{E}_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_\ell]}$。同调丛为 $H_0(\mathcal{E}_{[A_0A_1\cdots A_\ell]}) = \mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1]$ 以及 $H_0(\mathcal{E}_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_\ell]}) = \mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}(\ell+1)$。这些同调丛可通过先应用一个 X 投影算子来确定；注意到由于反对称指标，任何进一步的 X 投影算子都会得到零。因此，剩余的投影算子在共形情形下必须是 $Z^A{}_a$，在射影情形下必须是 $W^\alpha{}_a$。

如果 n 为偶数且 $\frac{n}{2}+q$ 为偶数，那么取 $\ell = \frac{n}{2}$会使共形tractor丛$\mathcal{E}_{[A_0A_1\cdots A_\ell]}$和张量丛 $\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1]$ 处于中间次数，因此它们在 $\mathfrak{so}(p+1,q+1)$ 和 $\mathfrak{so}(p,q)$ 的作用下不可约。虽然这本身很有意义，但我们在此不予讨论。在这种情况下，中间次数共形 Killing–Yano 形式的 BGG 算子，是作用于自对偶形式和反自对偶形式的 BGG 算子之和。对于射影算子， $\ell = \frac{n}{2}$ 并非特殊情形。

共形BGG序列是

$$\Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1]) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma\left(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\vdots&\\\square&\end{smallmatrix}_0(\mathcal{E}_a)[\ell+1]\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \cdots,$$

其中，算子 $\mathscr{D}_0$ 是共形不变的共形 *Killing–Yano* 算子，

$$\omega_{a_1\cdots a_\ell} \mapsto \text{trace-free}(\nabla_{(a_0}\omega_{a_1)a_2\cdots a_\ell}).$$

上述算子的核由共形 *Killing–Yano* 形式构成。射影 BGG 序列为

$$\Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}(\ell+1)) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma\left(\begin{array}{c}\square\\\vdots\\\square\end{array}\ (\mathcal{E}_a)(\ell+1)\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \cdots,$$

其中算子 $\mathscr{D}_0$ 是射影不变的 射影 *Killing–Yano* 算子,

$$\omega_{a_1\cdots a_\ell} \mapsto \nabla_{(a_0}\omega_{a_1)a_2\cdots a_\ell}.$$

上述算子的核由射影 *Killing–Yano* 形式构成。在度量射影情形中，对于 (M,g)，我们直接称其为*Killing–Yano* 形式 。

Killing 向量的对称推广即为 Killing 张量。令 $\ell\geq 1$ 并考虑 tractor 丛 $\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_0(\mathcal{E}_A)$ 和 $\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}(\mathcal{E}_\alpha)$。我们采用这些空间的斜对称表示。因此，tractor $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\in \begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_0(\mathcal{E}_A)$ 满足

$$K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = K_{[A_1B_1]\cdots[A_\ell B_\ell]} \quad\text{and}\quad K_{\cdots[A_iB_iA_{i+1}]B_{i+1}\cdots}=0$$

且完全无迹。射影 tractor 丛由具有相同对称性、但不要求无迹的 tractor 构成。为确定同调丛，注意到对于所有 $1\leq i\leq \ell$，我们都可以应用 X^{A_i} (或 X^{α_i})，而不会使所得的加权 tractor 消失。然而，由于指标对是斜对称的，其余投影算子都必须是 $Z^{B_i}{}_{a_i}$ (或 $W^{\beta_i}{}_{a_i}$)。

所得的同调丛为 $\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell]$ 和 $\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)}(2\ell)$。共形情形会产生无迹张量丛这一断言需要论证。设 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\in\Gamma(\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_0(\mathcal{E}_A))$。那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^{a_1a_2}(X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots)K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} &= -(X^{A_1}X^{B_1}X^{A_2}Y^{B_2}\cdots)K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\ &\quad -(X^{A_1}Y^{B_1}X^{A_2}X^{B_2}\cdots)K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}=0,\end{aligned}$$

因为 K 无迹，并且在所有指标对上均为斜对称 A_iB_i。

$\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_0(\mathcal{E}_A)$的 BGG 序列为

$$\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell]) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma\left(\mathcal{E}_{(a_0a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell]\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \cdots,$$

其中 r 算子 $\mathscr{D}_0$ 是共形不变的共形 *Killing* 张量算

$$k_{a_1\cdots a_\ell} \mapsto \nabla_{(a_0}k_{a_1\cdots a_\ell)_0}.$$

上述算子的核中的张量是秩 ℓ 共形 *Killing* 张量。$\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_0(\mathcal{E}_\alpha)$的 BGG 序列为

$$\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)}(2\ell)) \xrightarrow{\mathscr{D}_0} \Gamma\left(\mathcal{E}_{(a_0a_1\cdots a_\ell)}(2\ell)\right) \xrightarrow{\mathscr{D}_1} \cdots,$$

其中 r 算子 $\mathscr{D}_0$ 是射影不变的射影 *Killing* 张量算子

$$r_{a_1\cdots a_\ell} \mapsto \nabla_{(a_0}r_{a_1\cdots a_\ell)}.$$

上述算子的核中的张量是秩 ℓ 射影 *Killing* 张量。在度量射影情形下，我们改称秩 ℓ *Killing* 张量，其中 (M,g)。

上述例子有一个共同的重要特征：共形 BGG 算子是射影 BGG 算子的弱化。具体来说，设 g 是 M上的一个度量，令

$(M,\ \boldsymbol{c}=[g])$ 和 $(M,\ \boldsymbol{p}=[\nabla^g])$ 使用与 g 对应的尺度密度 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$，以平凡化密度丛。

因此，射影 Killing–Yano 形式是共形 Killing–Yano 形式，而 Killing 张量的无迹部分是共形 Killing 张量。给定一个固定的共形 Killing 张量、形式或向量，便可对尺度施加一个自然条件。

设 $(M,\boldsymbol{c})$ 是一个共形流形，设 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是一个尺度，并考虑定义在 $M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$ 上的度量 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$。设 $\ell\geq 1$，且令 $\omega_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell}[\ell+1])$ 为一个共形 Killing–Yano 形式。如果在使用 σ 将权丛平凡化后，$\omega|_{M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)}$ 是 $(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)\ g)$ 的 Killing–Yano 形式，那么我们称 σ（以及 g）为 适用于 ω 的 Killing 尺度。这包括 Killing 向量的情形。

设 $\ell\geq 2$，并且 $k_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 是一个共形 Killing 张量。若在利用 σ 将权丛平凡化后，$k_{a_1\cdots a_\ell}$ 是 $(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)\ g)$ 的 Killing 张量，则称 σ（以及 g）为 k 的强 ***Killing*** 尺度。强条件限制非常严格，因为黎曼流形上的大多数 Killing 张量都不是无迹的。若存在 $(M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)\ g)$ 的 Killing 张量 $r_{a_1\cdots a_\ell}$，其无迹部分为 k，即 $k_{a_1\cdots a_\ell}=r_{(a_1\cdots a_\ell)_0}$，则称 σ（以及 g）为 k 的***Killing*** 尺度。

我们在此定义的 Killing 尺度概念扩展了 [12] 中定义的概念。

3. Special Einstein Products

设 $(M_1,\ g_1)$ 和 $(M_2,\ g_2)$ 是维数分别为 $n_1\geq 3$ 和 $n_2\geq 3$、度量符号分别为 $(p_1,\ q_1)$ 和 $(p_2,\ q_2)$ 的伪黎曼流形。乘积流形 $M_1\times M_2$ 的维数为 $n=n_1+n_2$，其切丛分解为 $TM=\pi_1^*TM_1\oplus\pi_2^*TM_2$，其中 $\pi_i\colon M\to M_i$ 是投影。通常我们会在记号中省略拉回。此时 M 配备乘积度量 $g=g_1\times g_2$，并将 g_i 视为 $TM_i\otimes TM_i)\subset TM\otimes TM$ 的截面。

大多数黎曼不变量都能自然地传递到乘积上。曲率为 $R_{abcd}=R^1{}_{abcd}+R^2{}_{abcd}$，$\mathrm{Ric}_{ab}=\mathrm{Ric}^{\ 1}{}_{ab}+\mathrm{Ric}^{\ 2}{}_{ab}$，而 $\mathrm{Sc}=\mathrm{Sc}^1+\mathrm{Sc}^2$。$g$ 的 Levi-Civita 联络也是 $\nabla=\nabla^1+\nabla^2$的直和。

设 $(M_1,\ \boldsymbol{c}_1)$ 和 $(M_2,\ \boldsymbol{c}_2)$ 为共形流形。那么，乘积流形 $M=M_1\times M_2$ 并未典范地带有由 $\boldsymbol{c}_1$ 和$\boldsymbol{c}_2$导出的共形结构。因此，我们需要固定度量 $g_1\in\boldsymbol{c}_1$ 和 $g_2\in\boldsymbol{c}_2$，并构成乘积度量。

一般而言，共形舒滕张量不能很好地分解。除一种特殊情况外，

命题3.1。 设 $([M_1,\ [g_1])$、$(M_2,\ [g_2])$ 和$(M=M_1\times M_2,\ [g]=[g_1\times g_2])$ 为共形流形。那么$\mathsf{P}_{ab}=\mathsf{P}^1{}_{ab}+\mathsf{P}^2{}_{ab}$ 当且仅当 g_1 和 g_2 为爱因斯坦且$\frac{J^1}{n_1}+\frac{J^2}{n_2}=0$。

证明。 我们首先考察共形标量曲率，

$$2(n-1)J=\mathrm{Sc}=\mathrm{Sc}_1+\mathrm{Sc}_2=2(n_1-1)J_1+2(n_2-1)J_2.$$

那么（M， g）的共形舒滕张量为

$$
\begin{aligned}
(n-2)\mathsf{P}_{ab} &= \mathrm{Ric}_{ab} - J\boldsymbol{g}_{ab} \\
&= \mathrm{Ric}^{1}{}_{ab} + \mathrm{Ric}^{2}{}_{ab} - \tfrac{n_1-1}{n-1}J_1 g^1{}_{ab} - \tfrac{n_2-1}{n-1}J_2 g^2{}_{ab} \\
&\quad -\tfrac{n_1-1}{n-1}J_1 g^2{}_{ab} - \tfrac{n_2-1}{n-1}J_2 g^1{}_{ab} \\
&= (n_1-2)\mathsf{P}^1{}_{ab} + \left(\tfrac{n_2}{n-1}J_1 - \tfrac{n_2-1}{n-1}J_2\right) g^1{}_{ab} \\
&\quad +(n_2-2)\mathsf{P}^2{}_{ab} + \left(\tfrac{n_1}{n-1}J_2 - \tfrac{n_1-1}{n-1}J_1\right) g^2{}_{ab} \\
&= (n-2)\left(\mathsf{P}^1{}_{ab} + \mathsf{P}^2{}_{ab}\right) - n_2\mathsf{P}^1{}_{ab} + \left(\tfrac{n_2}{n-1}J_1 - \tfrac{n_2-1}{n-1}J_2\right) g^1{}_{ab} \\
&\quad -n_1\mathsf{P}^2{}_{ab} + \left(\tfrac{n_1}{n-1}J_2 - \tfrac{n_1-1}{n-1}J_1\right) g^2{}_{ab}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

因此，$\mathsf{P}_{ab} = \mathsf{P}^1{}_{ab} + \mathsf{P}^2{}_{ab}$ 当且仅当

$$
-n_2\mathsf{P}^1{}_{ab} + \left(\tfrac{n_2}{n-1}J_1 - \tfrac{n_2-1}{n-1}J_2\right)\boldsymbol{g}^1{}_{ab} = 0 \quad \text{and} \quad -n_1\mathsf{P}^2{}_{ab} + \left(\tfrac{n_1}{n-1}J_2 - \tfrac{n_1-1}{n-1}J_1\right)\boldsymbol{g}^2{}_{ab} = 0
$$

这等价于两个度量都是爱因斯坦度量且满足

$$
-\tfrac{n_2}{n_1}J_1 + \left(\tfrac{n_2}{n-1}J_1 - \tfrac{n_2-1}{n-1}J_2\right) = 0 \quad \text{and} \quad -\tfrac{n_1}{n_2}J_2 + \left(\tfrac{n_1}{n-1}J_2 - \tfrac{n_1-1}{n-1}J_1\right) = 0,
$$

二者都化简为 $\frac{J_1}{n_1} + \frac{J_2}{n_2} = 0$。 □

若 (M_1, g_1) 和 (M_2, g_2) 是满足 $\frac{J_1}{n_1} + \frac{J_2}{n_2} = 0$ 的 Einstein 流形，则称乘积 $M = (M_1 \times M_2, [g_1 \times g_2])$ 为特殊爱因斯坦乘积。

我们将利用 $g = g_1 \times g_2$、g_1 和 g_2 的尺度密度来平凡化所有密度丛。考虑 $\mathcal{E}[1]$ 的一阶和二阶射流丛。我们有

$$
J^1(\mathcal{E}[1]) = \mathcal{E}[1] \oplus T^*M = \mathcal{E}[1] \oplus T^*M_1 \oplus T^*M_2
$$

and

$$
\begin{aligned}
J^2(\mathcal{E}[1]) &= \mathcal{E}[1] \oplus T^*M \oplus S^2(T^*M) \\
&= \mathcal{E}[1] \oplus T^*M_1 \oplus T^*M_2 \oplus S^2(T^*M_1) \oplus S^2(T^*M_2) \oplus T^*M_1 \odot T^*M_2
\end{aligned}
$$

考虑 M 的近似爱因斯坦算子。令 $p = (p_1, p_2) \in M$。令 $j^2_p(\tau) = (\tau, \nabla_a\tau, \nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau) \in J^2_p(\mathcal{E}[1])$，则

$$
A_{ab}(j^2(\tau)) = \nabla_{(a}\nabla_{b)_0}\tau + \mathsf{P}_{(ab)_0}\tau.
$$

由于 $\mathsf{P} \in \Gamma(S^2(T^*M_1) \oplus S^2(T^*M_2))$，如果 $A_{ab}(j^2_p(\tau)) = 0$，那么 $\nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau \in S^2(T^*_pM_1) \oplus S^2(T^*_pM_2)$，这恰好是存在两个喷 $j^2_{p_1}(\tau_1) \in J^2_{p_1}(\mathcal{E}_{M_1})$ 和 $j^2_{p_2}(\tau_2) \in J^2_{p_2}(\mathcal{E}_{M_2})$，使得 $j^2_p(\tau) = j^2_p(\tau_1) + j^2_p(\tau_2)$ 的条件。对于特殊爱因斯坦乘积，我们还可以进一步刻画 A 的核。

定理 3.2. 设 $(M_1, [g_1])$、$(M_2, [g_2])$ 和 $(M = M_1 \times M_2, [g] = [g_1 \times g_2])$ 为共形流形，并假设 (M, g) 是特殊爱因斯坦乘积。设 $\mathcal{T} = \pi_1^*\mathcal{T}_1 \oplus \pi_2^*\mathcal{T}_2$ 配备度量 $\hat{h} = h^1 + h^2$。令 $I^1 \in \Gamma(\mathcal{T}_1)$ 和 $I^2 \in \Gamma(\mathcal{T}_2)$ 为分别对应于度量 g_1 和 g_2 的平行 *tractor*。于是，拉回到 M 后，截面 $I^1 - I^2 \in \Gamma(\hat{\mathcal{T}})$ 对 $\hat{h}$ 是零向量，且 M 的 *tractor* 丛为 $\mathcal{T} = (I^1 - I^2)^{\perp}/\langle I^1 - I^2\rangle$。$\mathcal{T}$ 上的 *tractor* 联络为 $\nabla = \nabla^1 + \nabla^2$，即 $\mathcal{T}^1$ 和 $\mathcal{T}^2$ 上联络的直和。

证明。 首先我们计算

$$|I^1 - I^2|^2 = |I^1|^2 + |I^2|^2 = -2\left(\frac{J_1}{n_1} + \frac{J_2}{n_2}\right) = 0,$$

因为 M 是特殊爱因斯坦乘积。

令 $j_p^2(\tau) \in \ker(A)_p$。根据上述结果，$j_p^2(\tau)$分解为 $j_p^2(\tau) = j_p^2(\tau_1) + j_p^2(\tau_2)$，其中 τ_1 和 τ_2 分别是定义在 M_1 和 M_2上的函数。由于 M 是特殊爱因斯坦乘积，我们有 $\mathsf{P} = \mathsf{P}^1{}_{ab} + \mathsf{P}^2{}_{ab}$。因此我们可以写成

$$\nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau + \mathsf{P}_{ab}\tau = \begin{pmatrix} \nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau_1 + \mathsf{P}^1{}_{ab}\tau_1 + \mathsf{P}^1{}_{ab}\tau_2 & 0 \\ 0 & \nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau_2 + \mathsf{P}^2{}_{ab}\tau_2 + \mathsf{P}^2{}_{ab}\tau_1 \end{pmatrix}.$$

由于 $n_1 P^1{}_{ab} = J^1 g^1{}_{ab}$和 $n_2 P^2{}_{ab} = J^2 g^2{}_{ab}$，可知 $j^2_{p_1}(\tau_1) \in \ker(A^1)_p = \mathcal{T}^1_p$且$j^2_{p_2}(\tau_2) \in \ker(A^2)_p = \mathcal{T}^2_p$，因此 $j_p^2(\tau) \in \hat{\mathcal{T}}$。于是我们写作 $j_p^2(\tau) = U = U^1 + U^2$，其中

$$j^2_{p_1}(\tau_1) = U^1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \mu^1{}_a \\ \rho_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad j^2_{p_2}(\tau_2) = U^2 = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \mu^2{}_a \\ \rho_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\rho^1 = -\frac{1}{n_1}(\Delta\tau_1 + J^1\tau_1)$ 和 $\rho^2 = -\frac{1}{n_2}(\Delta\tau_2 + J^2\tau_2)$。因此，

$$\nabla_{(a}\nabla_{b)}\tau + \mathsf{P}_{ab}\tau = \begin{pmatrix} \left(-\rho_1 + \frac{J^1}{n_1}\tau_2\right) g^1{}_{ab} & 0 \\ 0 & \left(-\rho_2 + \frac{J^2}{n_2}\tau_1\right) g^2{}_{ab} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

So

$$\begin{aligned} -\rho_1 + \frac{J^1}{n_1}\tau_2 &= -\rho_2 + \frac{J^2}{n_2}\tau_1 \\ \implies -\rho_1 - \frac{J^2}{n_2}\tau_2 &= -\rho_2 - \frac{J^1}{n_1}\tau_1 \\ \implies \rho_1 - \frac{J^1}{n_1}\tau_1 &= \rho_2 - \frac{J^2}{n_2}\tau_2 \\ \implies \langle I^1, U^1\rangle = \langle I^2, U^2\rangle &\implies \langle U^1 + U^2, I^1 - I^2\rangle = 0 \end{aligned}$$

因此 $j_p^2(\tau) \in (I^1 - I^2)^\perp$。$j_p^2(\tau)$ 的分解在给 τ_1 加上一个常数并从 τ_2 中减去同一个常数的意义下是唯一的。常值函数对应于 $j_p^2(\sigma_1) = I^1$ 和 $j_p^2(\sigma_2) = I^2$ 的倍数，因此我们定义了一个典范单射$\mathcal{T} = \ker(A) \to (I^1 - I^2)^\perp / \langle I^1 - I^2\rangle$。由于这两个丛的秩均为 $n+2$，这就是一个同构。

尺度 g 中的投影算子 X 和 Z 由下式给出

$$X(j_p^2(\tau)) = \tau(p) = \tau_1(p) + \tau_2(p), \quad Z(j_p^2(\tau)) = \nabla_a\tau|_p = \nabla_a\tau_1|_p + \nabla_a\tau_2|_p,$$

因此 $X = \hat{X} + \langle I^1 - I^2\rangle$ 和 $Z = \hat{Z} + \langle I^1 - I^2\rangle$，其中 $\hat{X} = X^1 + X^2 \in \Gamma((I^1 - I^2)^\perp[1])$，且 $\hat{Z} = Z^1 + Z^2 \in \Gamma((I^1 - I^2)^\perp \otimes T^*M[1])$。令 $\hat{Y} = Y^1 + Y^2 \in \Gamma(\hat{\mathcal{T}})$。一般来说，$\hat{Y}$不是 $(I^1 - I^2)^\perp$ 的截面。根据 (3.2)，投影算子 Y 满足

$$-nY(j_p^2(\tau)) = \Delta\tau|_p + J\tau(p)$$

$$
\begin{aligned}
&= n\left(-\rho_1 + \frac{J_1}{n_1}\tau_2\right) = n\left(-\rho_2 + \frac{J_2}{n_2}\tau_1\right)\\
&= -n_1\rho_1 + J_1\tau_2 - n_2\rho_2 + J_2\tau_1\\
&= -n_1 Y^1(U) - n_2 Y^2(U) + J_1 X^2(U) + J_2 X^1(U)\\
&= -n(Y^1(U) + Y^2(U)) + n_2 Y^1(U) + J_2 X^1(U) + n_1 Y^2(U) + J_1 X^2(U)\\
&= -n\hat{Y}(U) + n_2\left(Y^1(U) - \frac{J_1}{n_1}X^1(U)\right) + n_1\left(Y^2(U) - \frac{J_2}{n_2}X^2(U)\right)\\
&= -n\hat{Y}(U) + n_2\langle I^1, U\rangle + n_1\langle I^2, U\rangle\\
&= -n\hat{Y}(U) + n\langle I^1, U\rangle = -n\hat{Y}(U) + n\langle I^2, U\rangle,
\end{aligned}
$$

因此，$Y = \hat{Y} - I^1 = \hat{Y} - I^2 \in \Gamma(\mathcal{T})$，因为 $\mathcal{T} = (I^1 - I^2)^\perp/\langle I^1 - I^2\rangle$。

$\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的tractor联络在拉回丛上诱导出拉回联络，进而在直和$\hat{}\,\mathcal{T}$上诱导出联络。于是，$I^1 - I^2 \in \Gamma(\hat{}\,\mathcal{T})$是平行的，因此在 $\mathcal{T} = (I^1 - I^2)^\perp/\langle I^1 - I^2\rangle$上诱导出一个联络。现在我们验证，这个诱导联络与$(M_1 \times M_2,\ [g_1 \times g_2])$的内禀联络一致。

$\mathcal{T}$的tractor联络满足

$$\nabla_a X^A = Z^A{}_a = Z^{1A}{}_a + Z^{2A}{}_a = \nabla^1{}_a X^A + \nabla^2{}_a X^A,$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_a Z^A{}_b &= -\boldsymbol{g}_{ab} Y^A - \mathsf{P}_{ab} X^A\\
&= -\boldsymbol{g}^1{}_{ab} Y^{1A} - \boldsymbol{g}^2{}_{ab} Y^{2A} - \boldsymbol{g}^1{}_{ab} Y^{2A} - \boldsymbol{g}^2{}_{ab} Y^{1A} + \boldsymbol{g}^2{}_{ab} I^1{}_A + \boldsymbol{g}^1{}_{ab} I^2{}_A\\
&\quad -\mathsf{P}^1{}_{ab} X^{1A} - \mathsf{P}^2{}_{ab} X^{2A} - \mathsf{P}^1{}_{ab} X^{2A} - \mathsf{P}^2{}_{ab} X^{1A}\\
&= \nabla^1{}_a Z^A{}_b + \nabla^2{}_a Z^A{}_b - \left(Y^{2A} - I^{2A} + \tfrac{J_1}{n_1} X^{2A}\right)\boldsymbol{g}^1{}_{ab} - \left(Y^{1A} - I^{1A} + \tfrac{J_2}{n_2} X^{1A}\right)\boldsymbol{g}^2{}_{ab}\\
&= \nabla^1{}_a Z^A{}_b + \nabla^2{}_a Z^A{}_b - \left(Y^{2A} - I^{2A} - \tfrac{J_2}{n_2} X^{2A}\right)\boldsymbol{g}^1{}_{ab} - \left(Y^{1A} - I^{1A} - \tfrac{J_1}{n_1} X^{1A}\right)\boldsymbol{g}^2{}_{ab}\\
&= \nabla^1{}_a Z^A{}_b + \nabla^2{}_a Z^A{}_b
\end{aligned}
$$

and

$$\nabla_a Y^A = \mathsf{P}_{ab} Z^{Ab} = \mathsf{P}^1{}_{ab} Z^{1Ab} + \mathsf{P}^2{}_{ab} Z^{2Ab} = \nabla^1_a Y^A + \nabla^2_a Y^A,$$

其中最后一个等式由 I^1 和 I^2 是平行的得到。 □

假设 I^1 和 I^2 均非零。则 $I_1,\ I_2 \notin (I^1 - I^2)^\perp$，因此二者都不能在 $M_1 \times M_2$上诱导出爱因斯坦结构。我们可以选取 $I^1 + I^2$作为互补零拖拉机，而由 $I^1 - I^2$ 和 $I^1 + I^2$ 张成的子空间是 $\langle I^1,\ I^2\rangle$，它在$\hat{}\,\mathcal{T}$中是非退化的。于是 $\mathcal{T} = (I^1 - I^2)^\perp/\langle I^1 - I^2\rangle \cong (I^1)^\perp \oplus (I^2)^\perp$。

当 I^1 和 I^2 为零时，平行拖拉机诱导出唯一的平行拖拉机 $I^1 = I^2 \in \mathcal{T}$，对应于 Ricci 平坦乘积度量。

特殊爱因斯坦乘积将生成一大类具有平行拖拉机子空间的曲率示例。如果我们取一个分量（$M_1,\ g_1$）为共形平坦，另一个分量（$M_2,\ g_2$）为共形弯曲，则所得弯曲流形仍具有来自 M_1 的平行拖拉机。这使我们能够将本文后面的结果应用于这些弯曲乘积。

4. Rank Two Conformal Killing Tensors

二阶Killing张量刻画了经典力学 Hamilton-Jacobi 方程的正交可分性，而共形 Killing 张量在二阶超可积系统理论中发挥着核心作用。

在 [12], 中，共形 Killing 张量的完全延拓是在共形平坦流形上，利用半延拓和 tractor D 不变地构造出来的。我们先回顾这一构造。

我们的完全延拓和半延拓与 [12] 中的相差一个$_{1\ 4}$倍，我们的结果大四倍。我们通过以下方式提取 tractor $K_{ABCD} \in \Gamma(\ _0(\mathcal{E}_A))$ 的顶层分量

$$k_{bd} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d K_{ABCD},$$

而 [12] 中的完全延拓形式为

$$k_{bd} Y_{[A} Z_{B]}{}^b Y_{[C} Z_{D]}{}^d + \text{lower order terms}$$

设 $k_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4])$，且令 $K_{ABCD} = L(k)_{ABCD} \in \Gamma(\ _0(\mathcal{E}_A))$ 为其完全延拓。然后定义 k_{ab} 的半延拓 为 $\mathbb{K}_{AC} = X^B X^D K_{ABCD}$。我们首先确认，通过 BGG机制得到的半延拓与 [12] 中构造的半延拓一致。

命题4.1. 设 $k_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4])$ 具有完全延拓 K_{ABCD} 和半延拓 $\mathbb{K}_{BD}$。则

$$Z^B{}_b Z^D{}_d \mathbb{K}_{BD} = k_{bd}, \quad Y^B Z^D{}_d \mathbb{K}_{BD} = -\frac{1}{n+2} \nabla_a k^a{}_d$$

$$Y^B Y^D \mathbb{K}_{BD} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+2} \nabla^d \nabla^b k_{bd} + \mathsf{P}^{bd} k_{bd} \right).$$

这给出了截面 $k_{ab} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4])$ 与满足以下条件的截面$\mathbb{K}_{AB} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(AB)_0}[2])$ 之间的一一对应

$$X^A \mathbb{K}_{AB} = 0 \quad and \quad D^A \mathbb{K}_{AB} = 0.$$

证明. 对于任意 $K \in \Gamma(\ _0(\mathcal{E}_A))$，复合映射 $\partial^* \circ d^\nabla(K)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \partial^* \circ d^\nabla(K) = {} & 2X_{[B} Z^{Ea} \nabla_a K_{A]ECD} - 2Z_{[B}{}^a X^E \nabla_a K_{A]ECD} \\ & + 2X_{[D} Z^{Ea} \nabla_a K_{C]EAB} - 2Z_{[D}{}^a X^E \nabla_a K_{C]EAB}, \end{aligned}$$

对于完全延拓 $K = L(k)$，该式为零。设 $k_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$，并令$K_{ABCD} = L(k)_{ABCD}$。根据定理 2.4, $\partial^* \circ d^\nabla(K)_{ABCD} = 0$。对该表达式应用投影算子，可得关于 $K = L(k)$ 的下列恒等式。

$$\begin{aligned} X^A Y^B X^C Z^D{}_d (\partial^* \circ d^\nabla)(K)_{ABCD} &= X^A Z^{Ba} X^C Z^D{}_d \nabla_a K_{ABCD} = 0 \\ Z^A{}_a Z^B{}_b X^C Z^D{}_d (\partial^* \circ d^\nabla)(K)_{ABCD} &= 2Z^A{}_{[a} X^B X^C Z^D{}_{|d|} \nabla_{b]} K_{ABCD} = 0 \\ X^A Y^B X^C Y^D (\partial^* \circ d^\nabla)(K)_{ABCD} &= 2X^A Y^B X^C Z^{Da} \nabla_a K_{ABCD} = 0. \end{aligned}$$

也可以应用其他投影算子，但这里我们需要的就是这些。根据定义，

$$Z^B{}_b Z^D{}_d \mathbb{K}_{BD} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d K_{ABCD} = k_{bd}.$$

然后我们对 k_{bd} 取散度,

$$\begin{aligned}\nabla_a k^a{}_d &= -nX^A Y^B X^C Z^D{}_d K_{ABCD} + X^A Z^B{}_a Z^{Ca} Z^D{}_d K_{ABCD}\\ &\quad -X^A Z^B{}_d X^C Y^D K_{ABCD} + X^A Z^{Ba} X^C Z^D{}_d \nabla_a K_{ABCD}\\ &= -(n+2)X^A Y^B X^C Z^D{}_d K_{ABCD} = -(n+2)Y^B Z^D{}_d \mathbb{K}_{BD},\end{aligned}$$

其中我们利用了 K_{ABCD} 的对称性，即在指标对 AB 和 CD 上反对称，同时它还是无迹的。我们还利用了 $Z_A{}^a Z_{Ba} = h_{AB} - 2X_{(A}Y_{B)}$。再取一次散度可得

$$\begin{aligned}\tfrac{-1}{n+2}\nabla_c\nabla_a k^{ac} &= Z^{Ac} Y^B X^C Z^D{}_c K_{ABCD} + \mathsf{P}^{ac} X^A Z^B{}_a X^C Z^D{}_c K_{ABCD}\\ &\quad -nX^A Y^B X^C Y^D K_{ABCD} + X^A Y^B X^C Z^{Dc} \nabla_c K_{ABCD}\\ &= -(n+1)X^A Y^B X^C Y^D K_{ABCD} + \mathsf{P}^{ac} k_{ac}.\end{aligned}$$

重新排列并重新标记指标即可得到最终等式。关于该映射在 $\Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4])$ 与给定的 $\Gamma(\mathcal{E}_{(AB)_0}[2])$ 子空间之间给出一一对应的断言，证明见 [12]。□

现在考虑 k_{ab} 为共形 Killing 张量的情形。令 $g \in \boldsymbol{c}$ 带有 Levi-Civita 联络 ∇，并考虑张量 $\nabla_a k^a{}_b$。由于 $\nabla_{(a}k_{bc)_0} = 0$，可得

$$\nabla_{(a}k_{bc)} = \rho_{(a}\boldsymbol{g}_{bc)}$$

对于某个 $\rho \in \Gamma(\mathcal{E}_a[2])$。然后取迹得到 $2\nabla_a k^a{}_b = (n+2)\rho_b$。

设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 为尺度密度，且 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 为相应度量，该度量定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上。若存在密度 $f \in \Gamma(\mathcal{E}[2])$，使得 $r_{ab} = k_{ab} + f\boldsymbol{g}_{ab}$ 是 $(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)\ g)$ 的 Killing 张量，即我们称 σ 或 g 是共形 Killing 张量 $k_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 的 ***Killing*** 尺度，即

$$\nabla^g{}_{(a}r_{bd)} = 0$$

在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上。当某个尺度存在零点时，Killing 张量、其迹调整及其射影延拓均理解为定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上。若 k_{bd} 自身是 $(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)\ g)$ 的 Killing 张量，即我们称 σ 或 g 是 k_{bd} 的强 ***Killing*** 尺度，即

$$\nabla^g{}_{(a}k_{bd)} = 0$$

在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上。

命题 4.2。设 K_{ABCD} 是张量 $k_{bd} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 的完全延拓，且 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}_+[1])$ 是一个具有尺度 *tractor* I_A 的尺度。则

$$\frac{1}{n+2}\nabla_a k^a{}_d = \sigma^{-1} I^A X^B X^C Z^D{}_d K_{ABCD}.$$

假设 k_{bd} 是一个共形 ***Killing*** 张量。那么，σ 是 k_{bd} 的强 ***Killing*** 尺度，当且仅当

$$I^A X^B X^C Z^D{}_d K_{ABCD} = 0.$$

若 σ 是爱因斯坦尺度，且 k_{bd} 是正规解，也就是说，I 和 K 平行，那么 σ 是强 ***Killing*** 尺度，当且仅当

$$I^A K_{ABCD} = 0.$$

证明。该恒等式由命题4.1得出。利用 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 的 Levi-Civita 联络计算可得 $I_A=\sigma Y_A-\frac{1}{n}\sigma X_A$。因此

$$I^AX^BX^CZ^D{}_dK_{ABCD}=-\sigma X^AY^BX^CZ^D{}_dK_{ABCD}=-\sigma Y^BZ^D{}_d\mathbb{K}_{BD}=\frac{\sigma}{n+2}\nabla_ak^a{}_d.$$

当 I 和 K 平行时，$I^AK_{ABCD}\in\Gamma(\odot_0(\mathcal{E}_A))$ 是零可约 tractor丛的平行截面，因此如果顶层分量

$$I^AX^BX^CZ^D{}_dK_{ABCD}$$

消失，则 $I^AK_{ABCD}=0$。

□

引理4.3。设 $k_{bd}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 是一个共形 ***Killing*** 张量，且 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$是一个尺度。那么，对于 k_{bd}，σ 是 ***Killing*** 尺度，当且仅当

$$\sigma^{-2}\nabla_ak^a{}_d=-(n+2)\sigma^{-3}I^AX^BZ^C{}_dX^DK_{ABCD}$$

是 $M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$上的恰当 ***1***-形式。

证明。设 $f\in\Gamma(\mathcal{E}[2])$，且设 $r_{bd}=k_{bd}+f\boldsymbol{g}_{bd}$。于是，在尺度 $\nabla=\nabla^g$下计算，$\nabla_{(a}r_{bd)}=\nabla_{(a}k_{bd)}+\nabla_{(a}f\boldsymbol{g}_{bd)}\implies\nabla_{(a}r_{bd)_0}=0$ 和 $3\boldsymbol{g}^{ab}\nabla_{(a}r_{bd)}=2\nabla_ak^a{}_d+(n+2)\nabla_df$.因此，$r_{bd}$ 是 Killing 的充要条件是 $\nabla_df=-\frac{2}{n+2}\nabla_ak^a{}_d$。由于 σ 对于 ∇^g是平行的，我们用 σ 将密度丛平凡化，而存在这样的 $f\in\Gamma(\mathcal{E}[2])$等价于无权 1-形式 $\sigma^{-2}\nabla_ak^a{}_d$的恰当性。□

若对于所有 $p\in M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$，都存在一个包含 p 的开子集 $U\subset M\setminus\mathcal{Z}(\sigma)$，使得 $\sigma|_U$ 是一个 Killing 尺度，则称尺度 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$，或度量 $g=\sigma^{-2}\boldsymbol{g}$，是共形 Killing 张量 $k_{bd}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 的局部 ***Killing*** 尺度。

因此，我们立即得到：σ 是局部 Killing 尺度，当且仅当 $\sigma^{-2}\nabla_ak^a{}_d$ 是闭的。用 tractor 表示可得一个简洁形式。

定理4.4. 设 K_{ABCD} 是共形 ***Killing*** 张量 $k_{bd}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 的完全延拓，且 σ 是尺度，其尺度 ***tractor*** 为 I_A。那么，σ 是 k_{bd} 的局部 ***Killing*** 尺度，当且仅当

$$X^EZ^A{}_aZ^B{}_bX^D\left(3I^CI_{[E}K_{AB]CD}-\sigma(D_{[E}I^C)K_{AB]CD}-\sigma I^CD_{[E}K_{AB]CD}\right)=0. \tag{4.1}$$

证明。尽管等式两边都不是不变量，以下计算在所有尺度下均成立，

$$\begin{aligned}\nabla_{[a}(I^AX^BZ^C{}_{c]}X^DK_{ABCD})&=I^AZ^B{}_{[a}Z^C{}_{c]}X^DK_{ABCD}+I^AX^BZ^C{}_cZ^D{}_aK_{ABCD}\\&\quad+\nabla_{[a}I^AX^BZ^C{}_{c]}X^DK_{ABCD}+I^AX^BZ^C{}_{[c}X^D\nabla_{a]}K_{ABCD}\\&=\tfrac{3}{2}I^AX^BZ^C{}_cZ^D{}_aK_{ABCD}+(D_EI^A)Z^E{}_{[a}X^BZ^C{}_{c]}X^DK_{ABCD}\\&\quad+I^AX^BZ^C{}_{[c}X^DZ^E{}_{a]}D_EK_{ABCD}\end{aligned}$$

因为 $\nabla_{[a}Z^B{}_{b]}=0$，并且根据 K 的对称性。现在在尺度 σ 下计算，因此 $Z^A{}_aI_A=0$，而 σ 是局部 Killing 尺度，当且仅当

$$\begin{aligned}0&=2\nabla_{[a}(I^AX^BZ^C{}_{c]}X^DK_{ABCD})\\&=9\sigma^{-1}I^AX^BZ^C{}_cZ^D{}_aX^EK_{AB[CD}I_{E]}-3X^BZ^C{}_cZ^D{}_aX^EK_{AB[CD}D_{E]}I^A\end{aligned}$$

$$-3I^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_a X^E D_{[E}K_{|AB|CD]}$$

现在应用 $K_{ABCD} = K_{CDAB}$ 并重命名指标即可得到该结果。 □

两个 tractor K 和 I 均为非加权的，因此 $D_A I_B = Z_A{}^a \nabla_a I_B + X_A(*)$ 和 $D_A K_{BCDE} = Z_A{}^a \nabla_a K_{BCDE} + X_A(*)$，且式 (4.1) 中的投影算子在两种情况下都会消去 X项。因此，当 I、 K 或二者平行时，我们便得到上述定理的特例。

我们明确陈述以下结果；它已在超可积系统理论中发挥作用 [11], ，而这些系统常见于共形平坦流形上。

推论 4.5. 设 K_{ABCD} 为一个共形 *Killing* 张量的完全延拓，且 σ 为一个尺度，其尺度 *tractor* 为 I_A。假设$(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦，或者更一般地， k_{bd} 是共形 *Killing* 方程的正规解。那么， σ 是 k_{bd} 的局部 *Killing* 尺度，当且仅当

$$X^E Z^A{}_a Z^B{}_b X^D \left(3I^C I_{[E}K_{AB]CD} - \sigma(D_{[E}I^C)K_{AB]CD}\right) = 0.$$

最强的情形是 K 和 I 都平行。此时可以去掉所有投影算子。下文定理的第二部分已在文献 [12]中针对共形平坦且非 Ricci 平坦的爱因斯坦尺度得到证明。在这种情形下，我们的证明可以简化为他们的证明。但在 Ricci 平坦情形下，则需要采用我们的方法。

对于对称 tractor Q_{AB}， $P_{AB} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(AB)})$，我们定义

$$(Q \owedge P)_{ABCD} = Q_{AC}P_{BD} + Q_{BD}P_{AC} - Q_{AD}P_{BC} - Q_{BC}P_{AD},$$

这是适用于 tractor 指标的标准 Kulkarni-Nomizu 积。Kulkarni-Nomizu 积具有曲率对称性，($Q \owedge P)_{ABCD} \in \Gamma($ $(\mathcal{E}_A))$。事实上，Kulkarni-Nomizu 积是以下同构在第一个因子上的投影

$$S^2(S^2(V)) \cong \square\!\square\!\square\!\square\,(V) \oplus \square\square\square\square\,(V)$$

对于向量空间 V。当 V配备非退化双线性形式，且我们考虑迹分解时，这一点尤其有用

$$\square\!\square\!\square\!\square\,(V) = \square\!\square\!\square\!\square_0(V) \oplus \square\square_0(V) \oplus \mathbb{R}.$$

现在专门考虑 tractor 指标，可以写成

$$R_{ABCD} = K_{ABCD} + (P \owedge h)_{ABCD},$$

其中

$$P_{BD} = \frac{1}{n}\left(R_{AB}{}^A{}_D - \frac{1}{2(n+1)} R_{AC}{}^{AC} h_{BD}\right).$$

那么，所得的 K_{ABCD} 是无迹的，称为 R_{ABCD}的无迹部分 。

定理 4.6。 设$(M$、 $\boldsymbol{c})$ 是一个共形流形，设 k_{bd} 是共形 *Killing* 方程的正规解，其平行延拓为 K_{ABCD} ，并设 $I_A = D_A\sigma$ 是一个平行 *tractor*。那么， σ 是 k_{bd} 的局部 *Killing* 尺度，当且仅当

$$I^A K_{AB[CD} I_{E]} = 0. \tag{4.2}$$

若存在一个平行 *tractor* $\hat{}$ I_A 使得 $\hat{}$ $I^A I_A = 1$，那么当且仅当(4.2) 成立时， σ 是 k_{bd}的 *Killing* 尺度。

证明。 定理的第一部分由定理4.4得出。该恒等式可化为

$$X^E Z^A{}_a Z^B{}_b X^D I^C I_{[E} K_{AB]CD} = 0.$$

改变指标后，这等价于平行tractor的 $X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E$ 分量$I^A K_{AB[CD} I_{E]}$。 该tractor满足

$$3I^A K_{AB[CD} I_{E]} h^{BE} = I^A I^B K_{ABCD} = 0 \quad \text{and} \quad I^A K_{A[BCD} I_{E]} = 0$$

这就是tractor丛的对称性

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}_0 (\mathcal{E}_A) = \{S \in \mathcal{E}_{BCDE} : S_{BCDE} = S_{B[CDE]}, \quad S_{[BCDE]} = 0 \quad \text{and} \quad h^{BE} S_{BCDE} = 0\},$$

这是一个不可约tractor丛。该丛截面的顶层分量（同调）由投影算子 $X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E$给出。因此，根据引理 2.6,

$$I^A X^B Z^C{}_c Z^D{}_d X^E K_{AB[CD} I_{E]} = 0 \iff I^A K_{AB[CD} I_{E]} = 0$$

需要证明的剩余陈述是：当(4.2)成立时， σ 是一个Killing尺度。为此，我们构造一个具有曲率对称性且顶层分量为r_{bd} 的平行射影$\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}$tractor，使得$r_{(bd)_0} = k_{bd}$。根据定理2.3，只需构造一个平行共形tractor $R_{ABCD} \in \Gamma(\odot(\mathcal{E}_A))$，其顶层分量为 r_{bd} ，并满足 $I^A R_{ABCD} = 0$。$\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}$假设$\hat{I}$是平行的，且 $I_A \hat{I}^A = 1$。于是令

$$U_{BC} = I^A \hat{I}^E K_{ABCE} - I^A \hat{I}^E \hat{I}^F K_{AEFB} I_C$$

首先我们证明 U 是对称的。首先应用 (4.2),

$$0 = 3I^A \hat{I}^F K_{AE[CB} I_{F]} = I^A K_{AECB} + 2I^A \hat{I}^F K_{AEF[C} I_{B]}. \tag{4.3}$$

由于 $K_{A[BCE]} = 0$,

$$2I^A \hat{I}^E K_{A[BC]E} = -I^A \hat{I}^E K_{AEBC} = I^A \hat{I}^E K_{AECB}.$$

因此将 $\hat{I}^E$ 与 (4.3) 缩并，得到

$$\begin{aligned} 0 &= I^A \hat{I}^E K_{AECB} + 2I^A \hat{I}^E \hat{I}^F K_{AEF[C} I_{B]} \\ &= 2I^A \hat{I}^E K_{A[BC]E} - 2I^A \hat{I}^E \hat{I}^F K_{AEF[B} I_{C]} = 2U_{[BC]} \end{aligned}$$

然后，由 (4.3) 可得

$$2U_{B[C} I_{D]} = -2I^A \hat{I}^E K_{ABE[C} I_{D]} = I^A K_{ABCD}$$

其中 U平行。于是 $U_B{}^B = -I^A \hat{I}^E \hat{I}^F I^B K_{AEFB}$，因此

$$I^B U_{BC} = I^A I^B \hat{I}^E K_{ABCE} - I^A \hat{I}^E \hat{I}^F I^B K_{AEFB} I_C = U_B{}^B I_C \tag{4.4}$$

然后令 $P_{BC} = U_{BC} - \frac{1}{2} U_A{}^A h_{BC}$和 $R_{ABCD} = K_{ABCD} + (h \owedge P)_{ABCD}$。 于是

$$\begin{aligned} I^A R_{ABCD} &= I^A K_{ABCD} + 2P_{B[D} I_{C]} + 2I^A P_{A[C} h_{D]B} \\ &= 2U_{B[C} I_{D]} + 2U_{B[D} I_{C]} - U_A{}^A h_{B[D} I_{C]} + U_A{}^A I_{[C} h_{D]B} = 0 \end{aligned}$$

因此， $R \in I^\perp$、 R 具有曲率对称性，且 R 是平行的。 R 的顶层分量为

$$X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d R_{ABCD} = X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d K_{ABCD} + X^A X^C P_{AC} \boldsymbol{g}_{bd} = k_{bd} + f \boldsymbol{g}_{bd},$$

其中 $f = X^A X^C P_{AC} \in \Gamma\left(\mathcal{E}[2]\right)$ 。 □

ˆ 当 I 不为零时，这样的 I 存在是自动成立的。在这种情况下，令 ˆ$I = I/|I|^2$。上述证明中的 tractor 为

$$U_{BC} = \frac{1}{|I|^2} I^A I^D K_{ABCD} = P_{BC},$$

这与 [12]中的证明相符。在这种情况下， P_{BC} 剩余的自由度是 $h_{BD} - \frac{2}{|I|^2} I_B I_D$的倍数，这对应于将 g_{bd} 的常数倍加到 r_{bd}上。在我们的证明中， P_{BC} 的选取是唯一与 I正交的选取。在许多情况下，这并非最自然的选取。事实上，当我们从R_{ABCD} 开始并构造 $K_{ABCD} = R_{ABCD} - (P \owedge h)_{ABCD}$时，我们取

$$P_{BD} = \frac{1}{n}\left(R_{AB}{}^{A}{}_{D} - \frac{1}{2(n+1)} R_{AC}{}^{AC} h_{BD}\right),$$

当且仅当 $R_{AC}{}^{AC} = 0$时，它与 I 正交。若不满足这一条件，从 R 到 K 再返回的过程将无法得到相同的 R。

对于零 I，也就是说，对于标量平坦度量，剩余的规范自由度由加上 $I_B I_D$ 的ˆ倍给出。在存在 I 时，我们仍然可以对 P_{BD} 作出一个特定选择。ˆ 然而，没有 I 时，要消除这一歧义就困难得多。以下量

$$I^A P_{AB}, \quad P_{A[B} I_{C]} \quad \text{and} \quad P_A{}^A$$

在加上 $I_B I_D$ 的任意倍数后都保持不变。因此，我们无法构造统一的正规化条件。本节最后将证明，在每个共形平坦流形上，局部都存在一个二阶共形 Killing 张量，它没有真正的强 Killing 尺度，也就是说，存在一个处处不为零的 Killing 尺度 σ 。

命题 4.7. 设$(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦，且设 $p \in M$。那么局部存在一个二阶共形 *Killing* 张量，使得 k_{ab} 的每个强 *Killing* 尺度在 p 处都为零。

证明。 设 $p \in M$ ，并令 $K_{ABCD}|_p \in \boxplus_0(\mathcal{E}_A|_p)$。设 $\mathbb{K}_{AC} = X^B X^D K_{ABCD} \in \mathcal{E}_{(AC)_0}|_p$。由于 $X^A \mathbb{K}_{AC} = 0$，我们可以定义一个线性映射 $\lambda\colon \mathcal{E}_A|_p \to X^\perp|_p/\langle X\rangle$ ，其定义为

$$\lambda(V_A) = \mathbb{K}_{AB} V^A \mod X$$

λ 的核包含 X。考察命题4.1中的 $\mathbb{K}$ 各槽位，可知若 $V_A = \tau Y_A + \mu_a Z_A{}^a + \omega X_A$ ，则

$$\lambda(V_A) = \left(k^a{}_b \mu_a - \tfrac{1}{n+2}\tau \nabla_a k^a{}_b\right) Z_B{}^b \mod X.$$

因此，如果 $\nabla_a k^a{}_b|_p \notin \mathsf{im}(k(p))$（由 $k_{ab}|_p$ 诱导的自同态的像），那么 τ 必须在 p 处消失，因此 λ 的核包含于 $X^\perp$ 中。由于我们可以在 p 处任意选取一个 K_{ABCD} ，因此可以令其满足： $k(p)$ 是一个无迹退化自同态，并且 $\nabla_a k^a{}_b|_p \notin \mathsf{im}(k(p))$。现在，如果 σ 是一个强 Killing 尺度，那么 $I_A = D_A\sigma$ 属于 λ 的核。因此， $I_A|_p \in X^\perp$ 和 $\sigma = X^A I_A = 0$。 □

5. Conformal Killing–Yano Forms

在本节中，我们考察 Killing 张量的形式类比。对于一个伪黎曼流形，若 ℓ-形式 $\omega_{a_1\cdots a_\ell}$ $(1 \le \ell \le n-1)$ 满足以下条件，则称其为 ***Killing–Yano*** 形式：

$$\nabla_{(a_0}\omega_{a_1)a_2\cdots a_\ell} = 0, \text{ equivalently, } \nabla_{a_0}\omega_{a_1\cdots a_\ell} = \frac{1}{\ell+1} d\omega_{a_0\cdots a_\ell}.$$

Killing–Yano 形式之所以引人关注，有许多原因。首先，在伪黎曼流形上，它们生成 Killing 张量。如果 $\omega \in \Lambda^\ell(T^*M)$ 是一个 Killing–Yano 形式，那么 $r_{ab} = \omega_a{}^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{ba_2\cdots a_\ell}$ 是一个满足下式的对称张量

$$\nabla_{(c}r_{ab)} = \nabla_{(c}\omega_a{}^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{b)a_2\cdots a_\ell} + \omega_{(a}{}^{a_2\cdots a_\ell}\nabla_c\omega_{b)a_2\cdots a_\ell} = 0.$$

因此，r_{ab} 是一个具有“平方根” ω 的 Killing 张量。Killing–Yano 算子具有射影不变性，并且是完全斜对称射影 tractor 丛 $\mathcal{E}_{[\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_\ell]}$ 的 BGG 算子，其顶层分量为 $\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}(\ell+1)$。此外，还有一个自然的共形对应物，它是完全斜对称共形 tractor 丛 $\mathcal{E}_{[A_0A_1\cdots A_\ell]}$ 的 BGG 算子

$$\Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1]) \ni \omega_{a_1\cdots a_\ell} \mapsto \text{trace-free}(\nabla_{(a_0}\omega_{a_1)a_2\cdots a_\ell}) \in \Gamma\left(\begin{array}{c}\square\square\\ \vdots\\ \square\\ 0\end{array}(T^*M)[\ell+1]\right),$$

称为共形 Killing–Yano 算子。该算子的核中的张量称为共形 ***Killing–Yano*** 形式。

若 ∇ 是 $\boldsymbol{c}$中某个度量的 Levi-Civita 联络，则共形 Killing–Yano 形式满足

$$\nabla_{a_0}\omega_{a_1a_2\cdots a_\ell} - \frac{1}{\ell+1}(d\omega)_{a_0\cdots a_\ell} = \ell \boldsymbol{g}_{a_0[a_1}\rho_{a_2\cdots a_\ell]},$$

其中 $\rho_{a_2\cdots a_\ell} = \frac{1}{n-\ell+1}\nabla_a\omega^a{}_{a_2\cdots a_\ell}$。

就 Killing尺度而言，没有充分理由，因为无法对形式进行迹调整。因此，若 $\rho = 0$，则尺度 σ 是 ω 的***Killing*** 尺度 。此外，也无需单独考虑局部 Killing 尺度。

定理 5.1。 设$\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell}$ 是一个 ℓ-形式 $\omega_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma$的完全延拓$(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1])$。设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}_+[1])$ 是一个尺度，其尺度 ***tractor*** 为 I_A。那么

$$\frac{\sigma}{n-\ell+1}\nabla^b\omega_{ba_2\cdots a_\ell} = I^{A_0}X^{A_1}Z^{A_2}{}_{a_2}\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell}.$$

设 $\omega_{a_1\cdots a_\ell}$ 是一个共形 ***Killing–Yano*** 形式。当且仅当 σ 是 ω的 ***Killing*** 尺度时，

$$I^{A_0}X^{A_1}Z^{A_2}{}_{a_2}\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell} = 0.$$

若 σ 是爱因斯坦尺度且 Ω 平行，则当且仅当 σ 是 ***Killing*** 尺度

$$I^{A_0}\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell} = 0.$$

Proof. 完全延拓 $\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell}$ 满足 $\partial^* \circ d^\nabla(\Omega) = 0$，或等价地

$$\mathbb{X}^B{}_{[A_0|}{}^a\nabla_a\Omega_{B|A_1\cdots A_\ell]} = 0.$$

这立即表明

$$X^{A_0}Z^{A_1}{}_{a_1}\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\nabla_{a_0}\Omega_{A_0\cdots A_\ell}$$

的完全反对称部分为零，并且也是无迹的。因此，

$$\begin{aligned}\nabla^b\omega_{ba_2\cdots a_\ell} &= \nabla^b\left(X^{A_0}Z^{A_1}{}_b\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell}\right)\\ &= -nX^{A_0}Y^{A_1}Z^{A_2}{}_{a_2}\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell}\\ &\quad -\sum_{i=2}^{\ell}X^{A_0}Z^{A_1}{}_{a_i}Z^{A_2}{}_{a_2}\cdots Y^{A_i}\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\Omega_{A_0\cdots A_\ell}\\ &= (n-(\ell-1))\sigma^{-1}I^{A_0}X^{A_1}Z^{A_2}{}_{a_2}\cdots Z^{A_\ell}{}_{a_\ell}\Omega_{A_0\cdots A_\ell},\end{aligned}$$

对于求和项，我们对投影算子进行偶置换，循环使用 $X^{A_0}Z^{A_1}_{a_i}Y^{A_i}\longrightarrow Y^{A_0}X^{A_1}Z^{A_i}_{a_i}$并使用 $Y\wedge X=\sigma^{-1}I\wedge X$。

因此，当且仅当上述量为零时， σ 才是 Killing 尺度。当 I 和 Ω 平行时，完全斜对称的 tractor $I^{A_0}\Omega_{A_0A_1\cdots A_\ell}$ 也同样平行。因此，根据引理 2.6，当且仅当其顶层分量为零时，它才为零。□

共形 Killing–Yano 形式的一个有趣性质是，它们能够生成共形 Killing 张量。设 $\omega_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1])$ 是一个共形 Killing–Yano 形式，并设 $s_{bc}=\omega_b{}^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{ca_2\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(bc)}[4])$。则

$$\begin{aligned}\nabla_{(a}s_{bc)} &= 2\nabla_{(a}(\omega_b{}^{a_2\cdots a_\ell})\omega_{c)a_2\cdots a_\ell}\\ &= 2\left(\boldsymbol{g}_{(ab}\rho^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{c)a_2\cdots a_\ell}-(\ell-1)\rho_{(b}{}^{a_3\cdots a_\ell}\omega_{ac)a_3\cdots a_\ell}\right)\\ &= 2\boldsymbol{g}_{(ab}\rho^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{c)a_2\cdots a_\ell},\end{aligned}$$

由于 $d\omega$ 和 ω 都完全反对称。因此，$\nabla_{(a}s_{bd)_0}=0$ 和 $k_{bd}=s_{(bd)_0}$ 是一个共形 Killing 张量。对于没有缩并的 $\ell=1$，这一点也成立；两个共形 Killing 向量的对称无迹积是一个秩 2 的共形 Killing 张量。考虑平行 tractor 延拓时，这一点也很容易看出。

定理 5.2. 设 $\omega_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{[a_1\cdots a_\ell]}[\ell+1])$ 是一个共形 *Killing–Yano* 形式， $k_{bd}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(bd)_0}[4])$ 是 $s_{bd}=\omega_{(b}{}^{a_2\cdots a_\ell}\omega_{d)a_2\cdots a_\ell}$的无迹部分。则 k_{bd}是一个共形 *Killing* 张量。若 ω 是一个正规解，且具有完全平行延拓$\Omega_{A_0\cdots A_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{[A_0\cdots A_\ell]})$，则 $K_{ABCD}\in\Gamma(\ {}_{\boxplus}{}_0(\mathcal{E}_A))$ 的完全延拓（其中 k_{bd} ）是 ..... 的无迹部分

$$\tilde{K}_{ABCD}=\Omega_{AB}{}^{A_2\cdots A_\ell}\Omega_{CDA_2\cdots A_\ell}-\Omega_{[AB}{}^{A_2\cdots A_\ell}\Omega_{CD]A_2\cdots A_\ell}\in\Gamma(\boxplus(\mathcal{E}_A)).$$

那么 K_{ABCD} 是平行的，而 k_{bd} 是共形 *Killing* 张量方程的正规解。

证明。 令 K_{ABCD} 为

$$\Omega_{AB}{}^{A_2\cdots A_\ell}\Omega_{CDA_2\cdots A_\ell}-\Omega_{[AB}{}^{A_2\cdots A_\ell}\Omega_{CD]A_2\cdots A_\ell}.$$

tractor $\Omega_{AB}{}^{A_2\cdots A_\ell}\Omega_{CDA_2\cdots A_\ell}$ 是 $S^2(\Lambda^2(\mathcal{E}_A))$的一个截面。我们有

$$S^2(\Lambda^2(\mathcal{E}_A))=\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline\end{array}\,(\mathcal{E}_A)\oplus\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\,(\mathcal{E}_A),$$

因此，去除完全反对称部分后，会得到一个具有曲率对称性的 tractor。去除迹后，则得到一个具有无迹曲率对称性的平行拖拉机 K_{ABCD} 。

然后， K_{ABCD} 的顶层分量是

$$\begin{aligned} X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d \tilde{K}_{ABCD} &= X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d \Omega_{AB}{}^{A_2\cdots A_\ell} \Omega_{CDA_2\cdots A_\ell} \\ &= X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d h^{A_2B_2}\cdots h^{A_\ell B_\ell} \Omega_{ABA_2\cdots A_\ell} \Omega_{CDB_2\cdots B_\ell} \\ &= X^A Z^B{}_b X^C Z^D{}_d Z^{A_2a_2} Z^{B_2}{}_{a_2} \cdots Z^{A_\ell a_\ell} Z^{B_\ell}{}_{a_\ell} \Omega_{AB}{}^{A_2\cdots A_\ell} \Omega_{CDA_2\cdots A_\ell} \\ &= \omega_b{}^{a_2\cdots a_\ell} \omega_{da_2\cdots a_\ell}, \end{aligned}$$

因为将 $X^A X^C$ 作用于 $\tilde{K}_{ABCD}$ 的全反对称部分后为零，所以从 K 中移除的迹 tractor，其顶层分量完全有迹，而其最终顶层分量无迹，因此它必定是上面最后一行的无迹部分，即 k_{bd}。□

6. 更高秩的共形 Killing 张量

现在我们考虑高阶共形 Killing 张量，即满足 $\ell \geq 3$的情形。若干因素使这一情形更加复杂。我们将在可能的情况下证明第 4 节结果的推广，并在此过程中讨论这些挑战。

共形 Killing 张量方程的延拓丛由具有对称性 $\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}(\mathcal{E}_A)$ 的 tractor 构成，并配备延拓联络；该联络如[17]，中所推导，在平坦情形下即为标准 tractor 联络。我们将采用此丛的反对称实现，其中的 tractor 满足

$$K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = K_{[A_1B_1]\cdots[A_\ell B_\ell]} \quad \text{and} \quad K_{\cdots[A_iB_iA_{i+1}]B_{i+1}\cdots} = 0$$

对所有 $i \in \{1\ldots\ell-1\}$ 均成立。这意味着相邻对具有对称性，即 $K_{\cdots A_iB_iA_{i+1}B_{i+1}\cdots} = K_{\cdots A_{i+1}B_{i+1}A_iB_i\cdots}$，从而在任意对的置换下都具有对称性。其证明方式与说明具有曲率对称性的 tractor 具有对的对称性相同。因此，这是 $S^\ell(\Lambda^2(\mathcal{E}_A))$ 的一个子丛。如第 2.7 节所述，张量 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 的完全延拓是一个完全无迹的 tractor $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = L_0(k)$，其特征由下式给出：

$$\Pi(K) = X^{A_1} Z^{B_1}{}_{a_1} \cdots X^{A_\ell} Z^{B_\ell}{}_{a_\ell} K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = k_{a_1\cdots a_\ell} \quad \text{and} \quad \partial^*(\nabla_a K) = 0$$

我们以二阶共形 Killing 张量的情形为类比定义了 Killing尺度。设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 是一个共形 Killing 张量，设 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是一个尺度，并设 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 是 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ 上的相应度量。那么，如果 k 是 g 的 Killing 张量，则 g 是 k 的 强 ***Killing*** 尺度 。

定理 6.1. 设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 是一个共形 ***Killing*** 张量，且令$K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 为其完全延拓。设 $I_A = D_A\sigma$ 对于某个 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$成立。则

$$I^{A_1} X^{B_1} X^{A_2} Z^{B_2}{}_{a_2} \cdots X^{A_\ell} Z^{B_\ell}{}_{a_\ell} K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = \frac{\sigma}{(n+2\ell-2)} \nabla_a k^a{}_{a_2\cdots a_\ell}$$

因此， σ 是 k 的强 ***Killing*** 尺度，当且仅当

$$I^{A_1} X^{B_1} X^{A_2} Z^{B_2}{}_{a_2} \cdots X^{A_\ell} Z^{B_\ell}{}_{a_\ell} K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = 0. \tag{6.1}$$

如果 I 和 K 平行，那么当且仅当 σ 是强 ***Killing*** 尺度

$$I^{A_1} K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = 0$$

证明。我们对 $k_{a_1\cdots a_\ell} = X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$求导。下文中，所有省略的投影算子均为$X^{A_j}Z^{B_j}{}_{a_j}$。

$$\begin{aligned}
\nabla^{a_1}k_{a_1\cdots a_\ell} &= \nabla^{a_1}\left(X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{\ell}\boldsymbol{g}_{a_i}{}^{a_1}\cdots X^{A_i}Y^{B_i}\cdots K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} + \sum_{i=1}^{\ell}\cdots Z^{A_ia_1}Z^{B_i}{}_{a_i}\cdots K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&\quad + X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}\nabla^{a_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&= -(n+\ell-1)X^{A_1}Y^{B_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&\quad - \sum_{i=2}^{\ell}X^{A_1}Y^{B_1}\cdots X^{A_i}Z^{B_i}{}_{a_i}\cdots K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&\quad + X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}\nabla^{a_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&= \sigma^{-1}(n+2\ell-2)I^{A_1}X^{B_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&\quad + X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}\nabla^{a_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell},
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $h_{AB} = Z_A{}^aZ_{Ba} + X_AY_B + Y_AX_B$，并且 K 是无迹的。因此现在只需证明 $X^{A_1}Z^{B_1}{}_{a_1}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}\nabla^{a_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = 0$。与 $\ell = 2$ 情形类似，我们可以简洁地将 $\partial^*\circ d^\nabla(K)$ 写为

$$\partial^*\circ d^\nabla(K) = 2\ell\operatorname{Sym}_{A_iB_i}\left(X_{[B_1}Z^{Ca}\nabla_aK_{A_1]CA_2B_2\cdots A_\ell B_\ell} - Z_{[B_1}{}^aX^C\nabla_aK_{A_1]CA_2B_2\cdots A_\ell B_\ell}\right),$$

by w这里指对所有反对称对 A_iB_i 进行对称化。由于 $\partial^*\circ d^\nabla(K) = 0$，

$$\begin{aligned}
0 &= X^{A_1}Y^{B_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}\partial^*\circ d^\nabla(K)_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&= X^{A_1}Z^{Ca}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}\nabla_aK_{A_1CA_2B_2\cdots A_\ell B_\ell},
\end{aligned}$$

重新标记指标后，这恰好就是所需的等式。

当 I 和 K 平行时，tractor $I^{A_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 是平行的，其对称性由杨图 $\ydiagram{1,1}\otimes\mathcal{E}_{(A_1\cdots A_\ell)_0}[2\ell]$ 给出。顶层分量是 (6.1) 式的左侧，因此，根据引理 2.6，σ 是强 Killing 尺度当且仅当 $I^{A_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = 0$。□

以下内容出现在 [12] 中，针对 Killing 向量。

命题 6.2。设 $k_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 是一个秩为 ℓ 的共形 *Killing* 张量，且 σ 是一个强 *Killing* 尺度。那么

$$\mathcal{Z}(k_{a_1\cdots a_\ell})\subset\mathcal{Z}(\nabla_bk^b{}_{a_2\cdots a_\ell})\cup\mathcal{Z}(\sigma),$$

其中 ∇ 是共形类中任意度量的 *Levi-Civita* 联络 *s.*

证明。令 $p\in M$ 满足 $\sigma(p)\neq 0$。令 $g\in\boldsymbol{c}$。那么，根据 g 的投影算子，我们有 $I_A = \sigma Y_A + (\nabla_a\sigma)Z_A{}^a - \frac{1}{n}(\Delta\sigma + J\sigma)X_A^-$。又由于 σ 是强 Killing 尺度，

$$\begin{aligned}
0 &= I^{A_1}X^{B_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&= \sigma Y^{A_1}X^{B_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\\
&\quad + (\nabla_a\sigma)Z^{A_1a}X^{B_1}X^{A_2}Z^{B_2}{}_{a_2}\cdots X^{A_\ell}Z^{B_\ell}{}_{a_\ell}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma}{n+2\ell-2}\nabla_a k^a{}_{a_2\cdots a_\ell} - (\nabla_a\sigma)k^a{}_{a_2\cdots a_\ell}$$

因此，若 $\sigma(p)\neq 0$ 且 $k|_p=0$，则 $\nabla_b k^b{}_{a_2\cdots a_\ell}=0$。 □

若存在一个 Killing 张量 $r_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)}[2\ell])$ 使得 g，则度量 $g\in \boldsymbol{c}$ 是共形 Killing 张量 $k_{a_1\cdots a_\ell}$ 的 ***Killing*** 尺度，

$$\nabla_{(a_0}r_{a_1\cdots a_\ell)}=0$$

且 $r_{(a_1\cdots a_\ell)_0}=k_{a_1\cdots a_\ell}$。最后一个条件等价于：对于某个截面 $\eta_{a_3\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(a_3\cdots a_\ell)}[2\ell-2])$，有 $r_{a_1\cdots a_\ell}=k_{a_1\cdots a_\ell}+\boldsymbol{g}_{(a_1a_2}\eta_{a_3\cdots a_\ell)}$。于是，$r$ 的 Killing 条件变为

$$\nabla_{(a_0}r_{a_1\cdots a_\ell)}=\nabla_{(a_0}k_{a_1\cdots a_\ell)}+\boldsymbol{g}_{(a_1a_2}\nabla_{a_0}\eta_{a_3\cdots a_\ell)}=0,$$

从而变为

$$\nabla_{(a_2}\eta_{a_3\cdots a_\ell)}=\rho_{a_2\cdots a_\ell}=-\frac{\ell}{n+2\ell-2}\nabla_a k^a{}_{a_2\cdots a_\ell}.$$

在 $\ell=2$的情况下，这归结为判断 1-形式 $\nabla_a k^a{}_{a_2}$ 是否为恰当形式。于是，当 M是单连通的，或在 M的某个单连通开子集上时，η 的存在性等价于 ρ 是闭的。考虑 $\ell=3$的情形。在这种情况下，我们希望知道 $\rho_{ab}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(ab)_0}[4])$ 是否属于算子 $\eta_b\mapsto\nabla_{(a}\eta_{b)}$的像。我们使用 σ 将所有密度丛平凡化。当且仅当 $\rho_{bc}=-\frac{3}{n+4}\nabla_a k^a{}_{bc}$ 属于 1-形式上的射影 Killing 算子的像时，σ 才是 k_{abc} 的 Killing 尺度。射影 Killing 算子的 BGG 序列为

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathcal{E}_a(2))\longrightarrow\Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}(2))\longrightarrow\Gamma(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}(\mathcal{E}_a)(2))\longrightarrow\Gamma\left(\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}(\mathcal{E}_a)(2)\right)\longrightarrow\cdots,$$

这就是黎曼流形上的 Calabi复形。仅当 $(M,\ [\nabla^g])$ 射影平坦时，该序列才构成复形。此外，在平坦情形下，该序列在 M 的可缩子集上正合。因此，射影 Killing 算子的像就是算子 $\mathscr{D}_1\colon\Gamma(\mathcal{E}_{(ab)}(2))\to\Gamma(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}(\mathcal{E}_a)(2))$ 的核。对于更高秩的 ℓ，很容易将其推广为以下命题。

命题 6.3。设 $\ell\geq 3$。设 $k_{a_1\cdots a_\ell}\in\Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 为一个共形 ***Killing*** 张量，且设 $\sigma\in\Gamma(\mathcal{E}[1])$。那么，当且仅当使用$\sigma$ 平凡化密度丛后，$\nabla^g_a k^a{}_{a_2\cdots a_\ell}$ 属于秩 $\ell-2$ 射影 ***Killing*** 算子的像时，σ 才是 k 的 ***Killing*** 尺度。

当 $(M,\boldsymbol{p}=[\nabla^g])$ 射影平坦时，σ 是局部 ***Killing*** 尺度，当且仅当 $\mathscr{D}_1(\nabla^g_a k^a{}_{a_2\cdots a_\ell})=0$，其中 $\mathscr{D}_1\colon\Gamma(\mathcal{E}_{(a_2\cdots a_\ell)}(2\ell-4))\to\Gamma(\begin{smallmatrix}\square\\\vdots\\\square\end{smallmatrix}(\mathcal{E}_a)(2\ell-4))$；其中每一行有 $\ell-1$ 个框，且 $\mathscr{D}_1$ 是该序列中的一个 ***BGG*** 算子，该序列包含秩 $\ell-2$ 射影 ***Killing*** 算子。

因此，对于高秩情形，我们还额外地根本依赖于共形平坦性。对于弯曲射影结构，平坦BGG序列的局部正合性不再成立，因此算子 $\mathscr{D}_1$ 无法对某元素是否属于其像给出微分判据。对于爱因斯坦度量 g，射影平坦性等价于 $(M,\boldsymbol{c})$ 的共形平坦性。因此，在爱因斯坦尺度下，这条通往定理4.4的高秩类比的路径要求共形平坦性。

引理 6.4. 令 $R_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} \in \Gamma(\quad \cdots \mathcal{E}_a)$ 具有顶层分量

$$r_{a_1\cdots a_\ell} = X^{A_1} Z^{B_1}{}_{a_1} \cdots X^{A_\ell} Z^{B_\ell}{}_{a_\ell} R_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}.$$

那么，令 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 为具有顶层分量 $R_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 的无迹部分

$$k_{a_1\cdots a_\ell} = X^{A_1} Z^{B_1}{}_{a_1} \cdots X^{A_\ell} Z^{B_\ell}{}_{a_\ell} K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}.$$

那么 $k_{a_1\cdots a_\ell} = r_{(a_1\cdots a_\ell)_0}$。

证明。令 K 为 R 的无迹部分，则差值 $R - K$ 中的每一项都涉及 h_{AB}。因此，取 $R - K$ 的顶层分量，得到的张量中每一项都涉及 $\boldsymbol{g}_{ab}$。所以， k 与 r 的差别仅在于迹项，而 k 是无迹的。因此， $k_{a_1\cdots a_\ell} = r_{(a_1\cdots a_\ell)_0}$。 □

命题 6.5。设 $(M、\boldsymbol{c})$ 是共形平坦的。设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 是一个共形 *Killing* 张量，且令 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 为其完全延拓。设 $I_A = D_A\sigma$ 对某个 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{E}[1])$ 是一个平行尺度 *tractor*。

那么， σ 是 k 的 ***Killing*** 尺度，当且仅当 K 是定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$上的平行拖拉机 R 的无迹部分，且其对称性为 $\cdots (I^\perp)$。

证明。令 $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 为定义在 $M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$上的爱因斯坦度量。由于 g 共形平坦且为爱因斯坦度量，因此它是射影平坦的。于是，根据定理 2.5， $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 上的秩为 ℓ 的 Killing 张量与 $\cdots (\mathcal{E}_\alpha)$的平行截面之间存在线性对应，其中$\mathcal{E}_\alpha$是$(M \setminus \mathcal{Z}(\sigma)\ [\nabla^g])$的射影 tractor 丛。根据定理 2.3，存在一个保联络同构 $\mathcal{E}_\alpha \cong I^\perp$。因此， $g = \sigma^{-2}\boldsymbol{g}$ 上的秩为 ℓ 的 Killing 张量与 $\cdots (I^\perp)$的平行截面之间存在线性对应。再次根据定理 2.5，秩为 ℓ 的共形 Killing 张量空间与 $\cdots \ {}_0(\mathcal{E}_A)$的平行截面之间存在一个线性双射。于是，根据引理 6.4，以 σ 为 Killing 尺度的共形 Killing 张量，其延拓是某个$R \in \ \cdots (I^\perp)$的无迹部分。 □

确定其像

$$\text{trace-free}\colon \Gamma(\cdots\ (I^\perp)) \to \Gamma(\cdots\ {}_0(\mathcal{E}_A)). \tag{6.2}$$

属于多重线性代数的范畴。如果 $U = U_1 \oplus U_2$ 是向量空间的直和，那么

$$\Lambda^k(U_1 \oplus U_2) = \bigoplus_{i=0}^{k} (\Lambda^i U_1) \wedge (\Lambda^{k-i} U_2) \tag{6.3}$$

and

$$S^k(U_1 \oplus U_2) = \bigoplus_{i=0}^{k} (S^i U_1) \vee (S^{k-i} U_2). \tag{6.4}$$

如果 U配备了一个非退化双线性形式，且分解 $U = U_1 \oplus U_2$是正交的，那么上述直和也是正交的。

固定一个点 $p \in M$ 并令 $V = \mathcal{E}_A|_p$。令 $I \in V$ 为非零的。于是我们有$V = W \oplus I$，其中 I 是由 I 和 $W = I^{\perp}$张成的子空间的简写。由于 $I \wedge I = 0$，因此$\Lambda^2(V)$ $= \Lambda^2 W \oplus W \wedge I$。然后我们应用（6.4）得到

$$S^\ell(\Lambda^2(V)) = \bigoplus_{i=0}^{\ell} S^i(W \wedge I) \vee S^{\ell-i}(\Lambda^2 W) \tag{6.5}$$

作为正交直和。因此，若 $K \in \Gamma(\cdots_0(\mathcal{E}_A|_p))$ $\in \Gamma(S^\ell(\Lambda^2(V)))$，则根据直和 (6.5)，我们可以写成 $K = K^0 + K^1 + \cdots K^\ell$。我们定义$\pi^0$：$S^\ell(\Lambda^2(V)) \to S^\ell(\Lambda^2(W))$，使得 $\pi^0($ $K) = K^0$。由于 (6.5) 是正交直和，π^0 的伴随映射就是包含映射 ι_0：$S^\ell(\Lambda^2(W)) \to S^\ell($ $\Lambda^2(V))$。正如我们将在下面的引理中证明的，无迹 K 仅由 K^0 和 K^1 决定。

引理 6.6. 设 V是一个向量空间（其下指标为 $A, B, C, \ldots$），并赋有一个非退化双线性形式 h_{AB} $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} \in \Gamma \cdots_0(V)$ $K = K^0 +$。设 ($K^1 + \cdots K^\ell$ 6 5 $K = 0$ ())。根据正交直和(.)，设 。那么，当且仅当$K^0 = K^1 = 0$时，才有 。此外，

$$\cdots_0(\mathcal{E}_A) = \{K \in \cdots_0(\mathcal{E}_A) : K^0 = 0\} \oplus \{K \in \cdots_0(\mathcal{E}_A) : K^1 = 0\} \tag{6.6}$$

作为正交分解。

证明。令 $\hat{}\, h_{AB} = h_{AB} - |I|^{-2} I_A I_B$。那么，$\hat{}\, h_{AB} I^A = 0$ 和$\hat{}\, h_{AB}$ 是限制在 W上的度量 h。由于 K 是无迹的，我们有

$$-\hat{h}^{A_1A_2} K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell} = |I|^{-2} I^{A_1} I^{A_2} K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell}. \tag{6.7}$$

设 $K \neq 0$，并且 $K^0 = 0$，令 $1 \leq j \leq \ell$ 为满足 $K^j \neq 0$的最小数。令 U，$V \in \Gamma(W)$。于是

$$-\hat{h}^{A_1A_2} U^{B_1} V^{B_2} K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell} = -\sum_{i=j}^{\ell-2} \hat{h}^{A_1A_2} U^{B_1} V^{B_2} K^i{}_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell}, \tag{6.8}$$

因为 K^ℓ 和 $K^{\ell-1}$ 在插入 $\Lambda^2(W)$ 中的两个元素后都消失。于是，根据（6.7），上式等于

$$|I|^{-2} I^{A_1} I^{A_2} U^{B_1} V^{B_2} K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell} = |I|^{-2} \sum_{i=\max(j,2)}^{\ell} I^{A_1} I^{A_2} U^{B_1} V^{B_2} K^i_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell}. \tag{6.9}$$

现在我们将填入 $A_3B_3, \ldots, A_\ell B_\ell$的所有剩余指标对。我们使用$\ell - 2$，$\ell - j$个 $\Lambda^2 W$中的元素，然后用 $W \wedge I$中的元素填入剩余的$\max(0, j-2)$个指标对。在（6.8）中，结果为零，因为投影算子只能作用于 $K^{\max(0,j-2)}$，而根据假设它为零。（6.9）中的结果是 $|I|^{-2} K^{\max(2,j)}$，与 $W \wedge I$ 和 $\Lambda^2 W$中的一般元素缩并。因此，由（6.8）和（6.9）相等，我们得出$K^{\max(j,2)} = 0$。由于 $K^j \neq 0$，我们得出 $j < 2$，所以 $j = 1$。因此，如果 $K \neq 0$，那么 K^1 或 K^0 中至少有一个非零。

考虑由 $\tau_A{}^B = \delta_A{}^B - 2|I|^{-2} I_A I^B$ 给出的变换 $\tau \in GL(V)$。那么，τ 的 $+1$ 特征子空间为 W，而 τ 的 -1 特征子空间为 I。由此显然可得 $\tau \in O(\mathcal{E}_A, h)$。因此，$\tau$作用于 $\Lambda^2(V)$、$S^\ell(\Lambda^2(V))$，并保持 $\cdots_0(V)$。

现在考虑 τ 对 $\Lambda^2(\mathcal{E}_A)$ 的作用。τ 在 $\Lambda^2(\mathcal{E}_A)$ 中的 $+1$ 特征子空间为 $W\wedge W$，而 -1 特征子空间为 $W\wedge I$。由此可得

$$\tau(K)=\tau(K^0+K^1+\cdots K^\ell)=K^0-K^1+K^2-\cdots=K^+-K^-,$$

也就是说，τ 作用于 $S^\ell(\Lambda^2(\mathcal{E}_A))$ 的 $+1$ 特征子空间是 (6.5) 中的偶次项，而 τ 的 -1特征子空间则是奇次项。

由于 $\tau\in O\ V\ h$ $K^+\ K^-\in$ $_0\ V$ $K^-\in$ (,),
$\{K\in$ $_0\ \mathcal{E}_A\quad K^0=0\}$ $K^+\in\{K\in$ $_0\ \mathcal{E}_A\quad K^0=1\}$ 6 6
可得 , ( )。显然，( )： ，并且 ( )： 。因此，(.) 是一个直和，其中第一项是 τ 的 -1特征子空间，第二项是 τ的 $+1$ 特征子空间，且这是一个正交直和。□

我们的代数分析结果如下定理所述。

定理 6.7。设 V为一个向量空间（其下指标为 A、B、C，.....），并配备一个非退化双线性形式 h_{AB}。设 $I_A\in V^*$ 为非零且设 $W=I^\perp$。设 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}\in\Gamma($ $_0(V))$。根据正交直和 (6.5)，设 $K=K^0+K^1+\cdots K^\ell$。则以下各项等价

(a) K 属于其像

(6.10) $$\text{trace-free}\colon\Gamma(\ (W))\to\Gamma(\ _0(V)).$$

(b) $K^1=0$。

(c) 对具有相同下标的指标进行反对称化后，

$$I^{A_1}K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell}I_{C_2}\cdots I_{C_\ell}=0.$$

也就是说，对于 $i\geq 2$ ，每组指标 $A_iB_iC_i$ 都是完全反对称的。

证明。回顾正交分解

$$\ (V)=\ _0(V)\oplus\ _h(V)$$

来自第 2.1 节。因此，无迹：(V) $\to$ $_0(V)$ 是到第一个直和项的投影。设 ι：$_0(V)\to$ (V) 为包含映射，则无迹映射和 ι 是伴随映射。因此，(6.10) 的像就是无迹 $\circ\iota^0$ 的像，其中 ι^0: $(W)\to$ (V) 是包含映射，其伴随映射为 π^0。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(\text{trace-free}\circ\iota^0)=\big(\ker(\pi^0\circ\iota)\big)^\perp&=\{K\in\ _0(\mathcal{E}_A):K^0=0\}^\perp\\&=\{K\in\ _0(\mathcal{E}_A):K^1=0\},\end{aligned}$$

由引理 6.6 得出。证明 (a) $\iff$ (b)。

最后证明 (b) $\iff$ (c)。注意，在 $\Lambda^2(V)=W\wedge W\oplus W\wedge I$ 上，线性映射 $\wedge I$（与 I 作楔积）在 $W\wedge W$ 上是单射，在 $W\wedge I$ 上为零。另一方面，$\lrcorner I$ 在 $W\wedge I$ 上可逆，在 $W\wedge W$ 上为零。因此，(6.12) 的左侧在 K^0，K^2，K^3、.....、K^ℓ 上为零，而在 K^1 上永不为零，所以 (6.12) 成立当且仅当 $K^1=0$。□

现在我们回到 tractor 和延拓。设 $k_{a_1\cdots a_\ell}$ 是一个共形 Killing 张量，其完全延拓为 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ ，并设 I_A 是一个平行非零类时 tractor。若 $(M,\ \boldsymbol{c})$ 共形平坦，那么根据命题 6.5，σ 是局部 Killing 尺度，当且仅当定理 6.7 中任一等价条件对 K 成立。对于我们的主定理，我们通过不再依赖局部尺度来强化这一结果。

定理 6.8. 设 $(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦。设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 为一个共形 *Killing* 张量，其完全延拓为 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$。设 $I_A = D_A\sigma$ 为一个非零平行尺度 *tractor*。

那么，σ 是 k 的 *Killing* 尺度，当且仅当 *tractor*

$$I^{A_1} K_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_\ell B_\ell} \tag{6.11}$$

对每一组 $i \geq 2$，将每对 A_iB_i 与 I_{C_i} 反对称化后为零；也就是说，略微滥用记号，

$$I^{A_1} K_{A_1B_1[A_2B_2}I_{C_2]}\cdots{}_{[A_\ell B_\ell}I_{C_\ell]} = 0, \tag{6.12}$$

其中所有指标 A_iB_i 都属于 K。

证明。若 σ 是 Killing 尺度，则它是局部 Killing 尺度，因此根据命题 6.5，tractor K 满足定理 6.7 的条件 (a)，进而满足该定理的条件 (c)，即 (6.11)。

由于 I 平行，丛 $\cdots(W) \to M$ 是 $\cdots(\mathcal{E}_A)$ 的平行子丛，因此 tractor 联络限制为 $\cdots(W)$ 上的联络，且包含映射 ι^0 平行。丛映射无迹：$\cdots(\mathcal{E}_A) \to \cdots{}_0(\mathcal{E}_A)$ 也是平行丛映射。因此，复合映射 $\phi := \text{无迹} \circ \iota^0$ 是平行丛映射。由此可知 $\phi^* = \pi^0 \circ \iota$ 也平行。丛 $\cdots(W)$、$\cdots(\mathcal{E}_A)$ 和 $\cdots{}_0(\mathcal{E}_A)$ 自然分别带有 $O(W)$、$GL(\mathcal{E}_A)$ 和 $O(\mathcal{E}_A)$ 的作用，因此，通过限制到 $O(\mathcal{E}_A)$ 中与 $O(W)$ 同构的自然子群，每个丛都带有 $O(W)$ 的作用。映射 ι^0 是 $O(W)$-等变的，而无迹映射是 $O(\mathcal{E}_A)$-等变的，因此它是 $O(W)$-等变的。因此，自伴复合映射 $\phi^* \circ \phi$ 是 $\cdots(W)$ 上一个平行的 $O(W)$-等变自同态。于是，根据 Littlewood 分支规则（见 [10, §25.3] 或 [21]），可自然地分解为子丛：

$$\cdots(W) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{V}_i, \tag{6.13}$$

其中，每个 $\mathbb{V}_i$ 都是 $\cdots(W)$ 的绝对不可约 $O(W)$-等变子丛，且该分解是重数自由的，也就是说，$\mathbb{V}_i$ 作为 $O(W)$-模两两不同构。此外，每个 $\mathbb{V}_i$ 都是平行子丛，因为联络保持 I 和 h，因此其全纯群是 $O(W)$ 的子群。由舒尔引理，存在常数 c_i，使得 $(\phi^*\circ\phi)|_{\mathbb{V}_i} = c_i\,\mathrm{id}|_{\mathbb{V}_i}$；其中某些 c_i 可以为零。设 $K^1 = 0$。那么根据定理 6.7，这等价于 $K \in \mathrm{im}(\phi)$，因此对于某个 $R \in \Gamma(\cdots(W))$，有 $K = \phi(R)$。接着令 $T = K^0 = \pi^0 \circ \iota(K) = \phi^*(K) = \phi^* \circ \phi(R)$。设 $T = \sum_{i=1}^m T_i$，其中 $T_i \in \Gamma(\mathbb{V}_i)$。然后令

$$\hat{R} = \sum_{c_i \neq 0} \frac{1}{c_i} T_i = \sum_{c_i \neq 0} R_i,$$

其中 $R = \sum_{i=1}^m R_i$ 与 $R_i \in \mathbb{V}_i$。对于配备双线性形式的空间之间的映射，$\ker(\phi^* \circ \phi)/\ker(\phi)$ 自然同构于 $\mathrm{im}(\phi) \cap (\mathrm{im}(\phi)^\perp$。在 $\cdots{}_0(\mathcal{E}_A)$ 内，ϕ 的像是 $\{K \in \cdots{}_0(\mathcal{E}_A) : K^1 = 0\}$，其正交补为

$\{K \in \square\!\square\!\square_0(\mathcal{E}_A) : K^0 = 0\}$，并且根据引理 6.6，它们的交集均为零。因此，$\ker(\phi) = \ker(\phi^* \circ \phi)$。于是

$$\phi(\hat{R}) = \sum_{c_i \neq 0} \phi(R_i) = \sum_{i=1}^{m} \phi(R_i) = \phi(R) = K,$$

$\hat{}$ 因此存在一个公式，可将其应用于全局，从而得到一个与 I 正交的平行 tractor $R\hat{}$，其无迹部分为 K；因此，R 的顶层分量是一个 Killing 张量，是对 k 进行迹修正后的结果。□

当不假设 $(M, \boldsymbol{c})$ 共形平坦，但 K 和 I 平行时，最好能对上述定理进行推广。正如我们将在下一节看到的，存在一些非共形平坦流形的例子族，其中具有大量平行 tractor。

定理 6.9。设 $k_{a_1\cdots a_\ell} \in \Gamma(\mathcal{E}_{(a_1\cdots a_\ell)_0}[2\ell])$ 是共形 *Killing* 方程的一个正规解，其完全延拓 $K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell}$ 是平行的。设 $I_A = D_A\sigma$ 是一个非零的平行尺度 *tractor*。若 (6.12) 成立，则 σ 是 k 的 *Killing* 尺度。

证明。只要 I 平行，分解 (6.13) 就定义良好且平行，即使 $(M, \boldsymbol{c})$ 并非共形平坦也是如此。因此，定理 6.8 的证明中将 $K \mapsto R$ 映射的映射会将平行的 K 映射为平行的 R，且后者与 I 正交。因此，R 的顶槽是一个 Killing 张量，它是对 k进行迹修正后的结果。□

回顾第 4 节中无迹部分的公式，

$$R_{ABCD} = K_{ABCD} + (P \owedge h)_{ABCD},$$

其中

$$P_{BD} = \frac{1}{n}\left(R_{AB}{}^{A}{}_{D} - \frac{1}{2(n+1)} R_{AC}{}^{AC} h_{BD}\right).$$

据此，我们可以在 $\ell = 2$时，计算上述证明中的 c_i。我们分解为

$$\square\!\square\!\square\!\square(W) = \square\!\square\!\square\!\square_0(W) \oplus \square\!\square_0(W) \oplus \mathbb{R} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \mathbb{V}_3,$$

$\hat{}\,\hat{}$ 其中迹因子 $\mathcal{g}(W) = \square\!\square\!\square\!\square_0(W) \oplus \mathbb{R}$ 由 tractor $P \owedge h$组成，其中 $\hat{}P \in S^2(W)$。我们有

$$\begin{aligned} K_{ABCD} &= R_{ABCD} - (P \owedge h)_{ABCD} \\ &= R_{ABCD} - \frac{1}{n}(R_{E*}{}^{E}{}_{*} \owedge h)_{ABCD} + \frac{1}{2n(n+1)} R_{AC}{}^{AC}(h \owedge h)_{ABCD} \end{aligned}$$

因此，将其投影到 $S^2(\Lambda^2(W))$ 上可得

$$K^0{}_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{1}{n}(R_{E*}{}^{E}{}_{*} \owedge \hat{h})_{ABCD} + \frac{1}{2n(n+1)} R_{AC}{}^{AC}(\hat{h} \owedge \hat{h})_{ABCD}$$

因此，相对于 $\hat{}h$，K^0 的无迹部分就是 R 和 $c_1 = 1$的无迹部分。我们可以直接计算 K^0 的迹，得到

$$K^0{}_{AB}{}^{A}{}_{D} = \frac{1}{n} R_{AB}{}^{A}{}_{D} - \frac{1}{n(n+1)} R_{AC}{}^{AC} \hat{h}_{BD}.$$

得到 $c_2 = \frac{1}{n}$–和 $c_3 = 0$。

7. Curved Examples

本文提出的主要结果普遍适用于共形平坦流形，这些流形局部共形等价于（p, q）球面的开子集。某些结果只要求共形 Killing 方程具有正规解，例如定理 4.6 和 6.9。正规解恰好对应于相对于标准 tractor 联络平行的延拓。自然会想到，这类解在非共形平坦流形上能够在多大程度上存在。

令 n_1, $n_2 \geq 4$。令 M_1 为模型空间 $\mathbb{S}^{n_1} = G/P$，其中 $G = SO(n_1 + 1, 1)$，且P 为稳定一条零直线的抛物子群。那么， M_1 具有任意常数长度的全体平行 tractor。我们将重点讨论标准球面度量，它对应于一个长度为常数负值的平行 tractor I^1 。对密度丛作适当归一化并平凡化后，我们可以取 $J_1/n_1 = +1$。为构造特殊爱因斯坦乘积，我们需要一个具有负标量曲率的爱因斯坦流形（M_2, g_2），关键在于它不必是共形平坦的。例子包括：双曲空间 $\mathbb{C}H^m$、 $\mathbb{H}H^m$ 和 Cayley 双曲平面 $\mathbb{O}\mathbb{H}^2$；这些空间关于格 Γ的适当商；以及乘积 $\mathbb{H}^a \times \mathbb{H}^b$ ，若将其爱因斯坦常数缩放至相等，则该乘积为负 Einstein，但并非共形平坦。我们也可以取 M_1 负曲率双曲空间 $\mathbb{H}^{n_1}$和 M_2正曲率空间，例如 $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, $\mathbb{O}P^2$，或$\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k$。最后，我们还可以取 M_1 平坦且 $\mathbb{R}^n$ Ricci 平坦的空间，例如 Calabi–Yau 流形——不过在这种情况下，下面的维数计数可能会有所不同。

现在我们固定 $M_1 = \mathbb{S}^{n_1}$ 和（M_2, g_2）为 Einstein 流形，使得 $J_2/n_2 = -1$，并考虑共形流形（$M = M_1 \times M_2$, $\boldsymbol{c} = [g_1 \times g_2]$）。根据定理 3.2， M 的 tractor丛为 $\mathcal{T} \cong (I^1)^\perp \oplus (I^2)^\perp \subset \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$。记 $\pi^i\colon \mathcal{T} \to (I^i)^\perp \subset \mathcal{T}_i$。 $\mathcal{T}$上的 tractor 曲率于是分解为 $\kappa = \kappa^1 \oplus \kappa^2$，其中 κ^i 是将 $\mathcal{T}_i$的曲率限制到$(I^i)^\perp$所得的曲率。由假设， $\kappa^1 = 0$ 且 κ^2 捕获了M_2的完整 tractor 曲率，因为 $\mathcal{T}_2$ 中的 I^2 与 tractor 曲率正交。因此，只要 M_2 不是共形平坦的， M 就不是共形平坦的。

设 I 是 M上的一个平行拖拉机，例如，$\mathcal{T}$中同构于$(I^1)^\perp$的子丛的任意常截面。假设 $|I|^2 \neq 0$。那么，平行子丛 $I^\perp \cap (I^1)^\perp$是非退化的；当 $\pi^1(I) \neq 0$ 时，其维数为 n_1 ，而当$\pi^1(I) = 0$时，其维数为 $n_1 + 1$ 。因此，我们可以得出结论：对于 ℓ 秩的共形 Killing 张量空间，其中 $\sigma = X^A I_A$ 是强 Killing 尺度，其维数至少为

$$\frac{(n_1 + 2\ell - 4)(n_1 + 2\ell - 3)(n_1 + 2\ell - 2)(n_1 + \ell - 4)!(n_1 + \ell - 5)!}{(\ell + 1)!\ell!(n_1 - 2)!(n_1 - 4)!},$$

这来自 Weyl 维数公式，表示 $\cdots_0(U)$ 的维数，其中U 的维数为 n_1 [illegible]。

对于 σ 是 Killing 尺度的情形，共形 Killing 张量空间包含所有在 $I^\perp \cap (I^1)^\perp$ 中具有指标的平行 tractor R 的无迹部分 K 的顶层分量。一般而言， K 不必属于 $(I^1)^\perp$，但它仍然是平行的。

现在假设 K 的所有指标都属于 $(I^1)^\perp$ ，且 $\pi^2(I) \neq 0$。那么 K 必须满足 (6.12)。但是，如果 $I \notin (I^1)^\perp$ （这要求 M_2 具有另一个爱因斯坦尺度，

而我们上面列举的例子都不满足这一点），那么条件 (6.12) 就变为

$$I^{A_1}K_{A_1B_1[A_2B_2}I_{C_2]}\cdots{}_{[A_\ell B_\ell}I_{C_\ell]} = \pi^1(I)^{A_1}K_{A_1B_1[A_2B_2}I_{C_2]}\cdots{}_{[A_\ell B_\ell}I_{C_\ell]} = 0,$$

由于 $\wedge\pi^2(I)$ 在 $\Lambda^2((I^1)^\perp)$ 上是单射，因此这只有在 $\pi^1(I)^{A_1}K_{A_1B_1\cdots A_\ell B_\ell} = 0$ 时才成立。于是，(6.12) 化简为 $K \in I^\perp$，也就是说，σ 是一个强 Killing 尺度。

References

1. Stuart Armstrong, 《定定号共形整体性：完整分类》, 《几何与物理杂志》57（2007）, 第10期, 2024–2048。 2. Douglas Arnold、Richard Falk 和 Ragnar Winther, 《弱施加对称性的线弹性混合有限元方法》, 《数学计算》76（2007）, 第260期, 1699–1723（英文）。 3. T. N. Bailey、M. G. Eastwood 和 A. R. Gover, 《用于共形、射影及相关结构的 Thomas 结构丛》, 《落基山数学杂志》24（1994）, 第4期, 1191–1217。MR 1322223 ˇ 4. Thomas Branson、Andreas Cap、Michael Eastwood 和 A. Rod Gover, 《几何超定系统的延拓》, 《国际数学杂志》17（2006）, 第6期, 641–664。MR 2246885 5. David M. J. Calderbank 和 Tammo Diemer, 《微分不变量与弯曲的 Bernstein-Gelfand-Gelfand 序列》, 《纯粹与应用数学杂志》537（2001）, 67–103。MR 1856258 6. Federico Costanza、Michael Eastwood、Thomas Leistner 和 Benjamin McMillan, 《洛伦兹局部对称空间中的联络值域与 Calabi 算子》, 2024年11月, arXiv:2302.04480 [math.DG]。 7., 《黎曼局部对称空间的 Calabi 算子》, 《美国数学杂志》148（2026）, 第4期, 1003–1028（英文）。 8. Sean N. Curry 和 A. Rod Gover, 《共形几何与 tractor 微积分导论：兼论其在广义相对论中的应用》, 《广义相对论中的渐近分析》, 《伦敦数学会讲义系列》第443卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2018年, 第86–170页。MR 3792084 9. William Fulton, 《杨表：及其在表示论与几何中的应用》, 第1版, 剑桥大学出版社, 1996年12月。 10. William Fulton 和 Joe Harris, 《表示论》, 《数学研究生教材》第129卷, Springer, 纽约, 2004年。 11. Simon Goodwin、A. Rod Gover 和 Jonathan M. Kress, 《超可积系统与 tractor 联络》, 2026年, 预印本。 12. A. Rod Gover、Jonathan Kress 和 Thomas Leistner, 《共形 Killing 张量及其 Killing 尺度》, 2024年6月, arXiv: 2406.17212 [math]。 13. A. Rod Gover 和 F. Leitner, 《Poincar´e-Einstein 度量的一种子乘积构造》, 《国际数学杂志》20（2009）, 第10期, 1263–1287。MR 2574315 14. A. Rod Gover 和 Felipe Leitner, 《一类紧致 Poincar´e-Einstein 流形：性质与构造》, 《当代数学通讯》12（2010）, 第4期, 629–659。MR 2678944 15. A. Rod Gover 和 Heather R. Macbeth, 《识别 Einstein 测地线：射影几何与共形几何中的 Einstein 度量》, 《微分几何及其应用》33（2014）, 44–69。MR 3159950 16. A. Rod Gover 和 Daniel Snell, 《Poincar´e-Einstein 及其他共形奇异几何中的特征曲线与第一积分》, 《几何、李理论及其应用——阿贝尔研讨会2019》, 《阿贝尔研讨会》第16卷, Springer, Cham, 2022年, 第79–92页。MR 4417726 17. Matthias Hammerl, 《BGG 算子的自然延拓》, 博士论文, 维也纳大学, 奥地利维也纳, 2009年。 ˇ 18. Matthias Hammerl、Petr Somberg、Vladim´ır Sou ˇcek 和 Josef Silhan, 《关于 tractor 协变导数的一种新正规化》, 《欧洲数学会杂志》14（2012）, 第6期, 1859–1883。19. E. G. Kalnins 和 Willard Miller, Jr., 《Hamilton-Jacobi 方程与 Helmholtz 方程的 Killing 张量及变量分离》, 《SIAM 数学分析杂志》11（1980）, 第6期, 1011–1026。MR 595827

20. E Kroner 和 K H Anthony, 《材料结构中的位错与位向错：基本拓扑概念》, 《材料研究年度评论》**5** （1975）, 43–72。 21. Dudley E. Littlewood, 《群特征标理论与群的矩阵表示》, 牛津大学出版社, 纽约, 1940年。MR 2127 22. Willard Miller, Jr.、Sarah Post 和 Pavel Winternitz, 《经典与量子超可积性及其应用》, 《物理学杂志 A》**46** （2013）, 第42期, 423001, 97页。 MR 3119484 23. Roger Penrose 和 Wolfgang Rindler, 《旋量与时空：第*1*卷：双旋量微积分与相对论场》, 《剑桥数学物理专著》第1卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1984年。 24. D. J. Saunders, 《射流丛几何》, 《伦敦数学会讲义系列》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1989年。 25. Uwe Semmelmann, 《黎曼流形上的共形 *Killing* 形式》, 《数学杂志》**245**（2003）, 第3期, 503–527。 26. Kentaro Yano, 《关于张量场与曲率的一些备注》, 《数学年刊》**55** （1952）, 第2期, 328–347。ˇ 27. Andreas Cap、Jan Slov´ak 和 Vladim´ır Sou˘cek, 《伯恩斯坦-盖尔范德-盖尔范德序列》, 《数学年刊》**154** （2001）, 第1期, 97–113。（Goodwin）

Department of Mathematics, The University of Auckland, Private Bag92019, Auckland 1142, New Zealand电子邮箱：simon.goodwin@auckland.ac.nz（Gover）
Department of Mathematics, The University of Auckland, Private Bag 92019, Auckland 1142, New Zealand电子邮箱：r.gover@auckland.ac.nz（Leistner）
School of Mathematical Sciences, Adelaide University, SA 5005, Australia电子邮箱：thomas.leistner@adelaide.edu.au