arXiv:2611.29139v1 [math.SP] 22 Nov 2026

# 共形尖点度量开流形上的半经典 Weyl 定律与非交换几何

¨Raphaël Ponge

Abstract. 我们在有限体积、带有共形尖点度量的开黎曼流形上建立了半经典 Weyl 定律。这些度量不一定完备；即使完备，也不具有有界几何。此外，势函数有界，而谱的离散性源于几何，而非限制性势函数。因此，我们的结果超出了 Dai–Yan 和 Braverman 近期研究的半经典 Wey尔定律的适用范围。对于与狄拉克算子、磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子相关的分数阶薛定谔算子，在 Moroianu 和 Gol´enia–Moroianu 所提出、确保这些算子具有离散谱的条件下，我们建立了半经典 Weyl 定律。我们还为同一类算子得到了 Connes 积分公式的推广。此外，我们研究了一类无限体积的共形尖点度量；在这种情况下，半经典 Weyl 定律和积分公式仅涉及无穷远处的取值。上述结果是通过应用我们在上一篇论文中建立的谱三元组的抽象半经典 Weyl 定律和积分公式得到的。

## 1. Introduction

半经典 Weyl 定律描述了当普朗克参数 $h$ 趋于 0 时，Schr¨odinger 算子 $h^2\Delta + V$在给定能级以下的束缚态数量的渐近行为。在带有拉普拉斯算子 $\Delta_g$的闭黎曼流形 $(M^n, g)$ 上，半经典 Weyl 定律断言：对于每个连续实值势函数 $V$ 和每个能级 $\lambda \in \mathbb{R}$， $h^2\Delta_g + V$的特征值数量$N(h^2\Delta_g + V; \lambda)$（按重数计）满足

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\big(h^2\Delta_g + V; \lambda\big) = c(n) \int_M (V(x) - \lambda)_-^{\frac{n}{2}}\, d\nu_g(x), \qquad c(n) := (2\pi)^{-n}|\mathbb{B}^n|. \tag{1.1}$$

这里 $\nu_g$ 是黎曼测度，而 $|\mathbb{B}^n|$ 是 $\mathbb{R}^n$的单位球体积。对于光滑势函数，这是 Colin de Verdi`ere [9], 的半经典 Weyl 定律的推论，该定律还给出了余项。对于连续势函数，则可由 Birman–Solomyak [3, 4, 5] 的魏尔定律和 Birman–Schwinger 原理（见第2节）推出。最近，Dai–Yan [12]和 Braverman [7] 为完备黎曼流形上的 Schr¨odinger 算子建立了半经典 Weyl 定律，其中势函数趋于无穷。

本文旨在为一类开黎曼流形建立半经典 Weyl 定律
，这些流形 未必 完备。更确切地说，我们考察具有有限体积共形尖点度量的开流形。我们为这类流形上与狄拉克算子、磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子相关的分数阶薛定谔算子建立半经典 Weyl 定律（见下文定理 A–C ）。这些度量具有如下形式 $g = x^{2r}g_0$，其中 $g_0$ 是尖点度量，而 $r > 1/n$ （见第 1.1节）。在这种情况下：

- 对于 $r > 1$ 该流形并不完备。
- 对于 $r \le 1$ 该流形是完备的，但不具有有界几何。
- 在所有情况下，势函数均有界，且这些算子本身具有离散谱。

在这些方面，我们的结果都超出了 [12, 7] 所讨论的范围（见第1.5节）。此外，我们还为同一组算子推广了 Connes 积分公式（见定理D）。

我们的方法基于非交换几何。在 [27] 中，我们为一大类非交换流形建立了半经典 Weyl 定律，并推广了 Connes 积分公式

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：58J50，35P20；次要分类号：81Q20，58B34，58J40，35J10，53C27。 

（即谱三元组）。这将 McDonald–Sukochev–Zanin 的先前结果 [20] 推广到了具有任意可和度的谱三元组，且不需要额外的正则性假设。本文的结果是将 [27] 的主要结果与 Moroianu [24] 以及 Gol´enia–Moroianu [14, 15]关于具有共形尖点度量的流形上的椭圆算子的结果相结合而得出的。关于 [27] 结果的进一步应用见姊妹论文 [28, 29]。

1.1. **具有共形尖点度量的开流形**。令 $X^n$ 为紧流形 $X$ 去掉其无边界边界 $M^{n-1}=\partial X$ 后的内部，并设其边界定义函数为 $x$。我们假设 $X$带有黎曼度量 $g=x^{2r}g_0$, $r>0$，其中 $g_0$ 是 Melrose 意义下定义在 $X$ 上的尖点度量。例子包括有限体积的双曲度量（$r=1$；见 [24]）以及 Cheeger [8] 意义下的度量喇叭（$r>1$；另见 [16]）。条件 $r>1/n$ 确保体积有限。此外，$(X,g)$ 是完备黎曼流形，当且仅当 $r\leq 1$ （见 [15, 25]）。除非另有说明，我们均假设 $r>1/n$。

在非紧流形上，$(X,\ g)$ 的通常拉普拉斯算子不一定具有离散谱（例如见 [13]）。然而，Moroianu [24] 和 Gol´enia–Moroianu [14, 15]（另见 [1]）指出，在适当条件下，$(X,\ g)$ 上的狄拉克哈密顿量、磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子都是本质自伴的，具有纯离散谱，并且可能满足（经典）Weyl 定律。

基于 [24, 14, 15] 的方法，我们为这些算子关联自然的谱三元组。在每种情况下，代数都是 $*$ 代数 $C^\infty(X)$，由 $X$ 上在$M=\partial X$附近为常数的光滑函数构成。它通过有界乘法算子作用，其范数闭包是 $C^*$代数$C(X)$，由 $X$ 上在 $M$上为常数的连续函数构成。

1.2. **狄拉克算子**。假设 $X$ 是自旋流形，$g_0$ 是精确尖点度量，并且 $M$ 上不存在非零调和旋量（参见第4节）。那么，正如 [24], 中所示，作用于旋量丛 $\not{D}_g$ 的截面上的狄拉克哈密顿量[2] $\not{S}_X$ 是本质自伴的，且具有纯离散谱。于是我们得到一个 $n$-可求和谱三元组，

$$\left(\dot{C}^\infty(X), L^2_g(X,\not{S}_X), \not{D}_g\right).$$

利用 Moroianu 关于完全椭圆尖点算子的魏尔定律 [24] （这些定律是通过分析其 $\zeta$ 函数推导出来的），我们证明可以将谱三元组的半经典魏尔定律应用于 [27]。由此得到以下半经典魏尔定律（见定理 4.1）。

**定理 A**。给定任意 $q>0$ 以及任意实值势函数 $V\in C(X)$，对于每个能级$\lambda\in\mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\left(h^{2q}\left(\not{D}_g^2\right)^q+V;\lambda\right)=\not{c}(n)\int_X (V(y)-\lambda)_-^{\frac{n}{2q}}\,d\nu_g(y),$$

其中 $\not{c}(n)\colon=2^{\left[\frac{n}{2}\right]}c(n)$ 且 $c(n)$ 是（*1.1*）中的常数。

1.3. **磁拉普拉斯算子**。令 $\Delta_A=d_A^*d_A$ 为磁拉普拉斯算子，其中 $d_A=d+iA\wedge\cdot$且 $A$ 是尖点实 1-形式。假设 $A$ 按 [14] 的意义（见第 5节）具有捕获性。然后，如 [14], 所示，算子 $\Delta_A$ 本质自伴且具有纯离散谱。于是我们得到一个 $n$-可求和谱三元组，

$$\left(\dot{C}^\infty(X), L^2_g(X), \sqrt{\Delta_A}\right).$$

Gol´enia–Moroianu 的结果使我们也能将 [27] 的半经典 Weyl 定律应用于这个谱三元组。由此得到以下结果（见定理 5.1）。

**定理 B**。给定任意 $q>0$ 以及任意实值势函数 $V\in C(X)$，对每个能级$\lambda\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\left(h^{2q}\Delta_A^q+V;\lambda\right)=c(n)\int_X (V(y)-\lambda)_-^{\frac{n}{2q}}\,d\nu_g(y).$$

1.4. **Hodge 拉普拉斯算子。** 令 $\Delta_g^{(k)}$为 $(X, g)$ 上作用于 $k$-形式的 Hodge 拉普拉斯算子。假设贝蒂数 $b_{k-1}(M)$ 和 $b_k(M)$ 均为零（见第 6 节）。那么，如 [15],该算子 $\Delta_g^{(k)}$是本质自伴的，且具有纯离散谱。因此我们得到一个$n$-可求和谱三元组，

$$\left(\dot{C}^\infty(X), L_g^2(X, \Lambda^k T^*X), \sqrt{\Delta_g^{(k)}}\right).$$

再次结合 Gol´enia–Moroianu [15] 和 Moroianu [24] 的结果与 [27],的结果，我们得到以下半经典 Weyl 定律（见定理 6.1）。

**定理 C.** 给定任意 $q > 0$ 以及任意实值势函数 $V \in C(X)$，对于每个能级$\lambda \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\left(h^{2q}\left(\Delta_g^{(k)}\right)^q + V; \lambda\right) = c(n,k)\int_X (V(y)-\lambda)_-^{\frac{n}{2q}} d\nu_g(y), \qquad c(n,k) := \binom{n}{k} c(n).$$

如上所述，对于 $r > 1$，黎曼流形 $(X, g)$ 并不完备。因此，在这种情况下，定理A–C为我们提供了非完备黎曼流形上的半经典 Weyl 定律。对于 $r \le 1$，它们为不具有有界几何且势函数非限制的完备流形提供了半经典 Weyl 定律（见第 1.5节）。

1.5. **与 Dai–Yan 和 Braverman 的结果比较。** Dai–Yan [12]为作用于具有有界几何的完备黎曼流形上的函数的 Schr¨odinger 算子 $h^2\Delta_g + V$ 建立了半经典 Weyl 定律（即单射半径有正下界，曲率张量及其一阶协变导数有界）。他们要求势函数$V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ 在无穷远处趋于无穷，并满足倍增条件和正则性条件。他们还得到了 $\Delta_g + V$ 的经典 Weyl 定律。随后，Braverman [7] 通过使用局部化论证，为任意完备黎曼流形上同类型的算子建立了半经典 Weyl 定律，其中 $V$是一个非负光滑函数，并且 $V(x) \to \infty$ 当 $x \to \infty$时。

我们的结果在以下方面不属于 [12, 7] 的讨论范畴。首先，对于 $r > 1$，流形 $(X, g)$ 并不完备（见 [15, 25]），因此这种情形超出了 [12, 7]的适用范围。

其次，对于 $r \le 1$，流形 $(X, g)$ 是完备的，但不具有有界几何，因此超出了 [12]的适用范围。事实上，由于 $(X, g)$ 是完备、非紧且具有有限体积的，它包含无穷多个互不相交、半径为 1 的测地球，而这些球的体积必趋于 0。然而，有界几何意味着半径为 1 的测地球的体积有一个统一的正下界（另见 [14, 第 140], 页，其中指出单射半径在无穷远处趋于 0）。

第三，在 [12, 7]中，正是势函数的限制性质确保了 Schr¨odinger 算子 $h^2\Delta_g + V$ 具有离散谱。相比之下，在我们的设定中，算子 $\not{D}_g^2$、 $\Delta_A$和$\Delta_g^{(k)}$本身就具有离散谱，而势函数有界。特别是，对于 $r \le 1$，尽管流形是完备的，我们的结果仍不属于 [7], 的讨论范畴。

最后，我们的结果适用于算子的分数次幂，也适用于作用于丛上的算子，而 [12, 7] 考虑的是作用于函数上的 Schr¨odinger 算子 $h^2\Delta_g + V$。

1.6. **积分公式。** 在非交换几何的框架下，积分的作用由 ⨍Connes 的非交换积分 [10] （见第 7节）承担。若（$M^n$， $g$）是一个闭黎曼流形，那么 Connes 积分公式断言，对于每个 $f \in C$（$M$），都有

$$⨍ f\Delta_g^{-\frac{n}{2}} = c(n)\int_M f(x) d\nu_g(x).$$

因此，非交换积分重新获得了黎曼测度。 [27]的主要结果包括将这一公式推广到谱三元组。在本文的框架下，这些结果导出如下积分公式，它将 Connes 的原始积分公式直接推广到了开流形。

**定理 D**。 对于每个 $f \in \dot{C}(X)$，算子 $f|\not{D}_g|^{-n}$ 是谱可测的，且满足

$$⨍ f|\not{D}_g|^{-n} = \not{c}(n) \int_X f(y) d\nu_g(y).$$

对于绝对值 $|f|\not{D}_g|^{-n}|$，以及算子 $|\not{D}_g|^{-n/2} f |\not{D}_g|^{-n/2}$及其绝对值，也有类似的结果。

这里，磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子也有类似的积分公式（见定理 8.2）。

1.7. **无限体积的共形尖点度量**。 条件 $r > 1/n$ 保证了 $(X, g)$ 具有有限体积。当 $0 < r \leq 1/n$ 时，流形 $(X, g)$ 是完备且具有无限体积的，而 [24, 14, 15] 的结果仍然为上述算子给出了 Weyl 定律。当 $r < 1/n$时，这些 Weyl 定律具有如下形式 $\lambda_j \sim (j/\gamma)^{2r}$，其中常数 $\gamma$ 仅取决于无穷远处的几何。在这种情况下， [27] 的结果同样适用，但半经典 Weyl 定律和积分公式只涉及无穷远处的取值。例如，对于狄拉克算子，我们得到以下结果（见定理 9.2）。

**定理 E**。 设 $0 < r < 1/n$，并假设 $X$ 是自旋流形， $g_0$ 是精确尖点度量，且 $M$上不存在非零调和旋量。给定任意 $q > 0$ 和任意实值势$V \in C^\infty(X)$，对于每个能级 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{h \to 0^+} h^{\frac{1}{r}} N\left(h^{2q}\left(\not{D}_g^2\right)^q + V; \lambda\right) = \gamma \left(V_0 - \lambda\right)_-^{\frac{1}{2qr}},$$

其中 $V_0$ 是 $V$ 的边界值，且 $\gamma$ 是一个仅依赖于 $r$ 和边界 $(M, h_0)$ 的正常数（见公式（9.3））。

磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子也有类似结果，积分公式亦然（见定理 9.2）。对于 $r = 1/n$，Weyl 定律是非经典的，因此 [27]的结果不适用（见第 9.2节）。

1.8。 **论文结构**。 本文其余部分的组织如下。在第2节，我们回顾 [27] 关于谱三元组半经典 Weyl 定律的主要结果。在第 3节，我们回顾有关共形尖点度量的主要定义。在第 4节，我们构造与狄拉克算子相关的谱三元组，并建立该算子的半经典 Weyl 定律。在第 5节，我们建立磁拉普拉斯算子的相应结果。在第 6节，我们得到 Hodge 拉普拉斯算子的半经典 Weyl 定律。在第 7节，我们回顾 Connes 积分以及 [27]的积分公式。在第 8节，我们推导狄拉克算子、磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子的积分公式。在第 9节，我们处理无限体积的共形尖点度量。

**致谢**。作者谨感谢 Sergiu Moroianu 就本文主题进行的多次讨论。本文研究部分由国家自然科学基金委员会项目（编号：11971328，中国）资助。

## 2. Semiclassical Weyl Laws for Spectral Triples

本 节中，我们回顾 [27] 关于谱三元组半经典 Weyl 定律的主要结果 s.

2.1. **谱三元组**。在非交换几何框架下，非交换流形由谱三元组$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$表示，其中 $\mathcal{A}$是由有界算子表示在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的（含幺） $*$-代数，而 $D$ 是作用于 $\mathcal{H}$上的无界自伴算子，具有紧预解式，且交换子 $[D, a]$、 $a \in \mathcal{A}$均为有界算子。维数的概念由 $p$-可和性取代，其含义是 $D^{-1}$ 属于弱 Schatten 类 $\mathscr{L}_{p,\infty}$。也就是说，

$$\mu_j(D^{-1}) = \mathrm{O}\left(j^{-\frac{1}{p}}\right) \qquad \text{as } j \to \infty,$$

其中， $\mu_0(D^{-1}) \geq \mu_1(D^{-1}) \geq \cdots$是 $D^{-1}$的奇异值，即其绝对值 $|D^{-1}|$的特征值。

谱三元组的主要原型是与任意闭黎曼自旋流形（$M^n$， $g$）相关联的 Dirac 谱三元组（$C^\infty(M)$ $L^2(M,\ \$)$ $\not{D}_g$）。一个密切相关的例子是平方根拉普拉斯谱三元组（$C^\infty(M)$ $L^2(M)$ $\sqrt{\Delta_g}$）。在这两种情况下，我们都有 $n$-可求和的谱三元组，其中 $n=$维为 $M$。

2.2. 半经典 Weyl 定律。Birman–Schwinger 算子特征值的谱渐近构成了 Birman–Solomyak 算子理论半经典分析方法的基石 [2, 6]（另见 Simon [33]）。对于闭黎曼流形（$M^n, g$），任意连续（或甚至属于某个 $L^p$-空间的）实值势 $V(x)$，Birman–Schwinger 原理将 Birman–Schwinger 算子 $K_V^{(q)}(\lambda) := \Delta_g^{-q/2}(V-\lambda)\Delta_g^{-q/2}, q>0, \lambda\in\mathbb{R}$ 的 Weyl 定律与分数阶 Schrödinger 算子 $H_V^{(q)}(h) := h^{2q}\Delta_g^q + V$ 的半经典 Weyl 定律联系起来。具体而言，若 $N(H_V^{(q)}(h);\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 是 $H_V^{(q)}(h)$ 的计数函数，则

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\big(H_V^{(q)}(h);\lambda\big) = \lim_{j\to\infty} j\lambda_j^-\big(K_V^{(q)}(\lambda)\big)^{\frac{n}{2q}} = c(n)\int_M (V(x)-\lambda)_-^{\frac{n}{2q}}\, d\nu_g(x).$$

第一个等式是 Birman–Schwinger 原理。第二个等式由 Birman–Solomyak 关于负阶 $\Psi$微分算子的魏尔定律得出。对于 $q=1$，这给出了 Colin de Verdi`ere 的半经典 Weyl 定律 [9]，且没有余项。

假设 $(\mathscr{A},\ \mathscr{H},\ D)$ 是一个 $p$-可求和谱三元组。令 $\mathscr{A}$为 $\mathscr{A}$在 $\overline{\ }$ $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中的闭包（这是一个 $C^*$-代数）。记 $\mathscr{A}_{++}$ 为 $\mathscr{A}$中正可逆元素构成的锥。对于每个$a\in\mathscr{A}_{++}$，算子 $aD^2a$ 都有非负离散谱，因此我们可以将其特征值排列成一个非递减数列，

$$\lambda_0\left(aD^2a\right) \le \lambda_1\left(aD^2a\right) \le \lambda_2\left(aD^2a\right) \le \cdots,$$

其中每个特征值都按其重数重复出现。我们假设，对所有 $a\in\mathscr{A}_{++}$，都有

$$\lim_{j\to\infty} j^{-\frac{2}{p}}\lambda_j\big(aD^2a\big) = \tau\big[a^{-p}\big]^{-\frac{2}{p}}, \tag{2.1}$$

其中 $\tau:\ \overline{\mathscr{A}}\to\mathbb{C}$ 是一个给定的正线性映射（它不依赖于 $a$）。这个谱条件称为条件（$W$），见 [27]。这相当于要求平方 $D^2$的共形变形满足魏尔定律；这里的共形变形是按照 Connes–Moscovici [11]的意义理解的。

**定理 2.1** ([27, 定理 B])。假设满足条件（W）。给定任意 $q>0$ 和$V^*=V\in\mathscr{A}$，对于每个能级 $\lambda\in\mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{h\to 0^+} h^p N\big(h^{2q}(D^2)^q + V;\lambda\big) = \tau\Big[(V-\lambda)_-^{\frac{p}{2q}}\Big]. \tag{2.2}$$

与 [20], 不同，上述定理对任意可和度 $p>0$均成立，且对谱三元组没有额外的正则性要求。根据 Birman–Schwinger 原理，该定理是 Birman–Schwinger 算子 $|D|^{-q}(V-\lambda)|D|^{-q}$的魏尔定律的推论；这些定律也在 [27]中得到证明（参见第 7节）。

应用定理 2.1需要两个步骤：

(1) 构造一个谱三元组 $(\mathscr{A},\ \mathscr{H},\ D)$。尤其重要的是，要证明交换子 $[D,a], a\in\mathscr{A}$ 有界。

(2) 验证满足条件（W）。

## 3. Conformally Cusp Metrics

本文中，我们始终设 $X^n$ 为一个开流形，它是带有无边界边界 $M^{n-1}=\partial X$的紧流形 $X$ 的内部。设 $\overline{x}$ 为一个边界定义函数，即， $x$ 是 $\overline{X}$ 上的非负光滑函数，满足 $x^{-1}(0)=M$ 且在 $M$ 上 $dx\neq 0$。我们假设 $X$ 赋有如下形式的黎曼度量，

$$g = x^{2r}g_0, \qquad r>0,$$

其中， $g_0$ 是 $X$上的尖点度量，即一种（完备）黎曼度量，在 $M$ 附近的局部坐标下具有如下形式，

$$g_0 = a_{00}(x,y)x^{-4}dx^2 + \sum_{1\le j<n} a_{0j}(x,y)x^{-2}dxdy^j + \sum_{1\le i,j<n} h_{ij}(x,y)dy^i dy^j.$$

此外，若 $a_{00|M} = 1$ 且 $a_{0j|M} = 0$ 对于 $j = 1,\dots,n-1$, 则（沿用 Melrose [22]的说法）称 $g_0$ 为精确的尖点度量。注意，尖点度量 $g_0$ 在 $M$ 上诱导出的度量为，

$$h_0 := \sum_{1\le i,j<n} h_{ij}(0,y)dy^i dy^j. \tag{3.1}$$

条件 $r > 1/n$ 恰好确保（$X, g$）具有有限体积。此外，（$X, g$）是完备黎曼流形，当且仅当 $r \le 1$ （见 [15, 25]）。除第 9节讨论 $0 < r \le 1/n$的情形外，本文始终假设 $r > 1/n$ 。

具有 $r > 1/n$ 的共形尖点度量的流形示例包括有限体积的双曲度量（此时 $r = 1$；见 [24]）。另一类示例是 Cheeger [8] 意义下的度量喇叭（另见 [16]），其满足 $r > 1$。特别是，这些度量并不完备。

## 4. Semiclassical Weyl Laws for Dirac Operators

进一步假设 $X$ 是自旋流形。记 $\not{D}_g$ 为作用于 $X$ 上的旋量丛截面的狄拉克算子 $\not{S}_X$。此外，记 $\not{D}_{h_0}$ 为关于度量（3.1）的狄拉克算子。我们还作如下假设：

- $g_0$ 是精确尖点度量。
- $\ker \not{D}_{h_0} = \{0\}$，即 $M$上不存在（非零）调和旋量。

例如，若（$M$， $h_0$）的标量曲率非负且在某点非零，则第二个条件成立。已知当 $M$ 的维数为 $\le 4$ ，或其基本群 $\pi_1(M)$ 平凡或为奇数阶循环群时，对于一般度量，该条件也成立（参见 [24, 第 3] 页及其中的参考文献）。

我们有一个自然的酉同构 $U\colon L^2_{g_0}(X, \not{S}_X) \to L^2_g(X, \not{S}_X)$，其定义为

$$U\phi = x^{-\frac{nr}{2}}\phi, \qquad \phi \in L^2_{g_0}(X, \not{S}_X). \tag{4.1}$$

如 [24], 所观察到的，在这些假设下，共轭算子 $\hat{} D_g := U^*\not{D}_g U$ 是一个类型为 $(1, r)$ 的完全椭圆尖点微分算子。完全椭圆性意味着 $\hat{}x^r D_g$ 的主符号可逆，且其正规算子

$$\mathcal{N}(x^r\hat{D}_g)(\xi) := (e^{i\xi/x}x^r\hat{D}_g e^{-i\xi/x})_{|M}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}$均可逆。这确保了在 Melrose 的尖点伪微分演算中，$\hat{} D_g^2$ 存在拟逆（参见例如 [23, 附录 A]）。利用这一 ΨDO 演算，可得以下结果。

(i) $\not{D}_g$在定义域 $C_c^\infty(X, \not{S}_X)$ 上于 $L^2_g(X, \not{S}_X)$ 中本质自伴，且具有紧预解式。因此，其谱由孤立的实特征值组成，且每个特征值的重数有限（另见 [1] 中关于情形 $r = 1$的讨论）。(ii) 对每个 $z \in \mathbb{C}$，幂 $|\not{D}_g|^z$ 满足 $U^*|\not{D}_g|^z U = |\hat{} D_g|^z$ 是一个类型为 $(z, rz)$ 的尖点 ΨDO。特别地，当 $\Re z < -n$时它属于迹类。(iii) ζ 函数 $\zeta_{\not{D}_g}(z) := \mathrm{Tr}[|\not{D}_g|^{-z}]$, $\Re z > n$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$, 且其极点至多位于 $(n - \mathbb{N}_0) \cup (r^{-1} - r^{-1}\mathbb{N}_0)$ 上。(iv) 第一个极点出现在 $z = n$。该极点为简单极点，其留数为

$$\mathrm{Res}_{z=n}\zeta_{\not{D}_g}(z) = n\not{c}(n)\,\mathrm{Vol}_g(X), \qquad \text{where } \not{c}(n) := 2^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}(2\pi)^{-n}|\mathbb{B}^n|.$$

(v) 根据伊克哈拉陶伯定理，这意味着当 $j \to \infty$ 时，我们得到 Weyl 定律 w,

$$\lambda_j(\not{D}_g^2) \sim j^{\frac{2}{n}}\big(\not{c}(n)\,\mathrm{Vol}_g(X)\big)^{-\frac{2}{n}}.$$

牢记这一点，为了得到一个谱三元组，我们使用 $*$-代数，

$$\dot{C}^\infty(X) = \mathbb{C}1 + C_c^\infty(X).$$

也就是说， $C^\infty(X)$ 是定义在 $X$ 上、在边界 $M = \partial X$附近为常数的 $C^\infty$ 函数代数。它在 $\overline{L_g^2}(X, \not{S}_X)$ 上由有界乘法算子表示。其范数闭包是 $C^*$ 代数，

$$\dot{C}(X) := \mathbb{C}1 + C_0(X),$$

其中 $C_0(X)$ 是定义在 $X$ 上、在边界 $M$附近趋于 0 的连续函数构成的理想。因此， $C(X)$ 由定义在 $X$ 上且在边界上为常数的连续函数构成。若 $f$ 是这样的函数，我们用 $f_0 \in \mathbb{C}$ 表示其边界值。

若$Cf^\infty \in \dot{X})$，则 $[\not{D}_g, f] = c(df)$ 是 End $\not{S}_X$ 的一个紧支撑截面，因此它在 $L_g^2(X, \not{S}_X)$ 上有界。由此我们得到一个谱三元组，

$$\left(\dot{C}^\infty(X), L_g^2(X, \not{S}_X), \not{D}_g\right). \tag{4.2}$$

这个谱三元组是 $n$-可求和的。

设 $f \in C^\infty(X)$ 是定义在 $> 0$ 上的 $X$ ，且具有正边界值。乘以 $f$与酉同构 $U$ （由 4.1）给出）可交换。因此，

$$U^*(f\not{D}_g^2 f)U = f(U^*\not{D}_g U)^2 f = f\hat{D}_g^2 f.$$

算子 $f\hat{}D_g^2 f$ 是一个类型为 $(2,\ 2r)$ 的完全椭圆尖点微分算子，因为它的主符号 $f^2|\xi|_{g_0}^2$和正规算子 $f_0^2\mathcal{N}(x^r\hat{}D_g)^2$均为正。因此， [24] 的结果适用，故如同 $j \to \infty$ ，我们有 Weyl 定律:

$$\lambda_j\left(f\not{D}_g^2 f\right) \sim j^{\frac{2}{n}}\left(\not{c}(n)\int_X f(y)^{-n} d\nu_g(y)\right)^{-\frac{2}{n}}.$$

所有这些都表明，( $\dot{C}^\infty(X)$ $L_g^2(X,\ \not{S}_X)$ $\not{D}_g$) 是一个满足条件（W）的谱三元组，其中

$$\tau(f) = \not{c}(n)\int_X f(y) d\nu_g(y), \qquad f \in \dot{C}(X). \tag{4.3}$$

因此，定理 2.1 给出以下半经典 Weyl 定律。

**定理 4.1**。 设 $q > 0$，并假设 $g_0$ 是精确尖点度量，且 $M$上不存在非零调和旋量。给定任意实值势 $V \in C(X)$，对于每个能级 $\lambda \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\left(h^{2q}\left(\not{D}_g^2\right)^q + V; \lambda\right) = \not{c}(n)\int_X (V(y) - \lambda)_-^{\frac{n}{2q}} d\nu_g(y).$$

注 4.2。 正如 Sergiu Moroianu 向作者指出的， [25], 在 $r = 1,\ 2$ 的情形下，我们可以将 $C^\infty(X)$ 替换为一个更大的代数，从而在 (4.2) 中得到一个谱三元组。对于 $r = 1$ (即几何尖点情形)，我们可以使用在边界上光滑且在$M$上为常数的函数代数。对于 $r = 2$，还需要进一步要求法向导数（即 $\partial f/\partial x$）在 $M$上也为常数。无论哪种情形，我们得到的范数闭包 $C(X)$ 与使用 $C^\infty(X)$ 得到的相同，因此这不会影响我们的主要结果。

## 5. Semiclassical Weyl Laws for Magnetic Laplacians

我们不再假设 $X$ 具有自旋。$(X,\ g)$ 的普通拉普拉斯算子不一定具有离散谱（例如参见 [13]）。然而，正如 Gol´enia–Moroianu [14] 所观察到的，将拉普拉斯算子与具有捕获作用的磁场耦合，可得到一个具有离散谱的完全椭圆尖点微分算子。这类算子出现在阿哈罗诺夫–玻姆效应的研究中。

更确切地说，设 $B$ 是形如 $B = dA$ 的磁场，其中矢势 $A$ 是一个尖点实 1-形式，即在 $X$ 上光滑的实 1- 形式，并且在 $M$ 附近具有如下形式:

$$A = a_0(x, y)x^{-2}dx + \omega, \qquad \iota_{\partial_x}\omega = 0, \tag{5.1}$$

其中 $a_0(x,\ y)$ 且 $\omega$ 在边界上光滑。令 $A_0 = \omega_{|M}$。按照 [14] 的说法，若满足以下两个条件之一，则称 $A$ 在给定的连通分支 上是捕获的 $M_0 \subseteq M$：

- $a_0(0,\ y)$ 在 $M_0$ 上不是常数。
- 或者 $A_0$ 在 $M_0$ 上不是闭的，或者它是闭的，但其在 $H^1(M_0,\ \mathbb{R})$ 中的上同调类不属于 $2\pi H^1(M_0;\ \mathbb{Z})$，也就是说，$(2\pi)^{-1}A_0$ 定义了一个非整上同调类。

我们称 $A$ 在 $M$ 上具有捕获性，如果它在每个连通分支上都具有捕获性。

磁拉普拉斯算子 是定义在 $X$ 上的微分算子，其定义为

$$\Delta_A := d_A^* d_A, \qquad d_A = d + iA \wedge \cdot,$$

其中 $d\colon\ C_c^\infty(X) \to C_c^\infty(X,\ T^*X)$ 是德拉姆微分。

如 [14]，所示，如果 $A$ 具有捕获性，那么 $\Delta_A$ 是一个类型为 $(2,\ 2r)$ 的完全椭圆尖点微分算子。因此，与狄拉克算子的平方相同，定义域为 $C_c^\infty(X)$ 的算子 $\Delta_A$ 在 $L_g^2(X)$ 上是本质自伴的，并且具有紧预解式。此外，我们有 Weyl 定律:

$$\lambda_j\left(\Delta_A\right) \sim j^{\frac{2}{n}}\left(c(n)\operatorname{Vol}_g(X)\right)^{-\frac{2}{n}}, \qquad c(n) := (2\pi)^{-n}|\mathbb{B}^n|.$$

如果 $f \in \dot{C}^\infty(X)$，那么 $\overline{[\sqrt{\Delta_A}, f]} = \overline{[\sqrt{\Delta_A}, f - f_0]}$。这里，$f - f_0 \in C_c^\infty(X)$，因此 $\overline{\sqrt{\Delta_A}(f - f_0)}$ 和 $\overline{(f - f_0)\sqrt{\Delta_A}}$ 都是类型为 $(1, -\infty)$、具有相同主符号且正规算子为零的尖点 ΨDO。由此可知，$[\sqrt{\Delta_A}, f]$ 是类型为 $(0, -\infty)$ 的尖点 ΨDO，因此在 $L_g^2(X)$ 上有界。于是我们得到一个谱三元组，

$$\left(\dot{C}^\infty(X), L_g^2(X), \sqrt{\Delta_A}\right). \tag{5.2}$$

与 Dirac 谱三元组（4.2）一样，该谱三元组是 $n$-可求和的。

如果 $f \in C^\infty(X)$ 在 $X$ 上是 $>0$ 且具有正边界值，那么 $f\Delta_A f$ 再次是一个类型为 $(2, 2r)$ 的完全椭圆尖点微分算子。事实上，$x^{2r} f\Delta_A f$的主符号是 $f^2|\xi|_{g_0}^2$，其正规算子为 $\mathcal{N}(x^{2r} f\Delta_A f)(\xi) = f_0^2\mathcal{N}(x^{2r}\Delta_A)(\xi)$。因此，与 $\not{D}_g^2$ 的情形相同，由于 $j \to \infty$，我们有 Weyl 定律，

$$\lambda_j\left(f\Delta_A f\right) \sim j^{\frac{2}{n}}\left(c(n)\int_X f(y)^{-n} d\nu_g(y)\right)^{-\frac{2}{n}}. \tag{5.3}$$

由此可知，$(\dot{C}^\infty(X)\ L_g^2(X)\ \sqrt{\Delta_A})$ 是一个满足条件（W）的谱三元组，其中

$$\tau(f) = c(n)\int_X f(y) d\nu_g(y), \qquad f \in \dot{C}(X). \tag{5.4}$$

因此，与狄拉克算子情形相同，定理 2.1 给出了以下半经典 Weyl 定律。

**定理 5.1**。设 $q > 0$，并假设 1-形式 $A$ 是捕获的。对于任意实值势$V \in C(X)$ 以及任意能级 $\lambda \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{h \to 0^+} h^n N\left(h^{2q}\Delta_A^q + V; \lambda\right) = c(n)\int_X (V(y) - \lambda)_-^{\frac{n}{2q}} d\nu_g(y). \tag{5.5}$$

注 5.2。关于 [21, 32] 上磁性薛定谔算子的 Cwikel–Lieb–Rozenblum 不等式和半经典 Weyl 定律，请参见¨、 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$。

备注 5.3。我们还请参阅 [17]，其中讨论了双曲空间 $\mathbb{H}^n$，$n \geq 3$上的 Schr¨odinger 算子的半经典 Weyl 定律。

## 6. Semiclassical Weyl Laws for Hodge Laplacians

本节将说明，Gol´enia–Moroianu [15] 的结果如何使我们能够得到（$X$，$g$）上的 Hodge 拉普拉斯算子的半经典 Weyl 定律。与第 5节一样，我们不假设 $X$ 是自旋的，也不假设 $g_0$ 是精确尖点度量。

给定 $k \in \{0,1,\dots,n\}$，令 $\Delta_g^{(k)} = d^*d + dd^*$ 为作用于定义域为 $C_c^\infty(X,\Lambda^k T^*X)$ 的 $k$-形式上的 Hodge 拉普拉斯算子。记 $b_j(M)$，$j = 0,1,\dots,n-1$ 为 $M$ 的贝蒂数。如 [15, 命题 3.1], 所示，算子 $\Delta_g^{(k)}$ 属于 $x^{-2r}\mathrm{Diff}_c^2(X,\Lambda^k({}^cTX))$，它是尖点椭圆的，并且 $x^{2r}\Delta_g^{(k)}$ 完全椭圆当且仅当 $b_{k-1}(M) = b_k(M) = 0$。

从现在起，我们假设 $b_{k-1}(M) = b_k(M) = 0$。注意，该条件对 $k = 0,1$ 不成立。若 $M$ 至少有一个可定向连通分支，则该条件对 $k = n-1, n$ 也不成立（见 [15]）。在此假设下，[15, 推论 3.2 和定理 1.2] 中给出了以下结果。

(i) 算子 $\Delta_g^{(k)}$在 $L_g^2(X,\Lambda^k T^*X)$ 上本质自伴，且具有纯离散谱。此外，其自伴扩张的定义域为加权尖点 Sobolev 空间$x^{2r}H_c^2(X,\Lambda^k T^*X)$，其定义见 [15]。(ii) $\Delta_g^{(k)}$的复幂是尖点 ΨDO，而 ζ 函数 $\mathrm{Tr}[(\Delta_g^{(k)})^{-z/2}]$, $\Re z > n$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$。当 $r > 1/n$ 时，其第一个极点是单极点，位于$z = n$，其留数为

$$(2\pi)^{-n}\binom{n}{k}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|\mathrm{Vol}_g(X) = nc(n,k)\,\mathrm{Vol}_g(X),$$

其中我们令 $c(n,k) := \binom{n}{k}c(n) = (2\pi)^{-n}\binom{n}{k}|\mathbb{B}^n|$。

(iii) 当 $j \to \infty$ 时，我们有 Weyl 定律:

$$\lambda_j\big(\Delta_g^{(k)}\big) \sim j^{\frac{2}{n}}\big(c(n,k)\,\mathrm{Vol}_g(X)\big)^{-\frac{2}{n}}.$$

如果 $f \in \dot{C}^\infty(X)$，那么，由于 $\Delta_g^{(k)}$具有标量主符号，与磁拉普拉斯算子的情形相同，我们看到 $[\sqrt{\Delta_g^{(k)}}, f] = [\sqrt{\Delta_g^{(k)}}, f - f_0]$ 是一个类型为 $(0,\ -\infty)$ 的尖点 ΨDO，因此在 $L_g^2(X,\Lambda^k T^*X)$ 上有界。于是我们得到了一个谱三元组，

$$\left(\dot{C}^\infty(X), L_g^2(X,\Lambda^k T^*X), \sqrt{\Delta_g^{(k)}}\right). \tag{6.1}$$

这个谱三元组是 $n$-可求和的。

设 $f \in \dot{C}^\infty(X)$ 作用于 $X$ 上，是 $>0$，并具有正边界值 $f_0$。那么，$f\Delta_g^{(k)}f$ 是 $x^{-2r}\mathrm{Diff}_c^2(X,\Lambda^k({}^cTX))$ 中的对称尖点椭圆算子，且 $x^{2r}f\Delta_g^{(k)}f$ 的主符号为 $f^2|\xi|_{g_0}^2$。此外，$x^{2r}f\Delta_g^{(k)}f$ 的正规算子为 $f_0^2\mathscr{N}(x^{2r}\Delta_g^{(k)})$，因此 $x^{2r}f\Delta_g^{(k)}f$ 是完全椭圆的。因此，如同磁拉普拉斯算子的情形，[15, 24] 的结果适用，所以对于 $j \to \infty$，我们得到 Weyl 定律，

$$\lambda_j\big(f\Delta_g^{(k)}f\big) \sim j^{\frac{2}{n}}\left(c(n,k)\int_X f(y)^{-n}d\nu_g(y)\right)^{-\frac{2}{n}}.$$

由此可知，谱三元组（6.1）满足条件（W），其中

$$\tau(f) = c(n,k)\int_X f(y)d\nu_g(y), \qquad f \in \dot{C}(X). \tag{6.2}$$

因此，定理 2.1 给出如下半经典 Weyl 定律。

**定理 6.1**。设 $q > 0$和 $k \in \{0,1,\dots,n\}$，并假设 $b_{k-1}(M) = b_k(M) = 0$。对于任意实值势 $V \in C(X)$ 以及每个能级 $\lambda \in \mathbb{R}$，有

$$\lim_{h\to 0^+} h^n N\Big(h^{2q}\big(\Delta_g^{(k)}\big)^q + V;\lambda\Big) = c(n,k)\int_X (V(y)-\lambda)_-^{\frac{n}{2q}}d\nu_g(y).$$

注 6.2。 正如 [15], 中所指出的，假设 $b_{k-1}(M) = b_k(M) = 0$ 确保 $\Delta_g^{(k)}$无论度量 $g$ 是否完备，都具有本质自伴性和纯离散谱。特别地， $r > 1$ 定理 6.1 为我们提供了关于非完备黎曼流形上 Hodge 拉普拉斯算子的半经典 Weyl 定律。

## 7. Connes' Integration Formulas for Spectral Triples

本节回顾 Connes 积分以及 [27] 关于谱三元组积分公式的主要结果。

**7.1. Connes 积分。** 在非交换几何的框架下，积分的作用由弱迹类 $\mathscr{L}_{1,\infty}$ 上的（归一化）正迹承担，尤其是 Dixmier 迹（见 [10]）。算子 $A \in \mathscr{L}_{1,\infty}$ 称为可测的，如果它在所有 Dixmier 迹下取值相同。等价地， $A$ 可测当且仅当

$$\fint A := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{j<N} \lambda_j(A) \text{ exists},$$

其中 $\{\lambda_j(A)\}$ 是 $A$ 的特征值序列（见 [19, 26]）。极限 $\fint A$ 恰好是 $A$的非交换积分。更强的可测性概念（称为强可测性）还要求 $A$在所有归一化正迹下取值相同。

例如，若 $(M^n, g)$ 是一个闭黎曼流形，其（正）拉普拉斯算子为 $\Delta_g$，那么 Connes 积分公式断言，对于每个 $f \in C(M)$，算子 $f\Delta_g^{-n/2}$都是强可测的，且

$$\fint f\Delta_g^{-\frac{n}{2}} = c(n) \int_M f(x) d\nu_g(x),$$

其中 $c(n)$ 是（1.1）中的常数，而 $\nu_g(x)$ 是黎曼测度。这表明非交换积分恢复了黎曼测度。

这种强可测性概念与弱 Schatten 类中算子的特征值所满足的魏尔定律密切相关。具体而言，若 $T = T^* \in \mathscr{L}_{1,\infty}$，则称 $T$是谱可测的，如果极限 $\lim_{j\to\infty} j\lambda_j^{\pm}(T)$ 均存在，此时有

$$\fint T = \lim_{j\to\infty} j\lambda_j^+(T) - \lim_{j\to\infty} j\lambda_j^-(T).$$

谱可测性蕴含强可测性（例如参见 [26]），但反之不成立（例如参见 [31]）。

**7.2. 谱三元组的积分公式。** 设 $(\mathscr{A}, \mathscr{H}, D)$ 是满足条件（W）（见第 2节）的 $p$-可求和谱三元组。文献 [27] 证明，对于任意 $q > 0$，对每个 $a \in \mathscr{A}$，都有

$$\lim_{j\to\infty} j^{\frac{q}{p}} \mu_j\left(|D|^{-\frac{q}{2}} a |D|^{-\frac{q}{2}}\right) = \lim_{j\to\infty} j^{\frac{q}{p}} \mu_j\left(a|D|^{-q}\right) = \tau\left[|a|^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}}. \tag{7.1}$$

此外，若 $a$ 是自伴的，则有魏尔定律，

$$\lim_{j\to\infty} j^{\frac{q}{p}} \lambda_j^{\pm}\left(|D|^{-\frac{q}{2}} a |D|^{-\frac{q}{2}}\right) = \tau\left[\left(a_\pm\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}}, \tag{7.2}$$

其中， $a_\pm = \frac{1}{2}(|a| \pm a)$ 是 $a$ 的正部和负部（见 [27, 命题 A]）。

如第 2 节所述，根据 Birman–Schwinger 原理，这些魏尔定律蕴含半经典 Weyl 定律（2.2）。它们还导出以下积分公式。

**定理 7.1** ([27, 定理 C])。 假设条件 (W) 得到满足。对于任意 $a \in \mathscr{A}$，算子 $a|D|^{-p}$ 和 $|D|^{-p/2}a|D|^{-p/2}$及其绝对值都是谱可测的，

并且有

$$\fint a|D|^{-p} = \fint |D|^{-\frac{p}{2}} a |D|^{-\frac{p}{2}} = \tau\big[a\big], \tag{7.3}$$

$$\fint \big|a|D|^{-p}\big| = \fint \big||D|^{-\frac{p}{2}} a |D|^{-\frac{p}{2}}\big| = \tau\left[|a|\right]. \tag{7.4}$$

## 8. Integration Formulas on Open Manifolds

本节将推导开流形（$X$， $g$）上狄拉克算子、磁拉普拉斯算子和 Hodge 拉普拉斯算子的积分公式。

8.1. **狄拉克算子**。假设第4 节的条件成立，即$X$ 带有自旋结构， $g_0$ 是精确尖点度量，并且 $M$上没有非零调和旋量。如第4节所示，谱三元组（4.2）满足条件（W），其中

$$\tau(f) = \not{c}(n) \int_X f(y) d\nu_g(y), \qquad f \in \dot{C}(X)$$

（见（4.3））。因此，利用定理7.1 可得以下积分公式 s.

**定理 8.1**。对于每个 $f \in \dot{C}$（$X$），算子 $f|\not{D}_g|^{-n}$ 和 $|\not{D}_g|^{-n/2} f |\not{D}_g|^{-n/2}$及其绝对值均为谱可测，并且有

$$\fint f|\not{D}_g|^{-n} = \fint |\not{D}_g|^{-\frac{n}{2}} f |\not{D}_g|^{-\frac{n}{2}} = \not{c}(n) \int_X f(y) d\nu_g(y),$$

$$\fint \big|f|\not{D}_g|^{-n}\big| = \fint \big||\not{D}_g|^{-\frac{n}{2}} f |\not{D}_g|^{-\frac{n}{2}}\big| = \not{c}(n) \int_X |f(y)| d\nu_g(y).$$

8.2. **磁拉普拉斯算子与 Hodge 拉普拉斯算子**。在下文中，我们令 $\Delta$为以下算子之一：

- 磁拉普拉斯算子 $\Delta_A$，其中 1-形式 $A$ 具有捕获性质（见第5节）。在这种情况下，我们设 $c_\Delta := c(n)$。
- Hodge 拉普拉斯算子 $\Delta_{(k)g}$ 作用于 $k$-形式，其中 $b_{k-1}(M) = b_k(M) = 0$ （见第 6节）。在这种情况下，我们设 $c_\Delta := c(n, k)$。

如第 5 节和第6节所示，谱三元组（5.2）（分别为（6.1））满足条件（W），其中

$$\tau(f) = c_\Delta \int_X f(y) d\nu_g(y), \qquad f \in \dot{C}(X)$$

（见（5.4）和（6.2））。因此，利用定理7.1 可得以下积分公式。

**定理 8.2**。 对于每个函数 $f \in \dot{C}(X)$，算子 $f\Delta^{-n/2}$ 和 $\Delta^{-n/4} f \Delta^{-n/4}$及其绝对值都是谱可测的，并且有

$$\fint f\Delta^{-\frac{n}{2}} = \fint \Delta^{-\frac{n}{4}} f \Delta^{-\frac{n}{4}} = c_\Delta \int_X f(y) d\nu_g(y),$$

$$\fint \big|f\Delta^{-\frac{n}{2}}\big| = \fint \big|\Delta^{-\frac{n}{4}} f \Delta^{-\frac{n}{4}}\big| = c_\Delta \int_X |f(y)| d\nu_g(y).$$

注记 8.3。 关于一类磁性薛定谔算子 $\Delta_A + V$ 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$上的逆算子的强可测性性质和非交换积分公式，请参阅 [18] 。请注意，在 [18] 中，可测性是相对于与函数（$t+1$）$^{-1}$log（$t+2$）相关联的弱洛伦兹理想而言的，而这超出了本文的讨论范围。

## 9. Conformally Cusp Metrics of Infinite Volume

本节中，我们考察满足 $0 < r \leq 1/n$ 的共形尖点度量 $g = x^{2r} g_0$ 。在这种情况下，($X$， $g$) 是完备的，且具有无限体积。下文中，我们令 $\Delta$ 为以下算子之一：

- 狄拉克算子的平方 $\not{D}_g^2$，其中 $X$ 是自旋，$g_0$ 是精确尖点度量，并且 $M$ 上不存在非零调和旋量（参见第4节）。
- 磁拉普拉斯算子 $\Delta_A$，其中 1-形式 $A$ 具有捕获性（见第 5节）。
- Hodge 拉普拉斯算子 $\Delta_{(k)g}$ 作用于 $k$-形式，其中 $b_{k-1}(M) = b_k(M) = 0$（见第 6节）。

我们将对应的希尔伯特空间记为 $\mathscr{H}$，即 $L^2_g(X, \not{S}_X)$、$L^2_g(X)$ 或 $L^2_g(X, \Lambda^k T^*X)$。

第 [24, 14, 15] 节中用于第 4–6 节的结果对所有 $r > 0$均成立，但 Weyl 定律的精确形式除外。特别地，算子 $\Delta$ 在 $\mathscr{H}$ 上本质自伴且具有紧预解式；并且（在狄拉克情形下，除共轭变换 (4.1) 外）它是一个类型为 $(2, 2r)$ 的完全椭圆尖点微分算子。此外，与第 4–6 节中的做法相同，我们得到一个谱三元组，

$$\big(\dot{C}^\infty(X), \mathscr{H}, \sqrt{\Delta}\big). \tag{9.1}$$

（在狄拉克情形下，我们可以将 $\sqrt{\Delta} = |\not{D}_g|$ 替换为 $\not{D}_{g_0}$。）

**9.1. 情形 $r < 1/n$。** 假设 $r < 1/n$。那么，根据 [24, 定理 3], [14, 定理 4.2], 和[15, 定理 1.2], ，存在一个常数 $\gamma_\Delta > 0$，使得当 $j \to \infty$ 时，有 Weyl 定律:

$$\lambda_j(\Delta) \sim \left(\frac{j}{\gamma_\Delta}\right)^{2r}. \tag{9.2}$$

特别地，谱三元组（9.1）是 $r^{-1}$-可求和的。在狄拉克情形下，我们有

$$\gamma_\Delta = \epsilon_n \frac{\Gamma\big(\frac{1-r}{2r}\big)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\frac{1}{2r}\big)}\,\zeta\big(\not{D}_{h_0}; r^{-1} - 1\big), \tag{9.3}$$

其中 $\zeta(\not{D}_{h_0}; z) := \mathrm{Tr}[|\not{D}_{h_0}|^{-z}]$, $\Re z > n - 1$ 是 $(M, h_0)$ 的狄拉克算子的 ζ 函数，并且当 $n$ 为奇数时 $\epsilon_n = 1$，当 $n$ 为偶数时 $\epsilon_n = 2$（见 [24, 定理 3]）。当 $g_0$ 为精确尖点度量时，磁拉普拉斯算子和霍奇拉普拉斯算子也有类似的公式（见 [14, 定理 4.2]和 [15, 式（3.13）]）。因此，与 $r > 1/n$ 的情形不同，Weyl 定律（9.2）中的首项系数仅取决于无穷远处的几何。

**引理 9.1。** 假设 $r < 1/n$。设 $f \in C^\infty(X)$ 是定义在 $X$ 上的 $> 0$，且具有正边界值 $f_0$。那么，当 $j \to \infty$ 时，我们有

$$\lambda_j(f\Delta f) \sim \left(\frac{j}{\gamma_\Delta f_0^{-1/r}}\right)^{2r}.$$

证明。 如第 4–6 节所示，算子 $f\Delta f$（在狄拉克情形下，除经过酉算子 (4.1) 共轭外）是一个类型为 $(2, 2r)$ 的完全椭圆尖点微分算子，其正规算子为

$$\mathscr{N}\big(x^{2r} f\Delta f\big)(\xi) = f_0^2 \mathscr{N}\big(x^{2r}\Delta\big)(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{9.4}$$

注意，这并不要求 $r$ 是 $> 1/n$。因此，由 [24, 命题 2 和 3] 可知，函数 $z \to \mathrm{Tr}[(f\Delta f)^{-z/2}]$ 在 $\Re z > r^{-1}$ 上全纯，并可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$。当 $r < 1/n$ 时，其第一个极点位于 $z = r^{-1}$。该极点为单极点，其留数是一个常数倍（仅依赖于 $n$ 和 $r$）

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Tr}\Big[\mathscr{N}\big(x^{-1}(f\Delta f)^{-\frac{1}{2r}}\big)(\xi)\Big]\,d\xi.$$

由于正规算子映射具有乘法性，并且与复幂相容，由（9.4）可得 $\mathscr{N}(x^{-1}(f\Delta f)^{-1/2r})(\xi) = f_0^{-1/r}\mathscr{N}(x^{-1}\Delta^{-1/2r})(\xi)$. 因此，

$$\mathrm{Res}_{z=r^{-1}} \mathrm{Tr}\Big[(f\Delta f)^{-\frac{z}{2}}\Big] = f_0^{-\frac{1}{r}} \mathrm{Res}_{z=r^{-1}} \mathrm{Tr}\Big[\Delta^{-\frac{z}{2}}\Big].$$

将此结果与 Delange 的 Tauberian 定理（见 [24, 引理 5]）及 Weyl 定律（9.2）结合，即可得到所需结果。□

引理9.1 表明，对于 $r < 1/n$，谱三元组（9.1）满足条件（W），其中 $p = r^{-1}$且

$$\tau(f) = \gamma_\Delta f_0, \qquad f \in \dot{C}(X). \tag{9.5}$$

也就是说，除去常数 $\gamma_\Delta$外，泛函 $\tau$ 就是无穷远处的取值。注意， $f \to f_0$ 是代数 $C^*$-代数 $C(X)$ 的一个特征。特别地，对于所有实值函数 $\tau[\varphi(f)] = \gamma_\Delta \varphi(f_0)$，都有 $f \in C(X)$，以及 $\varphi \in C(\mathbb{R})$。因此，利用定理 2.1 和定理 7.1 ，我们得到如下结果。

**定理 9.2**。设 $0 < r < 1/n$，并令 $\Delta$ 和 $\gamma_\Delta$ 如上。

*(1)* 令 $q > 0$。对于任意实值势 $V \in C(X)$ 以及任意能级 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{h \to 0^+} h^{\frac{1}{r}} N\left(h^{2q}\Delta^q + V; \lambda\right) = \gamma_\Delta \left(V_0 - \lambda\right)_-^{\frac{1}{2qr}},$$

其中， $V_0$ 是 $V$ 的边界值。

*(2)* 对于每个函数 $f \in \dot{C}(X)$，算子 $f\Delta^{-1/2r}$ 和 $\Delta^{-1/4r} f \Delta^{-1/4r}$ 及其绝对值均为谱可测的，并且有

$$\fint f\Delta^{-\frac{1}{2r}} = \fint \Delta^{-\frac{1}{4r}} f \Delta^{-\frac{1}{4r}} = \gamma_\Delta f_0,$$
$$\fint \left|f\Delta^{-\frac{1}{2r}}\right| = \fint \left|\Delta^{-\frac{1}{4r}} f \Delta^{-\frac{1}{4r}}\right| = \gamma_\Delta |f_0|.$$

注 9.3： 定理 9.2 表明，对于 $r < 1/n$，半经典 Weyl 定律和积分公式只涉及无穷远处的取值。特别地，当 $V_0 \geq \lambda$时，第一部分中的半经典极限为零；而在第二部分中，当 $f \in C_0(X)$ 时，非交换积分为零。

9.2. **情形** $r = 1/n$。 现在假设 $r = 1/n$。在这种情况下， [24, 14, 15] 的结果为我们提供了非经典的 Weyl 定律。例如，在狄拉克情形下，当 $\lambda \to \infty$时，我们有

$$N\left(|\not{D}_g|; \lambda\right) \sim 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} (2\pi)^{-n} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \operatorname{Vol}_{h_0}(M) \lambda^n \log \lambda.$$

磁拉普拉斯算子和霍奇拉普拉斯算子也有类似的 Weyl 定律。因此，谱三元组（9.1）不是 $n$-可求和的，也不满足条件（W），所以 [27] 的结果不适用。

在这种情况下，逆算子 $|\not{D}_g|^{-1}$ 包含于一个弱洛伦兹理想中。 [30] 证明了$|\not{D}_g|^{-n}$ 相对于与函数 $(t+1)^{-1}\log(t+2)$ 相关的弱洛伦兹理想是谱可测的，并且其相对于该理想的非交换积分等于

$$\frac{1}{n} 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} (2\pi)^{-n} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \operatorname{Vol}_{h_0}(M).$$

因此，它重新得到了边界 $M$ 的体积。要在 $r = 1/n$ 的情形下获得半经典 Weyl 定律，需要将 [27] 的结果推广到谱三元组（$\mathscr{A}$， $\mathscr{H}$， $D$），其中 $D^{-1}$ 属于弱洛伦兹理想。我们希望在其他地方探讨这个问题。

## References


[1] B¨ar, C.: *The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume*. 微分几何杂志 **54** (2000), 439–488. [2] Birman, M.Sh.; Solomyak, M.Z.: *The leading term of the spectral asymptotics for "non-smooth" elliptic problems*. 函数分析及其应用 **4** 1970 265 275 ( ), – . [3] Birman, M.Sh.; Solomyak, M.Z.: *Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropically homogeneous symbols*. 列宁格勒大学学报 no. **13**, 3 1977 13 21 ( ), – (俄文). 列宁格勒大学学报，数学 **10** (1982), 237–247 (英文). [4] Birman, M.Sh.; Solomyak, M.Z.: *Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropically homogeneous symbols. II*. 列宁格勒大学学报 13, 3 1979 Mat. Mekh. Astronom. no. ( ), 5–10 (俄文). 列宁格勒大学学报，数学 **12** (1980), 155–161 (英文). [5] Birman, M.Sh.; Solomyak, M.Z.: *Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of elliptic equations*. 西伯利亚数学杂志 **20** 1979 1 15 ( ), – . [6] Birman, M.Sh.; Solomyak, M.Z.: *Schrödinger operator. Estimates for number of bound states as function-theoretical problem.* 算子谱理论（诺夫哥罗德，），–。美国数学会译丛第二辑，**150**，1992年，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。 1989 1 54

[7] Braverman, M.: *The semi-classical Weyl law on complete manifolds*. 美国数学会会刊 (2025年), doi:10.1090/proc/17571. [8] Cheeger, J.: *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*. 纯数学专题讨论会论文集，第36卷，第91–146页，美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，1980年。[9] Colin de Verdi
ere, Y.: *Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-differentiels qui commutent I. le cas non intégrable* **46** 1979 169 182
杜克数学杂志 ( ), – 。[10] Connes, A.: *Noncommutative geometry*. 学术出版社，美国加利福尼亚州圣迭戈，1994年。[11] Connes, A.; Moscovici, H.: *Type III and spectral triples*. 几何、数论与量子场论中的迹，《数学面面观》E38，Vieweg出版社，2008年，57–71。[12] Dai, X.; Yan, J.:
*Heat kernel approach to the Weyl law for Schrödinger operators on non-compact manifolds*. 预印本 arXiv:2504.15551, 28页。[13] Froese, R.; Hislop, P.D.: *Spectral analysis of second-order elliptic operators on noncompact manifolds*. 杜克数学杂志 58 (1989), 第1期，103–129。[14] Gol´enia, S.; Moroianu, S.:
*Spectral analysis of magnetic Laplacians on conformally cusp manifolds*. Ann. Henri Poincar´e 9 (2008), 131–179。[15] Gol´enia, S.; Moroianu, S.: *The spectrum of Schrödinger operators and Hodge Laplacians on conformally cusp manifolds* **364** 2012 1, 1 29 。美国数学会汇刊 ( ), 第 – 期。[16] Lesch, M.; Peyerimhoff, N.:
*On index formulas for manifolds with metric horns*. 偏微分方程通讯 23 (1998), 649–684。[17] Levin, D.; Solomyak, M.:
*The Rozenblum-Lieb-Cwikel inequality for Markov generators*. 分析与数学杂志 71 (1997), 173–193。[18] Levitina, G.; Usachev, A.: *Symmetric functionals on simply generated symmetric spaces*. 数学分析与应用杂志 546:1 (2025年)。[19] Lord, S.; Sukochev, F.; Zanin, D.: *Singular traces: theory and applications*. De Gruyter 数学研究丛书，第46卷，Walter de Gruyter，2012年，理论与应用。[20] McDonald, E.; Sukochev, F.; Zanin, D.: *Semiclassical Weyl law and exact spectral asymptotics in noncommutative geometry* **112**, 77 2022 45 . 数学物理通讯 ( ), 第页。[21] Melgaard, M.; Ouhabaz, E.-M.; Rozenblum, G.: *Negative discrete spectrum of perturbed multivortex Aharonov-Bohm Hamiltonians* ´ **5** 2004 5, 979 1012 . Ann. Henri Poincare ( ), 第 – 期。勘误见 Ann. Henri Poincar´e 6 (2005), 第2期，397–398。[22] Melrose, R.B.:
*The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*. 数学研究札记4，A.K. Peters，韦尔斯利（1993年）。[23] Melrose, R.B.; Nistor, V.: *Homology of pseudodifferential operators I. Manifolds with boundary*. 预印本，arXiv:funct-an/9606005, 47页。[24] Moroianu, S.: *Weyl laws on open manifolds*. 数学年刊 340 (2008), 1–21。[25] Moroianu, S.: 私人通信。[26] Ponge, R.: *Connes' integration and Weyl laws*. 非交换几何杂志 17 (2023), 第2期，719–767。[27] Ponge, R.:
*Noncommutative geometry, spectral asymptotics, and semiclassical analysis, I. Main results*. 预印本 arXiv:2604.15008。[28] Ponge, R.: *A noncommutative geometric approach to Birman–Solomyak's Weyl laws, with applications to Connes' trace theorem* . 预印本, arXiv，2026年12月，13页。[29] Ponge, R.: *Semiclassical Weyl laws on Carnot manifolds*. 编写中。[30] Ponge, R.; Tian, Y.: *Nonclassical Weyl laws and Connes' integration for weak Lorentz ideals, I*. 预印本 arXiv:2605.25591。即将发表于《非交换几何杂志》。[31] Ponge, R.; Tian, Y.: *Nonclassical Weyl laws and Connes' integration for weak Lorentz ideals, II*. 预印本 arXiv:2609.09568。[32] Rozenblum, G.; Solomyak, M.: *On the number of negative eigenvalues for the two-dimensional magnetic Schrödinger operator Differential operators and spectral theory* 2, 189, . , 美国数学会译丛第二辑，数学科学进展，41，美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，1999年，第205–217页。[33] Simon, B.:
*Analysis with weak trace ideals and the number of bound states of Schrödinger operators*. 美国数学会汇刊 224 (1976), 367–380。

Department of Mathematics and Statistics, University of Wyoming, Laramie, WY, USA
Department of Mathematics and Statistics、 University of Ottawa、
Canada*Email address*: ponge.math@icloud.com