arXiv:2611.29126v1 [math.SG] 22 Nov 2026

CON接触刚性与泊松括号不变量

JUN ZHANG

摘要。我们研究闭接触流形上的 C^0-刚性与泊松括号不变量。我们证明，泊松交换在一致收敛下保持闭性；建立无公共零点的点对的弱刚性；并在对 Reeb 导数进行定量控制的条件下，得到下半连续性。一个三维反例表明，无约束弱刚性并不成立。对于单位分解，接触括号本身控制 Reeb 导数。利用单调齐次拟态射和 Cant–Kilgore–Zhang 谱不变量，我们为开覆盖及紧子集构型的不变量推导出正下界。应用包括定量接触大纤维定理、哈密顿弦持续时间和 Reeb 旅行时间的界，以及接触 1-形式的变形。

目录

1. 引言 2 1.1. 辛背景与接触记号 2 1.2. 接触 C^0-刚性的三种形式 4 1.3. 覆盖的接触泊松括号不变量 6 1.4. 接触谱不变量给出的下界 8 1.5. 定量接触大纤维定理 11 1.6. 接触泊松括号不变量 13 1.7. 动力学应用 17 2. 定理 A 的证明 25 3. 定理 B 的证明 27 4. 定理 C 的证明 31 5. C^0- 刚性的反例 35 6. 定理 D 的证明 36 7. 定理 E 的证明 37 8. 定理 F 的证明 40 9. 定理 G 的证明 46 10. 定理 H 的证明 50 11. 定理 I 的证明 56 12. 定理 J 的证明 60 参考文献 62

1. 引言

泊松括号将光滑函数的代数与哈密顿流的几何联系起来。在辛几何中，括号刻画一个哈密顿量沿另一个哈密顿量的流变化的速率。特别地，当括号为零时，这两个流彼此交换。由于括号涉及一阶导数，其输入的 C^0-收敛并不必然意味着括号的 C^0-收敛。然而，辛拓扑对一致小扰动能够使其范数降低多少施加了严格限制 [8, 14, 3]。这些限制并不限于单对函数：当输入满足由子集或开覆盖规定的条件时，某些极小化问题也能揭示几何刚性[17, 29, 4]。Polterovich–Rosen 的著作 [30] 第 2 章和第 7–9 章详细阐述了这一观点，并提供了本文所采用的大部分工具。

受这些辛结果的启发，我们在接触几何中发展出相同的观点。在这一背景下也定义了泊松括号（见（1.4）），并且已经利用生成函数方法 [19, 32, 20] 和 Floer理论方法 [12, 1, 11, 7]建立了各种形式的刚性。在这些发展的基础上，我们建立了几种接触泊松括号的刚性形式，与辛几何中的相应形式类似。其中一些证明使用了近期发展起来的接触不变量 [11, 7], ，而另一些结果则与 [37, 11]中的接触刚性现象密切相关。

1.1. 辛背景与接触记号。 设 (M, ω) 是一个闭辛流形。我们使用 $\iota_{X_F}\omega = -dF$并记 $\{F, G\}_\omega = X_F G$。辛刚性的一种基本形式是下半连续性陈述

$$\|\{F, G\}_\omega\|_\infty \leq \liminf_{j\to\infty} \|\{F_j, G_j\}_\omega\|_\infty \tag{1.1}$$

对于收敛到光滑对各自分量的一列光滑哈密顿函数 F_j, G_j ； 参见 [41, 14] 以及 [30, 第 2 节1]中的论述。特别地，非对易对无法由括号一致趋于零的对一致逼近。

这些刚性问题也涉及子集的几何性质。对于 M 的有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_N\}$，定义该覆盖 $\mathcal{U}$的泊松括号不变量为

$$pb_\omega(\mathcal{U}) := \inf_{\vec{F}} \max_{a,b\in[-1,1]^N} \left\| \left\{ \sum_i a_i F_i, \sum_j b_j F_j \right\}_\omega \right\|_\infty , \tag{1.2}$$

其中，下确界取遍从属于$\mathcal{U}$的光滑单位分割 $\vec{F} = (F_1、\ldots\ldots、 F_N)$。最大值同时检验系数属于 $[-1, 1]$ 的所有线性组合。这样一来，该不变量便纳入了函数论方法的框架；这种方法由 [17] 开创，并由 [29]发展。A

$pb_\omega(\mathcal{U})$的正下界意味着，通过改变从属分割，不可能使两两泊松括号在一致范数下都任意小。例如，可以用辛谱宽度来得到这样的下界；参见 [30, 第 9 节2]。

固定一个维数为 $2n+1$ 的闭合定向接触流形 $(Y, \xi = \ker \alpha)$，并取其接触形式 α。其 Reeb 向量场由条件 $\alpha(R_\alpha) = 1$ 和 $\iota_{R_\alpha} d\alpha = 0$刻画。对于接触哈密顿函数 $f \in C^\infty(Y)$，接触哈密顿向量场 X_f 由以下方程唯一确定：

$$\alpha(X_f) = f, \qquad \iota_{X_f} d\alpha = (R_\alpha f)\alpha - df. \tag{1.3}$$

其流记为 φ_f^t。常数哈密顿量 1 生成 Reeb 向量场，因此 φ_1^t表示其流。相对于接触 1-形式 α 的接触泊松括号定义如下[1]：

$$\{f, g\}_\alpha := X_f g - g R_\alpha f. \tag{1.4}$$

它是反对称的，并满足 $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}_\alpha}$。关于定义 (1.4) 及其与辛化上的辛括号之间的关系，参见 McDuff–Salamon [23, 练习 3.57(iv)]。以下陈述中的所有函数均为光滑函数，且 $\|h\|_\infty = \max_Y |h|$。

与辛括号相比，有两点差异对本文至关重要。首先，不能忽略常函数。事实上，

$$\{1, h\}_\alpha = R_\alpha h, \tag{1.5}$$

因为常函数 1 生成 Reeb 流。其次，接触哈密顿流保持 ξ，但一般会改变 α。对于接触同胚 φ，记

$$\varphi^* \alpha = e^{\kappa(\varphi)} \alpha, \tag{1.6}$$

其中 $\kappa(\varphi)$ 是 φ 的（对数）共形因子（接触各向同性也采用相同记号）。沿自治流，$\frac{d}{dt}\kappa(\varphi_f^t) = R_\alpha f \circ \varphi_f^t$。因此，当且仅当该流是严格的，即保持 α 时，$R_\alpha f = 0$。

在整篇论文中，可移位性均指通过 $\mathrm{Cont}_0(Y, \xi)$ 的元素实现的可移位性。因此，如果存在某个 $\varphi \in \mathrm{Cont}_0(Y, \xi)$ 满足 $\varphi(K) \cap K = \varnothing$，则子集 $K \subset Y$ 是接触可移位的。所有相关范数和括号不变量中均固定接触形式。

[1]我们的符号约定与 Rosen–Zhang [31, 第 2], 节中的约定相反，但括号及其 C^0-范数为零这一性质不受影响。

1.2. 接触 C^0刚性的三种形式。我们的第一个结果表明，接触泊松交换在一致收敛下保持不变。它不要求控制逼近函数的导数。

定理 A。 设$(Y, \xi = \ker \alpha)$是一个闭接触流形，且 $f_j, g_j, f, g \in C^\infty(Y)$一致满足 $f_j \to f$和 $g_j \to g$。若对每个 j都有 $\{f_j, g_j\}_\alpha = 0$，则 $\{f, g\}_\alpha = 0$。

定理 A 的证明见第 2 节，而接触几何中的主要依据是 Shelukhin 范数的非退化性 [35, 定理 A]。接下来，我们放宽精确交换的条件，并考虑构成近似交换对的逼近函数。在辛几何情形中，[8, 第 3]节中的刚性结果允许逼近括号一致趋于零（见 [8, 定义 1.1 和定理 1.2]）。然而，接触几何中并不存在直接类比，以下例子将说明这一点。

例 1.1。 在 $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ 上赋予标准接触一形式 $\alpha = \cos x\, dz + \sin x\, dy$。考虑

$$f = \cos x \cos z, \qquad g = \cos x \sin z. \tag{1.7}$$

为构造逼近序列，对每个 $j \in \mathbb{N}$ 引入辅助函数 $A_j(x) := \sqrt{4j(\cos x)^2 - 2\sin x \cos x + j^{-1}}$，并令

$$f_j := f + u_j \quad \text{where} \quad u_j = j^{-2} A_j(x) \cos(j^4 y)$$

类似地，

$$g_j := g + v_j \quad \text{where} \quad v_j = j^{-2} A_j(x) \sin(j^4 y).$$

f_j 和 g_j 对任意 $j \in \mathbb{N}$ 都在 $\mathbb{T}^3$ 上定义良好，并且 $f_j \to f$, $g_j \to g$ 一致收敛。直接计算可得

$$\|\{f, g\}_\alpha\|_\infty = 1 \quad \text{but } \|\{f_j, g_j\}_\alpha\|_\infty \to 0 \text{ as } j \to \infty.$$

计算过程见第 5 节。

因此，与定理 A 不同，这种较弱形式的接触泊松括号刚性需要额外的假设。在下一个结果中，我们假设两个函数 f, g 在环境接触流形 $(Y, \ker \alpha)$ 上没有公共零点；等价地，$f^2 + g^2 > 0$ 在 Y 上。相比之下，例 1.1 中 (1.7) 的函数 f, g 在 $\mathbb{T}^3$ 中确实有公共零点。没有公共零点这一条件很有用，因为它允许进行变量替换。于是，接触泊松括号 $\{f, g\}_\alpha$ 在 (1.4) 中的二项表达式可以与沿由 $\sqrt{f^2 + g^2}$ 生成的接触流对圆值函数 $(f + \sqrt{-1}g)/\sqrt{f^2 + g^2}$ 的导数联系起来（见引理 3.1）。所得表达式更容易在 C^0-范数下控制，从而得到以下弱刚性结论。

定理 B。 设 $(Y, \xi = \ker \alpha)$ 是一个闭接触流形，且 $f_j, g_j, f, g \in C^\infty(Y)$一致地满足 $f_j \to f$ 和 $g_j \to g$。如果 $f^2 + g^2 > 0$ 在 Y 和 $\|\{f_j, g_j\}_\alpha\|_\infty \to 0$ 上成立，则$\{f, g\}_\alpha = 0$。

定理 B 的证明见第 3 节。除了引理 3.1 中的极坐标恒等式外，一个关键要素是 $\|X_f g\|_\infty$ 的下半连续性，这是通过调整 [3, 定理 1.1.2] 的证明建立的。关键在于，方向导数的减小会迫使一个流移位某个固定开集，从而与 [35,推论 15] 中的接触能量-容量不等式相矛盾。

我们的第三个结果将结论加强为一个类似于 (1.1) 的下界。它允许两个输入接触哈密顿函数存在公共零点，但作为交换，要求控制一致逼近误差与沿 Reeb 向量场的导数之间的相互作用。事实上，例 1.1 表明，无条件的接触类比 (1.1) 并不成立。更具体地说，第 5 节中的计算表明，其逼近序列违反了以下结果中的条件 (1.8)。

定理 C。 设$(Y, \xi = \ker \alpha)$ 是一个闭接触流形，且 $f_j, g_j, f, g \in C^\infty(Y)$一致满足 $f_j \to f$ 和 $g_j \to g$。若

$$\max\{\|f_j - f\|_\infty, \|g_j - g\|_\infty\} \cdot \|R_\alpha g_j\|_\infty \longrightarrow 0, \tag{1.8}$$

则 $\|\{f, g\}_\alpha\|_\infty \leq$ 下极限$_{j\to\infty} \|\{f_j, g_j\}_\alpha\|_\infty$。

注意，函数 $R_\alpha g_j$ 一致有界时，条件 (1.8) 总是成立；特别地，当每个 g_j 都是 Reeb 不变时，该条件也成立。该条件还允许 $\|R_\alpha g_j\|_\infty$ 增长，前提是其增长速度慢于逼近误差的倒数。此外，由于接触泊松括号具有斜对称性，用 f_j 替代 g_j 的条件同样足够。

作为比较，辛下半连续性结论 (1.1) 已分别在 [41]中针对曲面、在 [14] 中针对一般辛流形得到证明。后一证明利用了 Hofer 几何中短哈密顿路径的长度极小性质。[3] 中的另一种证明使用位移能量，还给出了定量的 2/3速率估计。我们在第 4 节给出的定理 C 证明沿用了这种局部位移方法，并利用 [35, 推论 15] 中的能量—容量不等式，为相关位移能量得出一个正下界。

注 1.2 （对 (1.8) 的定量控制）。 条件 *(1.8)* 对共形因子提供了一种控制。这一点也出现在拓扑接触动力学 [24] 以及环境映射的一致极限的接触刚性研究中 [40]。回顾一下，关于这类极限下余同位和 *Legendrian* 子流形的光滑像的刚性研究见 [21, 10, 31, 40]。

作者在完成 [31]后不久，便开始研究定理 *C* 中 C^0-刚性结论的无条件版本。然而，由于诸如 $\|R_\alpha g_j\|_\infty$ 之类的项所产生的共形因子似乎难以消除，这项研究暂时搁置。最近， [11], 中的接触刚性结果，尤其是接触大纤维定理中的 *Reeb* 不变性假设，促使人们转而对 $\|R_\alpha g_j\|_\infty$ 施加定量控制，而不是将其消除。事实上，例 *1.1* 证实，一般而言，确实需要某种额外控制。因此，这一观察促成了本文。

注 1.3. 定理 *A*、*B* 和 *C* 对每个固定的接触 *1*-形式都成立。具体地，若 $\widehat{\alpha} = e^\sigma \alpha$对于某个固定的光滑函数 $\sigma: Y \to \mathbb{R}$，则

$$\{e^\sigma f, e^\sigma g\}_{\widehat{\alpha}} = e^\sigma \{f, g\}_\alpha, \qquad R_{\widehat{\alpha}}(e^\sigma g) = R_\alpha g + X_g^\alpha \sigma$$

其中 X_g^α 表示相对于 α的 g 的接触哈密顿向量场。由于 Y 是紧的，重新缩放 $f \mapsto e^\sigma f$ 保持一致收敛以及不存在公共零点的性质。因此，定理 *A* 和 *B* 可直接推广。若原序列满足定理 *C* 的假设，则重新缩放后的序列满足相应假设，当且仅当

$$\max\{\|f_j - f\|_\infty, \|g_j - g\|_\infty\} \|X_{g_j}^\alpha \sigma\|_\infty \longrightarrow 0.$$

当 σ为常数时，这一条件自动成立。更一般地，只需同一逼近误差乘以 $\|g_j\|_{C^1}$ 后趋于零。

1.3. **覆盖的接触泊松括号不变量**。 受辛覆盖不变量 (1.2) 的启发，我们为单位分解引入接触括号泛函，并定义开覆盖的相应不变量。该定义使用任意光滑分割函数，不要求具有 Reeb 不变性。

定义 1.4 （覆盖的接触泊松括号不变量）。设 $(Y, \xi = \ker\ \alpha)$ 是一个闭接触流形。对于 Y 上的光滑单位分解 $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_N)$，其中 $f_i \geq 0$ 和 $\sum_i f_i = 1$，定义

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) := \max_{a,b \in [-1,1]^N} \left\| \left\{ \sum_i a_i f_i, \sum_j b_j f_j \right\}_\alpha \right\|_\infty . \tag{1.9}$$

对于 Y 的有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_N\}$，其接触泊松括号不变量为

$$pb_\alpha(\mathcal{U}) := \inf_{\vec{f}} \mathrm{P}_\alpha(\vec{f}), \tag{1.10}$$

其中，下确界取遍从属于 $\mathcal{U}$ 的光滑单位分割，即对于每个 i，都有 $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$。

由于 $\sum_i f_i = 1$ 和 $\{1, h\}_\alpha = R_\alpha h$ 如（1.5）所示，在（1.9）中取 $a =$(1，.....，1)，则对于每个 $b \in [-1,1]^N$，有

$$\left\| R_\alpha \left(\sum_j b_j f_j \right) \right\|_\infty \leq \mathrm{P}_\alpha(\vec{f}). \tag{1.11}$$

因此，同一个泛函既衡量括号，也控制分割函数的 Reeb 导数。与辛几何不同，即使分割只有两个成员，$\{f, 1-f\}_\alpha = -R_\alpha f$也未必为零。这解释了稍后在定义 1.11 中引入的修正。对于任意满足 $\mathrm{P}_\alpha(f_j)$ 有界的子序列，(1.11) 给出了定理 C 所需的 Reeb 导数界。这得出如下下半连续性结论。

定理 D. 设 $\vec{f_j} = (f_{j,1}, \dots, f_{j,N})$ 和 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$ 是闭接触流形 $(Y, \xi = \ker \alpha)$上的光滑单位分割。若对每个 i，$f_{j,i} \to f_i$ 一致成立，则

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathrm{P}_\alpha(\vec{f_j}).$$

定理 D 的证明见第 6 节。在确立下半连续性之后，我们转而讨论定义 1.4 中覆盖不变量的两个正下界，分别利用拟同态和接触谱不变量。它们的假设将分别陈述。

用 $\widetilde{\varphi}_h$ 表示由 h 生成的接触各向同性在 $\mathrm{Cont}_0(Y, \xi)$ 中的类。对于自治的f，我们也记作 $\widetilde{\varphi}_f^t = [s \mapsto \varphi_f^{ts}]$, $0 \leq s \leq 1$。特别地，$\widetilde{\varphi}_1^t$是时间-t 的 Reeb 各向同性的类。回忆一下，齐次拟同态 $\mu : \mathrm{Cont}_0(Y, \xi) \to \mathbb{R}$ 满足$\mu(a^m) = m\mu(a)$，对任意 $m \in \mathbb{Z}$ 均成立，并且存在缺陷界 $D(\mu) > 0$，使得

$$|\mu(ab) - \mu(a) - \mu(b)| \leq D(\mu) \qquad \text{for all } a, b \in \widetilde{\mathrm{Cont}}_0(Y, \xi). \tag{1.12}$$

如果 $a^{-1}b$ 具有由非负接触哈密顿量生成的代表元，则当 $\mu(a) \leq \mu(b)$ 时，它是单调的。如果 h 支集于$[0,1] \times U$中，而$[0,1] \times U$是某个接触可移动开集 U，则当 $\mu(\widetilde{\varphi}_h) = 0$ 时，它具有消失性质。非零的单调齐次拟同态满足 $\mu(\widetilde{\varphi}_1) > 0$。因此，对于涉及 μ 的估计，我们可以采用归一化

$$\mu(\widetilde{\varphi}_1) = 1, \tag{1.13}$$

此后， $D(\mu)$ 始终表示归一化后的缺陷界。注 7.2 详细说明了如何实现式 (1.13) 中的归一化。

[19], 中由 Borman–Zapolsky [2], 进一步发展的构造，在标准接触实射影空间以及通过接触约化获得的其他预量子化空间上提供了此类拟同态。特别是， [2, 命题 1。2] 确立了射影空间拟态射的单调性和

消失性质。 [20]中给出了透镜空间上的相关构造。

定理 E. 假设 $(Y, \xi = \ker \alpha)$ 存在一个非零的单调齐次拟同态 μ，具有消失性质，并按 (1.13) 归一化。对于由接触可移位集构成的 Y 的任意有限开覆盖$\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$，其中 $N \geq 2$，我们有

$$pb_\alpha(\mathcal{U}) \geq \frac{1}{16(N-1)^2 D(\mu)} > 0. \tag{1.14}$$

证明沿用 [17, 定理 1.4 和 1.7] 中的方法。首先，我们比较输入哈密顿函数之和所生成的流与它们各自流的乘积。接着，我们利用拟态射缺陷 $D(\mu)$ 来估计可加性的失效程度。最后，我们将这些估计对分割的连续部分和求和。第 4.6 节和第 9.2] 节中 [30, 解释了流比较及其在覆盖界中的应用。然而，在接触几何中，还需要一个额外的估计来控制 Reeb 导数。恰恰在此处用到不等式 (1.11)$^{\rightarrow}$：它将这些导数界定为 $\mathrm{P}_\alpha(f)$，从而可以将它们吸收到 (1.14) 的左侧。定理 E 的证明见第 7 节。

1.4. 接触谱不变量给出的下界。作为拟态射的替代方案，接触谱不变量以位移能量的形式给出一个下界。这些不变量有多种构造方法 [32, 1, 6, 11]。就我们的目的而言，我们采用近期的构造 [7]。为陈述其假设，回顾一下，非球面 G-填充是一个无穷远处凸的辛流形 (W, ω)，具有 $\omega|_{\pi_2(W)} = 0$ 以及一个有限群 G的辛作用，该作用在无穷远附近与 Liouville 流交换，并且 G在理想接触边界上自由作用，且 $Y = \partial_\infty W/G$；见 [7, 定义 1.1]。如果 W 中的某个点具有非平凡稳定子，则 [7, 定理 1.10] 为 Y上的每个接触形式 α 构造一个实值谱不变量

$$c_\alpha : \widetilde{\mathrm{Cont}_0}(Y, \xi) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

该构造使用等变接触 Floer 上同调，且不要求 W 的普通辛上同调消失。

对于接触同胚 φ，其平移谱为

$$\mathrm{Spec}_\alpha(\varphi) := \{s \in \mathbb{R} \,|\, \varphi(x) = \varphi_1^s(x),\ \kappa(\varphi)(x) = 0 \text{ for some } x \in Y\}. \tag{1.15}$$

[7, 第 1 节1] 中的性质 (R1)–(R5) 给出了谱性、对非负接触变形的单调性、从上连续性、归一化和次可加性。特别地，

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}) \in \mathrm{Spec}_\alpha(\varphi), \qquad c_\alpha(\widetilde{\mathrm{id}}) = 0, \qquad c_\alpha(ab) \leq c_\alpha(a) + c_\alpha(b), \tag{1.16}$$

以及 $c_\alpha(a) = \lim_{\epsilon \to 0^+} c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^\epsilon a)$。这些性质确定了由 Reeb 流 表示的类上的确切值：$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^t) = t$，正如引理 8.1 所验证的那样。

对于一个开集 $U \subset Y$，其接触位移能为

$$e_\alpha(U) := \inf_{\psi_1(U)\cap U=\varnothing} \int_0^1 \|h_s\|_\infty \, ds, \tag{1.17}$$

其中 h_s 生成基于单位元的接触各向同性 ψ_s。对于可移位的开集，该数值有限；根据 [35]，当 U 非空时，该数值为正。

定理 F. 假设 (Y, ξ) 存在一个非球面的 G-填充，且其中有一点的稳定子非平凡。对于任意接触形式 α，以及由接触可置换集构成的 Y 的任意有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$，都有

$$pb_\alpha(\mathcal{U}) \geq \frac{1}{16(N-1)\sum_{i=1}^{N} e_\alpha(U_i)} > 0. \tag{1.18}$$

注 1.5. 定理 *F* 中的界涉及覆盖各成员的位移能之和。由于 $\sum_i e_\alpha(U_i) \leq N \max_i e_\alpha(U_i)$，我们得到较弱的界 $pb_\alpha(\mathcal{U}) \geq (16N(N-1)\max_i e_\alpha(U_i))^{-1}$。注意，这个界依赖于 N（以 2 阶），即 $\mathcal{U}$ 中覆盖成员的数量。

定理 F 的证明见第 8 节。它仅使用谱不变量 c_α 的公理性质，无需拟同态或周期性 Reeb 流。因此，在任何存在具备这些性质的不变量 c_α 的情形下，同样的结论都成立。以下示例说明了定理 F 的适用范围：所列流形的基本群均为无限群 π_1。相比之下，[19, 20]，中的实射影空间和透镜空间实例，以及单调环面预量子化 [2],，其基本群均为有限群。因此，所引用的拟同态构造无法直接验证这些示例满足定理 E 的假设。

例 1.6. (i) 设 Σ 是一个带有整面积形式 ω的正亏格闭定向曲面，设 $L \to \Sigma$是一个满足 $c_1(L) = -[\omega]$ 的复直线丛。对于任意整数 $m \geq 2$，单位圆丛 $Y = S(L^{\otimes m})$ 满足定理 F 的假设。事实上，在 L的全空间上赋予其通常的无穷远处凸的辛结构。由于它可变形收缩到 Σ，其第二同伦群消失。沿纤维乘以 $e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$ 会固定零截面，并在理想边界上自由作用。按照 [7, 第 1.2 节2]中的描述，商边界为 $S(L^{\otimes m})$。因此，对于定义此接触结构的每个接触形式，(1.18) 均成立。注意，投影 $Y \to \Sigma$ 在基本群上诱导满射，因此 $\pi_1(Y)$是无限的。

(ii) 设 $W = T^*\mathbb{T}^2$，其中 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$，并带有其典范 Liouville 形式。对合 $(q, p) \mapsto (-q, -p)$ 保持此形式，且恰有四个不动点，均位于零截面上。

它在 $S^*\mathbb{T}^2$ 上自由作用，因为固定余向量必须满足 $p=-p$，因此 $p=0$。所以，

$$Y = S^*\mathbb{T}^2/\langle (q,p)\mapsto(-q,-p)\rangle$$

具有一个精确的、因而也是非球面的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-填充，并带有非平凡稳定子。这满足 [7, 定理 1.10], 的假设，并且定理 F 对每个接触形式都适用。由于$S^*\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{T}^3$ 是 Y的有限覆盖，群 $\pi_1(Y)$ 包含 $\mathbb{Z}^3$ 作为有限指标子群，且是无限的。

定理 F 的证明中的一个关键步骤是以下能量估计，它对每个$t \geq 0$ 都成立（见命题 8.5）：

$$0 \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_h^t) \leq e_\alpha(U)\big(1+e^{t\|R_\alpha h\|_\infty}\big) \tag{1.19}$$

对于任意接触哈密顿函数 $h \geq 0$，其紧支集包含于接触可移动开集 $U \subset (Y,\ \ker\alpha)$ 中。其证明改编自 Frauenfelder–Ginzburg–Schlenk 的谱位移论证 [18, 命题 2.1] 以及 Usher [39, 命题 3.1]。为了将该论证改编到接触情形，我们使用 Reeb平移时间作为谱值，如 (1.15) 中所示。与辛类比相比，(1.19) 中的额外项 $e^{t\|R_\alpha h\|_\infty}$ 源于一种截断技巧（见命题 8.5 证明的开头）。更准确地说，对原始 h 进行适当截断，可确保其支集及一个预先指定的 Reeb 平移都包含于 U中，从而使我们能够在整个变形过程中排除一个谱值。

最后，为结束本小节，我们将定理 F 中的位移能上界与 [29, 定理 4.8 及第 5.2–5.4] 节中的辛结果，以及 Seyfaddini [34],Tanny [38], Buhovsky–Logunov–Tanny [5], Payette [28], 和 Shi–Lu [36]的相关结果进行比较。这些结果讨论如下形式的上界

$$pb_\omega(\mathcal{U}) \geq \frac{C}{\max_i e_\omega(U_i)},$$

其中 e_ω 表示 Hofer位移能，而常数 $C>0$ 的取值取决于具体假设。特别地， [5, 推论 1.9] 在二维情形下证明了 [29, 猜想 8.1] ，且常数 C 独立于集合的数量及其重叠程度 [5, （见注 1.10 和例 3.7]）。证明运用了二维方法，即水平曲线的交集和面积估计。因此，我们可以问，在定理 F 的设定下，估计式（1.18）能否改进为

$$pb_\alpha(\mathcal{U}) \geq \frac{C}{\max_i e_\alpha(U_i)}$$

其中常数 $C>0$ 仅取决于 $(Y,\ \alpha)$，与覆盖成员的数量及其重叠情况无关。在三维情形下，一种可行的方法是将 [5] 的方法应用于横截于Reeb流的曲面。

此外，仿照 [5, 定理 1.15], 的证明，可以调整定理 C 证明中的主要步骤（例如 (4.2) 和 (4.3)），以证明：如果 $(Y,\ \ker\ \alpha)$ 的维数至少为三，且配备了一个固定的黎曼度量 ρ，并且给定覆盖 $\mathcal{U}$ 中的每个成员相对于 ρ的直径至多为 ϵ，其中 $0<\epsilon\leq\epsilon_0$，那么我们有一个估计 $pb_\alpha(\mathcal{U})\ \geq\ \frac{c}{\epsilon^2}$。$\epsilon_0>0$ 和 $c>0$ 都仅取决于 α 和 ρ。我们将在未来的工作中提供更多细节，并更系统地探讨这一覆盖基数无关现象。

1.5. **定量接触大纤维定理**。对对合系统 $(f_1$、……、$f_k)$ 的刚性研究：$Y\to\mathbb{R}^k$ 可追溯至 [13, 定理 21]中的辛大纤维定理，近期又出现在接触几何中的 [11, 定理 14]中。对于[11], 中的接触结果，对合性要求存在一个接触形式，使得其所有分量均为 Reeb 不变的，并且它们两两之间的接触泊松括号均为零。通常的论证从目标空间拉回一个单位分解，假设所有相关的逆像都是可置换的，然后利用某个不变量的归一化性质和消失性质导出矛盾。在我们的情形中，定理 E 或定理 F 中的下界均适用于同一个单位分解。将这一构造与受定理 C 中 (1.8) 启发的定量控制相结合，我们得到如下 [11]定量接触大纤维结果。这里的“定量”意味着结论涉及一个加厚纤维，并且适用于其分量函数不必彼此泊松对易或具有 Reeb 不变性的系统。

在本小节和第 9 节中，我们在 $\mathbb{R}^k$ 上使用最大范数 $|v|\ =\ \max_i|v_i|$ 。将 c_k 替换为 $k^{-(k+1)}c_k$，即可得到欧几里得范数版本。

定理 G. 假设$(Y,\xi\ =\ker\alpha)$ 存在一个非零的单调齐次拟态射 μ ，它具有消失性质，并按 (1.13)归一化，缺陷为 $D(\mu)$。那么，对每个 $k\geq1$ ，都存在一个常数 $c_k>0$，仅依赖于 k，且具有如下性质。设$F=(f_1,\ldots,f_k)\colon Y\to\mathbb{R}^k$ 光滑，并记 $M=\max_i\|f_i\|_\infty>0$。若 $0<\delta\leq M$ 且

$$D(\mu)\max\left\{M\max_i\|R_\alpha f_i\|_\infty,\ \max_{i,j}\|\{f_i,f_j\}_\alpha\|_\infty\right\}<c_k\frac{\delta^{2k+2}}{M^{2k}},\tag{1.20}$$

那么，对于某个 $a\in\mathbb{R}^k$，$\{x\in Y\colon\ |F(x)\ -a|\leq\delta\}$ 是接触不可移位的。

当所有接触括号和 Reeb 导数都消失时，(1.20) 的左侧为零。因此，让半径 δ 趋于零，可得如下推论。

推论 1.7。在定理 *G* 的假设下，设 $F=(f_1,\ldots,f_k)\colon Y\to\mathbb{R}^k$ 是光滑的。若 $R_\alpha f_i=0$ 且对于每个 i,j都有 $\{f_i,f_j\}_\alpha=0$，则 F具有接触不可移位纤维。

作为背景，在不同的全局假设下，人们已经获得了推论 1.7 类型的定性结论。例如，[2, 定理 1.17] 利用接触拟态射证明了适当预量子化中的环面纤维具有不可移位性。其他方法则使用

带支集的辛上同调及其 Mayer–Vietoris 性质，或利用 [37], 由接触谱不变量构造的部分接触准态。 [11]

备注 1.8. 我们在定理 *E* 的假设下陈述定理 *G* 和推论 *1.7*。在定理 *F* 的假设下，同样的覆盖论证可得出推论 *1.7* 的定性结论。该论证的定量谱版本还需要控制细化覆盖中各集合的位移能之和。

备注 1.9. 本文写作期间，*Adi Dickstein* 慷慨地分享了一份草稿 [9],，其中建立了文献 [13] 中定性辛大纤维定理的定量细化。他的证明与定理 *G* 的证明共享一个核心思路：细化可位移原像。我们强调，这两种证明都受到文献 [17] 的影响。

下面的例子展示了定理 G 的一个应用。

例 1.10. 我们回顾一个标准事实。考虑 $\mathbb{C}^2$ 中一个椭球的边界，它与标准接触球面接触同胚。根据命题 4.1], 其每个真闭子集都是接触可位移的。然而，它的对跖商与标准接触 $\mathbb{R}P^3$ 接触同胚，而后者具有 Givental 单调齐次拟同态，并满足消失性质 [2, 命题 1.2]。这满足了定理 G 的假设。

具体来说，考虑一个无理椭球的接触边界

$$\Sigma := \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_0|^2 + \frac{|z_1|^2}{\sqrt{2}} = 1 \right\} \quad \text{and} \quad Y := \Sigma / \{ z \sim -z \}$$

其中 $z_\ell = x_\ell + \sqrt{-1} y_\ell$。在 Y 上取由 $\sum_{\ell=0}^{1} (x_\ell \, dy_\ell - y_\ell \, dx_\ell)|_\Sigma$ 下降得到的形式。其 Reeb向量场在坐标轴之外为 $\partial_{\theta_0} + 2^{-1/2} \partial_{\theta_1}$。考虑函数

$$u([z]) := \frac{|z_0|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \in [0, 1].$$

于是 $R_\alpha u = 0$，推论 1.7 保证存在一点 $a \in [0, 1]$，使得 $u^{-1}(a)$ 是接触不可位移的。事实上，很容易看出 $a = 1/2$ 是唯一这样的值。

现在，让我们考虑对 u 作如下扰动：

$$f := u + \frac{\chi(u)}{16} \left(\cos\big(2(q\theta_0 - p\theta_1)\big) + \cos\big(2(q'\theta_0 - p'\theta_1)\big) \right), \tag{1.21}$$

其中 θ_0，θ_1 分别表示 z_0，z_1的角坐标，而 q，p，q'，p' 是由下式定义的四个固定正整数

$$p + q\sqrt{2} := (1 + \sqrt{2})^{32}, \qquad p' + q'\sqrt{2} := (1 + \sqrt{2})^{33},$$

且 χ 是一个光滑截断函数 $0 \le \chi \le 1$，它在 $[3/8, 5/8]$ 上取值为 1，在 $(1/4,\ 3/4)$之外取值为 0。于是可以验证 $\|f-u\|_\infty = 1/8$, $\|f\|_\infty = 1$,

$$f\left(u^{-1}(1/2)\right) = [3/8, 5/8] \quad \text{and} \quad \|R_\alpha f\|_\infty = \frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)^{32}. \tag{1.22}$$

由于 $R_\alpha f \not\equiv 0$，推论 1.7 不适用。不过，定理 G 配合 $\delta = 1/16$，给出了一个不可位移的加厚纤维 $\{|f-b| \le 1/16\}$。这里，我们可以取 $D(\mu) = 64$ (根据定理 1.2] 的 [20,)，以及 $c_1 = 1/77760$ （按照定理 G 的证明）。我们强调，这次扰动中的参数经过了仔细选择，因此子集 $\{|f-b| \le 1/16\}$ 不 包含（不可移位的）纤维 $u^{-1}(\ _{12})$。否则， $f(u^{-1}(\ _{12}))$ 将包含在一个长度为 $1/8$ 的区间内，这与 (1.22) 中的第一个等式矛盾。 –

1.6. 接触 pb 不变量。 现在我们引入由紧子集的三元组和四元组定义的接触不变量。这些定义的灵感来自于第 1.2] 节中引入的辛不变量 pb_3 和 pb_4 [4, 。这些辛不变量为关联子集的刚性与哈密顿动力学提供了有力的方法。

定义 1.11 （三元组和四元组的接触不变量）. (i) 设 $X_0, X_1, X_2 \subset Y$ 为紧集，且满足 $X_0 \cap X_1 \cap X_2 = \varnothing$。容许三元组是一个光滑单位分解 $\vec{h} = (h_0, h_1, h_2)$，满足 h_i 在 X_i的某个邻域上为零。定义

$$pb_{3,\alpha}(X_0, X_1, X_2) := \inf_{\vec{h}} \max_{0 \le i < j \le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty , \tag{1.23}$$

其中，下确界取遍所有容许三元组。

(ii) 对于满足 $X_0 \cap X_1 = Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$的紧集 $X_0, X_1, Y_0, Y_1 \subset Y$，一个容许对由光滑函数 $f, g\colon Y \to [0,1]$ 组成，并满足

$$f = i \text{ on a neighborhood of } X_i, \qquad g = j \text{ on a neighborhood of } Y_j, \qquad i, j \in \{0,1\}.$$

定义

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) := \inf_{(f,g)} \max_{\substack{u \in \{f, 1-f\} \\ v \in \{g, 1-g\}}} \|\{u, v\}_\alpha\|_\infty , \tag{1.24}$$

其中，下确界取遍所有容许对。

在所述交集条件下，定义 1.11 中的可容许类非空，因此在这些情况下，$pb_{3,\ \alpha}$ 和 $pb_{4,\ \alpha}$ 均为有限的非负数。注意，可容许三元组取值于单纯形 $\{(a_0,\ a_1,\ a_2) \in [0,1]^3 \mid a_i \ge 0,\ \sum_i a_i = 1\}$，而可容许对取值于正方形 $[0,1]^2$。与辛对应物相比（见 [4,命题 1.3]），定义 1.11 还对互补哈密顿函数的额外括号取最大值。这些额外的括号确保所得泊松括号不变量具有对称性（见下文引理 10.2）。事实上，下面的例子表明

如果$pb_{3,\ \alpha}$ 和 $pb_{4,\ \alpha}$ 通过直接照搬 pb_3 和 pb_4的辛定义来定义，那么这些对称性可能会失效。

例1.12。 设 $(Y,\ \ker\alpha)$ 是一个接触流形。假设我们定义

$$\widetilde{pb}_{3,\alpha}(X_0,X_1,X_2):=\inf_{\vec{h}}\left\|\{h_0,h_1\}_\alpha\right\|_\infty \tag{1.25}$$

其中 $h_i\geq 0$、 $h_0+h_1+h_2=1$和 $h_i=0$在 X_i附近。考虑 $(X_0,\ X_1,\ X_2)=(\{p\},\ \{\varphi_1^\epsilon(p)\},\ Y)$，其中 $t=\epsilon>0$ 处的 Reeb 流将点 $\{p\}$移位，即 $\varphi_1^\epsilon(p)\neq p$。由于 $X_2=Y$，我们有 $h_2\equiv 0$，因此 $h_1=1-h_0$。根据 (1.5)，每个可容许三元组的接触哈密顿函数 $(h_0,\ h_1,\ h_2)$ 都满足 $\{h_0,h_1\}_\alpha=\{h_0,1-h_0\}_\alpha=-R_\alpha h_0$. 此外，端点条件 $h_0(p)=0$ 和 $h_0(\varphi_1^\epsilon(p))=1$ 意味着

$$1=h_0(\varphi_1^\epsilon(p))-h_0(p)=\int_0^\epsilon R_\alpha h_0(\varphi_1^t(p))dt\leq\epsilon\|R_\alpha h_0\|_\infty$$

这意味着 $\widetilde{pb}_{3,\alpha}(X_0,X_1,X_2)\geq\frac{1}{\epsilon}>0$。另一方面，将 (X_0,X_1,X_2) 置换为 (X_2,X_0,X_1)。于是 $h_0\equiv 0$且 $h_2=1-h_1$。因此，一个函数 $h_1\colon Y\to[0,1]$，在p 附近为零，并在 $\varphi_1^\epsilon(p)$ 附近等于 1，它确定了一个关于 $pb_{3,\alpha}$ 的接触哈密顿函数可容许三元组 $\sim$，且下确界中的括号为零。因此 $\widetilde{pb}_{3,\alpha}(X_2,X_0,X_1)=0$。特别地，$\sim\widetilde{pb}_{3,\alpha}(X_0,X_1,X_2)\neq\widetilde{pb}_{3,\alpha}(X_2,X_0,X_1)$。

类似地，假设我们定义

$$\widetilde{pb}_{4,\alpha}(X_0,X_1,Y_0,Y_1):=\inf_{(f,g)}\left\|\{f,g\}_\alpha\right\|_\infty \tag{1.26}$$

其中 f、 $g\colon\ Y\to[0,1]$、 $f=i$在 X_i附近，而 $g=i$在 Y_i附近，对于 $i=0,\ 1$. 考虑 $(X_0$、X_1、Y_0、$Y_1)=(\{z\}$、$\{\varphi_1^t(p)\}_{t\in[0,\epsilon]}$、$\{p\}$、$\{\varphi_1^\epsilon(p)\})$，其中同样，$\varphi_1^\epsilon(p)$不同于 p，且 z位于整个轨道 $\{\varphi_1^t(p)\}_{t\in[0,\epsilon]}$之外。对于容许对 $(f$、$g)$，沿 Reeb线段有 $f=1$ 和 $df=0$，因此 $\{f,g\}_\alpha=R_\alpha g$ 在那里。沿该线段积分，如上所述，得到$\sim\left\|\{f,g\}_\alpha\right\|_\infty\geq\frac{1}{\epsilon}$，这意味着 pb_4，$_\alpha(X_0$、X_1、Y_0^-、$Y_1)\geq\frac{1}{\epsilon}>0.$。另一方面，在$\widetilde{\ }$置换 $(X_1$、$^-X_0$、Y_0、$Y_1)$之后，我们有 pb_4，$_\alpha(X_1$、X_0、Y_0、$Y_1)=0$。事实上，取 f，使其支集包含在 z的一个小邻域中，并在 z附近等于 1；再取 g，使其支集包含在 $\varphi_1^\epsilon(p)$的一个不相交小邻域中，并在那里等于 1。这些邻域可以分别选取得避开 Reeb线段和 p。该对对于置换后的四元组是容许的，并且由于其支集不相交，其括号为零。

与 (1.25) 和 (1.26) 不同，定义 1.11 直接纳入了这些对称性。互补坐标除了保留这些对称性外，还提供 Reeb 导数控制：

$$\max_{0\leq i\leq 2}\|R_\alpha h_i\|_\infty\leq 2\max_{0\leq i<j\leq 2}\|\{h_i,h_j\}_\alpha\|_\infty,$$

$$\max\{\|R_\alpha f\|_\infty,\|R_\alpha g\|_\infty\}\leq 2\max_{\substack{u\in\{f,1-f\}\\ v\in\{g,1-g\}}}\|\{u,v\}_\alpha\|_\infty.$$

因此，在输入接触哈密顿函数一致收敛的条件下，定理 C 推出了定义 1.11 中两个括号最大值的下半连续性，无需额外的导数假设（见命题 10.3）。

例 1.13。 在本例中，我们将在预量子化的背景下，把接触 $pb_{3,\alpha}$、$pb_{4,\alpha}$ 与辛 pb_3、pb_4 联系起来。设 $\pi\colon (Y, \alpha) \to (M, \omega)$ 是闭辛流形上的预量子化，其中 $d\alpha = \pi^*\omega$，且纤维上的 Reeb 流等于周期为一的圆周作用。那么

$$pb_{3,\alpha}(\pi^{-1}A_0, \pi^{-1}A_1, \pi^{-1}A_2) \le pb_3(A_0, A_1, A_2),$$
$$pb_{4,\alpha}(\pi^{-1}A_0, \pi^{-1}A_1, \pi^{-1}B_0, \pi^{-1}B_1) \le pb_4(A_0, A_1, B_0, B_1)$$

对于满足第一个不等式中的 $A_0 \cap A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 和第二个不等式中的 $A_0 \cap A_1 = B_0 \cap B_1 = \varnothing$ 的紧输入集。

证明基于以下两个泊松括号之间的等式：对于 $F, G \in C^\infty(M)$，有 $\{\pi^*F, \pi^*G\}_\alpha = \pi^*\{F, G\}_\omega$，这意味着

$$\|\{\pi^*F, \pi^*G\}_\alpha\|_\infty = \|\{F, G\}_\omega\|_\infty .$$

对于 $pb_{3,\alpha}$，[4, 命题 1.3] 使我们能够使用归一化哈密顿函数 $F, G \ge 0$，其中$F + G \le 1$，且 $F = 0$ 在 A_0附近、$G = 0$ 在 A_1附近，以及 $F + G = 1$ 在 A_2附近。令

$$h_0 := \pi^*F, \qquad h_1 := \pi^*G, \qquad h_2 := 1 - h_0 - h_1.$$

于是，(h_0, h_1, h_2) 是提升后的 $\pi^{-1}A_0$、$\pi^{-1}A_1$、$\pi^{-1}A_2$ 的一个可容许（接触）分割。由于函数 h_0、h_1、h_2 是 Reeb 不变的，它们与常函数的括号为零。因此，$\{h_0, h_2\}_\alpha = -\{h_0, h_1\}_\alpha$ 和 $\{h_1, h_2\}_\alpha = \{h_0, h_1\}_\alpha$，这意味着

$$\max_{0 \le i < j \le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty = \|\{F, G\}_\omega\|_\infty .$$

对归一化的（辛）哈密顿函数取下确界，即可证明 $pb_{3,\alpha}$ 与 pb_3 之间的不等式。对 $pb_{4,\alpha}$ 和 pb_4 也可使用类似的论证。

根据假设的不同，再次有两种方法可以得到 $pb_{3,\alpha}$ 和 $pb_{4,\alpha}$ 的下界。为了表述拟态射界，回顾 [2, 定义 1.7 和 1.9]中的概念。对于一个非零的单调齐次拟态射 $\mu : \mathrm{Cont}_0(Y, \xi) \to \mathbb{R}$，若紧集 $S \subset Y$ 对每个满足$h|_S = 0$的自治的 $h \in C^\infty(Y)$ 都有 $\mu(\widetilde{\varphi}_h) = 0$，则称其为 μ-次重的；若对每个满足 $h|_S > 0$ 的自治的 $h \in C^\infty(Y)$ 都有 $\mu(\widetilde{\varphi}_h) > 0$，则称其为 μ-超重的。这些性质不依赖于接触形式的选择，并且根据 [2, 命题 1.10 和定理 1.11]，每个 μ-超重集都是μ-次重的。

定理 H. 假设$(Y, \xi = \text{核 } \alpha)$ 存在一个非零的单调齐次拟态射 μ，并按(1.13)进行归一化。对于紧输入子集，以下结论成立。

(i) 若 $X_0 \cap X_1 \cap X_2 = \varnothing$ 以及每个 X_i 都是 μ-次重的，则

$$pb_{3,\alpha}(X_0, X_1, X_2) \geq \frac{1}{256D(\mu)}.$$

(ii) 若 $X_0 \cap X_1 = Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$ 以及每个 $X_i \cup Y_j$、 i、 $j \in \{0,1\}$ 都是 μ-次重的，则

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) \geq \frac{1}{8064D(\mu)}.$$

此外，若 Y_1 是 μ-次重的，则 $pb_{4,\ \alpha}(X_0,\ X_1,\ Y_0,\ Y_1) \geq \frac{1}{768D(\mu)}$.

注 1.14。 定理 *H* 并未假设 μ 具有消失性质。

定理 H 是 [4, 定理 1.15], 的接触对应物；后者针对辛拟态给出了由超重集和泊松括号不等式导出的辛 pb_3 和pb_4 下界；另见 [30, 第 7 节3]。在我们的证明中，次重性使拟同态在三元组中每个测试函数所生成的同伦类，以及四元组中的每个乘积 fg、 $f(1-g)$、$(1-f)g$ 和 $(1-f)(1-g)$ 上都消失。因此，定理 E 所用的分割估计可直接应用。为了得到最后一个结论中的强化下界，我们还使用关系

$$pb_{3,\alpha}(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup Y_0, Y_1) \leq 3pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1), \tag{1.27}$$

已在引理 10.5 中证明。该加强界的假设等价于只要求 $X_0 \cup Y_0$、 $X_1 \cup Y_0$ 和 Y_1 为 μ-次重的，因为任何包含 μ-次重集的紧集都是 μ-次重的。这是定理 1.15(ii)中三集条件的接触版本。或者，在位移假设下，谱不变量可单独给出一个结论，而无须拟同态。

推论 1.15。 假设$(Y, \xi = \ker\, \alpha)$ 满足定理 *F* 的填充假设。那么对于紧输入子集，以下结论成立。

(i) 若 $X_0 \cap X_1 \cap X_2 = \varnothing$ 和每个 $Y \setminus X_i$ 都是接触可位移的，则

$$pb_{3,\alpha}(X_0, X_1, X_2) \geq \frac{1}{128 \sum_{i=0}^{2} e_\alpha(Y \setminus X_i)}. \tag{1.28}$$

(ii) 如果 $X_0 \cap X_1 = Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$ 和每个 $Y \setminus (X_i \cup Y_j)$ 都是接触可置换的，则

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) \geq \frac{1}{2688 \sum_{i,j=0}^{1} e_\alpha(Y \setminus (X_i \cup Y_j))}. \tag{1.29}$$

定理 H 和推论 1.15 的证明见第 10 节。这些下界中的常数反映了接触泊松括号公式 (10.7) 的复杂性（另见 (9.3)）。

1.7. 动力学应用。 第一个应用涉及接触哈密顿弦的存在性，其中使用了 $pb_{4,\ \alpha}$ 其定义及估计见第 1.6 节。在这一应用中，四个输入具有不同的作用： X_0， X_1 是轨道必须连接的端点集，而Y_0， Y_1 规定了哈密顿量取值之间的分离。因此，对于$pb_{4,\ \alpha}(X_0,\ X_1,\ Y_0,\ Y_1)$的一个下界给出了哈密顿流的时间界。为应用我们先前的估计，我们考虑满足 $R_\alpha h = 0$ 的光滑自治哈密顿量 h 。

定理 I。 设 X_0、X_1、Y_0、$Y_1 \subset Y$ 为满足 $X_0 \cap X_1 = Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$ 的非空紧集，并假设

$$p := pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) > 0.$$

令 $h \in C^\infty(Y)$ 满足 $R_\alpha h = 0$，并假设 最小值$_{Y_1}\, h -$ 最大值$_{Y_0}\, h > 0$。若 T、$L > 0$ 满足

$$\max\left\{\frac{\min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h}{L},\ \frac{1}{T} + \frac{\max\{|\max_{Y_0} h|, |\min_{Y_1} h|\}}{L}\right\} \le p\left(\min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h\right), \tag{1.30}$$

那么存在 $x \in X_0$ 以及（带符号的）时间 t、$s \in \mathbb{R}$，使得

$$\varphi_1^s \varphi_h^t(x) \in X_1, \qquad |t| \le T, \qquad |s| \le L, \qquad |t| + |s| > 0. \tag{1.31}$$

此外，若 $\left(\bigcup_{|s|\le L} \varphi_1^s(X_0)\right) \cap X_1 = \varnothing$，则 (1.31) 中的 $|t|$ 非零

.

由于 $\max\{|\max_{Y_0} h|, |\min_{Y_1} h|\} \le \|h\|_\infty$，可以施加以下条件，它比 (1.30) 更简单：

$$\frac{1}{T} + \frac{\|h\|_\infty + \min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h}{L} < p\left(\min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h\right). \tag{1.32}$$

然而，条件 (1.30) 只使用了输入子集 Y_0, Y_1 上的 h 的取值。此外，若 $h = 0$ 靠近 Y_0 且 $h = 1$ 靠近 Y_1，则条件 (1.30) 可化简为 $\frac{1}{T} + \frac{1}{L} \le p$。因此，取 $T = L = 2/p$ 可将两个时间参数都限制在 $2/p$ 以内。下面的推论在附加端点假设下给出一条普通的哈密顿弦，不含 Reeb 平移。

推论 1.16. 在定理 *I* 的设定下，假设 $p > 0$, $R_\alpha h = 0$，且 最小值$_{Y_1}\, h -$最大值$_{Y_0}\, h > 0$。若 X_0, X_1 中至少一个在整个 ***Reeb*** 流下是不变量，则存在$x \in X_0$ 和一个（带符号的）时间 t，使得

$$\varphi_h^t(x) \in X_1 \quad \textit{where } 0 < |t| \le \frac{1}{p(\min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h)}. \tag{1.33}$$

证明。 固定 $T > 1/(p(\text{最小值}_{Y_1} h - \text{最大值}_{Y_0} h))$。由于 $1/T < p(\text{最小值}_{Y_1} h - \text{最大值}_{Y_0} h)$，我们可以选取足够大的$L$ ，使得 (1.30) 成立。于是定理 I 给出 $x \in X_0$ 和 $t, s \in \mathbb{R}$ ，其中$|t| \le T$ 且 $\varphi_1^s \varphi_h^t(x) \in X_1$。若 X_1 是 Reeb 不变的，则应用逆Reeb平移可直接得出 $\varphi_h^t(x) \in X_1$。若 X_0 是 Reeb 不变的，则令 $x' := \varphi_1^s(x) \in X_0$。由于两种流的交换性（因为 h 是 Reeb 不变的），可得

$$\varphi_h^t(x') = \varphi_1^s \varphi_h^t(x) \in X_1.$$

因此，无论哪种情况，都存在一条从 X_0 到 X_1 的普通 h-弦，且满足 $|t| \le T$。令 T递减至 $1/（p（\min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h））$，并取初始点和时间的一个收敛子列，即可得到所述界。由于 $X_0 \cap X_1 = \varnothing$，极限时间非零。□

定理 I 的证明见第 11 节，它将 [4, 引理 4.1 和定理 1.10] 中的平均化论证推广到两个交换流；另请参见 [30, 第 7 节.4]中对 pb_4的行进时间解释。由于 h 是严格的，其哈密顿流与 Reeb 流交换，并且$X_h f = -\{f, h\}_\alpha$。假设不存在满足给定哈密顿时间界和 Reeb 时间界的连接，我们首先将这两个流从端点扫掠得到的集合分离开来。对这个分离函数关于两个时间变量取平均，既能保持其在端点集附近的预设取值，又能同时控制 $X_h f$ 和 $R_\alpha f$。随后对 h 施加光滑截断函数，将这些导数界转化为接触不变量中四个互补括号的估计。因此，不变量的正性迫使存在一条哈密顿轨道，随后接上一次受到定量控制的 Reeb 平移。

注 1.17。 我们将定理 *I* 和推论 *1.16* 与 [16, 第 1.4–1.5 节和第 4 节5]进行比较。*Entov* 和 *Polterovich* 利用 *Legendrian*接触同调中的持久性模来界定辛化中的辛*pb*不变量。他们的互联结果为适当的 *Legendrian*对和正的接触哈密顿量给出有向弦，而不要求这些哈密顿量是 *Reeb* 不变的。我们的结果使用四个紧集的接触*pb*不变量，并适用于严格自治哈密顿量。这些哈密顿量可以变号，端点集也不必是 *Legendrian* 的。此外，结论允许沿任一方向运动。

下面的例子展示了定理 I 和推论 1.16 在若干具体几何情形下的结论。

例1.18。 令 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ，并赋予 $D^*S^1 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [-1, 1]$ Liouville形式$\lambda = p\,dq$。其接触边界 $S^*S^1 = \partial D^*S^1$ 具有两个连通分支：

$$Y = S^*S^1 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \{+1, -1\}.$$

对于我们的输入接触哈密顿量 h，条件 $R_\alpha h = 0$ 意味着它在每个分支上都是常数。固定 $0 < d \le 1/2$ 并令

$$X_0 = \{(0,+1)\},\quad X_1 = \{(d,+1)\},\quad Y_0 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \{-1\},\quad Y_1 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \{+1\}.$$

容易验证

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = \frac{1}{d}. \tag{1.34}$$

对于满足 $Y \to \mathbb{R}$ 且 $h|_{Y_0} = 0$和 $h|_{Y_1} = 1$的 Reeb不变哈密顿量 h，只要不等式 $\frac{1}{T} + \frac{1}{L} \le \frac{1}{d}$ 成立，定理 I 就适用。例如，取 $T = L = 2d$。因此，在所述时间界限下，定理 I 的结论等价于对某些 $|t| \le T$ 和 $|s| \le L$，算术关系 $t + s \equiv d$（模 1）成立。

例 1.19. 在本例中，我们将展示接触泊松括号不变量$pb_{4,\ \alpha}$ 如何检测标准球面 S^2 上大圆进动中的快速扩散。这里，“快速扩散”（参见 [15, 第 1.3] 节）是指，当大圆所在平面以角速度 ϵ 转动时，其单位法向量的第一分量可以在时间 O（ϵ^{-1}）内穿越两个固定水平。我们称这样的经过为一次穿越。如果扰动函数在法向量球面的两段圆弧上相对于 ϵ 足够小（见下文推论 1.20 中的假设），那么这种穿越会在相同的时间尺度 O（ϵ^{-1}）下持续存在。

(i) 单位标准球面上的测地流进动 S^2。设 q_0 为单位标准球面$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上的一点，并设 $v_0 \in T_{q_0}S^2$ 为单位向量。具有这些初始数据的测地线为 $\gamma(t) = \cos t\, q_0 + \sin t\, v_0$。其像是位于垂直于 $n(0) := q_0 \times v_0$的平面内的大圆。特别地，点在运动，但平面不动。现在固定 $0 < c < 1/\sqrt{2}$, $q_0 = (0, 1, 0)$，以及 $v_0 = (-\sqrt{1-c^2}, 0, -c)$，使得初始法向方向为 $n(0) = (-c, 0, \sqrt{1-c^2})$。对于$\epsilon > 0$，考虑如下系统

$$\dot{n}(t) = (0, \epsilon, 0) \times n(t) \tag{1.35}$$

其解为

$$n(t) = \big(\sin(\epsilon t - \arcsin c),\ 0,\ \cos(\epsilon t - \arcsin c)\big). \tag{1.36}$$

等价地，如果 $A_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 表示绕第二坐标轴旋转角度 θ，旋转方向为 $\mathbb{R}^3$ 中的 (0，1，0)，那么上述解为 $n(t) = A_{\epsilon t} n(0)$。换言之，大圆所在的平面随其法向量 $n(t)$ 一起旋转，这种运动称为进动。此外，在这种进动下，S^*S^2 上状态为 $(q_\epsilon(t)\ v_\epsilon(t))$ 的扰动流满足以下方程组：

$$\dot{q}_\epsilon(t) = v_\epsilon + (0, \epsilon, 0) \times q_\epsilon, \qquad \dot{v}_\epsilon(t) = -q_\epsilon + (0, \epsilon, 0) \times v_\epsilon. \tag{1.37}$$

图1显示了 $t_* = 5\pi/2$ 处 $c = \epsilon = 1/10$ 时的两种运动，此时进动平面已转过角度 $\epsilon t_* = \pi/4$。补充视频展示了一个完整的进动周期 [42]。

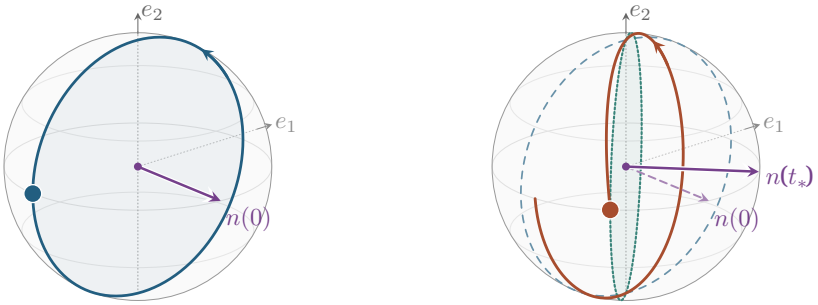

图1。左：圆形测地线，其法向量固定为 $n(0)$。右：进动的测地线平面，其法向量从 $n(0)$ 转向 $n(t_*)$。

(ii) 有限时间区间内的快速扩散。由 (1.36)，考虑时间区间 $[0, \frac{2\arcsin(c)}{\epsilon}]$。由于 $|\epsilon t - \arcsin c| \le \arcsin c$ 在此区间内，速度 $\dot{n}_1(t) = \epsilon n_3(t)$ 介于 $\epsilon\sqrt{1-c^2}$ 和 ϵ 之间。然后，从 0 积分到 t，得到

$$\epsilon t\sqrt{1-c^2} + n_1(0) \;\le\; n_1(t) = \epsilon \int_0^t n_3(s)\, ds + n_1(0) \;\le\; \epsilon t + n_1(0)$$

对于 $0 \le t \le \frac{2\arcsin(c)}{\epsilon}$。特别地，$n_1(t)$ 随时间 $O(\epsilon^{-1})$ 从 $n_1(0) = -c$ 增加至 $n_1(\frac{2\arcsin(c)}{\epsilon}) = c$。图2左图比较了参数 $c = 1/10$ 和 $\epsilon = 1/100$ 下的三个函数 $\epsilon t\sqrt{1-c^2} + n_1(0)$、$n_1(t)$ 和 $\epsilon t + n_1(0)$。所示区间上的图像近乎线性。图2右图展示了单位法向量球面中的一个穿越，从水平面 $n_1 = -c$ 穿越至 $n_1 = c$（即 $\{n \in \mathbb{R}^3 \,|\, |n| = 1\}$）；其中点 n 也可表示垂直于 n 的定向大圆。

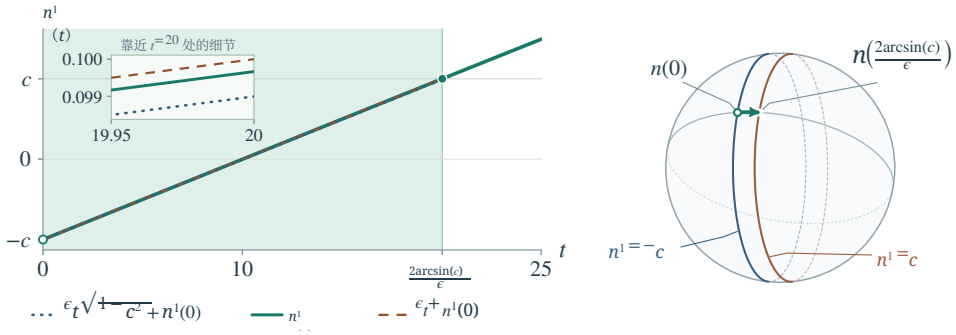

图2。左：$n_1(t)$ 在时间区间 $[0, 25]$，上的图像，其中区间 $[0, \frac{2\arcsin(c)}{\epsilon}]$ 以阴影标示。右：$n_1 = -c$ 与 $n_1 = c$ 之间的一次穿越。

(iii) 对 C^0-扰动的鲁棒性。在单位法向量球面的上半球中，考虑闭四边形 Q：$= \{n_3 > 0,\ |n_1| \le c,\ |n_2| \le c\}$，它可与正方形 $[-c,c]^2$ 等同。将其左侧和右侧分别记为 A_0, A_1，将底边和顶边分别记为 B_0, B_1:

$$A_i := Q \cap \{n_1 = (2i-1)c\}, \qquad B_i := Q \cap \{n_2 = (2i-1)c\}, \qquad i = 0, 1. \tag{1.38}$$

参见图 3（暂时忽略 橙色弦）。要扰动 (1.35)，取一个光滑的

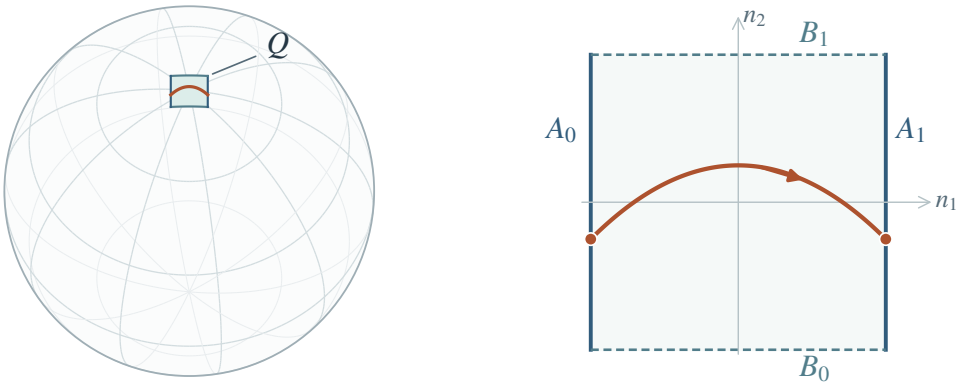

图 3。左：单位法向量球面上的区域 Q。右：对于特定扰动 $k(n) = \frac{\epsilon n_1^2}{2c}$，从 A_0 穿越至 A_1。

函数 $k : S^2 \to \mathbb{R}$，定义在单位法向量球面上，并考虑

$$\dot{n} = ((0, \epsilon, 0) + \nabla_{S^2} k(n)) \times n \tag{1.39}$$

其中，扰动项 $\nabla_{S^2} k(n)$ 表示 k 在 n 处的梯度，该梯度是相对于其圆度量而言的。

推论 1.20. 对于任意满足 $\|k\|_{C^0(B_0 \cup B_1)} \le \frac{c\epsilon}{2}$ 的光滑 $k : S^2 \to \mathbb{R}$，式 *(1.39)* 中的扰动进动存在一个轨迹段，其两个端点分别位于 A_0 和 A_1 上，且持续时间至多为 $7\mathrm{area}(Q)/(c\epsilon)$。

图 3 展示了这样一次穿越，其中明确标出了时间方向的正负，并在 S^2 上选取了特定的函数 k。推论 1.20 只要求对 $B_0 \cup B_1$ 进行 C^0 控制，且不对 k 的导数作任何限制。关于不同情形下的类似结论，参见 [15, 推论 1.8]。

(iv) 接触几何解释。(1.35) 中的进动可以用接触几何来重新表述。将标准单位余球丛与 $Y := S^*S^2 = \{(q, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |q| = |v| = 1,\ q \cdot v = 0\}$ 等同，并取 $\alpha := v \cdot dq$。由常数接触哈密顿量 1 生成的 (Y, α) 上的 Reeb 流，对应于底空间 S^2 上的标准测地流。

映射 $\pi\colon Y \to S^2$, $(q,v) \mapsto q \times v$, 将 Reeb 流的商空间与单位法向量球面等同。考虑由下式定义的接触哈密顿量 $h_\epsilon : Y \to \mathbb{R}$

$$h_\epsilon := 1 + \epsilon(n_2 \circ \pi) \tag{1.40}$$

其中 $n_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ 是第二坐标函数。h_ϵ 的流满足 (1.37)，其法向量满足 (1.35)。这样，我们便可以用接触哈密顿动力学的术语重新诠释测地流的进动。

此外，(1.38) 中的四个子集 A_0、A_1、B_0、$B_1 \subset S^2$ 提升为 Y 中的四个紧环带：

$$X_i := \pi^{-1}(A_i), \qquad Y_j := \pi^{-1}(B_j), \qquad i,j \in \{0,1\}, \tag{1.41}$$

它们是 Reeb 不变的，且相对的环带互不相交。推论 1.20 中的扰动 k 向 h_ϵ 添加了项 $k\circ\pi$，所得的接触哈密顿量 $h := h_\epsilon + k\circ\pi$ 满足 $R_\alpha h = 0$，因为它在 Reeb 纤维上为常数。接下来还需验证推论 1.16 所要求的 $pb_{4,\,\alpha}$ 上的哈密顿量间隙和正下界。

推论 1.20 的证明 写作 $u(n) := \epsilon n_2 + k(n)$，于是 $h = 1 + u \circ \pi$。假设给出在 B_0 上的 $u \le -c\epsilon/2$，以及在 B_1 上的 $u \ge c\epsilon/2$。因此，

$$\min_{Y_1} h - \max_{Y_0} h \ge c\epsilon.$$

沿用 (1.41) 的记号，只需验证 $pb_{4,\,\alpha}(X_0,\ X_1,\ Y_0,\ Y_1)$ 存在一个正下界。令 $D := \pi^{-1}(Q)$，并令 P 表示满足下式的容许对 $(f,\ g)$ 在 (1.24) 中的最大值

$$f|_{X_0} = 0, \quad f|_{X_1} = 1, \quad g|_{Y_0} = 0, \quad g|_{Y_1} = 1.$$

考虑 2-形式 $f dg \wedge \alpha$。在法向量球面上取外向圆面积形式 ω，$d\alpha = -\pi^*\omega$。只有 X_1 对边界积分有贡献。在这个环带上，$d\alpha = 0$，因此 $dg \wedge \alpha = d(g\alpha)$。其两个边界纤维的 $g = 0,$ 分别为 1，且 Reeb 周期为 2π，从而有

$$\left| \int_{\partial D} f dg \wedge \alpha \right| = 2\pi.$$

另一方面，直接计算可得

$$d(f dg \wedge \alpha) = \big(\{f,g\}_\alpha + g R_\alpha f - 2 f R_\alpha g \big)\, \alpha \wedge d\alpha.$$

因此，由斯托克斯定理，

$$2\pi = \left| \int_D \big(\{f,g\}_\alpha + g R_\alpha f - 2 f R_\alpha g \big)\, \alpha \wedge d\alpha \right| \le 7P \cdot 2\pi \ \mathrm{area}(Q),$$

其中，不等式中的系数根据 (10.2) 被 $P+2P+4P$ 所界定。取下确界得到 $pb_{4,\,\alpha}(X_0,\ X_1,\ Y_0,\ Y_1) \ge 1/(7\ \mathrm{area}(Q))$。于是，推论 1.16 给出了一个持续时间至多为 $7\mathrm{area}(Q)/(c\epsilon)$ 的穿越。□

注记1.21。 快速扩散的稳健性并不 违反 $[25,\ 1.4\mathrm{Theorem}]$ 中的 ***Nekhoroshev***指数稳定性。为便于比较，我们将第 ***(iv)*** 部分中的接触几何解释提升为一个（辛）哈密顿量动力系统。考虑如下一个同一化

$$((0,\infty)\times Y, d(r\alpha)) \simeq T^*S^2\backslash o_{T^*S^2} \quad by\ (r,q,v)\mapsto (q,\eta = rv)$$

其中， $\eta\in T_q^*S^2$ 表示在圆度量下与 rv 对应的余向量。在 $T^*S^2\backslash o_{T^*S^2}$ 上的未扰动哈密顿量生成 S^2 上的测地流，其表达式为

$$H_0(q,\eta) = |\eta|.$$

当 $\epsilon = 0$时，这与（***1.40***）中的 h_0 相对应。在正则作用量图上，可以取 $I_1 = |\eta|$和 $I_2 = (q\times\eta^\sharp)_3$（其中 $\eta^\sharp$ 是 η的对偶）：它们的流分别是 2π周期的标准测地流和轴向旋转。因此，在此图中， $H_0 = I_1$ 在每条 I_1 =常数 线上都是常数，故不满足 $[26,$ 定理 1。$5]$中的陡峭性判据。因此，***Nekhoroshev*** 的结果不适用。

第二个应用从接触形式变形的角度，对接触泊松括号的 C^0界给出几何解释。辛模型是 $[4,$第 1.6$]$节 $\omega_s = \omega - s\,df\wedge dg$中所考察的变形，其中恒等式 $\omega_s^n = (1-s\{f,g\}_\omega)\omega^n$给出了一个区间，在该区间上变形形式保持辛性。结合全纯曲线的持久性，这一计算得出了泊松括号的下界。然而，在接触情形下，变形 $\alpha_s = \alpha - sf\,dg$含有系数 $X_fg = \{f,g\}_\alpha + gR_\alpha f$。为控制这一额外的 Reeb项，我们再次利用互补哈密顿函数的括号：直接计算表明，与（1.24）中一样，这些括号控制该系数，从而确定一个明确的区间，使变形形式在该区间上保持接触。

定理 J。 设$(Y,\xi = \ker\,\alpha)$ 是一个闭接触流形，且 $f,g\in C^\infty(Y)$。考虑变形 $\alpha_s = \alpha - sf\,dg$, $s\in\mathbb{R}$。则

$$\alpha_s\wedge(d\alpha_s)^n = (1-sX_fg)\,\alpha\wedge(d\alpha)^n. \tag{1.42}$$

特别地，对于 $|s|\,\|X_fg\|_\infty < 1$，形式 α_s仍为接触形式，而映射 $\Psi_s(x) = \varphi_f^{-sg(x)}\,(x)$ 构成一族从恒等映射出发的微分同胚各向同性，使得

$$\Psi_s^*\alpha = e^{\kappa_s}\alpha_s, \qquad \|\kappa_s\|_\infty \le |s|\,\|g\|_\infty\,\|R_\alpha f\|_\infty\,. \tag{1.43}$$

注记1.22。 若 $R_\alpha f = 0$，则定理 ***J*** 中的 ***(1.43)*** 给出 $\Psi_s^*\alpha = \alpha_s$，因此 Ψ_s 通过这一变形将 α_s 的 ***Reeb*** 流共轭到 α 的 ***Reeb*** 流。

下面的观察表明，接触泊松括号如何通过范数 $\|X_fg\|_\infty$ 控制定理 J 中 s 的取值范围。由于 $\{f,1\}_\alpha = -R_\alpha f$，由双线性可得

$$X_fg = \{f,g\}_\alpha + gR_\alpha f = (1-g)\{f,g\}_\alpha - g\{f,1-g\}_\alpha.$$

因此，若 $0 \le g \le 1$，则

$$\|X_{fg}\|_\infty \le \max\bigl\{\|\{f,g\}_\alpha\|_\infty, \|\{f,1-g\}_\alpha\|_\infty\bigr\}.$$

因此，在这种情况下，只要 $|s|\max\bigl\{\|\{f,g\}_\alpha\|_\infty, \|\{f,1-g\}_\alpha\|_\infty\bigr\} < 1$，变形 1-形式 α_s 就仍为接触形式。对单位分解的线性组合 f， g ，我们得到以下推论。

推论 1.23. 设 $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ 是 Y 的有限开覆盖。对于每个 $T > 0$，满足$T \cdot pb_\alpha(\mathcal{U}) < 1$，都存在一个从属于 $\mathcal{U}$ 的单位分解 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$，使得对每个 a、$b \in [0,1]^N$ 和 $|s| \le T$，变形形式

$$\alpha - s\left(\sum_{i=1}^N a_i f_i\right) d\left(\sum_{i=1}^N b_i f_i\right) \tag{1.44}$$

均为接触形式，且其核与 ξ 同伦。

对于可容许四元组，同样的论证表明，$T \cdot pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) < 1$保证存在一个容许对 (f,g)，使得对所有 $|s| \le T$， $\alpha - sf\,dg$ 均保持接触。定理 J 和推论 1.23 的证明见第 12 节。

致谢。 本项目始于作者在 [31] 开展关于接触余等向子流形的接触泊松括号刚性研究期间。近期取得了重大进展，部分灵感来自 [11] （见上文注 1.2）。论文是在访问圣母大学期间完成的，作者感谢 Richard Hind 对本项工作的鼓励与关注。作者还感谢 Lev Buhovsky 和 Leonid Polterovich 的有益讨论，尤其感谢他们建议加入例 1.10、例 1.19 和推论 1.20；感谢 Dylan Cant 就引理 8.3 的证明所作的讨论；感谢 Adi Dickstein 就定量大纤维定理（定理 G）所作的讨论；感谢 Shira Tanny 提供注 1.3 并讨论第 1.5 节紧前的内容；还感谢 Michael Usher 就未来工作中将探讨的 [31, 命题 1.3], 中通过接触泊松括号刻画接触余等向子流形的定量版本所作的讨论。作者的研究部分得到国家重点研发计划（项目编号：2023YFA1010500）以及国家自然科学基金项目（项目编号：12301081、12511540054、12361141812 和 12631007）的资助。

关于 AI 的使用：大语言模型（LLM）用于校对和语言润色，也用于本研究的以下方面：(i) 计算公式 (9.3) 和 (10.7) 中的接触泊松括号公式；(ii) 为例 1.10 提出扰动 (1.21)，并确定同一例中常数 c_1 的显式值；(iii) 构造例 1.1 中的反例，详见第 5 节。作者通过改编 [3]中的例 1.2.2，构造了定理 C 无条件版本的反例；大语言模型

生成了本文所呈现的例子，该例推翻了定理 B 和定理 C 的无条件版本；(iv) 补充引理 8.2 证明的细节；(v) 制作例 1.19 中的图和说明性影片 [42]。最后，(vi) 大语言模型建议在引理 2.1 中汇集若干有用的恒等式和估计，并简化了估计 (2.8) 的证明；作者最初的论证使用了格朗沃尔不等式。

2. Proof of Theorem A

对于由 h_s 生成的基于单位元的接触各向同性 ψ_s, $0 \le s \le t$，记作

$$\ell_\alpha(\psi) := \int_0^t \|h_s\|_\infty \, ds. \tag{2.1}$$

~~~每当将这类路径视为 $\mathsf{Cont}_0(Y,\ \xi)$ 的元素时，我们都会将路径重新参数化到$[0,1]$上。证明中始终采用这一约定。

对于 $\varphi \in \mathsf{Cont}_0(Y,\ \xi)$，Shelukhin 范数为

$$|\varphi|_\alpha = \inf_{\varphi_h^1=\varphi} \int_0^1 \|h_t\|_\infty \, dt. \tag{2.2}$$

它是非退化的、对称的，并满足三角不等式；参见 [35]。然而，它未必在共轭下不变。尽管如此，共轭仍可由以下估计控制：

$$|\psi\varphi\psi^{-1}|_\alpha \le e^{\max_Y \kappa(\psi)} |\varphi|_\alpha. \tag{2.3}$$

事实上，对由 h_t 生成的各向同性取共轭后，所得哈密顿量为 $(e^{\kappa(\psi)}h_t)\circ\psi^{-1}$。因此，取其一致范数并积分，再取下确界，即可证明 (2.3)。

为比较位移、拟同态和谱论证中出现的接触流，我们先归纳几条有用的恒等式。

引理 2.1。设 h_s、k_s 是光滑的时变接触哈密顿量，其基于恒等元的流分别为 φ_h^s、φ_k^s，对 $0 \le s \le t$。则

$$\kappa(\varphi_h^s)(x) = \int_0^s (R_\alpha h_r)(\varphi_h^r(x))\, dr, \qquad \|\kappa(\varphi_h^s)\|_\infty \le \int_0^s \|R_\alpha h_r\|_\infty \, dr, \tag{2.4}$$

相对路径 $(\varphi_h^s)^{-1}\varphi_k^s$ 由下式生成：

$$e^{-\kappa(\varphi_h^s)}(k_s - h_s)\circ\varphi_h^s. \tag{2.5}$$

对于每个固定的光滑函数 g，

$$\frac{d}{ds}\big(e^{-\kappa(\varphi_h^s)} g\circ\varphi_h^s\big) = e^{-\kappa(\varphi_h^s)}\{h_s, g\}_\alpha \circ \varphi_h^s. \tag{2.6}$$
~~~

特别地，对于自治的 f、g 和 $t \geq 0$,

$$\ell_\alpha\big(\{\varphi_f^{-s}\varphi_g^s\}_{0\leq s\leq t}\big) \leq \|g-f\|_\infty \int_0^t e^{s\|R_\alpha f\|_\infty}\, ds \leq t e^{t\|R_\alpha f\|_\infty}\, \|g-f\|_\infty\,, \tag{2.7}$$

并且，对于每个 $x \in Y$,

$$|g(\varphi_f^t(x))| \leq e^{t\|R_\alpha f\|_\infty}\big(|g(x)| + t\,\|\{f,g\}_\alpha\|_\infty\big). \tag{2.8}$$

证明。 嘉当公式和接触哈密顿方程给出 $\mathcal{L}_{X_{h_s}}\alpha = (R_\alpha h_s)\alpha$。因此，对 $(\varphi_h^s)^*\alpha = e^{\kappa(\varphi_h^s)}\alpha$ 求导即可证明 (2.4)。接下来，为比较这两个流，注意到生成 $(\varphi_h^s)^{-1}\varphi_k^s$ 的时变向量场是 $(\varphi_h^s)_*^{-1}(X_{k_s} - X_{h_s})$。在该向量场上计算 α 得到 (2.5)。由乘积法则可得

$$\frac{d}{ds}\big(e^{-\kappa(\varphi_h^s)} g\circ\varphi_h^s\big) = e^{-\kappa(\varphi_h^s)}\big(X_{h_s} g - g R_\alpha h_s\big)\circ\varphi_h^s,$$

这就是 (2.6)。

对于长度估计，令 f, g为自治的。式 (2.5) 的范数至多为$e^{s\|R_\alpha f\|_\infty}\,\|g-f\|_\infty$。因此，积分得到 (2.7)。为了得到增长估计，用 $h_s = f$ 对 (2.6) 积分，然后乘以 $e^{\kappa(\varphi_f^t)(x)}$。这给出

$$g(\varphi_f^t(x)) = e^{\kappa(\varphi_f^t)(x)} g(x) + \int_0^t e^{\kappa(\varphi_f^t)(x) - \kappa(\varphi_f^s)(x)}\{f,g\}_\alpha(\varphi_f^s(x))\, ds.$$

由 (2.4) 可知，被积函数中指数的绝对值至多为 $(t-s)\ \|R_\alpha f\|_\infty$。因此，取绝对值即可证明 (2.8)。□

定理 *A* 的证明。我们先比较每个逼近流与其固定的极限流。由 (2.7) 可得,

$$|(\varphi_f^1)^{-1}\varphi_{f_j}^1|_\alpha \leq \ell_\alpha\big(\{\varphi_f^{-s}\varphi_{f_j}^s\}_{0\leq s\leq 1}\big) \leq e^{\|R_\alpha f\|_\infty}\,\|f_j - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

对 g_j 和 g 也有相同的结论。在这两种比较中，共形估计只涉及固定的极限哈密顿量。因此，无需对 f_j 或 g_j 作导数界。

接下来，我们利用这些比较将交换性传递到极限。记 $a = \varphi_f^1$、$b = \varphi_g^1$、$a_j = \varphi_{f_j}^1$ 和 $b_j = \varphi_{g_j}^1$。括号假设给出 $[X_{f_j}, X_{g_j}] = 0$，因此

$$a_j b_j = b_j a_j. \tag{2.9}$$

因式分解

$$(ab)^{-1}a_j b_j = \big(b^{-1}(a^{-1}a_j)b\big)(b^{-1}b_j)$$

和 (2.3) 推出

$$|(ab)^{-1}a_j b_j|_\alpha \leq e^{\max_Y \kappa(b^{-1})}|a^{-1}a_j|_\alpha + |b^{-1}b_j|_\alpha \longrightarrow 0.$$

交换 a 和 b 可得到反向顺序下相同的估计： $|(ba)^{-1}b_ja_j|_\alpha \to 0$。由三角不等式、对称性和 (2.9),

$$|(ab)^{-1}ba|_\alpha \le |(ab)^{-1}a_jb_j|_\alpha + |(ba)^{-1}b_ja_j|_\alpha \longrightarrow 0.$$

因此，非退化性推出 $ab = ba$。

这证明了在时刻一的交换性。要获得任意时刻的交换性，对任意固定的 s， $t \in \mathbb{R}$，将同一论证应用于 tf_j 和 sg_j；它们分别收敛到 tf 和 sg ，且仍具有零括号。因此，对所有 s， t，都有 $\varphi_f^t\varphi_g^s = \varphi_g^s\varphi_f^t$。对这一恒等式求导，得到 $[X_f, X_g] = 0$，从而 $\{f, g\}_\alpha = \alpha([X_f, X_g]) = 0$。□

3. 定理 B 的证明

不存在公共零点，因此可以用极坐标变量重写接触括号。我们先证明所需的恒等式。对于没有公共零点的光滑对，令

$$\rho = \sqrt{f^2 + g^2}, \qquad u = \frac{f + \sqrt{-1}g}{\rho} = e^{\sqrt{-1}\theta},$$

其中 θ 是圆值的，且存在实值局部提升。

引理 3.1。 采用上述记号，对于 θ的任意实值局部提升，接触向量场满足 $X_\rho\theta = \{f, g\}_\alpha/\rho$ 。因此，在 Y上有 $X_\rho u = \sqrt{-1}u\{f, g\}_\alpha/\rho$ 。

证明。 使用极坐标变量 ρ， θ，我们有 $f = \rho$余弦 θ和 $g = \rho$正弦 θ。因此， $fdg - gdf = \rho^2 d\theta$，这意味着

$$d\theta(X_\rho) = \frac{fX_\rho g - gX_\rho f}{\rho^2}.$$

为了计算分子，我们先用原来的接触向量场表示新的接触向量场：

$$X_\rho = \frac{f}{\rho}X_f + \frac{g}{\rho}X_g. \tag{3.1}$$

事实上，我们验证接触哈密顿向量场的定义方程：

$$\alpha\left(\frac{f}{\rho}X_f + \frac{g}{\rho}X_g\right) = \frac{f^2 + g^2}{\rho} = \rho$$

and

$$\begin{aligned} d\alpha\left(\frac{f}{\rho}X_f + \frac{g}{\rho}X_g, \cdot\right) &= d\alpha\left(\frac{f}{\rho}X_f, \cdot\right) + d\alpha\left(\frac{g}{\rho}X_g, \cdot\right) \\ &= \frac{f}{\rho}\left(df(R_\alpha)\alpha - df\right)(\cdot) + \frac{g}{\rho}\left(dg(R_\alpha)\alpha - dg\right)(\cdot) \\ &= \left(\frac{fdf + gdg}{\rho}\right)(R_\alpha)\alpha(\cdot) - \left(\frac{fdf + gdg}{\rho}\right)(\cdot). \end{aligned}$$

由于 $d\rho = \frac{fdf+gdg}{\rho}$，我们得到

$$d\alpha\left(\frac{f}{\rho}X_f + \frac{g}{\rho}X_g, \cdot\right) = d\rho(R_\alpha)\alpha(\cdot) - d\rho(\cdot).$$

这验证了 (3.1)。将此恒等式应用于第一个分量，得到

$$\begin{aligned} X_\rho f &= \frac{f}{\rho}X_f f + \frac{g}{\rho}X_g f \\ &= \frac{f}{\rho}(fR_\alpha f) + \frac{g}{\rho}\left(fR_\alpha g - \{f,g\}_\alpha\right) \\ &= \frac{f^2 R_\alpha f + gfR_\alpha g}{\rho} - \frac{g}{\rho}\{f,g\}_\alpha \\ &= f\left(\frac{fR_\alpha f + gR_\alpha g}{\rho}\right) - \frac{g}{\rho}\{f,g\}_\alpha = fR_\alpha\rho - \frac{g}{\rho}\{f,g\}_\alpha. \end{aligned}$$

这里，第二个等式用到了 $\{f,f\}_\alpha = X_f f - fR_\alpha f$和 $-\{f,g\}_\alpha = X_g f - fR_\alpha g$（二者均可由 (1.4) 中的定义推出）。类似地，我们有 $X_\rho g = gR_\alpha\rho + \frac{f}{\rho}\{f,g\}_{\alpha^{\bar{\circ}}}$ 将两个分量的恒等式代入上面的表达式，得到

$$\begin{aligned} d\theta(X_\rho) &= \frac{fX_\rho g - gX_\rho f}{\rho^2} \\ &= \frac{f\left(gR_\alpha\rho + \frac{f}{\rho}\{f,g\}_\alpha\right) - g\left(fR_\alpha\rho - \frac{g}{\rho}\{f,g\}_\alpha\right)}{\rho^2} \\ &= \frac{\rho\{f,g\}_\alpha}{\rho^2} = \frac{\{f,g\}_\alpha}{\rho}. \end{aligned}$$

最后，对于 $u = e^{\sqrt{-1}\theta}$，我们有

$$X_\rho u = du(X_\rho) = \sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\theta}d\theta(X_\rho) = \sqrt{-1}u\cdot\frac{\{f,g\}_\alpha}{\rho}.$$

证明至此完成。 □

为了在定理 B 的证明中应用极坐标恒等式，我们还需要方向导数 $X_f g$ 的下半连续性。关键在于，方向导数的减小会迫使发生位移，而对于范数 $|\cdot|_\alpha$，位移能量为正。具体而言，对于任意非空开子集 $U \subset Y$，我们有

$$e_\alpha(U) = \inf_{\varphi(U)\cap U=\emptyset}|\varphi|_\alpha > 0. \tag{3.2}$$

这就是在 (1.17) 中已定义的位移能量，因为先对端点固定的路径取下确界，再对能移位的端点取下确界，所得结果相同。空集的下确界为 $+\infty$。非空开集的正性由 [35] 中的能量—容量不等式得出。

引理 3.2。 设$(Y,\xi=\ker\,\alpha)$是闭的，并且 $f_i, g_i \in C^\infty(Y)$一致收敛于 $f, g \in C^\infty(Y)$。则

$$\|X_f g\|_\infty \leq \liminf_{i\to\infty} \|X_{f_i} g_i\|_\infty .$$

证明。 我们用反证法。若结论不成立，则存在一个子序列，仍以 i为指标，使得

$$\max_Y |X_{f_i} g_i| \leq A < \max_Y |X_f g| \quad \text{for all } i$$

其中 A 为与 i无关的常数。假设对于某个点 $x_0 \in Y$，有 $\max_Y |X_f g| = (dg(X_f))(x_0)$（必要时将 g 及所有 g_i 替换为其相反数）。根据方向导数的定义，存在充分小的 $t>0$ ，使得

$$\Delta := g(\varphi_f^t(x_0)) - g(x_0) - At > 0.$$

为了将这一严格不等式推广到邻近点，由 g 在 x_0 处的连续性可知，存在 x_0 的开邻域 U_1 ，使得对于任意 $z \in U_1$，都有 $|g(z) - g(x_0)| < \frac{\Delta}{4}$；由 $g \circ \varphi_f^t$ 在 x_0 处的连续性可知，存在 x_0 的开邻域 U_2 ，使得对于任意 $z \in U_2$，都有 $|g(\varphi_f^t(z)) - g(\varphi_f^t(x_0))| < \frac{\Delta}{4}$。为确保这两个估计都成立，令 $U = U_1 \cap U_2$，则它是 x_0的一个开邻域。对于任意x， $y \in U$，我们有

$$\begin{aligned} g(\varphi_f^t(y)) - g(x) &= g(\varphi_f^t(x_0)) - g(x_0) + \big[g(\varphi_f^t(y)) - g(\varphi_f^t(x_0))\big] - \big[g(x) - g(x_0)\big] \\ &> At + \Delta - \frac{\Delta}{4} - \frac{\Delta}{4} \\ &= At + \frac{\Delta}{2}. \end{aligned}$$

相比之下，沿着每条逼近流，界 $_Y |X_{f_i} g_i| \leq A$ 意味着，对于任意 $x \in Y$，都有 $g_i(\varphi_{f_i}^t(x)) - g_i(x) \leq At$ ，对所有 i 均成立。这些不同的增长界迫使该邻域的两个像彼此分离。因此，对于每个充分大的 i，$(\varphi_f^t)^{-1}\varphi_{f_i}^t$ 必须移位 U 。事实上，否则，对某个充分大的 i，就会有 $\varphi_{f_i}^t(U) \cap \varphi_f^t(U) \neq \emptyset$，如下所述。这样的交集会给出点 x， $y \in U$，使得 $\varphi_{f_i}^t(x) = \varphi_f^t(y)$，这意味着

$$\begin{aligned} g_i(\varphi_{f_i}^t(x)) - g_i(x) &= g_i(\varphi_f^t(y)) - g_i(x) \\ &\geq g(\varphi_f^t(y)) - g(x) - 2\max_Y |g_i - g| \\ &\geq At + \frac{\Delta}{2} - 2\max_Y |g_i - g|. \end{aligned}$$

当 i 足够大时（使得 $\max_Y |g_i - g| \leq \frac{\Delta}{8}$），我们得到

$$At \geq g_i(\varphi_{f_i}^t(x)) - g_i(x) \geq At + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{4} = At + \frac{\Delta}{4},$$

这就产生了矛盾。因此， U 的位移是不可避免的，而其能量的正性意味着，对于所有足够大的 i， $\|(\varphi_f^t)^{-1}\varphi_{f_i}^t|_\alpha \geq e_\alpha(U)$。然而，一致收敛使相对流任意短：由 (2.7) 可得，当 $i \to \infty$ 时， $\|(\varphi_f^t)^{-1}\varphi_{f_i}^t|_\alpha \to 0$ ，依据假设 $f_i \xrightarrow{C^0} f$。这一矛盾完成了证明。□

注 3.3. 根据定义 ***(1.4)***，接触泊松括号 $\{f,g\}_\alpha$ 是两项 $X_f g$和 $gR_\alpha f$之差，因此，分别控制这两项并不能直接推出 $\{f,g\}_\alpha$的 C^0范数具有下半连续性。因此，我们使用引理 *3.1* 中的变换，该变换要求不存在公共零点。

现在，我们将下半连续性应用于极坐标恒等式中的方向导数。

定理 *B* 的证明. 由于 $\min_Y \rho > 0$ 和 $\rho_i := \sqrt{f_i^2 + g_i^2}$一致收敛到 ρ，因此对于所有充分大的 i，都有$\rho_i > 0$ 。舍弃有限个例外指标后，我们便可以对每个逼近对使用极坐标变量。对于每一对 $(f_i,\ g_i)$，将引理 3.1 中的极坐标变量记为 $(\rho_i,\ u_i)$。注意，映射 $u\colon Y \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$与每个 u_i 一样，都是全局定义的。因此，假设 $f_i \xrightarrow{C^0} f$ 和 $g_i \xrightarrow{C^0} g$ 意味着 $\rho_i \xrightarrow{C^0} \rho$ （取值于$\mathbb{R}$）以及 $u_i \xrightarrow{C^0} u$ （取值于 $\mathbb{R}^2$）。

然而，引理 3.2 是针对实值函数表述的。为了将其应用于 u 和 u_i，我们使用一个固定的线性投影，将问题化归为 $\mathbb{R}$ 值函数。设 $\max_Y |X_\rho u| = |(X_\rho u)(x_0)|$ ，其中$|\cdot| = |\cdot|_{\mathbb{R}^2}$。如果 $(X_\rho u)(x_0) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$，则取线性函数 $\ell\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ，定义为投影到方向 $(X_\rho u)(x_0)$ 上，即

$$\ell(v) = \left\langle v, \frac{(X_\rho u)(x_0)}{|(X_\rho u)(x_0)|} \right\rangle.$$

根据构造， ℓ的算子范数为 1，且 $\ell((X_\rho u)(x_0)) = |(X_\rho u)(x_0)|$。于是，对于函数 $\ell \circ u\colon Y \to \mathbb{R}$，由于 ℓ 是线性的，我们有 $X_\rho(\ell \circ u) = \ell(X_\rho u)$。此外，对于任意 $y \in Y$，

$$|X_\rho(\ell \circ u)(y)| \leq |(X_\rho u)(y)| \leq \max_Y |X_\rho u|$$

而等号在点 $x_0 \in Y$ 处取得：

$$|X_\rho(\ell \circ u)(x_0)| = \ell((X_\rho u)(x_0)) = |(X_\rho u)(x_0)|.$$

因此，我们有 $\max_Y |X_\rho(\ell \circ u)|_{\mathbb{R}} = \max_Y |X_\rho u|_{\mathbb{R}^2}$ 由于 $u_i \xrightarrow{C^0} u$ 意味着 $\ell \circ u_i \xrightarrow{C^0} \ell \circ u$，引理 3.2 适用，并得出

$$\begin{aligned}\max_Y |X_\rho u| &= \max_Y |X_\rho(\ell \circ u)| \\ &\leq \liminf_i \max_Y |X_{\rho_i}(\ell \circ u_i)| \leq \liminf_i \max_Y |X_{\rho_i} u_i|.\end{aligned}$$

如果 $(X_\rho u)(x_0) = 0$，同一不等式显然成立。还需证明其右端为零。由于 $\rho > 0$ 在 Y 上且 Y 是闭的，存在某个 $\delta > 0$，使得 $\min_Y \rho \geq \delta$。由于 $\rho_i \xrightarrow{C^0} \rho$，对于所有充分大的 i，我们有 $\min_Y \rho_i \geq \frac{\delta}{2} > 0$。因此，根据引理 3.1 的第二个结论，-

$$|X_{\rho_i} u_i| = \left| \sqrt{-1} u_i \cdot \frac{\{f_i, g_i\}_\alpha}{\rho_i} \right| \leq |u_i| \cdot \frac{|\{f_i, g_i\}_\alpha|}{\delta/2}.$$

特别是，

$$\max_Y |X_{\rho_i} u_i| \leq \max_Y \frac{|\{f_i, g_i\}_\alpha|}{\delta/2} \to 0 \quad \text{as } i \to \infty$$

因为 $|u_i| = 1$ 和括号 $\{f_i, g_i\}_\alpha$ 都一致收敛于零。因此，上述下半连续性不等式给出 $\max_Y |X_\rho u| = 0$，于是 $X_\rho u = 0$。因此，由引理 3.1 得到$\{f, g\}_\alpha = 0$，证明完毕。□

4. 定理 C 的证明

在 Y 上固定一个黎曼度量 $\mathfrak{g}$，并令 $B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)$ 表示以 p 为中心、半径为 δ 的开度量球。我们首先需要一个能反映半径的位移能量下界。

引理 4.1。对每个 $p \in Y$，存在一个常数 $c_p > 0$，使得对于所有充分小的 $\delta > 0$，都有 $e_\alpha(B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)) \geq c_p \delta^2$。

证明。回顾 [35] 中的能量-容量不等式：

$$e_\alpha(B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)) \geq \frac{1}{4} \sup_{A \subset \mathbb{R}_{>0} \times B_{\mathfrak{g}}(p,\delta)} \frac{w_G(A)}{h_\alpha(A)}$$

上确界取遍所有紧子集。这里 $\mathbb{R}_{>0} \times B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)$ 可视为辛化 $\mathbb{R}_{>0} \times Y \to Y$ 到 $B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)$ 的投影下的原像，而 $w_G(A)$ 表示 A 的格罗莫夫宽度，$h_\alpha(A)$ 则是其 $\mathbb{R}_{>0}$ 坐标的上确界。因此，只需对每个充分小的 $\delta > 0$，构造一个紧子集 $A_\delta \subset \mathbb{R}_{>0} \times B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)$，使得

$$w_G(A_\delta) \geq C\delta^2 \quad \text{and} \quad h_\alpha(A_\delta) \leq C' \tag{4.1}$$

其中 C，C' 与 δ 无关。

我们通过在固定的达布球 Q（位于 p 附近）中进行重新缩放来构造这些子集。该达布球在严格达布坐标 $(x_1, y_1, \ldots\ldots, x_n, y_n, z)$ 下与 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中原点的一个邻域相对应，且对于固定形式，$\alpha = dz - \sum_{j=1}^n y_j \, dx_j$ 和 p 对应于原点。将 Q 缩小为以原点为中心的有界欧几里得球。在 Q 上，我们有 $d_{\mathfrak{g}}(p, q) \leq C|q|$，其中 $|q|$ 表示 q 的欧几里得范数，而 C 是一个依赖于 p 和度量 $\mathfrak{g}$ 的常数。考虑

重新缩放 $\sigma_s(x_1, \ldots\ldots, y_n, z) = (sx_1, \ldots\ldots, sy_n, s^2z)$，它关于标准接触一形式 $dz - \sum y_i dx_i$ 是一个接触同胚。因此，对于任意的 $q \in Q$ 和 $0 < s < 1$，我们有

$$d_{\mathfrak{g}}(p, \sigma_s(q)) \le C|\sigma_s(q)| \le C \cdot s|q| \le C \cdot s \sup_{q \in Q} |q|.$$

第二个不等式来自以下估计：若 $q = (x_1, \ldots\ldots, y_n, z)$，则

$$|\sigma_s(q)|^2 = s^2(x_1^2 + \ldots + y_n^2) + s^4 z^2 \le s^2(x_1^2 + \ldots + z^2) = s^2|q|^2.$$

选取常数 $a > 0$，使得 $a \cdot C \sup_{q \in Q} |q| < 1$。于是

$$d_{\mathfrak{g}}(p, \sigma_{a\delta}(q)) < \delta \quad \text{for any } q \in Q.$$

特别地，$\sigma_{a\delta}(Q) \subset B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)$。

现在将这一重新缩放提升到辛化中，从而同时控制宽度和高度。固定一个紧子集 $A \subset (1/2, 2) \times Q$，其中包含半径为 R 的辛球。由于$\sigma_s^* \alpha = s^2 \alpha$，映射 $\Phi_s(r, q) = (r, \sigma_s(q))$ 满足 $\Phi_s^* d(r\alpha) = s^2 d(r\alpha)$。因此，对于辛化上的共形辛映射 $\Phi_{a\delta} : (r, q) \mapsto (r, \sigma_{a\delta}(q))$，$\Phi_{a\delta}(A)$ 包含一个半径为 $a\delta R$ 的辛球。事实上，将半径为 R 的球辛嵌入 A，先在其定义域上施以 $1/(a\delta)$ 倍的伸缩，再与 $\Phi_{a\delta}$ 复合；两个共形因子恰好抵消。因此，$\Phi_{a\delta}(A)$ 就是所需的 A_δ。上述包含关系给出 $\Phi_{a\delta}(A) \subset \mathbb{R}_{>0} \times B_{\mathfrak{g}}(p, \delta)$，且宽度和高度满足

$$w_G(\Phi_{a\delta}(A)) \ge \pi(a\delta R)^2 \quad \text{and} \quad h_\alpha(\Phi_{a\delta}(A)) = h_\alpha(A).$$

这就验证了 (4.1)，其中 $C = \pi a^2 R^2$ 和 $C' = h_\alpha(A)$。注意，C 和 C' 都依赖于 Q（因而也依赖于 p 和度量 $\mathfrak{g}$）。因此，$c_p = C/(4C')$ 对所有充分小的 $\delta > 0$都给出了所需的界。
□

现在我们比较两个在收缩邻域上的流。这种比较将迫使发生移位，而局部能量界随后将导出一个矛盾。

定理 C 的证明。 在此证明中，记 $\epsilon_i = \max\{\|f_i - f\|_\infty, \|g_i - g\|_\infty\}$。我们用反证法。若结论不成立，则存在一个子序列，仍以 i 为指标，使得

$$\max_Y |\{f_i, g_i\}_\alpha| \le A < \max_Y |\{f, g\}_\alpha| \quad \text{for all } i$$

对于与 i 无关的常数 $A \ge 0$。如有必要，将 f 和所有 f_i 替换为其相反数后，可假设存在某个 $p \in Y$，使得 $\{f, g\}_\alpha(p) > A$。特别地，集合 $\{\{f, g\}_\alpha > A\}$（$\subset Y$）是一个非空开集。此外，g 不可能在此开集上恒为零；否则，$\{f, g\}_\alpha = X_f g - g R_\alpha f = 0$ 在此处成立，这就产生了矛盾。因此，我们可以在此开集中选取一点，仍记为 $p \in Y$，使得

$$\{f, g\}_\alpha(p) > A \quad \text{and} \quad g(p) \ne 0.$$

为了在该点将括号不等式转化为方向导数不等式，令 $c:=f(p)\,g(p)$，并考虑函数 $u:=-cg-f$。这个线性组合在保持相关括号不变的同时，使其 Reeb项在 p 处消失。具体而言，

$$\{g,u\}_\alpha = c\{g,g\}_\alpha - \{g,f\}_\alpha = \{f,g\}_\alpha.$$

因此，$\{g,u\}_\alpha(p) > A$。由于根据定义，$u(p)=0$，我们有 $\{g,u\}_\alpha(p) = (X_g u)(p) (>A)$。类似地，对于任意逼近对（$f_i$，$g_i$），都可以定义 $u_i := cg_i - f_i$（使用相同的常数 c）。因此，我们仍有 $\{g_i,u_i\}_\alpha = \{f_i,g_i\}_\alpha$（根据我们的矛盾假设，其 C^0-范数至多为 A）。然而，$u_i(p)$ 不一定为零。尽管如此，其大小仍受逼近误差控制。事实上，由于

$$\max_Y |u_i - u| \le |c| \left(\max_Y |g_i - g|\right) + \left(\max_Y |f_i - f|\right) \le (1+|c|)\epsilon_i$$

我们有 $|u_i(p)| \le (1+|c|)\epsilon_i$，其趋于零。

我们利用这些事实比较 u_i 沿着流 φ_g^t 和 $\varphi_{g_i}^t$ 在 p附近的取值。固定流给出一个下界，而括号界控制沿逼近流的增长。对充分小的 δ，考虑 $B_{\mathfrak{g}}(p,\ \delta)$。对于任意 $x \in B_{\mathfrak{g}}(p,\ \delta)$，我们有局部展开（当 t 充分小时，并满足下文所述的其他条件）：

$$u_i\left(\varphi_g^t(x)\right) = u(x) + t(X_g u)(x) + O(t^2+\epsilon_i) = t(X_g u)(p) + O(\delta + t^2 + \epsilon_i).$$

这里，我们使用估计 $(X_g u)(x) = (X_g u)(p) + O(\delta)$。由于 g 和 u 是固定的，且$\|u_i - u\|_\infty \le (1+|c|)\epsilon_i$，因此对于所有充分小的 $t,\ \delta>0$，这些展开式中的常数都可以选取为与 i 无关。此外，$u(p)=0$ 在球上给出 $|u_i(x)| \le C_0(\delta+\epsilon_i)$，其中 $C_0>0$为固定常数。因此，

$$\inf_{\varphi_g^t(B_{\mathfrak{g}}(p,\delta))} u_i \ge t(X_g u)(p) - C(\delta + t^2 + \epsilon_i) \tag{4.2}$$

对于某个常数 $C>0$。另一方面，将 (2.8) 应用于哈密顿量 g_i 和函数 u_i，得到

$$|u_i(\varphi_{g_i}^t(x))| \le e^{t\|R_\alpha g_i\|_\infty}\left(|u_i(x)| + At\right) \tag{4.3}$$

对每个 $x \in B_{\mathfrak{g}}(p,\ \delta)$，因为 $\{g_i,u_i\}_\alpha = \{f_i,g_i\}_\alpha$的范数至多为 A。为了将这个指数界与前面的线性展开进行比较，假设 t 足够小，使得 $\max_Y |R_\alpha g_i| t \le 1$。那么 $e^{\max_Y |R_\alpha g_i| t} \le 1 + te\max_Y |R_\alpha g_i|$。利用上面的初值界和 $e^{t\|R_\alpha g_i\|_\infty} \le e$，我们得到

$$\sup_{\varphi_{g_i}^t(B_{\mathfrak{g}}(p,\delta))} u_i \le At + C\left(\delta + \epsilon_i + \max_Y |R_\alpha g_i| t^2\right) \tag{4.4}$$

对某个常数 $C>0$ （必要时增大该常数，使其也适用于 (4.2)）。现在用下界减去上界，得到

$$\begin{aligned}\inf_{\varphi_g^t(B_{\mathfrak{g}}(p,\delta))} u_i - \sup_{\varphi_{g_i}^t(B_{\mathfrak{g}}(p,\delta))} u_i &\geq t((X_g u)(p)-A) - C\left(2\delta + 2\epsilon_i + \left(1+\max_Y |R_\alpha g_i|\right)t^2\right)\\ &\geq t((X_g u)(p)-A) - C'\left(\delta + \epsilon_i + \left(1+\max_Y |R_\alpha g_i|\right)t^2\right)\end{aligned}$$

其中 $C'=2C$。特别地，如果这个下界严格为正，那么 $\varphi_g^t(B_{\mathfrak{g}}(p,\ \delta))$ 与 $\varphi_{g_i}^t(B_{\mathfrak{g}}(p,\ \delta))$ 不相交。

只要满足这一正性条件，$(\varphi_g^t)^{-1}\varphi_{g_i}^t$ 就会将 $B_{\mathfrak{g}}(p,\ \delta)$ 移位。由 (2.7) 和引理 4.1，我们有

$$c_p\delta^2 \leq |(\varphi_g^t)^{-1}\varphi_{g_i}^t|_\alpha \leq te^{t\max_Y |R_\alpha g|}\max_Y |g_i - g| \leq C't\epsilon_i \tag{4.5}$$

必要时将 $C'>0$ 取大，并令 $c_p>0$ 如引理中所述。考虑

$$t_i = \sqrt{\frac{\epsilon_i}{1+\max_Y |R_\alpha g_i|}} \quad \text{and} \quad \delta_i = \frac{(X_g u)(p)-A}{4C'}t_i.$$

由于根据我们的假设，$\epsilon_i \to 0$ 和 $\epsilon_i \max_Y |R_\alpha g_i| \to 0$，我们有

$$0 < t_i \leq \sqrt{\epsilon_i} \longrightarrow 0, \qquad t_i \max_Y |R_\alpha g_i| \leq \sqrt{\epsilon_i \max_Y |R_\alpha g_i|} \longrightarrow 0.$$

这里 $\epsilon_i>0$，因为等式 $\epsilon_i=0$ 已经会与定义该子序列的严格括号界相矛盾。因此，对于所选取的这些时刻，(4.4) 中使用的指数估计对所有充分大的 i 都成立。接下来需要验证两个像的分离性。在这些选择下，u_i 的取值之差的下界变为

$$\begin{aligned}&t_i((X_g u)(p)-A) - C'\left(\delta_i + \epsilon_i + \left(1+\max_Y |R_\alpha g_i|\right)t_i^2\right)\\ &\qquad = 4C'\delta_i - C'(\delta_i+\epsilon_i+\epsilon_i)\\ &\qquad = 3C'\delta_i - 2\epsilon_i C'\\ &\qquad = \frac{3}{4}((X_g u)(p)-A)\cdot t_i - 2\epsilon_i C' = t_i\left(\frac{3}{4}((X_g u)(p)-A) - 2C'\frac{\epsilon_i}{t_i}\right).\end{aligned}$$

由于 $\frac{\epsilon_i}{t_i} = \sqrt{\epsilon_i(1+\max_Y |R_\alpha g_i|)} \to 0$，因此当 i 充分大时，上述下界严格为正，所以移位论证适用。然而，所得位移必须满足 (4.5) 中的两个界。因此我们有 $c_p\delta_i^2 \leq C't_i\epsilon_i$，这

$$c_p\left(\frac{(X_g u)(p)-A}{4C'}\right)^2 t_i^2 \leq C't_i\epsilon_i.$$

这是不可能的，因为将两边除以 t_i^2 后，我们得到

$$0 < c_p \left(\frac{(X_g u)(p) - A}{4C'} \right)^2 \leq C' \frac{\epsilon_i}{t_i} \to 0 \quad \text{as } i \to \infty.$$

证明完成。 □

5. C^0-刚性的反例

在 $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$, 上考虑 $\alpha = \cos x\, dz + \sin x\, dy$。记 $c := \cos x$，以及 $s := \sin x$。由于$\alpha \wedge d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz$，这是一个接触形式。其 Reeb向量场为 $R = s\partial_y + c\partial_z$。取 $V = c\partial_y - s\partial_z$，接触哈密顿方程给出

$$X_h = hR - (Vh)\partial_x + h_x V, \qquad \{h, k\}_\alpha = hRk - kRh + h_x Vk - (Vh)k_x. \tag{5.1}$$

对于极限函数

$$f = c\cos z, \qquad g = c\sin z, \tag{5.2}$$

我们得到

$$X_f = \cos z\, \partial_z - sc \sin z\, \partial_x, \qquad X_g = \sin z\, \partial_z + sc \cos z\, \partial_x. \tag{5.3}$$

特别地，两个向量场的 y 分量均为零。此外， $Rf = -c^2 \sin z$ 以及 $Rg = c^2 \cos z$，因此由（5.1）得到 $\{f, g\}_\alpha = c$，进而得到 $\|\{f, g\}_\alpha\|_\infty = 1$。

为近似这些函数，同时抵消其非零括号，在剩余坐标中引入振荡。对每个整数 $j \geq 1$, 令 $A_j(x) = \sqrt{4jc^2 - 2sc + j^{-1}}$ 并

$$u_j = j^{-2} A_j(x) \cos(j^4 y), \qquad v_j = j^{-2} A_j(x) \sin(j^4 y), \qquad f_j = f + u_j, \qquad g_j = g + v_j. \tag{5.4}$$

不等式 $2|sc| \leq 2jc^2 + s^2/(2j)$ 推出

$$2jc^2 + \frac{1}{2j} \leq A_j^2 \leq 4j + 1 + j^{-1} \leq 6j. \tag{5.5}$$

因此， A_j 光滑且周期，而整数频率 j^4 使 f_j， g_j 在 $\mathbb{T}^3$ 上定义良好。该上界还保证一致收敛:

$$\max\{\|f_j - f\|_\infty, \|g_j - g\|_\infty\} \leq \sqrt{6}\, j^{-3/2} \longrightarrow 0. \tag{5.6}$$

接下来需要估计扰动对的括号。我们利用 (5.1) 将振荡项与混合项分开。由于 $A_j A_j' = -4jcs - c^2 + s^2$,

$$\{u_j, v_j\}_\alpha = cA_j A_j' + sA_j^2 = -c + \frac{s}{j}.$$

因此，首项抵消了极限对的括号。同时，由于 (5.3) 中的向量场没有 ∂_y 分量，混合项不含因子 j^4。更确切地说，

$$\{f, v_j\}_\alpha = j^{-2}(c^2 A_j - scA_j')\sin z \sin(j^4 y),$$
$$\{u_j, g\}_\alpha = j^{-2}(c^2 A_j - scA_j')\cos z \cos(j^4 y).$$

由于 $A_j(c^2 A_j - scA_j') = (4j + j^{-1})c^2 - sc$，将这些表达式相加得到

$$\{f_j, g_j\}_\alpha = \frac{s}{j} + j^{-2} B_j(x)\cos(z - j^4 y), \qquad B_j(x) = \frac{(4j + j^{-1})c^2 - sc}{A_j(x)}. \tag{5.7}$$

对于 $c \neq 0$，(5.5) 中的下界给出

$$|B_j| \le \frac{(4j + j^{-1})|c| + |s|}{\sqrt{2j}} \le 3\sqrt{2}\,\sqrt{j}.$$

在 $c = 0$ 处，同样的估计成立，因为 $B_j = 0$。为了得到下界，在 $x = \pi/2$ 处取值，此处 (5.7) 中的括号等于 $1/j$。因此，

$$\frac{1}{j} \le \|\{f_j, g_j\}_\alpha\|_\infty \le \frac{1}{j} + 3\sqrt{2}\, j^{-3/2} \longrightarrow 0. \tag{5.8}$$

结合 (5.6) 和 $\|\{f, g\}_\alpha\|_\infty = 1$，这证明了无约束弱刚性不成立，且泊松括号范数不具有下半连续性。

最后，我们检查该构造不满足刚性定理中哪些附加假设。极限函数的公共零点恰好位于 $c = 0$ 处。尽管一致收敛，定理 C 中的 Reeb 导数条件也不成立。事实上，在 $x = y = 0$ 处对 $f_j - f$ 取值，得到的逼近误差至少为 $j^{-2}\sqrt{4j + j^{-1}}$。此外，

$$Rg_j = c^2 \cos z + j^2 s A_j \cos(j^4 y),$$

其在 $(x,\ y,\ z) = (\pi/4,\ 0,\ \pi/2)$ 处的值为 $j^2\sqrt{2j - 1 + j^{-1}}/\sqrt{2}$。因此

$$\begin{aligned}\max\{\|f_j - f\|_\infty, \|g_j - g\|_\infty\} \cdot \|R_\alpha g_j\|_\infty &\ge \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(4j + j^{-1})(2j - 1 + j^{-1})} \\ &\ge \sqrt{2}\, j \longrightarrow +\infty.\end{aligned}$$

因此，该例既不满足定理 B 的附加假设，也不满足定理 C 的附加假设。

6. Proof of Theorem D

证明。 如果 $\liminf_j \mathrm{P}_\alpha(\vec{f}_j) = +\infty$，则无需证明。否则，取一个使该下极限得以实现的子序列。此时括号泛函有界：舍去有限项后，存在一个常数 C，使得沿该子序列 $\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}_j) \le C$。

为应用函数对刚性定理，选择能够达到极限括号最大值的系数。定义 $\mathrm{P}_\alpha(\vec{f})$ 的表达式关于系数向量和 Y 中的点连续。因此，由紧致性可得 $a,\ b \in [-1,1]^N$，使得

$$h = \sum_{i=1}^{N} a_i f_i, \qquad k = \sum_{i=1}^{N} b_i f_i,$$

我们有 $\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) = \|\{h,k\}_\alpha\|_\infty$。对每个逼近分割都使用相同的这些系数：

$$h_j = \sum_{i=1}^{N} a_i f_{j,i}, \qquad k_j = \sum_{i=1}^{N} b_i f_{j,i}.$$

由于系数向量位于 $[-1,1]^N$，

$$\max\{\|h_j - h\|_\infty, \|k_j - k\|_\infty\} \le N \max_i \|f_{j,i} - f_i\|_\infty \longrightarrow 0.$$

仅有一致收敛不足以满足该定理的要求；我们还需要 Reeb 控制。这由分割恒等式可得：由于 $\sum_i f_{j,\,i} = 1$，

$$\|R_\alpha k_j\|_\infty = \left\| \left\{ \sum_{i=1}^{N} f_{j,i}, \sum_{i=1}^{N} b_i f_{j,i} \right\}_\alpha \right\|_\infty \le \mathrm{P}_\alpha(\vec{f_j}) \le C.$$

因此，一致收敛与这个 Reeb 界满足定理 C 中的条件，从而得到

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) = \|\{h,k\}_\alpha\|_\infty \le \liminf_j \|\{h_j,k_j\}_\alpha\|_\infty \le \liminf_j \mathrm{P}_\alpha(\vec{f_j}).$$

由于该子序列是为实现原始下极限而选取的，因此这就是对整个序列所要证明的不等式。□

7. 定理 E 的证明

我们先比较和的流与两个流的乘积。在每个闭接触流形上，以下几何估计均成立，且还将在定理 F 的证明中用到。

引理 7.1. 对于自治的 $f, g \in C^\infty(Y)$ 以及 $t \ge 0$，基路径

$$\eta_s = \varphi_g^{-s}\varphi_f^{-s}\varphi_{f+g}^{s}, \qquad 0 \le s \le t,$$

表示 $(\widetilde{\varphi}_f^t \widetilde{\varphi}_g^t)^{-1}\widetilde{\varphi}_{f+g}^t$ 并满足

$$\ell_\alpha(\eta) \le \frac{t^2}{2} e^{t(\|R_\alpha f\|_\infty + \|R_\alpha g\|_\infty)} \|\{f,g\}_\alpha\|_\infty . \tag{7.1}$$

证明。 先将（2.5）应用于 φ_f^s， φ_{f+g}^s，然后应用于 φ_g^s， $\varphi_f^{-s}\varphi_{f+g}^s$。 所得的 η_s的哈密顿量为

$$h_s = e^{-\kappa(\varphi_g^s)}\big(e^{-\kappa(\varphi_f^s)} g \circ \varphi_f^s - g\big) \circ \varphi_g^s. \tag{7.2}$$

加权输运恒等式 (2.6) 将括号中的差值表示为括号的形式：它等于

$$\int_0^s e^{-\kappa(\varphi_f^r)} \{f, g\}_\alpha \circ \varphi_f^r \, dr.$$

将此恒等式与 (2.4) 结合，得到

$$\|h_s\|_\infty \le s e^{s(\|R_\alpha f\|_\infty + \|R_\alpha g\|_\infty)} \|\{f, g\}_\alpha\|_\infty .$$

由于指数非负，从 0 积分到 t 即可证明 (7.1)。逐点恒等式$\varphi_{f+g}^s = \varphi_f^s \varphi_g^s \eta_s$ 给出了所述的提升类恒等式。□

为了将这一几何比较转化为括号不变量的估计，我们现在固定一个非零的单调齐次拟态射 μ，并按 (1.13) 进行归一化，然后基于引理 7.1 推导若干进一步的估计。消失性质仅在最后应用于可置换覆盖时才会用到。

注 7.2. 齐次拟同态在可交换元素上具有可加性。事实上，若$ab = ba$，则 $(ab)^m = a^m b^m$，因此其缺陷不等式给出

$$m\,|\mu(ab) - \mu(a) - \mu(b)| \le D(\mu)$$

对每个正整数 m都成立。因此，两边除以 m并取极限，即可证明该断言。特别地， $t \mapsto \mu(\widetilde{\varphi}_1^t)$具有可加性。它也是单调的，因为 ***Reeb*** 流的每一段正向流都是由正哈密顿量生成的。由于 $\mathbb{R}$ 上的可加单调函数是线性的，我们有

$$\mu(\widetilde{\varphi}_1^t) = t\mu(\widetilde{\varphi}_1).$$

单调性表明 $\mu(\widetilde{\varphi}_1) \ge 0$。此外，对于非零的 μ，这个数不可能为零： h 上的每个光滑接触哈密顿量 $[0,1] \times Y$ 都满足 $-m \le h(t,x) \le m$，其中$m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$为某个整数，且对所有 $(t,x) \in [0,1] \times Y$均成立。这意味着 $-m\mu(\widetilde{\varphi}_1) \le \mu(\widetilde{\varphi}_h) \le m\mu(\widetilde{\varphi}_1)$；于是$\mu(\widetilde{\varphi}_1) = 0$ 将意味着 μ 恒等于零。因此，可以实现(1.13) 中的正归一化。

在此归一化下，单调性可通过路径长度加以控制。设 h_s 生成 $0 \le s \le t$ 的一条路径。公式 (2.5) 表明，逐点比较 $a_s \le b_s$ 会得到一个非负的相对哈密顿量。将 h_s 与常数哈密顿量 $\min_Y h_s$ 和 $\max_Y h_s$ 进行比较，

单调性和 Reeb 归一化给出

$$\int_0^t \min_Y h_s\, ds \le \mu([\{\varphi_h^s\}_{0\le s\le t}]) \le \int_0^t \max_Y h_s\, ds.$$

如果极值不是时间的光滑函数，则分别从下方和上方用光滑标量近似，并令其积分取极限。特别是，

$$|\mu([\{\varphi_h^s\}_{0\le s\le t}])| \le \ell_\alpha(\{\varphi_h^s\}_{0\le s\le t}). \tag{7.3}$$

我们还需要任意实数时间下的齐次性。对于每个自治的 f，函数$t \mapsto \mu(\widetilde{\varphi}_f^t)$ 根据上述交换性质是可加的，并且由 (7.3) 和取逆下的齐次性可知，它由 $|t|\,\|f\|_\infty$ 局部有界。因此它是线性的：

$$\mu(\widetilde{\varphi}_f^t) = t\mu(\widetilde{\varphi}_f) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{7.4}$$

这证明了 下文使用接触哈密顿流的任意终止时间是合理的 .

引理 7.3. 对于自治的 $f, g \in C^\infty(Y)$ 以及每个 $t > 0$,

$$|\mu(\widetilde{\varphi}_{f+g}) - \mu(\widetilde{\varphi}_f) - \mu(\widetilde{\varphi}_g)| \le \frac{2D(\mu)}{t} + \frac{t}{2} e^{t(\|R_\alpha f\|_\infty + \|R_\alpha g\|_\infty)}\, \|\{f,g\}_\alpha\|_\infty . \tag{7.5}$$

证明. 令 $A_t = \widetilde{\varphi}_f^t$, $B_t = \widetilde{\varphi}_g^t$ 和 $C_t = \widetilde{\varphi}_{f+g}^t$。 引理 7.1 和 (7.3) 推出

$$|\mu((A_tB_t)^{-1}C_t)| \le \frac{t^2}{2} e^{t(\|R_\alpha f\|_\infty + \|R_\alpha g\|_\infty)}\, \|\{f,g\}_\alpha\|_\infty . \tag{7.6}$$

先将缺陷不等式应用于 $C_t = (A_tB_t)((A_tB_t)^{-1}C_t)$，再应用于 A_tB_t ，可得

$$|\mu(C_t) - \mu(A_t) - \mu(B_t)| \le 2D(\mu) + |\mu((A_tB_t)^{-1}C_t)|.$$

因此，将其与 (7.6) 和 (7.4) 结合，并除以 t，即可证明 (7.5)。 □

下面的引理将在论文后文中反复使用，因此我们将其单独陈述。

引理 7.4。 设 μ 是一个满足 (1.13) 归一化条件的非零单调齐次拟态射。若光滑单位分解 $\vec{f} = (f_1、\ldots\ldots、f_N)$， $N \ge 2$，满足对每个 i 都有 $\mu(\widetilde{\varphi}_{f_i}) = 0$，则

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) \ge \frac{1}{16(N-1)^2 D(\mu)}.$$

证明。 记 $P = \mathrm{P}_\alpha(\vec{f})$ 和 $h_k = \sum_{i=1}^k f_i$。 根据 P 和 $\sum_i f_i = 1$ 的定义，对于 $2 \le k \le N$，我们有

$$\|R_\alpha h_{k-1}\|_\infty \le P, \qquad \|R_\alpha f_k\|_\infty \le P, \qquad \|\{h_{k-1}, f_k\}_\alpha\|_\infty \le P. \tag{7.7}$$

例如， $R_\alpha h_{k-1} = \{1, h_{k-1}\}_\alpha$ ，且两个输入都是系数取自 $[-1,1]$ 的分割的组合。其他不等式可用相同的方法推出。

根据假设，对于每个 i，$\mu(\widetilde{\varphi}_{f_i}) = 0$。特别地，$\mu(\widetilde{\varphi}_{h_1}) = 0$。在最后一个部分和处，$h_N = 1$，因此根据归一化，$\mu(\widetilde{\varphi}_{h_N}) = 1$。为了比较这些端点值，在每一步对 h_{k-1} 和 f_k 应用引理 7.3，得到

$$|\mu(\widetilde{\varphi}_{h_k}) - \mu(\widetilde{\varphi}_{h_{k-1}})| \le \frac{2D(\mu)}{t} + \frac{t}{2}e^{2tP}P.$$

从 $k = 2$ 到 N 求和，并利用三角不等式比较两个端点的值，得到

$$1 \le (N-1)\left(\frac{2D(\mu)}{t} + \frac{t}{2}e^{2tP}P\right) \qquad (t > 0). \tag{7.8}$$

若 $P = 0$，令 $t \to \infty$便会与此不等式矛盾。因此 $P > 0$，我们可以选择 $t = (2(N-1)P)^{-1}$。代入可得

$$1 \le 4(N-1)^2 D(\mu)P + \frac{1}{4}e^{1/(N-1)} \le 4(N-1)^2 D(\mu)P + \frac{3}{4},$$

因为 $N \ge 2$ 且 $e < 3$。因此，整理后可得所需的界。 □

定理 E 的证明。 设 f 是从属于 $\mathcal{U}$的任意光滑单位分解。由于每个 f_i 的支集都包含在可移位集合 U_i中，消失性质给出 $\mu(\widetilde{\varphi}_{f_i}) = 0$。应用引理 7.4，并对所有从属分割取下确界。 □

8. 定理 F 的证明

固定由 [7, 定理 1.10]给出的接触谱不变量 c_α。为得到覆盖界，我们先推导接触哈密顿量的控制，然后证明一个局部谱能量不等式。我们将这两个估计与引理 7.1 中的流比较结合起来。式 (2.1) 中定义的路径长度 ℓ_α也出现在 $e_\alpha(U)$ 的定义中。

Le引理 8.1. 对于每个 $t \in \mathbb{R}$，由 *Reeb* 流表示的类满足

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^t) = t. \tag{8.1}$$

如果 $t \ge 0$ 和一个基于单位元的接触各向同性 ψ_s, $0 \le s \le t$ 由 h_s 生成，且表示 $a \in \widetilde{\text{接触}}_0(Y, \xi)$，那么

$$\int_0^t \min_Y h_s \, ds \le c_\alpha(a) \le \int_0^t \max_Y h_s \, ds. \tag{8.2}$$

特别地，$|c_\alpha(a)|$ 和 $|c_\alpha(a^{-1})|$ 都至多为 $\ell_\alpha(\psi)$。此外，接触谱不变量 c_α 沿接触各向同性的光滑族连续。

证明。 我们首先为非零 Reeb 周期建立一个一致下界。由于 R_α 处处不为零且 Y 是紧的，存在 $\tau > 0$，使得 φ_1^s 在 $0 < |s| < \tau$内没有不动点。事实上，在每个点附近选取一个坐标，使得 R_α 的分量严格为正，然后选取一个更小的邻域和一个足够短的时间区间，使得从该处出发的每条轨道都保持在该坐标邻域内。沿着每条这样的轨道，所选坐标严格递增。因此，对 Y 的有限覆盖给出了一个一致的时间区间。

现在，我们利用这个界来校准时间零附近的谱不变量。由单调性和归一化可得，对于 $s \geq 0$， $c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^s) \geq 0$；对于 $s \leq 0$， $c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^s) \leq 0$。由从上连续性可得，当 $s \to 0^+$ 时，$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^s) \to 0$。为了得到相应的从下极限，由次可加性可得

$$0 = c_\alpha(\widetilde{\mathrm{id}}) \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^s) + c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^{-s}).$$

因此，当 $s \to 0^-$ 时，同样有收敛到零的结论。由谱性， $c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^s) - s$要么为零，要么是 Reeb 流的非零带符号周期。由于当 $|s|$充分小时，其绝对值小于 τ，所以它必为零。因此，(8.1) 在零附近成立。

为了将这个恒等式推广到任意的 $t \in \mathbb{R}$，选取一个正整数 m，使得 t/m 和 $-t/m$ 都落在这个区间内。由次可加性以及提升的 Reeb 流的群律可得

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^t) \leq m c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^{t/m}) = t, \qquad c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^{-t}) \leq -t.$$

再次对它们的乘积（即恒等映射）应用次可加性，得到 $c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^t) \geq -c_\alpha(\widetilde{\varphi}_1^{-t}) \geq t$。因此，(8.1) 对所有实数时间均成立。既然这一校准已经建立，注 7.2 之后的论证便可直接由 (8.1) 得出 (8.2) 中的不等式。

$c_\alpha(a)$ 的绝对界现在立即可得。要获得逆映射的相同界，使用基路径 $\widehat{\psi}_s = \psi_{t-s}\psi_t^{-1}$，$0 \leq s \leq t$，它表示 a^{-1}。其哈密顿量为 $-h_{t-s}$，因此与 ψ 的长度完全相同。于是，将前述界应用于该路径即可证明 $|c_\alpha(a^{-1})| \leq \ell_\alpha(\psi)$。选择这条路径可以避免引入逐点逆各向同性的共形因子。

剩下的就是证明连续性。若路径 η 表示 $a^{-1}b$，由次可加性可得

$$c_\alpha(b) - c_\alpha(a) \leq c_\alpha(a^{-1}b) \leq \ell_\alpha(\eta).$$

反向的右平移路径表示 $b^{-1}a$，且长度相同，因此反向不等式也成立。于是 $|c_\alpha(a) - c_\alpha(b)| \leq \ell_\alpha(\eta)$。对于由 h_s^u 生成的基各向同性光滑族 ψ_s^u（$0 \leq s \leq t$），固定 u_0，并取 $\eta_s^u = (\psi_s^{u_0})^{-1}\psi_s^u$。含时恒等式 (2.5) 给出

$$\ell_\alpha(\eta^u) \leq \int_0^t e^{\|\kappa(\psi_s^{u_0})\|_\infty} \|h_s^u - h_s^{u_0}\|_\infty \, ds \longrightarrow 0 \qquad (u \to u_0).$$

这就证明了所断言的连续性。 □

回忆一下，若存在某个 x，使得 $\varphi(x) = x$ 且 $\kappa(\varphi)(x) = 0$，则称接触同胚 φ 有一个判别点。为了得到局部谱能量估计，我们需要一个移位同伦，其平移谱不包含某个指定数值。下一个引理构造了这样一个同伦，同时保持对某个固定紧集的移位。

引理 8.2. 设 $K \subset U$ 为紧集，其中 U 为开集，并设 ψ_s^0、$0 \le s \le 1$满足$\psi_1^0(U) \cap U = \varnothing$。若 $L > \ell_\alpha(\psi^0)$，则存在对 ψ_s^0 的任意小光滑扰动，使其沿基点固定的接触各向同性变化，从而

$$\ell_\alpha(\psi) < L, \qquad \psi_1(K) \cap U = \varnothing, \qquad L \notin \operatorname{Spec}_\alpha(\psi_1).$$

证明。 没有判别点的接触同胚在光滑拓扑中稠密。这一稠密性源自横截性论证，该论证也包含在参数形式的命题 [7, 4.15] 中。若 $d =$ 维数Y且 φ 是接触同胚，则考虑

$$x \longmapsto (x, \varphi(x), \kappa(\varphi)(x)) \in Y \times Y \times \mathbb{R}.$$

判别点对应于该映射与 $\{(y,\ y,\ 0) \mid y \in Y\}$的交集，其余维为 $d+1$。将 φ 与函数 k 所生成的短接触流复合，会使最后两个分量在 $y = \varphi(x)$ 处的一阶变化为 $(X_k(y)\ R_\alpha k(y))$。这里，值 $k(y)$、$dk(y)$在 ξ_y上的限制，以及 $R_\alpha k(y)$均可独立指定。因此，接触哈密顿方程表明，这些数据可以指定 $T_yY \times \mathbb{R}$中的任意元素。利用截断函数以及对紧流形的有限覆盖，可以得到一个有限维扰动族，使其总求值映射与所指子流形横截。因此，参数横截性给出任意小的扰动，使其求值映射横截。由于定义域的维数为 d ，而所需余维为 $d+1$，其像与所指子流形不相交。因此，这类接触同胚是稠密的。

我们将这一稠密性结论应用于 $\varphi_1^{-L}\psi_1^0$。由于 Reeb 流保持 α，$\varphi_1^{-L}\psi_1$ 没有判别点这一条件恰好等价于 $L \notin \operatorname{Spec}_\alpha(\psi_1)$。为在路径层面实现扰动，将原始的基于单位元的各向同性后复合一个任意小的基于单位元的接触各向同性。哈密顿量随这一扰动光滑变化，因此长度仍小于 L。此外，$\psi_1^0(K)$ 是开集 $\psi_1^0(U)$ 的一个紧子集，且该开集与U不相交。因此，扰动后的端点仍将 K 映到 U之外。□

引理 8.3。 令 $g \ge 0$ 在一个接触可移动开集 U 中具有紧支撑。若 $L > e_\alpha(U)$且

$$\varphi_1^L(\operatorname{supp} g) \subset U,$$

那么 $0 \le c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) < 2L$ 对每个 $t \ge 0$都成立。

证明。令 $K := \operatorname{supp} g$。取一个将 U 移开的各向同性，其长度小于 L，并应用引理 8.2，得到 ψ_s，使得 $\ell_\alpha(\psi) < L$, $\psi_1(K) \cap U = \varnothing$，且 $L \notin \operatorname{Spec}_\alpha(\psi_1)$。我们首先利用这些性质排除指定的平移时间。$g$ 的流保持 K：它在 K之外为恒等映射，且其每个时间映射都是微分同胚。因此，对于 $x \in K$ 和 $t \geq 0$，我们有

$$\psi_1 \varphi_g^t(x) \notin U, \qquad \varphi_1^L(x) \in U.$$

因此，这些点不可能重合。另一方面，若 $x \notin K$，流 φ_g^t 在 x 的一个邻域上是恒等映射，且在那里共形因子为零。此时，$\psi_1 \varphi_g^t$ 的一个平移时间为 L 的平移点，也会是 ψ_1 的一个具有相同平移时间的平移点，而这已被排除。综合这两种情形可得

$$L \notin \operatorname{Spec}_\alpha(\psi_1 \varphi_g^t) \qquad (t \geq 0). \tag{8.3}$$

~现在我们将这一谱排除结果转化为一个上界。令 ψ 表示由 ψ_s表示的提升~。引理 8.1 表明，$t \mapsto c_\alpha(\psi\, \widetilde{\varphi}_g^t)$ 是连续的。在 $t = 0$处，其值至多为$\ell_\alpha(\psi) < L$。由于谱性和 (8.3) 阻止该值穿越 L，因此对于每个 $t \geq 0$，它都严格小于 L。由次可加性以及引理 8.1 中的逆元界，

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) \leq c_\alpha(\widetilde{\psi}^{-1}) + c_\alpha(\widetilde{\psi}\, \widetilde{\varphi}_g^t) < \ell_\alpha(\psi) + L < 2L.$$

下界由 $g \geq 0$、单调性和归一化得到。 □

注 8.4 (与 Dylan Cant 的交流)。引理 *8.3* 的证明采用了与 [6, 第 3.5 节4] 中定理 *8* 的证明相同的谱论论证。这一论证可追溯至[33, 27]。事实上，上述引理 *8.3* 也可由 [6] 中的定理 *8* 推出。

命题 8.5 (局部谱能量不等式)。设 U 为一个接触可移动开集，且 $h \geq 0$ 光滑，并满足 支集 $h \subset U$。那么，对任意 $t \geq 0$,

$$0 \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_h^t) \leq e_\alpha(U)\big(1 + e^{t\|R_\alpha h\|_\infty}\big). \tag{8.4}$$

证明。令 $q = \|R_\alpha h\|_\infty$，并固定 $L > e_\alpha(U)$ 和 $\epsilon > 0$。为应用前述引理，我们对哈密顿量进行截断，使其支集所需的 Reeb 平移仍包含在可移位集合中。取一个光滑函数 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

$$\chi(r) = 0 \text{ for } r \leq Lq + \epsilon/2, \qquad 0 \leq \chi'(r) \leq 1, \qquad \chi'(r) = 1 \text{ for } r \geq Lq + \epsilon.$$

例如，在所示区间上取一个从零单调不减过渡函数至一的光滑函数。对于 $r \geq 0$，这些条件意味着 $0 \leq \chi(r) \leq r$ 和 $0 \leq r - \chi(r) \leq Lq + \epsilon$。设$g = \chi \circ h$。于是

$$0 \leq g \leq h, \qquad \|h - g\|_\infty \leq Lq + \epsilon, \qquad \|R_\alpha g\|_\infty \leq q, \tag{8.5}$$

且 $\operatorname{supp} g \subset \{h \geq L\, q + \epsilon/2\} \subset U$。对于每个 $x \in \operatorname{supp}\ g$，沿 Reeb 流积分可得

$$h(\varphi_1^L(x)) = h(x) + \int_0^L R_\alpha h(\varphi_1^s(x))\, ds \geq h(x) - Lq \geq \epsilon/2 > 0.$$

因此，$\varphi_1^L(\operatorname{supp}\ g) \subset \{h > 0\} \subset U$。所以，引理 8.3 适用，并给出对所有$t \geq 0$均成立的 $c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) < 2L$。

该截断函数具有所需的谱界。接下来需要估计将 g替换为 h所产生的误差。为此，令 $\eta_s = \varphi_g^{-s}\varphi_h^s$ 表示 $0 \leq s \leq t$。由 (2.7) 和 (8.5)，

$$\ell_\alpha(\eta) \leq \|h - g\|_\infty \int_0^t e^{s\|R_\alpha g\|_\infty}\, ds \leq (Lq + \epsilon) \int_0^t e^{sq}\, ds.$$

恒等式 $\varphi_h^s = \varphi_g^s \eta_s$ 给出了万有覆盖中的相应因式分解。因此，由次可加性和引理 8.1 可得

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_h^t) \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) + c_\alpha([\eta]) \leq 2L + (Lq + \epsilon) \int_0^t e^{sq}\, ds. \tag{8.6}$$

若 $q > 0$，则最后一个表达式等于

$$L(1 + e^{tq}) + \epsilon \frac{e^{tq} - 1}{q}.$$

若 $q = 0$，则它等于 $2L + \epsilon t$。因此，令 $\epsilon \to 0$，再令 $L \to e_\alpha(U)$，即可证明这两种情形下的上界。尽管辅助截断函数和移位映射可能依赖于 L 和 ϵ，但 (8.6) 左端不受这些选择的影响。最后，由单调性，$h \geq 0$ 给出下界。□

推论 8.6. 对于 $f,\ g \in C^\infty(Y)$ 以及 $t \geq 0$,

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_{f+g}^t) \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_f^t) + c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) + \frac{t^2}{2} e^{t(\|R_\alpha f\|_\infty + \|R_\alpha g\|_\infty)} \left\|\{f, g\}_\alpha\right\|_\infty. \tag{8.7}$$

证明。令 η 为引理 7.1 中的路径。其提升的因式分解、c_α的次可加性以及 (8.2) 给出

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}_{f+g}^t) \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_f^t) + c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) + c_\alpha([\eta]) \leq c_\alpha(\widetilde{\varphi}_f^t) + c_\alpha(\widetilde{\varphi}_g^t) + \ell_\alpha(\eta).$$

因此，代入 (7.1) 即可证明 (8.7)。 □

现在，我们将局部谱能量估计与流比较结合起来，以证明定理 F。论证遵循用于证明定理 E 的逐次部分和策略，具体见引理 7.4。

定理 *F* 的证明。设 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_N)$ 是从属于 $\mathcal{U}$ 的任意光滑单位分解。在此证明中，记

$$P=\mathrm{P}_\alpha(\vec{f}),\qquad E=\sum_{i=1}^{N}e_\alpha(U_i),\qquad h_k=\sum_{i=1}^{k}f_i.$$

数目 E 是有限的，因为每个 U_i 都可置换；它是正数，因为该覆盖含有非空成员。部分和与分割成员满足 (7.7)，其证明只用到了 P的定义。此外，对于每个 i，包括 $i=1$，(1.11) 都给出 $\|R_\alpha f_i\|_\infty\le P$。

要比较总和的谱不变量与各个加项的谱不变量，将推论 8.6 应用于 h_{k-1} 和 f_k。利用 (7.7)，我们得到

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}^t_{h_k})\le c_\alpha(\widetilde{\varphi}^t_{h_{k-1}})+c_\alpha(\widetilde{\varphi}^t_{f_k})+\frac{t^2}{2}e^{2tP}P.$$

将这些不等式对 $k=2$、.....、N 求和。中间项相互抵消，$h_1=f_1$，并且有$N-1$ 个误差项。因此，

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}^t_{h_N})\le\sum_{i=1}^{N}c_\alpha(\widetilde{\varphi}^t_{f_i})+\frac{N-1}{2}t^2e^{2tP}P. \tag{8.8}$$

现在可以分别控制这个不等式的两边。由于 $h_N=1$，左边由 (8.1) 得为 t。右边的每个 f_i 都是非负的，且在 U_i 中有紧支撑。因此，命题 8.5 给出

$$c_\alpha(\widetilde{\varphi}^t_{f_i})\le e_\alpha(U_i)\big(1+e^{t\|R_\alpha f_i\|_\infty}\big)\le e_\alpha(U_i)(1+e^{tP}).$$

因此，将这些界代入 (8.8) 即可证明

$$t\le E(1+e^{tP})+\frac{N-1}{2}t^2e^{2tP}P\qquad(t\ge0). \tag{8.9}$$

这一估计给出了所需的下界。事实上，假设与此矛盾，则 $P<1/(16(N-1)E)$。取 $t=4E$ 会使右侧过小。于是 $tP<1/(4(N-1))\le1/4$，因此 $e^{tP}<2$ 且 $e^{2tP}<2$。将 (8.9) 除以 t，得到

$$1\le\frac{1+e^{tP}}{4}+\frac{N-1}{2}te^{2tP}P<\frac{3}{4}+4(N-1)EP<1.$$

这是不可能的。因此，对于每个从属分割，$P\ge1/(16(N-1)E)$。对所有这类分割取下确界，即可证明 (1.18)。□

9. 定理 G 的证明

我们先证明像位于单位立方体内时的结果；一般情形则可通过重新缩放得出。

命题 9.1. 设$(Y,\xi = \ker \alpha)$是一个闭接触流形，它存在一个非零齐次拟同态 μ，满足单调性和消失性质，并按(1.13)归一化。设 $F = (f_1, \dots, f_k)\colon Y \to [-1,1]^k$ 光滑且非零。那么存在一个常数 $c_k > 0$，仅依赖于 k，使得对任意 $0 < \delta \le 1$，若

$$D(\mu)\max\left\{\max_{i=1}^{k}\|R_\alpha f_i\|_\infty, \max_{i,j=1}^{k}\|\{f_i,f_j\}_\alpha\|_\infty\right\} < c_k\delta^{2k+2} \tag{9.1}$$

那么存在一点 $\vec{a}\in[-1,1]^k$，使得

$$K_{\vec{a}}(\delta) := \{x \in Y \,|\, |F(x)-\vec{a}| \le \delta\}$$

在(Y,ξ)中是接触不可位移的。

将 F 的目标限制为从 $\mathbb{R}^k$ 到 $[-1,1]^k$，其动机来自 (1.9) 中 $\mathrm{P}_\alpha(\vec{f})$ 的定义，其中系数向量 a,b 属于 $[-1,1]^N$，以及定理 E 中对 $pb_\alpha(\mathcal{U})$ 的估计。

命题 *9.1* 的证明。 我们用反证法。假设对于某个 $0 < \delta_* \le 1$，式 (9.1) 成立，但对于每个 $\vec{a}\in[-1,1]^k$，$K_{\vec{a}}(\delta_*)$ 都是接触可位移的。我们将在证明快结束时指定 c_k。

为应用覆盖估计，我们首先构造一个由接触可位移集组成的 Y 的有限开覆盖 $\mathcal{U}$。对于每个格点 $\nu\in\mathbb{Z}^k$，考虑开立方体

$$Q_\nu := \delta_*\nu + \left(-\frac{3}{4}\delta_*, \frac{3}{4}\delta_*\right)^k \subset \mathbb{R}^k.$$

常数 3 4 保证立方体 Q_ν 覆盖目标 $[-1,1]^k$。我们声称，非空原像 $U_\nu := F^{-1}(Q_\nu)$ 构成 Y 的有限开覆盖。事实上，对于任意 $x\in Y$，存在一个格点 $\nu\in\mathbb{Z}^k$，使得

$$\left|\frac{F(x)}{\delta_*} - \nu\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{which implies} \quad |F(x)-\delta_*\nu| \le \frac{\delta_*}{2} < \frac{3}{4}\delta_*.$$

因此，$F(x) \in Q_\nu$，从而证明了覆盖性质。要证明只有有限多个原像非空，请注意，如果 $U_\nu \neq \emptyset$，则界限 $\|f_i\|_\infty \le 1$ 蕴含 $|\delta_*\nu| < 1 + \frac{3\delta_*}{4}$，因此

$$|\nu| < \frac{1}{\delta_*} + \frac{3}{4}.$$

一个边长为 $\frac{2}{\delta_*}+\frac{3}{2}$ 的 k 维立方体至多包含 $\left(\frac{2}{\delta_*}+\frac{5}{2}\right)^k$ 个格点。此外，

$$\left(\frac{2}{\delta_*}+\frac{5}{2}\right)^k = \frac{1}{\delta_*^k}\left(2+\frac{5\delta_*}{2}\right)^k \le \left(\frac{9}{2}\right)^k \frac{1}{\delta_*^k}. \tag{9.2}$$

因此，只有有限多个集合 U_ν 非空。它们的格点中心未必位于 $[-1,1]^k$ 中。对于每个这样的指标，将中心逐坐标投影到这个立方体上，定义

$$a_{\nu,i} := \max\{-1, \min\{1, \delta_* \nu_i\}\}, \qquad \vec{a}_\nu = (a_{\nu,1}, \dots, a_{\nu,k}).$$

由于 $F(x) \in [-1,1]^k$，此投影不会增大中心到 $F(x)$ 的距离。因此，对于 $x \in U_\nu$，

$$|F(x) - \vec{a}_\nu| \le |F(x) - \delta_* \nu| < \tfrac{3}{4}\delta_* < \delta_*.$$

因此 $U_\nu \subset K_{\vec{a}_\nu}(\delta_*)$，并且根据假设，$U_\nu$ 是接触可位移的。

构造好覆盖后，我们接下来构造一个从属于开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^k}$ 的单位分解 $\vec{h} = \{h_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^k}$。我们先在目标立方体 Q_ν 上进行。选取（并固定）一个函数 $\eta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$，其在 $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ 中紧支撑，并满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta(t-n) = 1$。那么，对于任意格点 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathbb{Z}^k$，考虑函数

$$\chi_\nu : \mathbb{R}^k \to [0,1] \ \text{ defined by } \ \chi_\nu(z) := \prod_{j=1}^k \eta\left(\frac{z_j}{\delta_*} - \nu_j\right).$$

每个这样的函数都紧支撑在 Q_ν 中，并且它们共同满足 $\sum_\nu \chi_\nu = 1$。我们通过定义 $h_\nu := F^*\chi_\nu = \chi_\nu \circ F$ 将这个分割拉回。根据构造，h_ν 紧支撑在 U_ν 中，并且对于任意 $x \in Y$，我们有

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^k} h_\nu(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^k} \chi_\nu(F(x)) = 1.$$

为了将这个分割与覆盖下界进行比较，我们现在估计 $\mathrm{P}_\alpha(\vec{h})$。

根据定义 (1.9)，$\mathrm{P}_\alpha(\vec{h})$ 中出现的括号 $\{\sum_\nu a_\nu h_\nu, \sum_\nu b_\nu h_\nu\}_\alpha$ 涉及 χ_ν 的导数，因此也涉及 η。令 $L := \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\eta'(t-n)|$，并将这两个线性组合表示为

$$\sum_\nu a_\nu h_\nu = A \circ F \ \text{ and } \ \sum_\nu b_\nu h_\nu = B \circ F$$

其中 $A=\sum_\nu a_\nu\chi_\nu$ 和 $B=\sum_\nu b_\nu\chi_\nu$。接触链式法则给出

$$\begin{aligned}\{A\circ F,B\circ F\}_\alpha=&\sum_{i,j=1}^{k}A_i(F)B_j(F)\Big(\{f_i,f_j\}_\alpha-f_iR_\alpha f_j+f_jR_\alpha f_i\Big)\\&+A(F)\sum_{j=1}^{k}B_j(F)R_\alpha f_j-B(F)\sum_{i=1}^{k}A_i(F)R_\alpha f_i\end{aligned}\tag{9.3}$$

其中 A_i 表示 $\partial_i A$，而 B_j 表示 $\partial_j B$。分割构造还给出

$$|A(z)|\le 1\quad\text{and}\quad \|A_i\|_\infty=\|\partial_i A\|_\infty\le\frac{L}{\delta_*}.$$

将这些界与链式法则结合，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\left\{\sum_\nu a_\nu h_\nu,\sum_\nu b_\nu h_\nu\right\}_\alpha\right\|_\infty&=\|\{A\circ F,B\circ F\}_\alpha\|_\infty\\&\le\left(\frac{3k^2L^2}{\delta_*^2}+\frac{2kL}{\delta_*}\right)\max\left\{\max_{i=1}^{k}\|R_\alpha f_i\|_\infty,\max_{i,j=1}^{k}\|\{f_i,f_j\}_\alpha\|_\infty\right\}\\&\le\frac{C_k}{\delta_*^2}\max\left\{\max_{i=1}^{k}\|R_\alpha f_i\|_\infty,\max_{i,j=1}^{k}\|\{f_i,f_j\}_\alpha\|_\infty\right\}\end{aligned}$$

其中 $C_k:=3k^2L^2+2kL$ 仅依赖于 k。最后一个不等式成立，因为 $\delta_*\le 1$（所以 $\frac{2kL}{\delta_*}\le\frac{2kL}{\delta_*^2}$）。该估计对系数向量是一致的，因此

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{h})\le\frac{C_k}{\delta_*^2}\max\left\{\max_{i=1}^{k}\|R_\alpha f_i\|_\infty,\max_{i,j=1}^{k}\|\{f_i,f_j\}_\alpha\|_\infty\right\}.\tag{9.4}$$

最后，将定理 E 应用于 $\mathcal{U}=\{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^k}$和 $\vec{h}=\{h_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^k}$，我们得到

$$\frac{1}{16(N-1)^2D(\mu)}\le pb_\alpha(\mathcal{U})\le\mathrm{P}_\alpha(\vec{h})$$

其中 N 是满足 $U_\nu\neq\emptyset$的指标 ν 的个数。这里 $N\ge 2$，因为覆盖Y 的单个集合就是 Y 本身，因而无法被移位。将基数界 (9.2) 与括号估计 (9.4) 结合，我们得到

$$\frac{\delta_*^{2k}}{16\left(\frac{9}{2}\right)^{2k-1}D(\mu)}\le\frac{C_k}{\delta_*^2}\max\left\{\max_{i=1}^{k}\|R_\alpha f_i\|_\infty,\max_{i,j=1}^{k}\|\{f_i,f_j\}_\alpha\|_\infty\right\}.\tag{9.5}$$

令 $c_k:=\left(32\left(\frac{9}{2}\right)^{2k}C_k\right)^{-}$。那么 (9.5) 和定量条件 (9.1) 推出

$$\frac{1}{16\left(\frac{9}{2}\right)^{2k}C_k}\le c_k=\frac{1}{32\left(\frac{9}{2}\right)^{2k}C_k}$$

这与常数的选取相矛盾，从而完成证明。 □

现在通过重新缩放来证明定理 G。

定理 *G* 的证明。 不失一般性，假设 $\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty > 0$。然后固定 $0 < \delta \le \max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty$。考虑重新缩放

$$\tilde{F} = \left(\frac{f_1}{\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty}, \dots, \frac{f_k}{\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty}\right) =: (\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_k)$$

使得 $\tilde{F}: Y \to [-1,1]^k$。为检验重新缩放后的定量假设，我们计算

$$R_\alpha \tilde{f}_i = \frac{R_\alpha f_i}{\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty} \implies \left\|R_\alpha \tilde{f}_i\right\|_\infty = \frac{\|R_\alpha f_i\|_\infty}{\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty}$$

and

$$\{\tilde{f}_i, \tilde{f}_j\}_\alpha = \frac{\{f_i, f_j\}_\alpha}{\left(\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty\right)^2} \implies \left\|\{\tilde{f}_i, \tilde{f}_j\}_\alpha\right\|_\infty = \frac{\|\{f_i, f_j\}_\alpha\|_\infty}{\left(\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty\right)^2}.$$

因此，定理 G 中的定量条件就˜函数 f_i而言可写成以下形式:

$$D(\mu)\max\left\{\max_{i=1}^{k}\left\|R_\alpha \tilde{f}_i\right\|_\infty, \max_{i,j=1}^{k}\left\|\{\tilde{f}_i, \tilde{f}_j\}_\alpha\right\|_\infty\right\} < c_k\left(\frac{\delta}{\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty}\right)^{2k+2}.$$

令 $\tilde{\delta} := \frac{\delta}{\max_{i=1}^{k}\|f_i\|_\infty}$，得到 $\tilde{\delta} \in (0,1]$。因此，重新缩放后的系统满足命题 9.1 的假设。若 $\tilde{a}$ 是该命题所给出的中心，则将其乘以 $M = \max_i \|f_i\|_\infty$。所得集合恰好是 $\{x: |F(x) - M\tilde{a}| \le \delta\}$，从而证明了该定理。□

推论 *1.7* 的证明。 若 $F \equiv 0$，则其零纤维为 Y，且是不可移位的。因此，我们可以假设 $\max_i \|f_i\|_\infty > 0$。对于给定的映射 $F = (f_1, \dots, f_k): Y \to \mathbb{R}^k$，假设给出

$$\max_{i=1}^{k}\|R_\alpha f_i\|_\infty = \max_{i,j=1}^{k}\|\{f_i, f_j\}_\alpha\|_\infty = 0.$$

因此，对于任意一列 $\delta_n \to 0$可容许的正半径，定理 G 中的定量条件都成立。对于每个 δ_n，都存在 $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^k$ 使得

$$K_{\vec{a}_n}(\delta_n) = \{x \in Y \,|\, |F(x) - \vec{a}_n| \le \delta_n\} \tag{9.6}$$

是接触不可移位的，因而特别是非空的。为了转向极限纤维，我们首先注意到，点 $\vec{a}_n$ 位于 $\mathbb{R}^k$的有界区域内。事实上，对于任意$x_n \in K_{\vec{a}_n}$（δ_n），根据条件 (9.6)，我们有

$$|\vec{a}_n| \le |F(x_n)| + \delta_n \le \max_Y |F| + \delta_n$$

其中，由于 Y 的紧致性，$\max_Y |F|$为有限值。特别地，当 n 足够大时，$|\vec{a}_n| < 2\max_Y |F|$。取一个子序列后，不妨设 $\vec{a}_n$ 收敛到某个

$\vec{a} \in \mathbb{R}^k$。由于 Y 的紧致性，进一步取子序列可满足 $x_n \to x$，其中某个 $x \in Y$。这些收敛性给出

$$|F(x) - \vec{a}| \le |F(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - \vec{a}_n| + |\vec{a}_n - \vec{a}| \to 0 \tag{9.7}$$

这意味着 $F(x) = \vec{a}$。因此，$\vec{a}$属于 F 的像。最后，我们证明纤维 $F^{-1}(\vec{a})$ 是接触不可移位的。否则，根据 $F^{-1}(\vec{a})$ 的紧致性，可得到该纤维的一个可位移邻域 U。对于所有充分大的 n，都有 $K_{\vec{a}_n}(\delta_n) \subset U$。否则，取一个收敛到 $y \in Y \setminus U$ 的子序列 $y_n \in K_{\vec{a}_n}(\delta_n) \setminus U$。估计

$$|F(y_n) - \vec{a}| \le \delta_n + |\vec{a}_n - \vec{a}| \longrightarrow 0$$

会使 y 落在 $F^{-1}(\vec{a}) \subset U$ 中，这就产生了矛盾。于是 $K_{\vec{a}_n}(\delta_n)$ 也会是接触可位移的，这就产生了矛盾。 □

10. 定理 H 的证明

我们首先确立 $pb_{3,\ \alpha}$ 和 $pb_{4,\ \alpha}$ 的代数性质，以及它们与刚性结果的关系。这些性质将使我们能够把其定义中的括号最大值与 $\mathrm{P}_\alpha(\cdot)$ 进行比较，并应用前文确立的下界。谱不变量仅在推论 1.15 的证明中用到。

引理 10.1. 对于光滑的 $f, g\colon\ Y \to [0,1]$，(1.24) 中的互补括号满足

$$\begin{aligned} \{1-f, g\}_\alpha &= R_\alpha g - \{f, g\}_\alpha, \\ \{f, 1-g\}_\alpha &= -R_\alpha f - \{f, g\}_\alpha, \\ \{1-f, 1-g\}_\alpha &= \{f, g\}_\alpha + R_\alpha f - R_\alpha g. \end{aligned} \tag{10.1}$$

因此，

$$\begin{aligned} \|\{f, g\}_\alpha\|_\infty &\le \max_{\substack{u \in \{f, 1-f\} \\ v \in \{g, 1-g\}}} \|\{u, v\}_\alpha\|_\infty, \\ \max\{\|R_\alpha f\|_\infty, \|R_\alpha g\|_\infty\} &\le 2 \max_{\substack{u \in \{f, 1-f\} \\ v \in \{g, 1-g\}}} \|\{u, v\}_\alpha\|_\infty. \end{aligned} \tag{10.2}$$

对于三项划分 $\vec{h} = (h_0, h_1, h_2)$，

$$R_\alpha h_i = \sum_{j=0}^{2} \{h_j, h_i\}_\alpha, \qquad \|R_\alpha h_i\|_\infty \le 2 \max_{0 \le j < k \le 2} \|\{h_j, h_k\}_\alpha\|_\infty. \tag{10.3}$$

证明。 双线性、斜对称性和 $\{1, u\}_\alpha = R_\alpha u$ 给出 (10.1)。特别是，

$$R_\alpha g = \{f, g\}_\alpha + \{1-f, g\}_\alpha, \qquad -R_\alpha f = \{f, g\}_\alpha + \{f, 1-g\}_\alpha.$$

因此，三角不等式证明了 (10.2)。对于三元组，采用相同的方法：使用$\sum_j h_j = 1$ 得到 (10.3) 中的第一个恒等式。由于其中包含 $j = i$ 的那一项为零，只剩下两项，从而证明了所需的估计。 □

引理 10.2. 定义 *1.11* 中的接触泊松括号不变量 $pb_{3,\alpha}$ 和$pb_{4,\alpha}$ 满足以下对称恒等式：

$$pb_{3,\alpha}(X_0, X_1, X_2) = pb_{3,\alpha}(X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})$$

其中$(\sigma(0)\ \sigma(1)\ \sigma(2))$ 是$(0, 1,2)$的任意置换，并且

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = pb_{4,\alpha}(X_1, X_0, Y_0, Y_1) = pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_1, Y_0) = pb_{4,\alpha}(Y_0, Y_1, X_0, X_1).$$

$pb_{3,\alpha}$ 和 $pb_{4,\alpha}$ 在输入集扩大时均单调，并且在同时施加严格接触同胚时保持不变。此外，对任意常数 $a > 0$,

$$pb_{3,a\alpha} = a^{-1} pb_{3,\alpha}, \qquad pb_{4,a\alpha} = a^{-1} pb_{4,\alpha},$$

等式两边的输入集相同。

证明。 置换三个集合会置换三个分割函数，而斜对称性使它们的泊松括号范数的最大值保持不变。对于四元组，交换 X_0, X_1 对应于 $f \mapsto 1 - f$，交换 Y_0, Y_1 则对应于 $g \mapsto 1 - g$。每个操作都会置换四个括号；交换两对有序集合对应于 $(f, g) \mapsto (g, f)$，并且根据斜对称性，泊松括号范数仍保持不变。这就证明了所需的对称性。扩大输入集会限制容许函数的类别，由此可得单调性。

为证明不变性，设 $\psi^*\alpha = \alpha$。于是，接触哈密顿方程推出

$$\{f \circ \psi^{-1}, g \circ \psi^{-1}\}_\alpha = \{f, g\}_\alpha \circ \psi^{-1}.$$

因此，将所有输入哈密顿函数与 ψ^{-1} 复合，会保留它们的值域、它们在相应集合附近的取值，以及它们的括号范数。对 ψ^{-1} 应用同样的论证即可证明不变性。对于缩放关系，注意到 $R_{a\alpha} = a^{-1} R_\alpha$，一般而言，在 $a\alpha$ 下， f的接触哈密顿向量场为 $a^{-1} X_f$，因此 $\{f, g\}_{a\alpha} = a^{-1}\{f, g\}_\alpha$。输入哈密顿函数的可容许性不受这一常数重新缩放的影响，这就证明了最后一个断言。□

命题 10.3。设$(Y, \ker \alpha)$ 为一个闭接触流形。对于三项单位分解 $\vec{h} = (h_0, h_1, h_2)$ 以及光滑对 f, g： $Y \to [0, 1]$，映射

$$\vec{h} \longmapsto \max_{0 \le i < j \le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty \qquad (f, g) \longmapsto \max_{\substack{u \in \{f, 1-f\} \\ v \in \{g, 1-g\}}} \|\{u, v\}_\alpha\|_\infty ,$$

在相应的可容许三元组和二元组类中，它们关于逐分量一致收敛是下半连续的。

证明。 对于任一泛函，令 M_j 表示其在一致收敛序列的第 j 项处的值。如果 $\liminf_j M_j = +\infty$，则无需证明。否则，取一个子序列，使得 M_j 收敛到其有限的下极限。在该子序列上，引理 10.1 对每个输入函数的 Reeb 导数给出一致界；在四集情形下，同样的界也适用于互补函数。因此，相应最大值中的每个括号都满足条件 (1.8)。于是，定理 C 将每个极限括号范数限制为不超过 $\liminf_j M_j$。取最大值即得结论。 □

回顾一下，对于接触哈密顿函数系统 $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$，我们已在 (1.9) 中定义了 $\mathrm{P}_\alpha(\vec{f})$；对于 Y 的开覆盖 $\mathcal{U}$，我们已在 (1.10) 中定义了 $pb_\alpha(\mathcal{U})$。

命题 10.4. 设 $(Y, \ker \alpha)$ 是一个闭接触流形。则对于紧集 X_0、X_1、X_2 构成的可容许三元组，有

$$\frac{1}{4} pb_\alpha(\{Y \setminus X_i\}_{i=0}^2) \le pb_{3,\alpha}(X_0, X_1, X_2) \le pb_\alpha(\{Y \setminus X_i\}_{i=0}^2). \tag{10.4}$$

对于一个可容许四元组，集合 $U_{ij} := Y \setminus (X_i \cup Y_j)$ 构成一个开覆盖，并且

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) \ge \frac{1}{56} pb_\alpha(\{U_{ij}\}_{i,j=0}^1). \tag{10.5}$$

证明。 我们先比较三元不变量与覆盖不变量。紧流形 Y 上的函数恰好在其支集是 $Y \setminus X_i$ 的紧子集时，才会在 X_i 的某个邻域上消失。因此，(1.23) 中的三元组正是从属于开覆盖 $\{Y\setminus X_0, Y\setminus X_1, Y\setminus X_2\}$ 的分割。每个单独的括号都出现在定义 $\mathrm{P}_\alpha(\cdot)$ 的组合中，因此

$$\max_{0\le i<j\le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty \le \mathrm{P}_\alpha(\vec{h}).$$

取下确界得到 $pb_{3,\,\alpha}(X_0,\ X_1,\ X_2) \le pb_\alpha(\{Y \setminus X_i\}_{i=0}^2)$。对于反向不等式，只需用三个两两括号来界定任意线性组合。固定一点 $p \in Y$，并固定两个表达式 $\sum_{i=0}^2 a_i h_i$ 和 $\sum_{i=0}^2 b_i h_i$ 中的除 $a_0 = t$ 以外的所有系数。由于括号是双线性的，其在 p 处的值具有 $At + B$ 的形式，其中 $A,\ B$ 是与 t 无关的实数。于是对于 $-1 \le t \le 1$，我们有

$$At + B = \frac{1-t}{2}(B - A) + \frac{1+t}{2}(B + A)$$

这意味着

$$|At + B| \le \frac{1-t}{2}|B - A| + \frac{1+t}{2}|B + A| \le \max\{|B - A|, |B + A|\}.$$

因此，端点 $t = -1$ 或 $t = 1$ 中至少有一个的绝对值不小于 t 处的绝对值。依次对全部六个系数应用这一论证，可知最大值

在角向量 $a,\ b \in \{-1,1\}^3$处取得。因此，接下来只需估计这些向量处的括号，其形式为

$$\sum_{0\le i<j\le 2} (a_i b_j - a_j b_i)\{h_i, h_j\}_\alpha.$$

由于 $a_i^2 = 1$，我们有 $a_i b_j - a_j b_i = a_i a_j(a_j b_j - a_i b_i)$。由于每个乘积 $a_i b_i$ 都等于 1 或 -1，这一恒等式表明

$$|a_i b_j - a_j b_i| = \begin{cases} 0, & a_i b_i = a_j b_j, \\ 2, & a_i b_i \neq a_j b_j. \end{cases}$$

现在，考虑三个乘积 $a_0 b_0,\ a_1 b_1,\ a_2 b_2$。如果它们全部相等，则所有系数都为零。否则，其中两个同号，第三个与它们异号。因此至多只有两个系数非零，于是得到

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i h_i, \sum_{j=0}^{2} b_j h_j \right\}_\alpha (p) \right| &\le 2 \max_{0\le i<j\le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty + 2 \max_{0\le i<j\le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty \\ &= 4 \max_{0\le i<j\le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty . \end{aligned}$$

由于这对每个点 $p \in Y$ 都成立，取一致范数可得

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{h}) \le 4 \max_{0\le i<j\le 2} \|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty .$$

因此，取下确界即证明了 (10.4)。

对于这个四元组，我们使用乘积划分。首先，每个点都至少位于 $X_0,\ X_1$ 中的一个集合之外，并且至少位于 $Y_0,\ Y_1$中的一个集合之外，因此它属于某个 U_{ij}。固定一个容许对 $(f,\ g)$，并令

$$f_0 = f, \quad f_1 = 1 - f, \qquad g_0 = g, \quad g_1 = 1 - g, \qquad h_{ij} = f_i g_j.$$

这四个函数 h_{ij} 均为非负函数，且和为 1。由于 f_i 在 X_i 附近为零，而 g_j 在 Y_j附近为零，它们的乘积的支集紧包含于 U_{ij}中。因此，它们构成一个从属单位分解。为了估计这一分解的括号泛函，固定系数向量$a,\ b \in [-1,1]^4$ 并考虑双线性多项式

$$A(f,g) = \sum_{i,j=0}^{1} a_{ij} f_i g_j, \qquad B(f,g) = \sum_{i,j=0}^{1} b_{ij} f_i g_j.$$

因此，$A(f,\ g)$ 和 $B(f,\ g)$ 是 $fg,\ f(1-g)$、$(1-f)g$、$(1-f)(1-g)$ 以及$|A|,\ |B| \le 1$ 的线性组合。此外，A 关于 f 的导数记作 A_f，它是 $[-1,1]$ 中两个系数之差的凸组合，权重分别为 g 和 $1-g$。由此得到

$$|A_f|, |A_g|, |B_f|, |B_g| \le 2. \tag{10.6}$$

为简洁起见，记 $q := \{f,g\}_\alpha$、$r := R_\alpha f$、$s := R_\alpha g$ 和 $J := A_f B_g - A_g B_f$。公式 (9.3) 特化为

$$\{A(f,g), B(f,g)\}_\alpha = Jq + (AB_f - BA_f + gJ)r + (AB_g - BA_g - fJ)s. \tag{10.7}$$

根据 (10.6)，$|J| \le 8$ 以及 (10.7) 中 r 和 s 的每个系数的绝对值至多为 12。因此，该括号受原括号和两个 Reeb 导数控制。应用引理 10.1 可将其范数界定为

$$8\|q\|_\infty + 12\|r\|_\infty + 12\|s\|_\infty \le 56 \max_{\substack{u\in\{f,1-f\}\\ v\in\{g,1-g\}}} \|\{u,v\}_\alpha\|_\infty .$$

该界与 a、b 无关，因此同一个右端项也界定了 $\mathrm{P}_\alpha((h_{ij}))$，进而也界定了 $pb_\alpha(\{U_{ij}\})$。对所有容许对取下确界即可证明 (10.5)。□

引理 10.5。每个容许四元组 X_0, X_1, Y_0, Y_1 都满足

$$pb_{3,\alpha}(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup Y_0, Y_1) \le 3\, pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1).$$

证明。这三个集合 $X_0 \cup Y_0$、$X_1 \cup Y_0$ 和 Y_1 的公共交集为空，因为 $(X_0 \cup Y_0) \cap (X_1 \cup Y_0) = Y_0$。对于一个容许对 (f, g)，令

$$u = fg, \qquad v = (1-f)g, \qquad w = 1 - g.$$

这些函数构成上述三个集合的一个容许三元组。为简便起见，记作 $q := \{f,g\}_\alpha$、$r := R_\alpha f$ 和 $s := R_\alpha g$。公式 (10.7) 给出

$$\begin{aligned}
\{u,v\}_\alpha &= gq - fgs,\\
\{u,w\}_\alpha &= -g(q+r) - f(1-g)s,\\
\{v,w\}_\alpha &= g(q+r-s) - (1-f)(1-g)s.
\end{aligned}$$

根据 (10.1)，q、$q+r$ 和 $q+r-s$ 各自（相差一个符号）都是四个互补括号之一。为了控制其余项，我们利用 (10.2) 将 $\|s\|_\infty$ 的范数界定为它们范数最大值的两倍。因此，我们有

$$\max_{a,b\in\{u,v,w\}} \|\{a,b\}_\alpha\|_\infty \le 3 \max_{\substack{a\in\{f,1-f\}\\ b\in\{g,1-g\}}} \|\{a,b\}_\alpha\|_\infty .$$

因此，取下确界即可得出结论。 □

引理 10.6. 设 μ 是一个具有消失性质的非零单调齐次拟态射。若 $S \subset Y$ 是紧的，且 $Y \setminus S$ 是接触可位移的，则 S 是 μ-次重的。

证明。不失一般性，我们可以根据 (1.13) 对 μ 进行归一化，因为将其乘以一个正常数不会改变次重性。设 $h \in C^\infty(Y)$满足 $h|_S = 0$。对每个$\epsilon > 0$，选取一个光滑截断函数 $\chi_\epsilon : Y \to [0,1]$，使其在 S 附近消失，并在$\{|h| < \epsilon\}$之外等于 1。于是 $h_\epsilon = \chi_\epsilon h$ 的支集紧含于 $Y \setminus S$中，且 $\|h - h_\epsilon\|_\infty \le \epsilon$。该截断函数使消失性质得以应用，从而得到 $\mu(\widetilde{\varphi}_{h_\epsilon}) = 0$。

接下来，我们比较截断哈密顿量与原哈密顿量。固定 $t > 0$。由 (2.5)，路径$\varphi_h^{-s}\varphi_{h_\epsilon}^s$ $0 \le s \le t$由 $e^{-\kappa(\varphi_h^s)}(h_\epsilon - h)\circ\varphi_h^s$ 生成，其 α-长度至多为 $\epsilon\int_0^t e^{s\|R_\alpha h\|_\infty}\,ds$。将这个长度估计与 (7.3) 和 (7.4) 结合，我们得到

$$t\,|\mu(\widetilde{\varphi}_h)| \le D(\mu) + \epsilon\int_0^t e^{s\|R_\alpha h\|_\infty}\,ds.$$

令 $\epsilon \to 0$，固定 t，然后令 $t \to \infty$，我们得到 $\mu(\widetilde{\varphi}_h) = 0$，这证明了次重性。□

现在我们证明定理 H。

定理 *H* 的证明。令 $\vec{h} = (h_0, h_1, h_2)$ 对三元组 (X_0, X_1, X_2) 是可容许的。由于 h_i 在 X_i 上消失，且 X_i 是 μ-次重的，对于每个 i，我们有 $\mu(\widetilde{\varphi}_{h_i}) = 0$。将引理 7.4 应用于$N = 3$，得到

$$\mathrm{P}_\alpha(\vec{h}) \ge \frac{1}{16(3-1)^2 D(\mu)} = \frac{1}{64 D(\mu)}.$$

要将这个关于括号泛函的界转化为关于三元不变量的界，使用命题 10.4 证明中的逐点估计：$\mathrm{P}_\alpha(\vec{h}) \le 4\max_{0\le i<j\le 2}\|\{h_i, h_j\}_\alpha\|_\infty$.因此，每个可容许三元组的括号最大值至少为 $1/(256D(\mu))$。取下确界即可证明 (i)。

对于 (ii)，令 (f, g) 为该四元组的可容许三元组，并令

$$f_0 = f, \qquad f_1 = 1 - f, \qquad g_0 = g, \qquad g_1 = 1 - g, \qquad h_{ij} = f_i g_j.$$

这四个非负函数之和为 1。对于每个 i, j，乘积 h_{ij} 在 $X_i \cup Y_j$ 上消失，因为 f_i 在 X_i 上消失，而 g_j 在 Y_j 上消失。因此，由并集的次重性可得$\mu(\widetilde{\varphi}_{h_{ij}}) = 0$。于是我们可以应用引理 7.4，此时取 $N = 4$。将其下界与命题 10.4 中的乘积分割估计结合，得到

$$\frac{1}{16(4-1)^2 D(\mu)} \le \mathrm{P}_\alpha((h_{ij})) \le 56 \max_{\substack{u\in\{f,1-f\}\\ v\in\{g,1-g\}}} \|\{u, v\}_\alpha\|_\infty .$$

由于 $56 \cdot 16 \cdot 9 = 8064$，对（$f$，$g$）取下确界即可证明（ii）中的第一个界).

通过三元不变量，附加假设给出了更精确的界。也就是说，假设 Y_1 是 μ-次重的。那么这三个集合 $X_0 \cup Y_0$、$X_1 \cup Y_0$ 和 Y_1 都是 μ-次重的，

并且它们的公共交集为空，因为

$$(X_0 \cup Y_0) \cap (X_1 \cup Y_0) \cap Y_1 = Y_0 \cap Y_1 = \varnothing.$$

因此，(i) 部分和引理 10.5 给出

$$\frac{1}{256 D(\mu)} \le pb_{3,\alpha}(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup Y_0, Y_1) \le 3 pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1).$$

这证明了最后一个结论。 □

推论 *1.15* 的证明。 对于三元组，三个补集构成一个可移开开覆盖。应用 (10.4) 和定理 F 得到

$$pb_{3,\alpha}(X_0, X_1, X_2) \ge \frac{1}{4} \frac{1}{16(3-1)\sum_{i=0}^{2} e_\alpha(Y \setminus X_i)} = \frac{1}{128 \sum_{i=0}^{2} e_\alpha(Y \setminus X_i)}.$$

同样的比较也适用于四元组：四个集合 $U_{ij} = Y \setminus (X_i \cup Y_j)$ 构成一个可移开开覆盖。由 (10.5) 和定理 F，

$$pb_{4,\alpha}(X_0, X_1, Y_0, Y_1) \ge \frac{1}{56} \frac{1}{16(4-1)\sum_{i,j=0}^{1} e_\alpha(U_{ij})} = \frac{1}{2688 \sum_{i,j=0}^{1} e_\alpha(U_{ij})}.$$

证明完毕。 □

11. Proof of Theorem I

引理 11.1。 假设 $R_\alpha h = 0$。设 $T, L > 0$ *and*

$$\varphi_1^s \varphi_h^t(X_0) \cap X_1 = \varnothing \qquad \textit{for } |t| \le T \textit{ and } |s| \le L.$$

于是存在一个光滑函数 $f\colon\ Y \to [0,1]$，在 X_i 附近对 $i = 0,\ 1$ 等于 i，使得

$$\|X_h f\|_\infty \le \frac{1}{T}, \qquad \|R_\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{L}. \tag{11.1}$$

证明。 考虑这两个紧集

$$K_i := \{\varphi_1^s \varphi_h^t(x) : x \in X_i,\ 0 \le t \le T,\ 0 \le s \le L\}, \qquad i = 0, 1.$$

它们不相交。事实上，若 $\varphi_1^{s_0} \varphi_h^{t_0}(x_0) = \varphi_1^{s_1} \varphi_h^{t_1}(x_1)$，其中 $x_i \in X_i$ 以及所指的参数满足条件，则由交换性可得

$$x_1 = \varphi_1^{s_0 - s_1} \varphi_h^{t_0 - t_1}(x_0).$$

由于 $|t_0 - t_1| \le T$和 $|s_0 - s_1| \le L$，这与假设矛盾。选择一个光滑函数$f_0\colon\ Y \to [0,1]$ 在 K_i 的某个邻域上等于 i，并定义

$$f(x) := \frac{1}{TL} \int_0^T \int_0^L f_0(\varphi_1^s \varphi_h^t(x))\, ds\, dt. \tag{11.2}$$

那么 f是光滑的，并且 $0 \le f \le 1$。此外， $[0,T]\times[0,L]\times X_i$的紧致性给出了 X_i 的一个邻域，使得该矩形中的每个 $\varphi_1^s\varphi_h^t$ 在该邻域下的像都位于 $f_0 = i$中。因此，在该邻域上有 $f = i$ 。

为估计沿哈密顿流的导数，将 $\varphi_h^\tau(x)$ 代入 (11.2) 中的 x 。根据流性质和交换性，

$$f(\varphi_h^\tau(x)) = \frac{1}{TL}\int_0^L \int_\tau^{T+\tau} f_0(\varphi_1^s\varphi_h^t(x))\,dt\,ds.$$

在 $\tau = 0$ 处求导，得到

$$X_h f(x) = \frac{1}{TL}\int_0^L \left[f_0(\varphi_1^s\varphi_h^T(x)) - f_0(\varphi_1^s(x))\right] ds.$$

由于每个差的绝对值至多为一， $\|X_h f\|_\infty \le 1/T$。类似地，将 $\varphi_1^\sigma(x)$ 代入 (11.2) 中，会将内层积分区间平移至 $[\sigma, L+\sigma]$。因此

$$R_\alpha f(x) = \left.\frac{d}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} f(\varphi_1^\sigma(x)) = \frac{1}{TL}\int_0^T \left[f_0(\varphi_1^L\varphi_h^t(x)) - f_0(\varphi_h^t(x))\right] dt.$$

同样的估计可证明 $\|R_\alpha f\|_\infty \le 1/L$。 □

接下来，我们将这些导数界转化为 $pb_{4,\alpha}$ 的界。在定理 I 的情形下，记

$$a := \max_{Y_0} h, \qquad b := \min_{Y_1} h, \qquad \Delta := b - a > 0.$$

引理 11.2。 在定理 I 的情形下，设 $f\colon Y \to [0,1]$ 在 X_i 附近光滑，且满足 $f = i$ 。那么

$$p \le \max\left\{\|R_\alpha f\|_\infty, \frac{\|X_h f\|_\infty + \max\{|a|,|b|\}\,\|R_\alpha f\|_\infty}{\Delta}\right\}. \tag{11.3}$$

证明。 一般而言，对于光滑标量函数 $\chi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，接触哈密顿向量场的定义方程给出

$$X_{\chi(h)} = \chi'(h)X_h + \big(\chi(h) - h\chi'(h)\big)R_\alpha. \tag{11.4}$$

事实上，右侧的 α-值为 $\chi(h)$，并且其与 $d\alpha$ 的缩并为 $-\chi'(h)dh = -d(\chi(h))$。此外， $R_\alpha(\chi(h)) = 0$，因此这些正是 $X_{\chi(h)}$ 的定义方程。现在，令 $g := \chi(h)$。由于 $R_\alpha g = 0$ 和 $\{1,f\}_\alpha = R_\alpha f$，四个括号为

$$\{f,g\}_\alpha = -X_g f, \qquad \{1-f,g\}_\alpha = X_g f,$$
$$\{f,1-g\}_\alpha = X_g f - R_\alpha f, \quad \{1-f,1-g\}_\alpha = R_\alpha f - X_g f.$$

因此，它们的最大范数为

$$\max\{\|X_g f\|_\infty,\ \|(R_\alpha - X_g)f\|_\infty\}. \tag{11.5}$$

特别地，若 $\chi(r) = (r-a)/\Delta$ 在 (a,b) 上，则在满足 $a < h(x) < b$ 的任意 x 处，这两个向量场分别为 $(X_h - aR_\alpha)/\Delta$ 和 $(bR_\alpha - X_h)/\Delta$。

对于平滑步骤，固定 $0 < \epsilon < \Delta/4$ 并定义

$$q_\epsilon(r) := \begin{cases} 0, & r \le a + 2\epsilon, \\ \dfrac{r - a - 2\epsilon}{\Delta - 4\epsilon}, & a + 2\epsilon < r < b - 2\epsilon, \\ 1, & r \ge b - 2\epsilon. \end{cases}$$

设 $g_\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}} q_\epsilon(h(x) - v)\rho_\epsilon(v)\,dv$，其中

$$\rho_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \rho_\epsilon \ge 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(v)\,dv = 1, \qquad \operatorname{supp}\rho_\epsilon \subset [-\epsilon, \epsilon].$$

这里的 v 是截断函数的标量平移，而不是流的时间参数。固定一点 x。我们先考察平移函数 $q_\epsilon(h - v)$，然后再取其平均值。所用的恒等式是

$$X_{Ah+B} = AX_h + BR_\alpha$$

对于常数 A, B。于是有三种可能。

（i）如果 $h(x) - v < a + 2\epsilon$，则 $q_\epsilon(h - v)$ 在局部恒等于常数 0。它在 x 处的向量场为 0。（ii）如果 $a + 2\epsilon < h(x) - v < b - 2\epsilon$，则在局部 $q_\epsilon(h - v) = \frac{h - (a+2\epsilon+v)}{\Delta - 4\epsilon}$。因此它在 x 处的向量场为

$$\frac{X_h - (a + 2\epsilon + v)R_\alpha}{\Delta - 4\epsilon}.$$

（iii）如果 $h(x) - v > b - 2\epsilon$，那么 $q_\epsilon(h - v)$ 局部为常数 1。它在 x 处的向量场为 R_α.

记 $V_{\epsilon,v}$ 为由这三种情况给出的向量场。对 g_ϵ 的定义积分求导，得到

$$X_{g_\epsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} V_{\epsilon,v}(x)\rho_\epsilon(v)\,dv.$$

此积分中的所有向量都属于同一个切空间 T_xY。这三个公式描述了被积函数；平滑后的向量场是它们的平均值。此外，我们有

$$R_\alpha(x) - X_{g_\epsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(R_\alpha(x) - V_{\epsilon,v}(x)\big)\rho_\epsilon(v)\,dv.$$

In p特别地，在过渡区间内，第二个积分中的这个向量 is

$$R_\alpha - \frac{X_h - (a + 2\epsilon + v)R_\alpha}{\Delta - 4\epsilon} = \frac{(\Delta - 4\epsilon + a + 2\epsilon + v)R_\alpha - X_h}{\Delta - 4\epsilon} = \frac{(b - 2\epsilon + v)R_\alpha - X_h}{\Delta - 4\epsilon},$$

bec因为 $\Delta + a = b$。在两个常值区域上，它分别为 R_α 和 0。

现在，我们将这些向量应用于 f。在过渡区间内，

$$\left|\frac{X_h f - (a + 2\epsilon + v)R_\alpha f}{\Delta - 4\epsilon}\right| \le \frac{|X_h f| + |a + 2\epsilon + v|\,|R_\alpha f|}{\Delta - 4\epsilon}.$$

由于 $|v| \le \epsilon$,

$$|a + 2\epsilon + v| \le |a| + 3\epsilon.$$

同理,

$$\left| \frac{(b - 2\epsilon + v)R_\alpha f - X_h f}{\Delta - 4\epsilon} \right| \le \frac{|X_h f| + (|b| + 3\epsilon)|R_\alpha f|}{\Delta - 4\epsilon}.$$

因此，项 3ϵ 来自两部分： 2ϵ 来自移动截断端点，另一部分 ϵ来自平滑位移 v。与此同时，在常值区域上，相应的导数要么为 0，要么为 $R_\alpha f$。因此，任一平均值中的每个标量项的绝对值至多为

$$C_\epsilon := \max \left\{ \|R_\alpha f\|_\infty, \frac{\|X_h f\|_\infty + (\max\{|a|, |b|\} + 3\epsilon)\|R_\alpha f\|_\infty}{\Delta - 4\epsilon} \right\}.$$

这意味着

$$\max \left\{ \|X_{g_\epsilon} f\|_\infty, \|(R_\alpha - X_{g_\epsilon})f\|_\infty \right\} \le C_\epsilon.$$

最后，由于 $R_\alpha h = 0$，我们有 $R_\alpha g_\epsilon = 0$。因此，我们对$pb_{4,\alpha}$ 的定义中的四个括号分别为 $\pm X_{g_\epsilon} f$和 $\pm(R_\alpha - X_{g_\epsilon})f$。此外，在 Y_0 的邻域 $\{h < a + \epsilon\}$ 上有 $g_\epsilon = 0$，而在 Y_1 的邻域 $\{h > b - \epsilon\}$ 上有$g_\epsilon = 1$。因此，(f, g_ϵ) 是一个光滑可容许对，而根据下确界的定义可得

$$p \le C_\epsilon.$$

对每个充分小的 $\epsilon > 0$，这个不等式都成立。令 ϵ 趋于 0，得到

$$p \le \max \left\{ \|R_\alpha f\|_\infty, \frac{\|X_h f\|_\infty + \max\{|a|, |b|\}\|R_\alpha f\|_\infty}{\Delta} \right\}.$$

证明至此完成。 □

现在，我们可以给出定理 I 的证明了。

定理 *I* 的证明。 首先假设 (1.30) 是严格的，并假设不存在连接 $|t| \le T$ 和 $|s| \le L$的连接。引理 11.1 给出了一个可容许分离函数 f，其导数界满足 (11.1)。因此，引理 11.2 得到

$$p \le \max \left\{ \frac{1}{L}, \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{T} + \frac{\max\{|a|, |b|\}}{L} \right) \right\} < p,$$

一个矛盾。因此，只要 (1.30) 是严格的，就存在连接。

对于非严格不等式，将 T, L 替换为 $(1 + 1/j)T$,$(1 + 1/j)L$。(1.30) 的左端此时除以 $1 + 1/j$，因此，前面的论证给出满足以下条件的 $x_j \in X_0$ 和 times t_j, s_j

$$\varphi_1^{s_j} \varphi_h^{t_j}(x_j) \in X_1, \qquad |t_j| \le (1 + 1/j)T, \qquad |s_j| \le (1 + 1/j)L.$$

这些三元组位于紧集 $X_0 \times [-2T, 2T] \times [-2L, 2L]$ 中。取一个子序列，可得到极限 (x, t, s)，其中 $|t| \le T$ 且 $|s| \le L$。由于流是连续的，并且 X_1 是闭的，

$\varphi_1^s\varphi_h^t(x) \in X_1$。此外，$t = s = 0$ 将意味着 $x \in X_0 \cap X_1$，这是不可能的。最后，如果不交条件 $\Big(\bigcup_{|s|\le L} \varphi_1^s(X_0)\Big) \cap X_1 = \varnothing$ 成立，那么 $t = 0$ 将意味着对于某个 $|s| \le L$，$\varphi_1^s(x) \in X_1$，再次产生矛盾。因此我们得出 $t \neq 0$，如 desired。□

12. 定理 J 的证明

定理 *J* 的证明。 我们从 $d\alpha_s = d\alpha - s\, df \wedge dg$ 开始。对于 $n \ge 1$，恒等式 $(df \wedge dg) \wedge (df \wedge dg) = 0$ 使得 $(d\alpha_s)^n$ 的二项式展开中所有次数至少为二的项都消失。因此，

$$(d\alpha_s)^n = (d\alpha)^n - n s\, df \wedge dg \wedge (d\alpha)^{n-1}.$$

与 α_s 楔乘，得到

$$\alpha_s \wedge (d\alpha_s)^n = \alpha \wedge (d\alpha)^n - s\big(f\, dg \wedge (d\alpha)^n + n\, \alpha \wedge df \wedge dg \wedge (d\alpha)^{n-1}\big),$$

其中可能出现的二次项因含有两个 dg 而消失。为确定 s的系数，回顾 $\alpha(X_f) = f$且 $\iota_{X_f} d\alpha = (R_\alpha f)\alpha - df$。形式 $\alpha \wedge dg \wedge (d\alpha)^n$的度为 $2n+2$，因此它在 Y上为零。将这个零形式与 X_f作缩并，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_{X_f}\big(\alpha \wedge dg \wedge (d\alpha)^n\big) \\ &= f\, dg \wedge (d\alpha)^n - (X_f g)\, \alpha \wedge (d\alpha)^n + n\, \alpha \wedge dg \wedge \big((R_\alpha f)\alpha - df\big) \wedge (d\alpha)^{n-1}. \end{aligned}$$

这里，含有两个 α 的项消失，而 $dg \wedge df = -df \wedge dg$。因此，其余各项给出

$$f\, dg \wedge (d\alpha)^n + n\, \alpha \wedge df \wedge dg \wedge (d\alpha)^{n-1} = (X_f g)\, \alpha \wedge (d\alpha)^n.$$

将这个恒等式代入展开式，即可证明

$$\alpha_s \wedge (d\alpha_s)^n = (1 - s X_f g)\, \alpha \wedge (d\alpha)^n.$$

当 $n = 0$时，我们有 $dg = (R_\alpha g)\alpha$ 和 $X_f = f R_\alpha$，因此可直接由 $\alpha_s = \alpha - s f\, dg$ 得到相同的公式。接触条件现在由这个恒等式得出：由于 $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ 处处非零，当且仅当 $1 - s X_f g$ 处处非零时，α_s 是接触的。特别地，$|s|\, \|X_f g\|_\infty < 1$ 意味着 $1 - s X_f g > 0$ 处处成立（因此相应的变形 α_s 是接触的）。如果 $X_f g = 0$，则所有实参数都允许。

接下来，我们利用变时哈密顿流构造所需的接触同胚。为此，回顾接触哈密顿方程意味着 $\mathcal{L}_{X_f}\alpha = (R_\alpha f)\alpha$且$X_f f = f R_\alpha f$。因此，对于每个固定的时间 t，

$$(\varphi_f^t)^*\alpha = e^{\kappa(\varphi_f^t)}\alpha, \qquad f(\varphi_f^t(x)) = e^{\kappa(\varphi_f^t)(x)} f(x),$$

其中 $\kappa(\varphi_f^t)(x) = \int_0^t R_\alpha f(\varphi_f^r(x))\, dr$。这些恒等式对于负的 t 也成立。因此，我们可以定义

$$\Psi_s(x) := \varphi_f^{-sg(x)}(x), \qquad \kappa_s(x) := \int_0^{-sg(x)} R_\alpha f(\varphi_f^r(x))\, dr.$$

由于流 时间取决于 x，沿方向 $v \in T_xY$ 求导会得到两项 s:

$$d\Psi_s(x)v = d\varphi_f^{-sg(x)}(x)v - s\, dg_x(v) X_f(\Psi_s(x)).$$

在该向量上计算 α，并利用 $f(\Psi_s(x)) = e^{\kappa_s(x)} f(x)$，可得

$$(\Psi_s^*\alpha)_x(v) = e^{\kappa_s(x)}\alpha_x(v) - s\, dg_x(v) f(\Psi_s(x)) = e^{\kappa_s(x)}\big(\alpha_x(v) - s f(x)\, dg_x(v)\big).$$

因此， $\Psi_s^*\alpha = e^{\kappa_s}\alpha_s$。此外，定义 κ_s 的积分给出 $|\kappa_s(x)| \le |s|\, |g(x)|\, \|R_\alpha f\|_\infty$，从而证明了 (1.43) 中的估计。

拉回公式及其估计现已得到证明。接下来只需验证 Ψ_s 在所述区间上是一个微分同胚。我们首先证明局部可逆性：拉回恒等式蕴含

$$\Psi_s^*\big(\alpha \wedge (d\alpha)^n\big) = e^{(n+1)\kappa_s}\alpha_s \wedge (d\alpha_s)^n,$$

因为每个含有 $d\kappa_s \wedge \alpha_s$ 的项与 α_s 作楔积后都消失。对于 $|s|\, \|X_f g\|_\infty < 1$，根据上面的计算，右端是一个正体积形式。因此， $d\Psi_s$ 在每一点都可逆，且 Ψ_s 是一个保定向局部微分同胚。为从局部可逆性过渡到整体可逆性，注意到 Y 是闭的，并且每条流轨道都留在其连通分支中。因此，将 Ψ_s 限制在每个分支上，便得到到该分支上的覆盖映射。此外，同伦 $r \mapsto \Psi_{rs}$, $0 \le r \le 1$将此映射与恒等映射连接起来，因此其度为一。所以，该覆盖只有一层，且 Ψ_s 是一个微分同胚。关于 s 的光滑依赖性给出了所需的各向同性。□

推论 *1.23* 的证明。 由于 $T \cdot pb_\alpha(\mathcal{U}) < 1$，下确界的定义给出了一个光滑从属分割 $\vec{f}$，使得 $T \cdot \mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) < 1$。固定 a， $b \in [0,1]^N$并令 $f = \sum_i a_i f_i$和$g = \sum_i b_i f_i$。于是 $0 \le g \le 1$ 且 $1 - g = \sum_i (1 - b_i) f_i$。因此，括号 $\{f, g\}_\alpha$和 $\{f, 1-g\}_\alpha$中的每个系数向量都属于 $[-1,1]^N$。于是，分割泛函给出了这两个括号的上界，从而得到

$$\|X_f g\|_\infty \le \max\big\{\|\{f,g\}_\alpha\|_\infty, \|\{f,1-g\}_\alpha\|_\infty\big\} \le \mathrm{P}_\alpha(\vec{f}) < \frac{1}{T}.$$

由于对每个 a, b，同一界限都成立，因此定理 J 对每个 $|s| \le T$ 均适用，证明完成。□

参考文献

1. Peter Albers 和 Will J. Merry，可排序性、接触非挤压与*Rabinowitz Floer*同调，《辛几何杂志》**16**（2018），第 6 期，1481–1547。2. Matthew Strom Borman 和 Frol Zapolsky，接触同胚群上的拟态射与接触刚性，《几何与拓扑》**19**（2015），第 1 期，365–411。3. Lev Buhovsky，$The\ 2/3$泊松括号的收敛速率，《几何与泛函分析》**19**（2010），第 6 期，1620–1649。4. Lev Buhovsky、Michael Entov 和 Leonid Polterovich，泊松括号与辛不变量，《数学精选》（新辑）**18**（2012），第 1 期，89–157。5. Lev Buhovsky、Alexander Logunov 和 Shira Tanny，曲面上单位分解的泊松括号，《瑞士数学评论》**95**（2020），第 2 期，247–278。6. Dylan Cant，关于辛上同调中永恒类的评述，《不动点理论与应用杂志》**28**（2026年），第 3 期，论文第 70 号，doi：10.1007/s11784-026-01308-5。7. Dylan Cant、Eric Kilgore 和 Jun Zhang，商空间接触同胚的等变*Floer*上同调，2026年，预印本，arXiv:2602.21152v2。8. Franco Cardin 和 Claude Viterbo，对易哈密顿量与*Hamilton–Jacobi*多时间方程，《杜克数学杂志》**144**（2008），第 2 期，235–284。9. Adi Dickstein，定量厚纤维性质，即将出版。10. Georgios Dimitroglou Rizell 和 Michael G. Sullivan，C^0*Legendrian*子流形的极限与正环，《组合数学》**160**（2024），第 12 期，2904–2915。11. Danijel Djordjević、Igor Uljarević 和 Jun Zhang，定量接触哈密顿动力学，《拓扑学与分析杂志》（2026），1–56，2026年6月19日在线发表，doi：10.1142/S1793525326500421。12. Yakov Eliashberg、Sang Seon Kim 和 Leonid Polterovich，接触变换与区域的几何：可排序性与挤压，《几何与拓扑》**10**（2006），第 3 期，1635–1747。13. Michael Entov 和 Leonid Polterovich，准态与辛交，《瑞士数学评论》**81**（2006），第 1 期，75–99。14.，C^0泊松括号的刚性，《辛拓扑与保测动力系统》（Albert Fathi、Yong-Geun Oh 和 Claude Viterbo 编），《当代数学》，第 512 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年，第 25–32 页。15.，拉格朗日四边形与哈密顿动力学中的不稳定性，《非线性》**30**（2017），第 1 期，13–34。MR 3604601。16.，*Legendrian*持久模与动力学，《不动点理论与应用杂志》**24**（2022），第 2 期，论文第 30 号。17. Michael Entov、Leonid Polterovich 和 Frol Zapolsky，拟同态与泊松括号，《纯粹与应用数学季刊》**3**（2007），第 4 期，1037–1055。18. Urs Frauenfelder、Viktor Ginzburg 和 Felix Schlenk，借助作用量选择子的能量容量不等式，《几何、谱理论、群与动力学》（Michael Entov、Yehuda Pinchover 和 Michah Sageev 编），《当代数学》，第 387 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年，第 129–152 页。

19. Alexander B. Givental, 《Maslov指标的非线性推广》, 《奇点理论及其应用》（Vladimir I. Arnol’d 编）, 《苏联数学进展》第1卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1990年, 第71–103页。20. Gustavo Granja、Yael Karshon、Milena Pabiniak 和 Sheila Sandon, 《透镜空间上的Givental非线性Maslov指标》, 《国际数学研究通知》2021年（2021）, 第23期, 18225–18299。21. Vincent Humilière、Rémi Leclercq 和 Sobhan Seyfaddini, 《余各向同性刚性与 C^0辛几何》, 《杜克数学杂志》164（2015）, 第4期, 767–799。22. A. Marinković 和 M. Pabiniak, 《关于接触环面流形中前拉格朗日环面纤维的可移位性》, 《国际数学杂志》27（2016）, 第14期, 1650113（32页）。MR 3593675 23. Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon, 《辛拓扑导论》, 第2版, 牛津数学专著, 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约, 1998年。24. Stefan Müller 和 Peter Spaeth, 《拓扑接触动力学I：辛化及能量-容量不等式的应用》, 《几何学进展》15（2015）, 第3期, 349–380。25. N. N. Nehorošev, 《近可积哈密顿系统稳定时间的指数估计》, 《数学科学进展》32（1977）, 第6期（198）, 5–66, 287。MR 501140 26. Laurent Niederman, 《哈密顿稳定性与次解析几何》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）56（2006）, 第3期, 795–813。MR 2244230 27. Yaron Ostrover, 《哈密顿微分同胚与拉格朗日子流形上的Hofer度量之比较》, 《当代数学通讯》5（2003）, 第5期, 803–811。28. Jordan Payette, 《曲面上的泊松括号不变量》, 《以色列数学杂志》262（2024）, 第1期, 277–326。29. Leonid Polterovich, 《量子噪声的辛几何》, 《数学物理通讯》327（2014）, 第2期, 481–519。30. Leonid Polterovich 和 Daniel Rosen, 《辛流形上的函数理论》, CRM专著丛书, 第34卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2014年。31. Daniel Rosen 和 Jun Zhang, 《接触拓扑中的Chekanov二分性》, 《数学研究快报》27（2020）, 第4期, 1165–1193。32. Sheila Sandon, 《接触同调、容量与 $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$ 中的非挤压性：通过生成函数》, 《傅里叶研究所年刊》61（2011）, 第1期, 145–185。33. Matthias Schwarz, 《闭辛非球面流形上的作用谱》, 《太平洋数学杂志》193（2000）, 第2期, 419–461。34. Sobhan Seyfaddini, 《谱杀手与泊松括号不变量》, 《现代动力系统杂志》9（2015）, 51–66。35. Egor Shelukhin, 《接触同胚的Hofer范数》, 《辛几何杂志》15（2017）, 第4期, 1173–1208。36. Kun Shi 和 Guangcun Lu, 《曲面上由拓扑圆盘组成的开覆盖的泊松括号不变量》, 《东京数学杂志》46（2023）, 第2期, 283–299。37. Yuhan Sun、Igor Uljarević 和 Umut Varolgunes, 《接触大纤维定理》, 《几何与泛函分析》36（2026年）, 第1期, 301–350。38. Shira Tanny, 《不交支撑哈密顿量的谱不变量最大不等式》, 《辛几何杂志》20（2022）, 第5期, 1159–1213。

39. Michael Usher，尖锐能量-容量不等式，《当代数学通讯》**12**（2010），第3期，457–473。40. ，局部刚性、接触同胚与共形因子，《数学研究快报》**28**（2021），第6期，1875–1939。41. Frol Zapolsky，曲面上的准态与泊松括号，《现代动力系统杂志》**1** （2007），第3期，465–475。42. Jun Zhang，上的圆形测地线及其平面的进动，补充视频。https://github. com/jzhang-ustc/jzhang-ustc.github.io/blob/main/C_0_CPB_35_precession.mp4，2026年。

电子邮箱地址: jzhang4518@ustc.edu.cn

中国科学技术大学几何与物理研究所，中国安徽合肥金寨路96号，邮编230026