arXiv:2611.29136v1 [math.CO] 22 Nov 2026

仙人掌图的一般位置数

Toshihiko Kimura
名古屋工业大学工学院研究生院，日本爱知县
t.kimura.185@stn.nitech.ac.jp

Yonghwan Kim名古屋工业大学工学院研究生院，日本爱知县 kim@nitech.ac.jp

Yoshiaki Katayama
名古屋工业大学工学院研究生院，日本爱知县
katayama@nitech.ac.jp

摘要

给定图 $G = (V, E)$，其中 V 是顶点集，E 是边集。若 $S \subseteq V$ 中的任意两个顶点之间，在 G 上的任何一条最短路径都不包含 S中的其他顶点，则称顶点子集 $S \subseteq V$ 为一般位置集（GPS）。

图 G 的一般位置数（GPN）是其一般位置集的最大大小。该问题的判定版本，即判断图 G 的一般位置数是否至少为给定整数 i，称为一般位置问题（GPP）。已知 GPP 是*NP*完全问题，因此计算一般图的 GPN 具有较大难度。因此，现有研究大多致力于确定特殊图类的一般位置数。其中一类是仙人掌图（即仙人掌图），其任意两个简单环至多共享一个顶点，且不共享任何边。针对仙人掌图，已有研究给出了 GPN 的若干上下界。

本文确定了仙人掌图的 GPN 精确值。我们提出了一种新颖的图分解方法，将仙人掌图划分为两类子图，分别称为带须环和无须树。对于每个子图，我们计算一个特殊的一般位置集，称为子 GPS。我们证明，所有最大子一般位置集的并集构成原仙人掌图的最大 GPS。这一结果使我们能够计算任意仙人掌图的 GPN 精确值。

关键词 一般位置问题 ·一般位置集 · 仙人掌图

1 背景

在图论中，一般位置集（GPS）的概念最早由 Manuel等人 在 2018 [1] 中提出。给定一个图 $G = (V, E)$，若子集 $S \subseteq V$ 满足：S 中任意两个顶点之间的最短路径都不包含来自 S的其他顶点，则称其为一般位置集。

一般位置集在网络中的高效安全通信方面具有潜在应用。在由多个计算实体组成的分布式系统中，可以将该系统建模为一个图，其中顶点代表计算终端，边代表它们之间的通信链路。如果这些终端构成一个一般位置集，那么它们之间的任何最短路径都不会经过该集合中的其他终端，从而实现安全点对点通信。在此类网络中，

让安全终端集尽可能大是可取的。
与一般位置集相关的一个基本问题是一般位置问题（GPP）。给定一个图 G 和一个整数 i，GPP 要求判断 G 中最大的一般位置集的大小是否至少为 i，该大小称为一般位置数（GPN）。研究表明，对于一般图，GPP 是*NP*完全的 [1], , 因此在一般情形下，计算 GPN 在计算上难以处理。因此，研究重点转向分析受限图类 [2, 3, 4, 5]。

对于本研究关注的仙人掌图，先前的研究已给出一般仙人掌图的 GPN 上下界，以及某些子类的精确值 [5]。本研究旨在确定所有仙人掌图的 GPN 精确值。

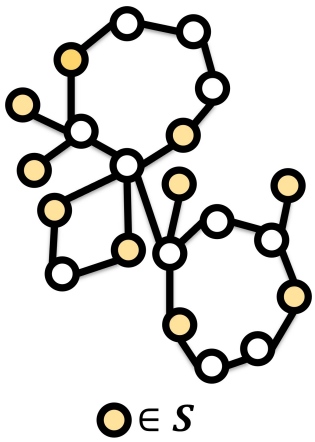


图 1：所有圈均为良好圈且为子 GPS S的情形

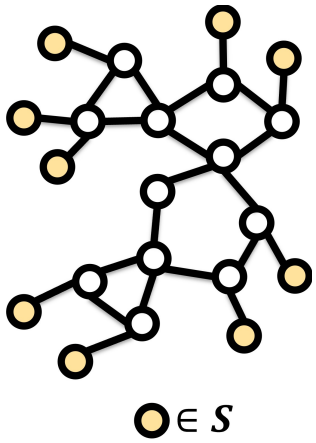


图 2：所有圈均为坏圈且为子 GPS S的情形

2 相关工作

style id='1'>三点不共线问题 是一项经典组合问题，旨在寻找二维网格上满足任意三点不共线的最大顶点子集。Dudeney 在谜题 《兵卒谜题》 [6], 中提出了这一问题最早的实例之一：在棋盘上已有两枚兵卒的情况下，如何再放置 14 枚兵卒，使任意三枚兵卒都不在同一直线上。此问题的变体也已在环面网格和三维网格上得到研究 [7, 8]。

受这一问题的启发，Froese等提出了一般位置子集选择问题：给定平面上的一组 P 点和一个正 k整数，判断是否存在一个大小至少为 k 的子集 $S \subseteq P$，使得 S 中不存在三个共线的点 [9]。他们证明了该问题是*NP*-困难 [9]。

在这些基础问题之上，Manuel等人在图的背景下提出了一般位置问题（GPP） [1]。图 $G = (V, E)$中的一般位置集（GPS）被定义为一个子集 $S \subseteq V$，使得 S 中任意两个顶点之间的最短路径都不包含 S [1]中的其他顶点。GPS 的最大大小称为一般位置数（GPN），而 GPP 要求判断给定图 G 的 GPN 是否至少为给定整数 i [1]。已证明，对于一般图而言，该问题是*NP*完全的，因此在大多数情况下，GPN 的计算都具有挑战性。 მედეგად，研究转向了对受限图类 [2, 3, 4, 5]的研究。

对于本文重点研究的仙人掌图，已有研究给出了 GPN 的上下界 [5]。Klavžar 等人确定了特定条件下二维网格图的精确 GPN，枚举了任意二维网格中最大 GPS 的数量，给出了三维网格的界，并推导出 n 维网格的精确值 [3, 4]。Anand 等人还计算了某些二部图补图的精确 GPN [2]。

Yan等人提出了一般仙人掌图 GPN 的上下界，并给出了某些子类的精确值 [5]。设 $C^t{}_n{}^k$表示具有 n 个顶点、 k 个简单环和 t 个叶节点的仙人掌图类。对于任意图$G \in C^t{}_n{}^k$，令 $C_l = (u_1, u_2, \ldots, u_l, u_1) = (V_{C_l}, E_{C_l})$ 是 G中的一个简单环。对于任意一对 $u_i, u_j \in V_{C_l}$，圈 C_l包含两条连接它们的简单路径。在这两条路径中，令 $d_C(u_i, u_j)$ 表示包含 G 中位于 C_l上的所有割点的路径的边数。定义 $D_C = \min_{u_i, u_j \in V_{C_l}} d_C(u_i, u_j)$。如果满足以下条件之一，则称圈 C_l 为优良圈：(i) l 为奇数且 $D_C \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$；或 (ii) l 为偶数且 $D_C \leq \frac{l}{2} - 2$。

G 的 GPN 上界为 $\max(\{3, 2k + t\})$，当且仅当 G 中的所有简单环都是良好的等号成立。下界为 t，当且仅当 G 中的简单环均不是良好的等号成立（见图1和图2）。
如上文所述，大量研究致力于确定特定图类的 GPN。然而，一般仙人掌图的 GPN 精确值仍然未知。本研究旨在通过推导一般仙人掌图的精确 GPN 来填补这一空白。

3 预备知识

In t本节定义本文所研究的仙人掌图的若干子图和顶点集。

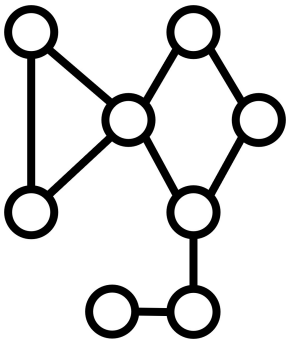


图 3：仙人掌图的一个示例

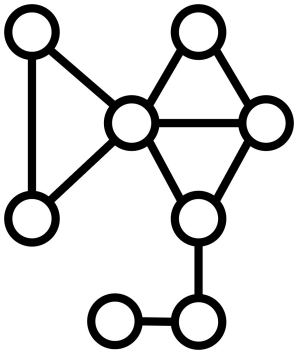


图 4：非仙人掌图的一个示例

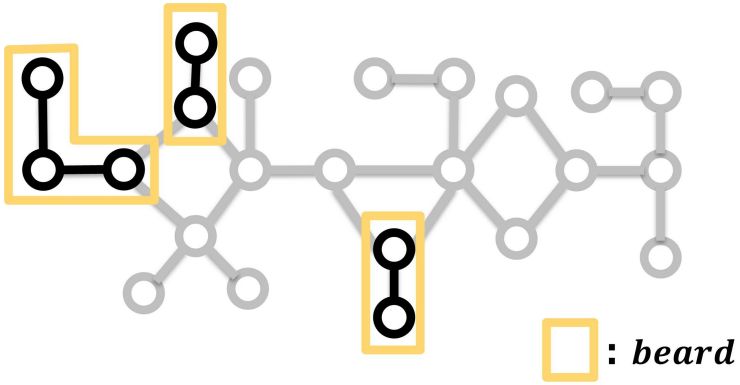


图 5：胡须的一个示例

我们考虑简单无向图 $G = (V,\ E)$，其中 V是顶点集，$E \subseteq V \times V$是边集。对于两个不同的顶点 $v_i,\ v_j \in V (v_i \neq v_j)$，如果 $(v_i,\ v_j) \in E$，则称 v_i和 v_j相邻。我们假设不存在自环；也就是说，对于 $v_i = v_j$，$(v_i,\ v_j) \notin E$。

我们首先给出仙人掌图的定义，本研究聚焦于这类图。

定义 3.1。（仙人掌图）若一个连通图 G 中任意两个简单环都不共享边，则称其为仙人掌图 。

图 3 和图 4 分别展示了仙人掌图和非仙人掌图的示例。

接下来，我们定义胡须、带须环和无须树的概念。这些分量用于分解仙人掌图，以确定其 GPN。

定义 3.2.（胡须和无须树）设 G 为一个仙人掌图，G_F 为删除所有属于圈的边以及属于圈的所有度为 2 的顶点后得到的图。G_F 的一个连通分量若恰好包含两个叶节点，其中一个在 G_F上属于且仅属于一个圈，另一个不属于任何圈，则称为胡须。G_F 中不是胡须的连通分量称为无须树。

图 5 和图 6 分别展示了胡须和无须树的示例。

定义 3.3.（带须环）对于仙人掌图中的每个圈 G_C，由 G_C 以及所有与 G_C 共享一个顶点的胡须组成的图称为带须环。

图 7 展示了一个带须环的示例。

现在我们定义本文中使用的几个重要顶点集。设：

- L_G 为 G中所有叶节点组成的集合。
- A_G 是 G中所有割点的集合。

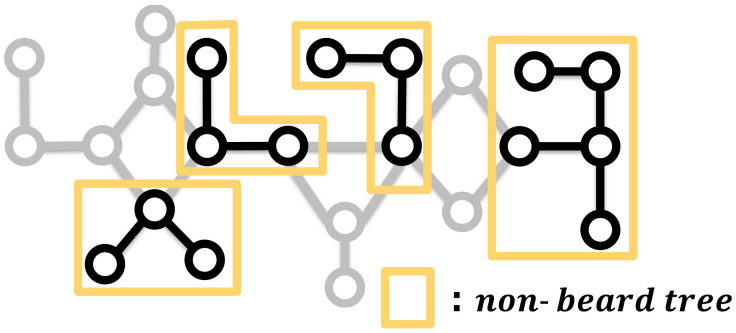


图 6：无胡须树示例

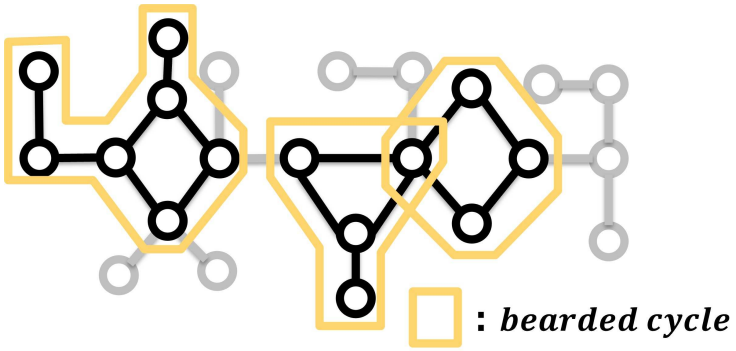


图 7：带胡须环示例

- C_G 是 G中包含于任意圈内的所有顶点的集合。
- B_G 表示包含在 G中任意胡须内的所有顶点的集合。

对于任意顶点子集 $S \subseteq V$，令 $V_{mP}(G, S)$表示 G中任意一对顶点 $u, v \in S$ 之间所有最短路径上顶点的集合。

对于 G中的任意带须环 G_{BC}，我们定义以下顶点集：

- $P_A(G_{BC}) \stackrel{\text{def}}{=} V_{mP}(G_{BC}, C_{G_{BC}} \cap A_G)$
- $P_{NA}(G_{BC}) \stackrel{\text{def}}{=} C_{G_{BC}} \setminus P_A(G_{BC})$

对于 $a \in （C_{G_{BC}} \cap A_G）$，

- $P'_A(G_{BC}, a) \stackrel{\text{def}}{=} V_{mP}(G_{BC}, (C_{G_{BC}} \cap A_G) \setminus \{a\})$
- $P'_{NA}(G_{BC}, a) \stackrel{\text{def}}{=} C_{G_{BC}} \setminus P'_A(G_{BC}, a)$

令 $R = C_{G_{BC}} \cap B_{G_{BC}}$，并定义：

- $R_M \stackrel{\text{def}}{=} \{r_t \in R \mid |P'_{NA}(G_{BC}, r_t)| = \max(\{|P'_{NA}(G_{BC}, r)| \mid r \in R\})\}$

对于 $r_M \in R_M$,

- $P'_{NA}(G_{BC}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P'_{NA}(G_{BC}, r_M) & |R_M| > 0 \\ P_{NA}(G_{BC}) & |R_M| = 0 \end{cases}$

最后，定义：

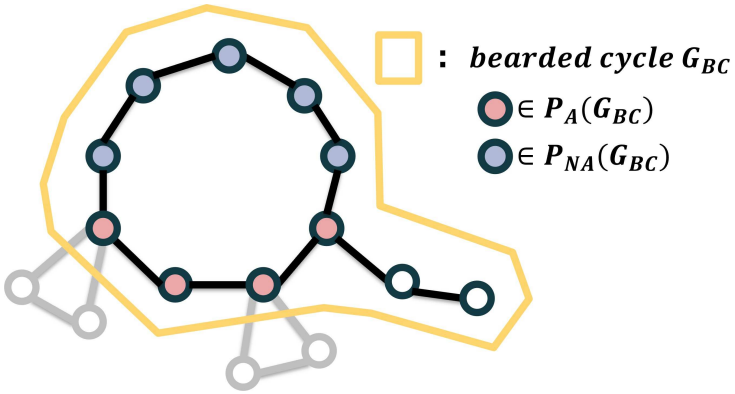


图 8：带须环中 $P_A(G_{BC})$ 和 $P_{NA}(G_{BC})$ 的示例 G_S

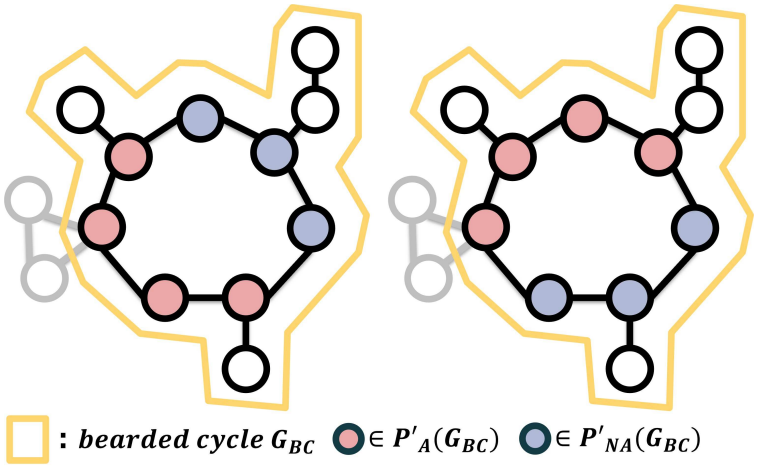


图 9：带须环中 $P'_A(G_{BC})$ 和 $P'_{NA}(G_{BC})$ 的示例 G_S

- $P'_A(G_{BC}) \stackrel{\text{def}}{=} C_{G_{BC}} \setminus P'_{NA}(G_{BC})$

图 8 和图 9 展示了 $P_A(G_{BC})$、$P_{NA}(G_{BC})$、$P'_A(G_{BC})$ 和 $P'_{NA}(G_{BC})$ 的示例。

接下来，我们定义仙人掌图 G 中每个带须环 和无须树 的子 GPS 概念。这些分量中所有子 GPS 集合的并集构成该仙人掌图的 GPS。我们通过最大化每个分量中子 GPS 的大小来计算 GPN。

定义 3.4.（子 GPS）设 $G_S = (V_S, E_S)$ 是仙人掌图 G 中的一个带须环 或无须树 。顶点集$S_S \subseteq V_S$ 称为 G_S 的子 GPS，若其满足以下所有条件：

- 对于任意 $s_1, s_2 \in S_S$，G_S 中 s_1 与 s_2 之间的任何最短路径都不包含任何 $s_3 \in S_S \setminus \{s_1, s_2\}$（即 S_S 是 G_S 中的 GPS）。
- 对于任意 $s_1 \in S_S$ 和 $a_1 \in (V_S \cap A_G) \setminus B_G$，$G_S$ 中连接 s_1 和 a_1 的最短路径均不包含任何$s_2 \in S_S \setminus \{s_1\}$。
- 对于任意 a_1，$a_2 \in (V_S \cap A_G) \setminus B_G$，它们之间在 G_S 中的最短路径均不包含任何 $s_1 \in S_S$。

值得注意的是，环图的一般位置数为**3**，除非顶点数为 4。作为一个例外，具有 4 个顶点的环图的一般位置数为**2**。

这里我们提出用于计算非简单环仙人掌图的 GPN 的主要定理。

定理 3.5. 设 G 是一个非简单环的仙人掌图。
令 $BC_{all} = \{BC_0, BC_1, \ldots, BC_k\}$ 为 G中所有带须环的集合。那么，一般位置数$\texttt{GPN}(G)$

is:

$$\texttt{GPN}(G) = 2n_1 + n_2 + n_3 + |L_G|$$

其中，

- $n_1 = |\{BC \in BC_{all} \mid |P_{NA}(BC)| > |P_A(BC)|\}|$
- $n_2 = |\{BC \in BC_{all} \mid 0 < |P_{NA}(BC)| \leq |P_A(BC)|\}|$
- $n_3 = |\{BC \in BC_{all} \mid |P_{NA}(BC)| = 0 \wedge |P'_{NA}(BC)| > |P'_A(BC)|\}|$

4 仙人掌图的一般位置数

本节通过证明上一节陈述的定理 3.5，给出仙人掌图的一般位置数（GPN）的精确值。我们首先给出一个关于带胡须环中子 GPS 的引理。该引理使我们能够估计在一个带胡须环中，某个圈上有多少个顶点可以包含在一个子 GPS 中。

在讨论每个子 GPS 的大小之前，我们先介绍两个关于一种特殊 GPS 的重要引理。这种 GPS 称为 s-GPS，是在给定顶点子集 $W \subseteq V$ 时，环图上的一种受限 GPS。

定义 4.1。（s-GPS）给定一个环图 $G = (V, E)$ 和一个顶点子集 $W \subseteq V$，若子集 $S \subseteq V$ 满足以下所有条件，则称其为 s-GPS：

- 对于任意一对顶点 s_1，$s_2 \in S$，它们在 G 中的任何一条最短路径都不包含满足$s_3 \neq s_1$ 和 $s_3 \neq s_2$的顶点 $s_3 \in S$。
- 对于任意顶点 $s_1 \in S$ 和任意顶点 $w_1 \in W$，G 中连接它们的最短路径均不包含满足 $s_2 \neq s_1$ 的任何顶点 $s_2 \in S$。
- 对于任意一对顶点 w_1，$w_2 \in W$，G 中连接它们的最短路径均不包含任何顶点 $s_1 \in S$。

现在我们给出两个关于 s-GPS 大小的引理，它们是讨论子 GPS 大小的关键。

引理 4.2. 设 $G = (V, E)$ 是一个环图，且 $W \subseteq V$ 是顶点集的一个子集。若 $|W| > 0$ 且 $|P_{NW}| > |P_W|$，则 G 中最大 s-GPS 的大小为 *2*，其中 $P_W = V_{mP}(G, W)$ 且 $P_{NW} = V \setminus P_W$。

证明。我们首先证明 G 中存在一个大小为 2 的 s-GPS。然后，假设 G 中存在一个大小大于 2 的 s-GPS，我们通过反证法证明这一假设会导致矛盾。

由于 $|P_{NW}| > |P_W|$，存在一个整数 d，满足以下不等式：

$$0 \leq d < \frac{|P_{NW}| - |P_W|}{2} \tag{1}$$

由此，以下不等式也成立：

$$|P_W| - 1 + d + 1 < |P_{NW}| - 1 - d + 1 \tag{2}$$

根据 P_W 和 P_{NW} 的定义，由 P_W 和 P_{NW} 诱导的子图均为连通图。因此，在 G 中必定恰有两条边，连接 P_W 和 P_{NW} 中的顶点。考虑两个不同的顶点 n_1，$n_2 \in P_{NW}$，它们分别与 P_W 中的顶点相邻（根据 P_{NW} 的定义，这些顶点确实存在）。设与 n_1 和 n_2 相邻的 P_W 中的顶点分别为 w_1 和 w_2（即 w_1，$w_2 \in P_W$ 和（w_1，n_1），（w_2，n_2）$\in E$）。

我们证明存在一个满足 s-GPS 定义的顶点集 $\{s_1, s_2\} \subseteq P_{NW}$。具体而言，在 G 中存在一条从 w_1 到 s_1 且不包含 w_2 的简单路径，其长度为 $e + 1$（$e > 0$）；此外，还存在一条从 w_2 到 s_2 且不包含 w_1 的简单路径，其长度也为 $e + 1$。这样的路径必定存在，因为 $|P_{NW}| > |P_W| > 0$（回顾 $|W| > 0$）。

如果 $e = d$，那么由不等式 (2) 可知，任意一条从 s_1 到 w_2 的最短路径都不包含 s_2，任意一条从 s_2 到w_1 的最短路径都不包含 s_1。因此，$\{s_1, s_2\} \subseteq P_{NW}$ 满足 s-GPS 的定义。

为证明其最大性，设 $S = \{s_1, s_2\}$，并反设存在另一个 s-GPS $S' \subseteq V$，使得$|S| < |S'|$。根据 s-GPS 的定义，S' 必须是 P_{NW}的子集。由于 $|W| > 0$ 且 $|S'| > |S| = 2$，必定存在某个 $s'_1 \in S'$以及相应的 $s'_2 \in S'$ 和 $w \in W$，使得从 s'_1 到 w 的一条最短路径包含 s'_2。这与 s-GPS 的定义矛盾。因此，不存在这样的 S'，且 S 是一个最大 s-GPS。

□

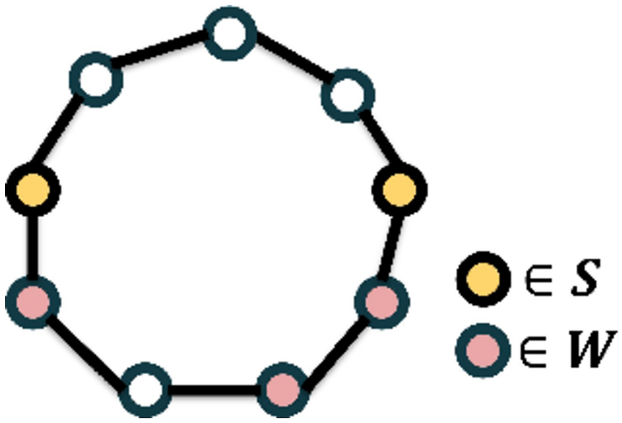


图 10：当顶点集 W 为 gi 时，环图 G 上一个大小为 2 的 s-GPS S 示例 ven

图 10 展示了一个大小为 2 的 s-GPS 示例。

下面的引理给出了另一种情形，在这种情形下，最大 s-GPS 的大小等于 1。

引理 4.3。 设 $G=(V,E)$ 是一个环图，且 $W \subseteq V$ 是顶点的一个子集。若 $|W| > 0$ 且$|P_{NW}| \leq |P_W|$，则 G 中最大 s-GPS 的大小等于 1，其中 $P_W = V_{mP}(G,W)$ 且 $P_{NW} = V \setminus P_W$。

证明。 我们首先证明 G 中存在一个大小为 1 的 s-GPS。然后，假设 G 中存在一个大小大于 1 的 s-GPS，并通过反证法证明这一假设会导致矛盾。

为证明其存在，任取一个顶点 $s \subseteq P_{NW}$（这样的 s 存在，因为 $|P_{NW}| > 0$）。根据 P_W 的定义，任意 $w_1, w_2 \in P_W$ 之间的最短路径都不包含 s。因此， s 满足 s-GPS 的定义。

令 $S = \{s\}$。反设存在一个 s-GPS $S' \subseteq V$，满足 $|S| < |S'|$。我们将根据 S' 的大小分类讨论，从而导出矛盾。

1. 情形 $|S'| = 2$：记 $S' = \{s'1, s'2\}$。根据 s-GPS 和 P_W 的定义，我们有 $S' \subseteq P_{NW}$。根据 P_W 和 P_{NW} 的定义，由 P_W 和 P_{NW} 诱导的子图均为连通图，因此 P_{NW} 中有两个顶点分别与 P_W 中的顶点相邻。于是，由于 $0 < |P_{NW}|$ 和 $|P_W| > 0$，我们有 $2 \leq |P_{NW}|$，因此存在两个不同的顶点 n_1、 $n_2 \in P_{NW}$，它们分别与 P_W 中的顶点相邻。设 w_1、$w_2 \in P_W$ 分别为与 n_1 和 n_2 相邻的顶点（因此 (w_1, n_1)、$(w_2, n_2) \in E$）。令 d_1 为从 s'_1 到 n_1 的最短路径长度， d_2 为从 s'_2 到 n_2 的最短路径长度。假设从 $s'1$ 到 w_1 的每条最短路径都不经过 $s'2$ 或 w_2。那么，根据 s-GPS 的定义，从 $s'1$ 到 w_2 的最短路径都不经过 $s'2$，由此可得

$$(d_1 + 1 + |P_W| - 1) - (|P_{NW}| - 1 - d_1 - d_2 + d_2 + 1) = 2d_1 + |P_W| - |P_{NW}| < 0. \tag{3}$$

另一方面，由于 $|P_{NW}| \leq |P_W|$ 和 $d_1 \geq 0$，我们有

$$2d_1 + |P_W| - |P_{NW}| \geq 0. \tag{4}$$

(3) 与 (4) 矛盾。因此，假设 $|S'| = 2$ 会导致矛盾。

2. 情形 $|S'| \geq 3$：必定存在某个 $s'_1 \in S'$ 和某个 $s'_2 \in S'$ 以及 $w \in W$，使得从 s'_1 到 w的一条最短路径包含 s'_2。这直接与 s-GPS 的定义矛盾。

在这两种情形下，我们都得到了矛盾；因此不存在满足 $|S'| > |S|$ 的 s-GPS $S' \subseteq V$。所以， $S = \{s\}$ 是 G的最大 s-GPS。

□

现在我们给出重要引理，用以确定各类带须环和无须树中最大子 GPS 的大小。首先，我们证明关于子 GPS 的引理。

引理 4.4. 对于仙人掌图 G 中的带须环 或无须树 $G_S = (V_S, E_S)$，其中该图不是环图，对于每个满足 $1 \leq i \leq$ 的 i， G_S 中最大子子-GPS 的大小为 i，存在一个大小为 i 的子-GPS，其中不包含割点($\in A_G$)。

证明。设 S 是 G_S 中任意一个子 GPS，并反设存在一个顶点 $a \in S \cap A_G$。设 (V_1, E_1)、(V_2, E_2) .....、(V_k, E_k) $(k \geq 2)$ 为移除 a 后在 $G_S - \{a\}$ 中产生的新连通分量。根据子 GPS 的定义，只有一个指标 $i \in \{1, ..., k\}$ 满足 $S \cap V_i \neq \emptyset$；否则，在 $G_S - \{a\}$ 中会有两个顶点 u、v 属于两个不同的连通分量，而 $\{u, v\}$ 是 G_S 中的一个子 GPS。这是不可能的，因为 u 与 v 之间的任意最短路径都经过 a。于是我们得到以下性质：存在某个顶点 $u \in V_j$（$i \neq j \wedge V_J \cap$ （（$V_S \cap A_G$）$\setminus B_G$） $= \emptyset$），使得 u 与 $S \cap V_i$ 中任意顶点之间的任意最短路径都包含 $S \cap V_i$ 的任意其他顶点。此外，u 不包含在 $(V_S \cap A_G) \setminus B_G$ 中任意两个顶点之间的任何最短路径中（若包含 u，则存在一些 $(V_S \cap A_G) \setminus B_G$ 之间的最短路径，其中 a 被包含两次，这与最短路径的定义矛盾）。此外，u 与 $(V_S \cap A_G) \setminus B_G$ 中任意顶点之间的任意最短路径都不包含 $S \cap V_i$ 中的任何顶点。此外，根据子 GPS 的定义，a 不包含在 $S \setminus \{a\}$ 中任意两个顶点之间的任何最短路径中。综上，$S' = (S \setminus \{a\}) \cup \{u\}$ 是 G_S 中的一个子 GPS。

□

接下来，我们 给出引理，说明每种类型的带须环 的最大子 GPS 的大小 .

引理 4.5. 设 G 是一个非环图的仙人掌图，且 $G_S = (V_S, E_S)$ 是满足$|P_{NA}(G_S)| > |P_A(G_S)|$ 的带须环 G。G_S 中的最大子-GPS 的大小等于 $2 + |L_{G_S}|$。

证明。 我们首先证明 G_S 中存在大小为 $2 + |L_{G_S}|$ 的子 GPS。然后证明不存在大小大于 $2 + |L_{G_S}|$ 的其他子 GPS。

为证明大小为 $2 + |L_{G_S}|$的子 GPS 存在，注意，根据子 GPS 的定义，由（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S} \subseteq C_{G_S} \cap A_G$ 以及引理 4.2，可知存在一个子 GPS $\{s_1, s_2\} \subseteq P_{NA}$（$G_S$）。此外，由于 L_{G_S} 是叶节点集合，它满足子 GPS 的条件（叶节点不包含在任意其他两个顶点之间的任何最短路径上）。

由 $B_{G_S} \cap C_{G_S} \subseteq P_A(G_S)$ 可知， L_{G_S} 中任意两个顶点之间的最短路径都不包含 $P_{NA}(G_S)$ 中的任何顶点。因此，$\{s_1, s_2\} \cup L_{G_S}$ 满足子 GPS 的定义。令 $S = \{s_1, s_2\} \cup L_{G_S}$。
反设存在一个子 GPS $S' \subseteq V_S$，满足 $|S| < |S'|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$（根据引理 4.4，存在这样的子 GPS）。我们根据 B_{G_S} 和（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S}$ 所定义的情形展开讨论（即 G_S 中是否存在胡须，以及 G 中是否存在位于 G_S 内但不在胡须中的割点）。在讨论之前，由于$|S'| > 2 + |L_{G_S}|$ 和（$V_S \setminus C_{G_S}$）$\cap S' \subseteq L_{G_S}$（因为 $S' \cap A_G = \emptyset$），我们有$|C_{G_S} \cap S'| > 2$。

1. 情形 $B_{G_S} = \emptyset$ 和 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：由于 $L_{G_S} = \emptyset, |S| = 2$。由 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$ 和引理 4.2 可知， G_S 中的最大子 GPS 的大小为 2。这与假设 $|S'| > |S|$ 矛盾。

2. 情形 $B_{G_S} \neq \emptyset$ 和 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$：若 $|C_{G_S} \cap S'| > 3$，则 $C_{G_S} \cap S'$ 违反子 GPS 条件。若$|C_{G_S} \cap S'| = 3$，则在任意胡须 B'中，都存在某个 $c_1 \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 B' 中的每个顶点到 c_1 的最短路径都包含某个 $c_2 \in C_{G_S} \cap S'$（$c_2 \neq c_1$），这意味着 $(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S' = \emptyset$，因此 $|S'| = 3$。由于$B_{G_S} \neq \emptyset$，我们有 $|S| \geq 3$，这与 $|S'| > |S|$矛盾。

3. 情形 $B_{G_S} \neq \emptyset$ 和（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：根据 $|C_{G_S} \cap S'| > 2$ 和（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S} \neq \emptyset$ 以及引理 4.2，可得 $|C_{G_S} \cap S'| \leq 2$，从而导致矛盾。

因此，假设存在一个满足 $|S| < |S'|$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$ 会导致矛盾。所以， S 是 G_S中的最大子 GPS。

□

图11展示了 G_S 和最大子 GPS S的一个示例。

引理4.6。 设 G 是一个非环图的仙人掌图，并设 $G_S = (V_S, E_S)$ 是 G中的一个带须环 。若$0 < |P_{NA}(G_S)| \leq |P_A(G_S)|$，则 G_S 中最大子-GPS 的大小等于 $1 + |L_{G_S}|$。

证明。 我们首先证明，在 G_S 中存在一个大小为 $1 + |L_{G_S}|$ 的子 GPS。然后证明不存在另一个大小大于 $1 + |L_{G_S}|$ 的子 GPS。

为了证明大小为 $1+|L_{G_S}|$ 的子 GPS 存在，注意，根据子 GPS 的定义以及由 $(C_{G_S} \cap A_G)$ 可知 $\setminus B_{G_S} \subseteq C_{G_S} \cap A_G$，再结合引理 4.3，任意一个顶点 $\{s\} \subseteq P_{NA}(G_S)$ 都满足子 GPS 的定义。此外，由于 L_{G_S} 是叶节点的集合，L_{G_S} 中的每个顶点也满足子 GPS 的条件（叶节点不包含在任意两个其他顶点之间的最短路径中）。根据 $P_A(G_S)$ 和 $P_{NA}(G_S)$ 的定义，对于任意 $s \in P_{NA}(G_S)$，L_{G_S} 中任意两个顶点之间的最短路径都不包含 s。因此，$s \cup L_{G_S}$ 满足子 GPS 的定义。令 $S = s \cup L_{G_S}$。

现在反设存在一个子 GPS $S' \subseteq V_S$，满足 $|S| < |S'|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$（根据引理 4.4，确实存在这样的子 GPS）。我们根据 B_{G_S} 和（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S}$ 分情形讨论。在讨论之前，由于 $|S'| > 1+|L_{G_S}|$ 和（$V_S \setminus C_{G_S}$）$\cap S' \subseteq L_{G_S}$（因为 $S' \cap A_G = \emptyset$），我们有 $|C_{G_S} \cap S'| > 1$。

1. 情形 $B_{G_S} = \emptyset$ 和（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：在这种情形下 $|L_{G_S}| = 0$，因此 $|S| = 1$。根据（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S} \neq \emptyset$ 和引理 4.3，G_S 中子 GPS 的最大大小为 1。这与 $|S'| > |S|$ 的假设相矛盾。

2. 情形 $B_{G_S} \neq \emptyset$ 和 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$：注意到 $2 \leq |C_{G_S} \cap S'| \leq 3$（若 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 4$，则 $C_{G_S} \cap S'$ 违反子 GPS 条件）。我们进一步按 $|C_{G_S} \cap S'|$ 的取值分类。

   a. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 3$：通过类似于引理 4.5 证明中 (ii) 的论证，我们得到 $|S'| = 3$。为了比较 $|S'|$ 和 $|S|$，我们估计 $|L_{G_S}|$。由于 $0 < |P_{NA}(G_S)| \leq |P_A(G_S)|$，我们有

$$2 < |C_{G_S}| = |P_{NA}(G_S)| + |P_A(G_S)| \leq 2|P_A(G_S)|,\ 1 < |P_A(G_S)|,\ 1 < |L_{G_S}|. \tag{3}$$

   因此 $|S| = 1 + |L_{G_S}| \geq 3$，所以 $|S'| = 3$ 与 $|S'| > |S|$ 矛盾。

   b. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：考虑两个不同的顶点 $u_1, u_2 \in P_{NA}(G_S)$，它们与 $P_A(G_S)$ 中的顶点相邻。设 $v_1, v_2 \in P_A(G_S)$ 分别与 u_1, u_2 相邻（(u_1, v_1)，$(u_2, v_2) \in E_S$）。比较 u_1, u_2, v_1, v_2 之间的简单路径长度。不经过 v_2 的一条从 u_2 到 v_1 的路径长度为 $|P_{NA}(G_S)| - 1 + 1$，而经过 v_2 的一条从 u_2 到 v_1 的路径长度为 $1 + |P_A(G_S)| - 1$。由于 $0 < |P_{NA}(G_S)| \leq |P_A(G_S)|$，我们得到

$$(|P_{NA}(G_S)| - 1 + 1) - (1 + |P_A(G_S)| - 1) = |P_{NA}(G_S)| - |P_A(G_S)| \leq 0. \tag{4}$$

   $P_{NA}(G_S)$ 的每个顶点都位于从 u_2 到 v_1 的每一条最短路径上。因此，对于 $P_{NA}(G_S)$ 中的任意两个顶点，其中一个位于从另一个到 v_1 的每一条最短路径上。现在我们考察 S' 如何与胡须相交。

      i. 情形 G_S 的每根胡须恰好包含一个 S' 的顶点：那么 $C_{G_S} \cap S'$ 中没有顶点属于 V_{mP}（G_S，（$V_S \setminus C_{G_S}$）$\cap S'$），并且根据（$C_{G_S} \cap A_G$）$\setminus B_{G_S} = \emptyset$ 以及 P_A（G_S）的定义，我们有 $C_{G_S} \cap S' \subseteq P_{NA}$（$G_S$）。存在一个 $s'1 \in C_{G_S} \cap S'$ 和 $s'2 \in$（$V_S \setminus C_{G_S}$）$\cap S'$，使得从 $s'1$ 到 $s'2$ 的每条最短路径都包含另一个不同于 s'_1 的 $CG_S \cap S'$ 顶点（根据上述观察（P_{NA}（G_S）的每个顶点都位于从 u_2 到 v_1 的每条最短路径上））。这与子 GPS 条件矛盾。

      ii. 情形 存在一根 G_S 的胡须不包含 S' 的任何顶点：那么 $|S'| \leq 2 + |L_{G_S}| - 1 = 1 + |L_{G_S}|$，这与假设 $|S'| > |S| = 1 + |L_{G_S}|$ 矛盾。

3. 情形 $B_{G_S} \neq \emptyset$ 和 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：与之前一样 $2 \leq |C_{G_S} \cap S'| \leq 3$（如果 $4 \leq |C_{G_S} \cap S'|$，则违反子 GPS 条件）。我们根据 $|C_{G_S} \cap S'|$ 的取值，将问题分为若干子情形。

   a. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 3$：由于 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$，并根据 $P_A(G_S)$ 和子 GPS 的定义，以及引理 4.2 和 4.3，我们得到 $|C_{G_S} \cap S'| \leq 2$。这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 3$ 矛盾。b. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：如果每条胡须恰好包含 S' 的一个顶点，那么根据与 2.b.i. 相同的推理，我们得到 $C_{G_S} \cap S' \subseteq P_{NA}(G_S)$，并运用与之前相同的路径长度论证，可知存在 $s'1 \in C_{G_S} \cap S'$ 和 $s'2 \in (V_S \setminus CG_S) \cap S'$，使得从 $s'1$ 到 $s'2$ 的每条最短路径都包含 $C_{G_S} \cap S'$ 的另一个顶点，这与子 GPS 条件矛盾。如果某条胡须不包含 S' 的任何顶点，那么 $|S'| \leq 2 + |L_{G_S}| - 1 = 1 + |L_{G_S}|$，这同样与 $|S'| > |S|$ 矛盾。

在所有情形中，假设存在一个带有 $|S'| > |S|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$ 都会导致矛盾。因此，不存在这样的 S'，且 S 是 G_S 中的最大子 GPS。 □

引理4.7。设 G 是一个不是环图的仙人掌图，并设 $G_S =$（V_S、E_S）是 G 中的一个带须环。如果 $|P_{NA}$（G_S）$| = 0 \wedge |P'_{NA}$（G_S）$| > |P'_A$（G_S）$|$，那么 G_S 中最大子-GPS 的大小等于 $1 + |L_{G_S}|$。

证明。首先，我们证明在 G_S 中存在一个大小为 $1 + |L_{G_S}|$ 的子 GPS。然后证明不存在另一个大小大于 $1 + |L_{G_S}|$ 的子 GPS。

我们首先构造一个大小为 $1+|L_{G_S}|$ 的子 GPS S。根据 $P'_A(G_S)$ 的定义，我们有 $V_{mP}(G_S, (V_S \cap A_G) \setminus B_{G_S}) \subseteq P'_A(G_S)$。利用这一点以及子 GPS 的定义，$|P'_{NA}(G_S)| > |P'_A(G_S)|$，再根据引理 4.2，我们得到一组满足子 GPS 条件的两个顶点 $\{s_1, s_2\} \subseteq P'_{NA}(G_S)$。接下来考虑 $(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S$ 中的顶点。令 B'_{G_S} 表示所有与 $P'_A(G_S)$ 至少共享一个顶点的胡须的并集。由于 $B'_{G_S} \cap L_{G_S}$ 是一组叶节点，因此它满足子 GPS 条件。接下来，我们断言 $\{s_1, s_2\} \cup (B'_{G_S} \cap L_{G_S})$ 是一个子 GPS。$\{s_1, s_2\} \subseteq P'_{NA}(G_S)$ 和 $|P'_{NA}(G_S)| > |P'_A(G_S)|$ 表明，对于 $B'_{G_S} \cap L_{G_S}$ 中的每个顶点，从 s_1 到该叶节点的每条最短路径都不包含 s_2；对称地，从 s_2 到该叶节点的每条最短路径都不包含 s_1。此外，根据 $P'_A(G_S)$ 的定义，$P'_{NA}(G_S)$ 中没有顶点位于 $B'_{G_S} \cap L_{G_S}$ 中任意两个顶点之间的最短路径上。因此，$\{s_1, s_2\} \cup (B'_{G_S} \cap L_{G_S})$ 满足子 GPS 条件。令 $S = \{s_1, s_2\} \cup (B'_{G_S} \cap L_{G_S})$。我们将通过假设存在一个满足 $|S'| > |S|$ 且$S' \cap A_G = \emptyset$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$（根据引理 4.4，确实存在这样的子 GPS）并导出矛盾，来证明 S 是最大的。

注意到 $|P_{NA}(G_S)| = 0$和 $|P'_{NA}(G_S)| > |P'_A(G_S)|$蕴含 $B_{G_S} \neq \emptyset$。因此，我们根据 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S}$是否为空分情形讨论。此外，由于 $S' \cap A_G = \emptyset$，我们有 $(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S' \subseteq L_{G_S}$($|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$)。由 $|S'| \geq 2+|L_{G_S}|$和 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$可得 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 2$（如果$|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$，则由 $|P_{NA}(G_S)| = 0$，我们得到 $|S'| = |L_{G_S}| < |S|$，矛盾）。

1. 情形 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：因为 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$，且根据引理 4.2 和 4.3，我们有$|C_{G_S} \cap S'| \leq 2$，因此 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$。由于 $|S'| \geq 2+|L_{G_S}|$且 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$，并且 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$，$|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$。由此以及 $|P_{NA}(G_S)| = 0$，得到 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，矛盾。
2. 情形 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$：由于 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$，我们有 $2 \leq |C_{G_S} \cap S'| \leq 3$（如果 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 4$，那么 $C_{G_S} \cap S'$ 将与子 GPS 条件矛盾）。接下来根据$|C_{G_S} \cap S'|$的取值分成若干子情形。

   a. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：由于 $|S'| \geq 2 + |L_{G_S}|$和 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$和 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$,$|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$。由此以及 $|P_{NA}(G_S)| = 0$, $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，得到矛盾。 b. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 3$：对于任意叶节点 $b \in L_{G_S}$，存在 $c \in C_{G_S} \cap S'$，使得从b 到 c 的一条最短路径包含 $C_{G_S} \cap S'$ 中另一个不同于 c 的顶点。因此 $(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S' = \emptyset$，从而$|S'| = |C_{G_S} \cap S'| = 3$。为与 $|S|$ 比较，注意到 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$ 和 $|P_{NA}(G_S)| = 0$ 意味着存在两个顶点 r_1，$r_2 \in C_{G_S} \cap B_{G_S}$，使得 C_{G_S} 中的每个顶点都位于 r_1 和 r_2之间的某条最短路径上。由此可知 $|L_{G_S}| \geq 2$，因此 $|S| = 1 + |L_{G_S}| \geq 3$。所以 $|S'| = 3$ 与$|S'| > |S|$矛盾。

在所有可能的情形中，假设存在一个含有 $|S'| > |S|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$，都会导致矛盾。因此，不存在这样的 S'，而 S 是 G_S 中的最大子 GPS。

□

引理 4.8. 设 G 是一个非环图的仙人掌图，且 $G_S = (V_S, E_S)$ 是 G 中的一个带须环。若$|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge 0 < |P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)|$，则 G_S 中最大子-GPS 的大小等于$|L_{G_S}|$。

证明。我们首先证明 G_S 中存在一个大小为 $|L_{G_S}|$ 的子 GPS。然后证明不存在另一个大小大于 $|L_{G_S}|$ 的子 GPS。

由于每个叶顶点都不位于其他两个顶点之间的任何最短路径上，因此集合 L_{G_S} 满足子 GPS 的定义。令 $S = L_{G_S}$。

假设存在一个子 GPS $S' \subseteq V_S$，满足 $|S'| > |S| = |L_{G_S}|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$（根据引理 4.4，存在这样的子 GPS）。由此可得 $(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S' \subseteq L_{G_S}$($|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$)。由 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$ 和$|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$ 可知 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 1$（若 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$，则由 $|P_{NA}(G_S)| = 0$，可得 $|S| = |S'| = |L_{G_S}|$，矛盾）。

根据子 GPS 的定义，$1 \leq |C_{G_S} \cap S'| \leq 3$（若 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 4$，则 $C_{G_S} \cap S'$ 将与子 GPS 的定义矛盾）。我们按照$|C_{G_S} \cap S'|$的取值进行分类讨论。

1. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 1$：由 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$和 $|S'| \geq 1+|L_{G_S}|$，可得 $|(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$。由于每个胡须都恰好包含 S'的一个顶点，$P_A(G_S) = C_{G_S}$ 以及子 GPS 的定义蕴含$|C_{G_S} \cap S'| = 0$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 1$矛盾。

2. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：由 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$ 和 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$，可得 $|L_{G_S}| - 1 \leq |(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$。

若 $|(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$，则每个胡须都恰好包含一个 S' 的顶点；$P_A(G_S) = C_{G_S}$ 以及子 GPS 的定义推出 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$ 矛盾。

考虑剩下的可能情形：$|(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}| - 1$。在这种情形下，恰有一个胡须不包含 S' 的任何顶点。令 B'_E 表示属于该胡须的所有顶点的集合。根据 $P'_A(G_S)$ 的定义，我们有 $|P'_A(G_S)| \leq |V_{mP}(G_S, (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B'_E)|$。由于 $|P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)|$，且根据引理 4.3，可得 $|C_{G_S} \cap S'| \leq 1$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$ 矛盾。

3. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 3$：首先假设 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$。则存在顶点 $c \in C_{G_S} \cap S'$ 和$a \in (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S}$，使得从 c 到 a 的一条最短路径包含 $C_{G_S} \cap S'$中的另一个顶点，这与子 GPS 的定义矛盾。接着假设 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$。那么对于每个顶点 $b \in B_{G_S} \setminus C_{G_S}$，都存在 $c \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 b 到 c 的一条最短路径包含 $C_{G_S} \cap S'$中的另一个顶点。因此 $(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S' = \emptyset$，进而 $|S'| = |C_{G_S} \cap S'| = 3$。现在估计 $|S|$。由 $1 \leq |P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)| \wedge 3 \leq |C_{G_S}| = |P'_{NA}(G_S)| + |P'_{NA}(G_S)|$，可推得 $1 \leq |P'_{NA}(G_S)| \wedge 2 \leq |P'_A(G_S)|$。利用 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$ 以及 $P'_{NA}(G_S)$的定义，可知 $|L_{G_S}| \geq 3$。因此 $|S| = |L_{G_S}| \geq 3$，所以$|S'| = 3$ 不超过 $|S|$，这与 $|S'| > |S|$矛盾。

在所有可能的情形中，假设存在一个包含 $|S'| > |S|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$ 会导致矛盾。因此，不存在这样的 S'，而 $S = L_{G_S}$ 是 G_S 中的最大子 GPS。 □

引理 4.9。设 G 是一个非环图的仙人掌图，并设 $G_S = (V_S, E_S)$ 是 G 中的一个带须环 。如果$|P'_{NA}(G_S)| = 0$，那么 G_S 中最大子-GPS 的大小等于 $|L_{G_S}|$。

证明。 我们首先证明 G_S 中存在一个大小为 $|L_{G_S}|$ 的子 GPS。然后证明不存在另一个大小大于$|L_{G_S}|$ 的子 GPS。

设 $S = L_{G_S}$。由于每个叶顶点都不位于任意两个其他顶点之间的最短路径上，S 满足子 GPS 的定义。

反设存在一个子 GPS $S' \subseteq V_S$，其中有 $|S| < |S'|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$（根据引理 4.4，确实存在这样的子 GPS）。由此，我们有 $(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S' \subseteq L_{G_S}$($|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$)。由此以及 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$ 可知 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 1$（如果 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$，则由 $|P'_{NA}(G_S)| = 0$，我们有$|S'| = |L_{G_S}| < |S|$，矛盾）。

我们根据 B_{G_S} 和 $(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S}$所定义的情形来展开讨论。

1. 情形 $B_{G_S} \neq \emptyset \wedge (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：由 $1 \leq |C_{G_S} \cap S'|$ 以及引理 4.2 和 4.3，我们得到$1 \leq |C_{G_S} \cap S'| \leq 2$。我们考虑可能的取值。

a. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 1$：由于 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$，我们有 $|(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$。由于每个胡须恰好包含一个 S' 顶点，$P_A(G_S) = C_{G_S}$，而子 GPS 的定义要求 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，这与$|C_{G_S} \cap S'| = 1$矛盾。b. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：由 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$，可得 $|L_{G_S}| - 1 \leq |(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$。如果每个胡须都恰好包含一个 S' 顶点，$P_A(G_S) = C_{G_S}$，而子 GPS 的定义要求 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$ 矛盾。剩下的可能性是，恰好有一个胡须不包含 S' 中的任何顶点。令 B'_E 表示该胡须的顶点集。根据 $P'_A(G_S)$ 的定义，我们有 $|P'_A(G_S)| \leq |V_{mP}(G_S, (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B'_E)|$。由于 $P'_A(G_S) = C_{G_S}(|P'_{NA}(G_S)| = 0)$，因此 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$ 矛盾。

2. 情形 $B_{G_S} = \emptyset \wedge (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} \neq \emptyset$：由此，根据子 GPS 的定义，我们得到 $|P'_{NA}(G_S)| = 0$ 和 $BG_S = \emptyset$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$ 矛盾。

3. 情形 $B_{G_S} \neq \emptyset \wedge (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$：在此情形下，$1 \leq |C_{G_S} \cap S'| \leq 3$。我们根据$|C_{G_S} \cap S'|$进行分类讨论。

a. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 1$：由于 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$，我们有 $|(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$。由于每条胡须恰好包含 S' 的一个顶点，$P_A(G_S) = C_{G_S}$ 迫使$|C_{G_S} \cap S'| = 0$，矛盾。b. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：由 $|S'| \geq 1 + |L_{G_S}|$，我们得到 $|L_{G_S}| - 1 \leq |(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$。如果每条胡须都恰好包含 S' 的一个顶点，$P_A(G_S) = C_{G_S}$ 迫使 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，矛盾。还存在这样一种可能：恰好有一条胡须不包含 S' 的顶点。令 B'_E 表示

该胡须的顶点集合。根据 $P'_A(G_S)$ 的定义，我们有 $|P'_A(G_S)| \leq |V_{mP}(G_S, (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B'_E)|$。由于$P'_A(G_S) = C_{G_S}(|P'_{NA}(G_S)| = 0)$，可知 $|C_{G_S} \cap S'| = 0$，这与 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$矛盾。

c. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 3$：对于每个 $b \in B_{G_S} \setminus C_{G_S}$，都存在 $c \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 b到 c的某条最短路径包含 $C_{G_S} \cap S'$中的另一个顶点。因此，$(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S' = \emptyset$，进而 $|S'| = 3$。此外，由$B_{G_S} \neq \emptyset$、$(C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S} = \emptyset$以及 $P'_A(G_S)$的定义可知，存在顶点 r_1，$r_2 \in B_{G_S} \cap C_{G_S}$，使得 C_{G_S} 中的每个顶点都位于 r_1 与 r_2之间的某条最短路径上。这意味着 $|L_{G_S}| \geq 3$，因此$|S| = |L_{G_S}| \geq 3$，所以 $|S'| = 3$ 不超过 $|S|$，这与 $|S'| > |S|$矛盾。

在所有可能的情形下，假设存在一个含有 $|S'| > |S|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$ 都会导致矛盾。因此不存在这样的 S'，而 $S = L_{G_S}$ 是 G_S 中的一个最大子 GPS。 □

引理 4.10。设 G 是一个不是环图的仙人掌图，且设 $G_S =$（V_S、E_S）是 G 中的一棵无须树，则 G_S 中最大子-GPS 的大小等于$|L_{G_S}|$。

证明。我们首先证明 G_S 中存在一个大小为 $|L_{G_S}|$ 的子 GPS。然后证明不存在另一个大小大于 $|L_{G_S}|$ 的子 GPS。

每个叶顶点都不包含在任意两个其他顶点之间的任何最短路径中，因此 L_{G_S} 满足子 GPS 的定义。令 $S = L_{G_S}$。

反设存在一个含有 $|S| < |S'|$ 和 $S' \cap A_G = \emptyset$ 的子 GPS $S' \subseteq V_S$（根据引理 4.4，存在这样的子 GPS）。

根据 $|S'| > |S| = |L_{G_S}|$，我们得到 $S \cap A_G \neq \emptyset$。这与 $S' \cap A_G = \emptyset$矛盾。因此，不存在这样的 S'，而 S 是 G_S中的一个最大子 GPS。 □

根据引理 4.5 至引理 4.10，可以确定 G 中每个分量、带须环和无须树的子 GPS。图 11 至图 16分别展示了每种带须环和无须树的最大子一般位置集示例。

下面的引理（引理 4.11）表明，所有子 GPS 的并集构成给定仙人掌图 G，而下一个引理（引理 4.12）给出了由所有子 GPS 构成的 GPS 的大小。

引理 4.11. 所有子-GPS的并集，包括非环仙人掌图中的所有带须环和无须树，G 构成一个GPS，其大小为 G。

证明。设 G 中的两个带须环或无须树分别为 $G_{S_1} = (V_{S_1}, E_{S_1})$ 和 $G_{S_2} = (V_{S_2}, E_{S_2})$，其中 $G_{S_1} \neq G_{S_2}$。令 S_1 和 S_2 分别为 G_{S_1} 和 G_{S_2} 的最大子 GPS。我们通过验证以下论证，证明 $S_1 \cup S_2$ 是 G 的 GPS。

1. 我们证明 S_1 是 G 中的一个 GPS。根据子 GPS 的定义，对于任意 s_1，$s_2 \in S_1$，G_{S_1} 中 s_1 与 s_2 之间的任意最短路径都不包含任何顶点 $s_3 \in S_1(s_3 \neq s_1, s_2)$。由于 G_{S_1} 中的最短路径也是 G 中的最短路径，因此，根据 GPS 的定义，S_1 是 G 的 GPS。

2. 我们证明，对于任意 $s_1 \in S_1$ 以及任意 $a \in (V_{S_1} \cap A_G) \setminus B_G$，从 s_1 到 a 的最短路径都不包含任何满足 $s_2 \neq s_1$的 $s_2 \in S_1$。根据 G_{S_1}中子 GPS 的定义，对于任意 $s_1 \in S_1$ 以及任意 $a \in (V_{S_1} \cap A_G) \setminus B_G$，从 s_1 到 a 的最短路径都不包含 G中任何满足 $s_2 \neq s_1$ 的 $s_2 \in S_1$。

3. 我们证明，对于任意 a_1，$a_2 \in (V_{S_1} \cap A_G) \setminus B_G$，$a_1$ 与 a_2 之间的最短路径都不包含任何顶点 $s \in S_1$。根据 G_{S_1}中子 GPS 的定义，对于任意 a_1，$a_2 \in (V_{S_1} \cap A_G) \setminus B_G$，$a_1$ 与 a_2之间的最短路径都不包含 G中的任何顶点 $s \in S_1$。

根据 (i)，S_1 和 S_2 是 G中的一般位置集。如果 $V_{S_1} \cap V_{S_2} \neq \emptyset$，那么根据 (i) 和 (ii)，$S_1 \cup S_2$ 是 G的一个一般位置集。
如果 $V_{S_1} \cap V_{S_2} = \emptyset$，那么根据 (i)、(ii) 和 (iii)，$S_1 \cup S_2$ 是 G的一个一般位置集。
因此，G 中所有带须环和无须树的子一般位置集的并集，是 G的一个一般位置集。 □

引理 4.12。设 G是一个非简单环的仙人掌图。设 $BC_{all} = \{BC_0, BC_1, \ldots, BC_k\}$ 是 G中所有带须环的集合。G中所有带须环和无须树的子-一般位置集 之并集的大小为：

$$2n_1 + n_2 + n_3 + |L_G|$$

其中，

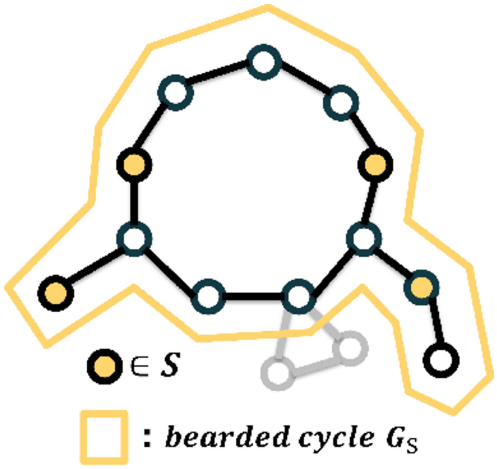


图11：满足条件*1*的**带须环**

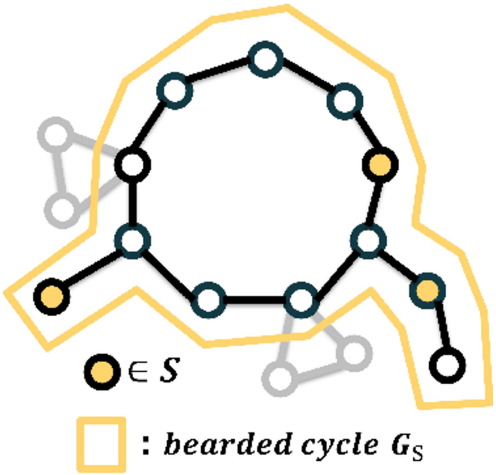


图12：满足条件*2*的**带须环**

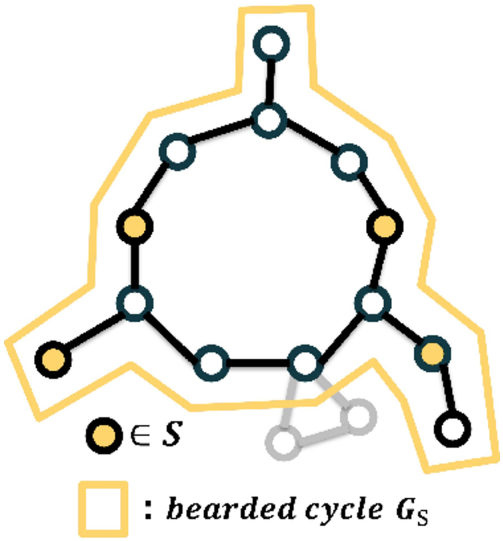


图13：满足条件*3*的**带须环**

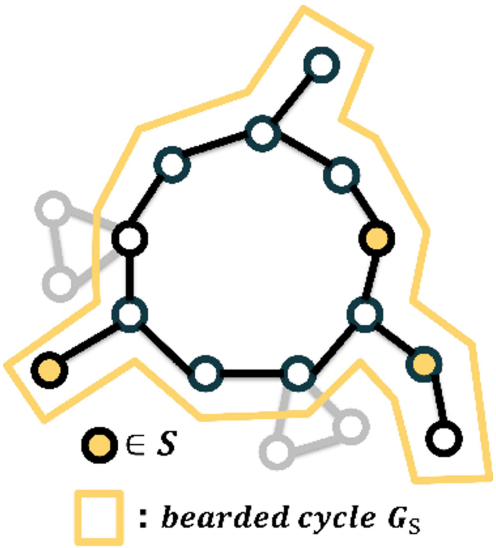


图14：满足条件*4*的**带须环**

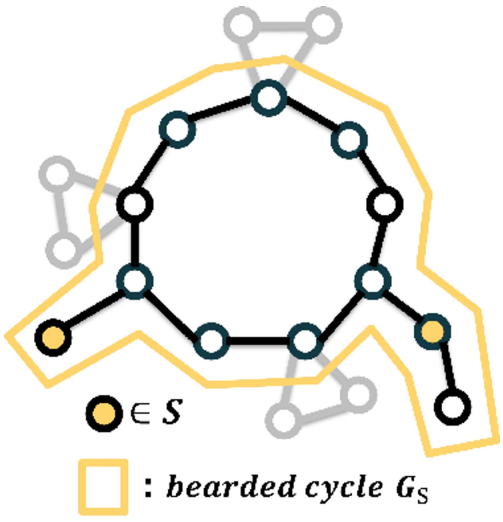


图15：满足条件*5*的**带须环**

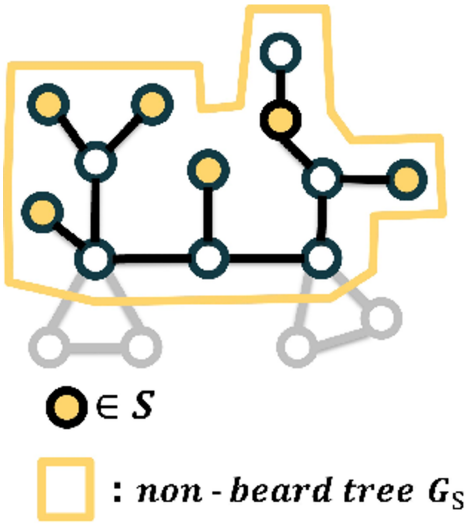


图16：无须树示例

- $n_1 = |\{BC \in BC_{all} \mid |P_{NA}(BC)| > |P_A(BC)|\}|$
- $n_2 = |\{BC \in BC_{all} \mid 0 < |P_{NA}(BC)| \leq |P_A(BC)|\}|$
- $n_3 = |\{BC \in BC_{all} \mid |P_{NA}(BC)| = 0 \wedge |P'_{NA}(BC)| > |P'_A(BC)|\}|$

证明。我们通过对 G 的所有带须环和所有无须树的最大子一般位置集的大小求和来证明该断言。根据引理 4.5...4.9, 在带须环$BC \in BC_{all}$ 上定义 $p_1(BC)$、 $p_2(BC)$、 $p_3(BC)$、 $p_4(BC)$、 $p_5(BC)$ 如下:

- $p_1(BC) : |P_{NA}(BC)| > |P_A(BC)|$
- $p_2(BC) : 0 < |P_{NA}(BC)| \leq |P_A(BC)|$
- $p_3(BC) : |P_{NA}(BC)| = 0 \wedge |P'_{NA}(BC)| > |P'_A(BC)|$
- $p_4(BC) : |P_{NA}(BC)| = 0 \wedge 0 < |P'_{NA}(BC)| \leq |P'_A(BC)|$
- $p_5(BC) : |P_{NA}(BC)| = 0 \wedge 0 < |P'_{NA}(BC)| = 0$

对于 $i = 1$, ..., 5, 定义整数 $n_i = \{BC \in BC_{all} \mid p_i(BC)\}$。令 UBT_{all} 为 G 中所有无须树的集合。令 S 为 G 中所有带须环和所有无须树的最大子一般位置集的并集。则大小 $|S|$ 如下给出。

$$
\begin{aligned}
|S| = & \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_1(BC)\}} (2 + |L_{BC}|) + \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_2(BC)\}} (1 + |L_{BC}|) \\
& + \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_3(BC)\}} (1 + |L_{BC}|) + \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_4(BC)\}} (|L_{BC}|) \\
& + \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_5(BC)\}} (|L_{BC}|) + \sum_{UBT \in UBT_{all}} (|L_{UBT}|) \\
= & \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_1(BC)\}} (2) + \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_2(BC)\}} (1) \\
& + \sum_{BC \in \{BC \in BC_{all} \mid p_3(BC)\}} (1) + |L_G| \\
= & 2n_1 + n_2 + n_3 + |L_G|
\end{aligned}
\tag{5}
$$

□

以下两个引理是证明主定理（定理 3.5）所必需的。

引理 4.13。设 G 是一个不是环图的仙人掌图，且设 $G_S = (V_S, E_S)$ 是 G 中的一个带须环 或无须树，并设 S 是 G 中所有带须环和无须树的最大子-GPS 的并集，则 $G - V_S \setminus (A_G \setminus B_{G_S}) - E_S$ 的每个连通分量都至少包含 S 中的 2 个顶点。

证明。设 $G - V_S \setminus (A_G \setminus B_{G_S}) - E_S = G_{NS} = (V_{NS}, E_{NS})$。我们通过考察 G_{NS} 的每个连通分支来证明这一结论。设 $G_{NSC} = (V_{NSC}, E_{NSC})$ 是 G_{NS} 的任意一个连通分支。我们根据 $|L_G \cap V_{NSC}|$ 的取值分情形讨论。

1. 情形 $|L_G \cap V_{NSC}| \geq 2$： 由引理 4.5,...4.10，得 $|V_{NSC} \cap S| \geq 2$。

2. 情形 $|L_G \cap V_{NSC}| = 1$： 我们根据 $L_G \cap V_{NS}$ 的顶点属于哪个子图来分情形讨论

   a. 情形 A 无须树包含 $L_G \cap V_{NSC}$ 的顶点：首先， G_{NSC} 必须包含一个带须环。如果 G_{NSC} 不包含带须环，那么根据带须环和无须树的定义， $L_G \cap V_{NSC}$ 中唯一的叶顶点不包含在无须树中，这与假设矛盾。因此， G_{NSC} 包含某个带须环 G_{BC}。如果 G_{NSC} 中不存在满足 $|(C_{G_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G_{BC}}| = 1$ 的带须环，则根据带须环和无须树的定义可得矛盾，因此 G_{NSC} 中存在满足 $|(C_{G_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G_{BC}}| = 1$ 的带须环。由于该 G_{BC} 不包含胡须且 $|(C_{G_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G_{BC}}| = 1$，我们有 $|C_{G_{BC}} \cap A_G| = 1$，于是 $|P_{NA}(G_{BC})| > |P_A(G_{BC})|$，由引理 4.5 可知 $|V_{BC} \cap S| = 2$。因此，$|V_{NSC} \cap S| \geq 2$。

b. 情形 A 带须环包含 $L_G \cap V_{NSC}$ 的顶点：设 G_{BC} 是一个包含 $L_G \cap V_{NSC}$ 中顶点的带须环。如果 $|(C_{G_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G_{BC}}| = 1$，则 $|P'_{NA}(G_{BC})| > |P'_A(G_{BC})|$，由引理4.7 可知 $|V_{BC} \cap S| = 2$。因此，$|V_{NSC} \cap S| \geq 2$。

若 $|(C_{G_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G_{BC}}| \geq 2$，则根据 2.a. 中的论证，存在另一个带须环 $G'_{BC} = (V'_{BC},\ E'_{BC})$，位于 G_{NSC} 中，且满足 $|(C_{G'_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G'_{BC}}| = 1$。于是 $|P_{NA}(G'_{BC})| > |P_A(G'_{BC})|$，由此可得$|V'_{BC} \cap S| = 2$，因此 $|V_{NSC} \cap S| \geq 2$。

3. 情形 $|L_G \cap V_{NSC}| = 0$：根据 2.a. 中的论证，存在一个带须环 $G'_{BC} = (V'_{BC},\ E'_{BC})$，位于 G_{NSC} 中，且满足$|(C_{G'_{BC}} \cap A_G) \setminus B_{G'_{BC}}| = 1$。于是 $|P_{NA}(G'_{BC})| > |P_A(G'_{BC})|$，由此可得 $|V'_{BC} \cap S| = 2$，因此 $|V_{NSC} \cap S| \geq 2$。

在所有情形下，我们都有 $|V_{NSC} \cap S| \geq 2$。因此，$G - V_S \setminus (A_G \setminus B_{G_S})$ 的每个连通分量都包含至少 2 个 S 中的顶点。 □

引理 4.14. 对于图 G，对每个满足 $1 \leq i \leq \texttt{GPN}(G)$ 的 i，都存在一个大小为 i 且不含割点的 GPS 。

证明。设 S 是任意一个 GPS，并反设存在一个顶点 $a \in S \cap A_G$。令 $(V_1, E_1), (V_2, E_2) ..., (V_k, E_k)$ $(k \geq 2)$ 为移除 a 后产生的 $G - \{a\}$ 的新连通分量。根据 GPS 的定义，只有一个指标 $i \in \{1, ..., k\}$ 满足 $S \cap V_i \neq \emptyset$；否则，将有两个顶点 u, v 属于 $G - \{a\}$ 中两个不同的连通分量，而 $\{u, v\}$ 是 G 中的一个 GPS。这不可能，因为 u 与 v 之间的任意最短路径都经过 a。于是，$S' = (S \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$，其中 $a' \in V_j$ $(j \neq i)$，使得 S' 是 G 中的一个 GPS。

□

接下来，我们总结各类带须环 $G_S = (V_S,\ E_S)$的条件，以及各类对应的最大子 GPS 的大小如下：

- **条件 1**：$|P_{NA}(G_S)| > |P_A(G_S)|$**最大子 -GPS**：
  $2 + |V_S \cap L|$ (引理 4.5)
- **条件 2**：$0 < |P_{NA}(G_S)| \leq |P_A(G_S)|$**最大子 -GPS**：
  $1 + |V_S \cap L|$ (引理4.6)
- **条件 3**：$|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| > |P'_A(G_S)|$**最大子 -GPS**：$1 + |V_S \cap L|$ (引理4.7)
- **条件 4**：$|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge 0 < |P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)|$**最大子 -GPS**：$|V_S \cap L|$ (引理 4.8)
- **条件 5**：$|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| = 0$**子-GPS的最大大小**：$|V_S \cap L|$ (引理 4.9)

此外，无须树 的最大子 GPS 的大小等于 L_{G_S}。图 11 至图 16 展示了各种带须环 和无须树的最大子一般位置集示例。图 17 展示了仙人掌图中最大子 GPS 的一个示例。

最后，我们证明，非环仙人掌图 G 中所有带须环和无须树的子 GPS 的并集是 G 中的最大 GPS。

定理 (定理 3.5)。设 G 是一个非简单环的仙人掌图。
设 $BC_{all} = \{BC_0, BC_1, \ldots, BC_k\}$ 为 G 中所有带须环的集合。那么，一般位置数 GPN(G) 为：

$$\texttt{GPN}(G) = 2n_1 + n_2 + n_3 + |L_G|$$

其中，

- $n_1 = |\{BC \in BC_{all} \mid |P_{NA}(BC)| > |P_A(BC)|\}|$
- $n_2 = |\{BC \in BC_{all} \mid 0 < |P_{NA}(BC)| \leq |P_A(BC)|\}|$
- $n_3 = |\{BC \in BC_{all} \mid |P_{NA}(BC)| = 0 \wedge |P'_{NA}(BC)| > |P'_A(BC)|\}|$

证明。令 S 为 G中所有带须环和无须树的最大子 GPS 的并。由引理 4.11，S 是 G的一个 GPS。反设存在一个 GPS S'，它属于 G 且满足 $|S'| > |S| \wedge S' \cap A_G = \emptyset$。我们根据 G 是带须环 还是无须树来分别讨论。

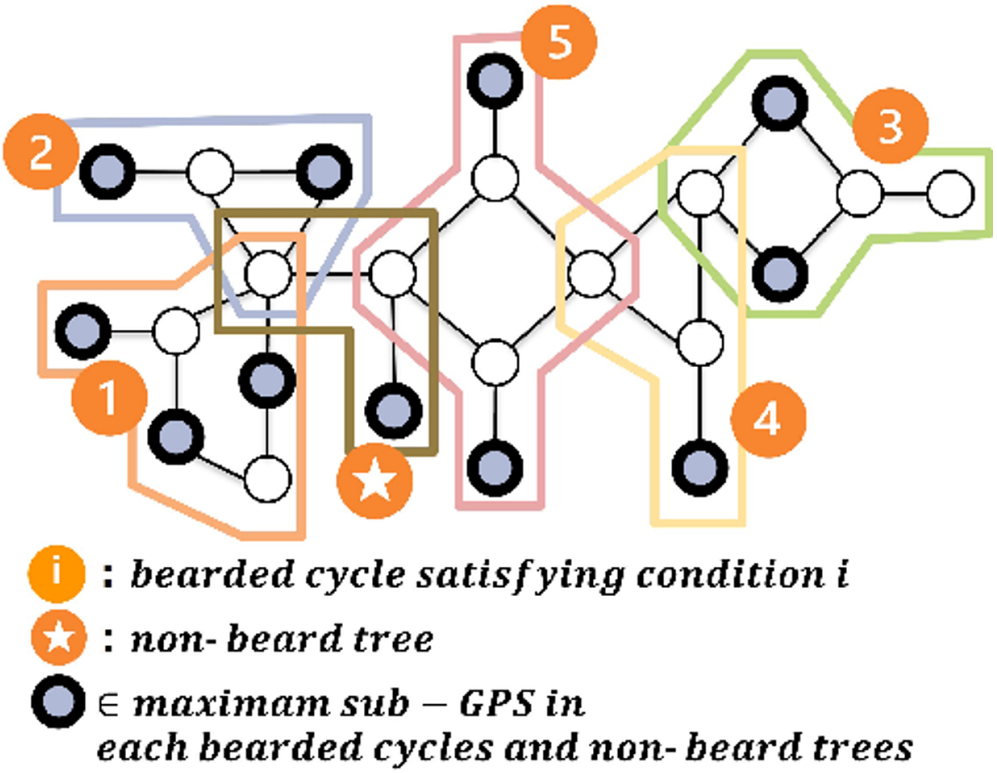


图17：一个由子图中的子 GPS 组成的最大 GPS 示例

1. 情形： G 是带须环 或无须树： 由引理 4.5 至 4.10， S 是 G中的一个最大 GPS，因此不存在满足 $|S'| > |S|$的 GPS S'，矛盾。

2. 情形 G 既不是带须环 也不是无须树： 由于 G 至少包含两个带须环或无须树，且根据引理 4.13，可得 $|S| \geq 4$。由 $|S'| > |S|$可知， G 中必定存在某个带须环 或无须树 $G_S = (V_S, E_S)$，使得 $|V_S \cap S'| > |V_S \cap S|$。令 $G_{NS} = G - V_S \setminus (A_G \setminus B_{G_S}) - E_S$，后文将用到它。我们根据 G_S 是无须树 还是带须环来分别讨论。

a. 情形 G_S 是无须树： 由于 $S' \cap A_G = \emptyset$、 $|V_S \cap S| = |L_{G_S}|$ 和 $V_S \setminus L_G \subseteq A_G$，我们有 $(V_S \setminus L_G) \cap S' = \emptyset$。因此$|V_S \cap S'| \leq |L_{G_S}|$，这与$|V_S \cap S'| > |V_S \cap S| = |L_{G_S}|$矛盾。
b. 情形 G_S是一个带须环：首先， $S' \cap A_G = \emptyset$推出（$B_{G_S} \setminus C_{G_S}$） $\cap S' \subseteq L_{G_S}$。我们根据 $|V_S \cap S'|$的取值进行讨论。i. 情形 $|V_S \cap S'| \geq 4 + |L_{G_S}|$： 若 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 4$，则 $C_{G_S} \cap S'$ 与 GPS 的定义矛盾。若|（$B_{G_S} \setminus C_{G_S}$） $\cap S'| \geq |L_{G_S}|$，则这与 $S' \cap A_G = \emptyset$矛盾；或者，对于任意 $b \in$ （$B_{G_S} \setminus C_{G_S}$） $\cap S'$，存在 $c \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 b 到 c 的某条最短路径至少包含 $C_{G_S} \cap S'$ 中的另一个顶点，这与 GPS 的定义矛盾。ii. 情形 $|V_S \cap S'| = 3 + |L_{G_S}|$： 若 $|L_{G_S}| \geq 1$，则由 2.b.i. 中相同的论证可知矛盾。若 $|L_{G_S}| = 0$，则对于 $G - V_S$ 中的任意顶点 n，存在某个 $s \in V_S \cap S'$，使得从 n 到 s的某条最短路径包含 $V_S \cap S'$ 中的另一个顶点。因此， $G - V_S$ 不包含 S' 中的任何顶点，所以 $|S'| = 3$，这与$|S'| > |S| \geq 4$矛盾。iii. 情形 $|V_S \cap S'| = 2 + |L_{G_S}|$： 我们根据 P_{NA}（G_S）和 P_A（G_S）进行讨论。A. 情形 $|P_{NA}$（G_S）$| > |P_A$（G_S）$|$： 由引理 4.5， $|V_S \cap S| = 2 + |L_{G_S}|$，这与 $|V_S \cap S'| \nsucc |V_S \cap S|$矛盾。B. 情形 $|P_{NA}$（G_S）$| \leq |P_A$（G_S）$|$： 由 $|V_S \cap S'| = 2 + |L_{G_S}|$ 和（$B_{G_S} \setminus C_{G_S}$） $\cap S' \subseteq L_{G_S}$，我们推出 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 2$。我们根据$|C_{G_S} \cap S'|$进行讨论。I. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 3$： 对于任意 $b \in$ （$B_{G_S} \setminus C_{G_S}$） $\cap S'$，存在 $c \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 b 到 c 的某条最短路径至少包含 $C_{G_S} \cap S'$ 中的另一个顶点。因此（$B_{G_S} \setminus C_{G_S}$） $\cap S' = \emptyset$，于是 $|S'| = |C_{G_S} \cap S'| = 3$（注意， $|C_{G_S} \cap S'|$ 与 GPS 的定义矛盾），这与$|S'| > |S| \geq 4$矛盾。

II. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：令 $S'_{NC} = (V \setminus C_{G_S}) \cap S'$ 和 $P_{S'_{NC}} = V_{mP}(G_S, S'_{NC}) \cap C_{G_S}$。根据 GPS 的定义和 $C_{G_S} \cap S' \neq \emptyset$，我们有 $C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}} \neq \emptyset$ 和 $C_{G_S} \cap S' \subseteq C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}$。考虑四个顶点 p_1，$p_2 \in P_{S'_{NC}}$ 和 n_1，$n_2 \in C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}$，满足 (p_1, n_1)，$(p_2, n_2) \in E$。此外，考虑两个顶点 s_1，$s_2 \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 s_1 到 n_1 的任何最短路径都不包含 s_2，且从 s_2 到 n_2 的任何最短路径都不包含 s_1（根据 GPS 的定义，这样的顶点存在）。令 $d_{s_1n_1}$、$d_{s_1n_2}$、$d_{n_1n_2}$、$d_{p_1p_2}$ 表示：

$d_{s_1n_1}$：G_S 中从 s_1 到 n_1 且不经过 s_2的简单路径的长度$d_{s_1n_2}$：G_S 中从 s_1 到 n_2 且经过 s_2的简单路径的长度$d_{n_1n_2}$：G_S中从 n_1 到 n_2 的最短路径的长度$d_{p_1p_2}$：G_S 中从 p_1 到 p_2 且不经过 s_1，s_2的简单路径的长度

若 $d_{n_1n_2} \geq d_{p_1p_2} + 2$，则 $|C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}| > |P_{S'_{NC}}|$。若 $d_{n_1n_2} < d_{p_1p_2} + 2$，则 $d_{n_1n_2} = d_{n_1s_1} + d_{s_1n_2}$。根据 GPS 的定义，$d_{s_1n_2} > d_{s_1n_1} + d_{p_1p_2}$。因此 $d_{n_1n_2} > 2d_{s_1n_1} + d_{p_1p_2}$，这意味着 $d_{n_1n_2} > d_{p_1p_2}$，故 $|C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}| > |P_{S'_{NC}}|$。接下来，我们证明 G_{NS} 的某个连通分量不包含 S'的任何顶点。根据 $P_{S'_{NC}}$ 和 $P_A(G_S)$ 的定义，我们有$P_{S'_{NC}} \subseteq P_A(G_S)$。由 $|P_{NA}(G_S)| \leq |P_A(G_S)| \wedge P_{S'_{NC}} \subseteq P_A(G_S) \wedge |C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}| > |P_{S'_{NC}}|$，可得 $|(C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}) \cap A_G| \geq 1$。由于 $|V_S \cap S'| = 2 + |L_{G_S}|$和 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$，我们有 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$，因此 $(C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}) \cap A_G \subseteq (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S}$。根据这一包含关系及 $P_{S'_{NC}}$的定义，可知 G_{NS}的某个连通分量不包含 S'的任何顶点。设 $G_E = (V_E, E_E)$ 是 G_{NS} 的一个连通分量，且不包含 S'的任何顶点。现在我们证明 $(|V_S \cap S| + |V_E \cap S|) - (|V_S \cap S'| + |V_E \cap S'|) \geq 0$。根据引理 4.13，我们有 $|V_E \cap S| \geq 2$。由 $|P_{NA}(G_S)| \leq |P_A(G_S)|$ 以及引理 4.5 至 4.10，可得 $|L_{G_S}| \leq |V_E \cap S| \leq 1 + |L_{G_S}|$。利用 $|V_E \cap S| \geq 2$、$|V_E \cap S| = 0$、$|V_S \cap S'| = 2 + |L_{G_S}|$、$|L_{G_S}| \leq |V_E \cap S|$，我们得到 $(|V_S \cap S| + |V_E \cap S|) - (|V_S \cap S'| + |V_E \cap S'|) \geq (2 + |L_{G_S}|) - (2 + |L_{G_S}|) = 0$。由此，与 $|S'| > |S|$矛盾。

iv. 情形 $|V_S \cap S'| = 1 + |L_{G_S}|$：我们根据$P_A(G_S)$、$P_{NA}(G_S)$、$P'_A(G_S)$、$P'_{NA}(G_S)$的大小展开讨论。

1. 情形 $|P_{NA}(G_S)| > 0$或 $|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| > |P'_A(G_S)|$：由引理 4.5、4.6、4.7可得$|V_S \cap S| \geq 1 + |L_{G_S}|$，这与 $|V_S \cap S'| > |V_S \cap S|$矛盾。
2. 情形 $|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge 0 < |P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)|$或 $|P'_{NA}(G_S)| = 0$：由引理 4.8、4.9可得 $|V_S \cap S| = |L_{G_S}|$。由于 $(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S' \subseteq L_{G_S}$，因此 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| \leq |L_{G_S}|$。我们根据 $|C_{G_S} \cap S'|$的取值展开讨论。

I. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| \geq 3$：则对于任意 $b \in (B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S'$，存在 $c \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 b 到 c 的某条最短路径包含 $C_{G_S} \cap S'$ 的另一个顶点。因此 $(B_{G_S} \setminus C_{G_S}) \cap S' = \emptyset$ 且$|S'| = |C_{G_S} \cap S'| = 3$，这与 $|S'| > |S| \geq 4$ 矛盾。II. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 2$：则 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}| - 1$。令 $(V \setminus C_{G_S}) \cap S' = S'_{NC}$ 且 $V_{mP}(G_S, S'_{NC}) \cap C_{G_S} = P_{S'_{NC}}$。根据 GPS 的定义，有 $C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}} \neq \emptyset \wedge C_{G_S} \cap S' \subseteq C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}$。考虑四个顶点 p_1、$p_2 \in P_{S'_{NC}}$ 和 n_1、$n_2 \in C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}$，其中 (p_1, n_1)、$(p_2, n_2) \in E$。此外，考虑两个顶点 s_1、$s_2 \in C_{G_S} \cap S'$，使得从 s_1 到 n_1 的任何最短路径都不包含s_2，且从 s_2 到 n_2 的任何最短路径都不包含 s_1（根据 GPS 的定义，这些顶点存在）。令 $d_{s_1n_1}$、$d_{s_1n_2}$、$d_{n_1n_2}$、$d_{p_1p_2}$ 分别表示：$d_{s_1n_1}$：在 G_S 中从 s_1 到 n_1 且不包含 s_2的简单路径的长度；$d_{s_1n_2}$：在 G_S 中从 s_1 到 n_2 且包含 s_2 的简单路径的长度；$d_{n_1n_2}$：在 G_S中从 n_1 到 n_2 的最短路径的长度；$d_{p_1p_2}$：在 G_S 中从 p_1 到 p_2 且不包含 s_1、s_2的简单路径的长度。由 2.b.iii.B.II. 中的相同论证，我们有 $|(C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}) \cap A_G| \geq 1$。由 $|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)|$或 $|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| = 0$，并且恰有一个不包含 S' 中任何顶点的胡须（根据 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}| - 1$），可知存在一个不包含 S' 中任何顶点的 G_{NS} 的连通分量。令 $G_E = (V_E, E_E)$ 为 G_{NS} 的一个不包含 S' 中任何顶点的连通分量。现在证明 $(|V_S \cap S| + |V_E \cap S|) - (|V_S \cap S'| + |V_E \cap S'|) \geq 0$。由引理 4.13，有 $|V_E \cap S| \geq 2$。由 $|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| \leq |P'_A(G_S)|$或$|P_{NA}(G_S)| = 0 \wedge |P'_{NA}(G_S)| = 0$，可得 $|V_S \cap S| = |L_{G_S}|$。利用 $|V_E \cap S| \geq 2 \wedge |V_E \cap S'| = 0 \wedge |V_S \cap S| = |L_{G_S}| \wedge |V_S \cap S'| = 1 + |L_{G_S}|$，得到 $(|V_S \cap S| + |V_E \cap S|) - (|V_S \cap S'| + |V_E \cap S'|) \geq (2 + |L_{G_S}|) - (1 + |L_{G_S}|) = 1$。由此与 $|S'| > |S|$矛盾。III. 情形 $|C_{G_S} \cap S'| = 1$：则 $|(V_S \setminus C_{G_S}) \cap S'| = |L_{G_S}|$。令 $S'_{NC} = (V \setminus C_{G_S}) \cap S'$ 且$P_{S'_{NC}} = V_{mP}(G_S, S'_{NC}) \cap C_{G_S}$。根据 GPS 的定义和 $C_{G_S} \cap S' \neq \emptyset$，有 $C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}} \neq \emptyset$和 $C_{G_S} \cap S' \subseteq C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}$。由于 G_S 的每个胡须都恰好包含 S' 中的一个顶点，我们得到

$(C_{G_S} \setminus P_{S'_{NC}}) \cap A_G \subseteq (C_{G_S} \cap A_G) \setminus B_{G_S}$，可知存在一个不包含 S' 中任何顶点的 G_{NS} 的连通分量。令 $G_E = (V_E,\ E_E)$ 为 G_{NS} 的一个不包含 S' 中任何顶点的连通分量。现在证明 $(|V_S \cap S| + |V_E \cap S|) - (|V_S \cap S'| + |V_E \cap S'|) \geq 0$。由 2.b.iv.B.II. 中的相同论证，我们有 $(|V_S \cap S| + |V_E \cap S|) - (|V_S \cap S'| + |V_E \cap S'|) \geq (2 + |L_{G_S}|) - (1 + |L_{G_S}|) = 1$。由此与 $|S'| > |S|$ 矛盾。v. 情形 $|V_S \cap S'| = |L_{G_S}|$：由引理 4.5,...,4.10，有 $|V_S \cap S| \geq |L_{G_S}|$，这与 $|V_S \cap S'| > |V_S \cap S|$ 矛盾。

由上述可知，对于 G 中的任意带须环或无须树，都会导出矛盾，因此不存在满足 $|S'| > |S|$ 的 GPS S'，使其属于 G。S 是 G 中的最大 GPS。
最后，由引理 4.12，GPN(G) $= |S| = 2n_1 + n_2 + n_3 + |L_G|$。 □

5 结论

本文给出了仙人掌图的一般位置数（GPN）的精确值，即一般位置集（GPS）的最大大小。以往研究已针对某些特定图类给出了精确的 GPN，或其上界、下界。对于仙人掌图，任意仙人掌图的上下界已为人所知，而精确 GPN 仅针对满足特定条件的仙人掌图进行过研究。

在本研究中，我们给出了不受任何限制的一般仙人掌图的精确 GPN。为此，我们提出了一种新颖的图分解方法，将给定的仙人掌图 G 分解为若干分量，这些分量称为我们新定义的带须环和无须树。随后，我们证明，在每个分量中找到满足特定条件的子 GPS 后，这些子 GPS 的并集构成整个图的 GPS G，并且该并集的大小最大。

作为未来的研究方向，我们考虑将研究扩展到仙人掌图以外的其他图类，以确定其一般位置数（GPS），并探究仙人掌图的互可见数的精确值。本文提出的技术有望应用于其他图类的一般位置数（GPN）研究。此外，由于互可见集与一般位置集（GPS）具有许多相似性质，本研究的发现也可能有助于分析仙人掌图中的互可见集。

参考文献

[1] PAUL MANUEL 和 SANDI KLAVŽAR。图论中的一般位置问题。《澳大利亚数学学会通报》，98(2):177–187，2018。[2] Bijo S. Anand、Ullas Chandran S. V.、Manoj Changat、Sandi Klavžar 和 Elias John Thomas。一般位置集的刻画及其在余图和二部图中的应用。《应用数学与计算》，359(15):84–89，2019。[3] Sandi Klavžar、Balázs Patkós、Gregor Rus 和 Ismael G. Yero。笛卡尔积中的一般位置集。《数学成果》，76(123)，2021。[4] Sandi Klavžar 和 Gregor Rus。整数格的一般位置数。《应用数学与计算》，390(1)，2021。125664。[5] Yan Yao、Mengya He、Shengjin Ji 和 Guang Li。两类图的一般位置集。《开放数学》，20(1):1021–1029，2020。[6] Henry E Dudeney。《数学趣题》，第473卷。Courier Corporation，1958。[7] Jim Fowler、Andrew Groot、Deven Pandya 和 Bart Snapp。环面上的三点不共线问题，2012。arXiv:1203.6604。[8] Attila Pór 和 David R. Wood。三维三点不共线问题。载于《图绘制》，第47卷，第395–402页，2005。[9] Vincent Froese、Iyad Kanj、André Nichterlein 和 Rolf Niedermeier。寻找处于一般位置的点。《国际计算几何与应用杂志》，27(4):277–296，2017。