arXiv:2611.29149v1 [math.LO] 22 Nov 2026

驯服菲奇悖论与亨伯斯通悖论

Jie Fan哲学研究所，中国科学院；中国科学院大学人文学院 jiefan@ucas.ac.cn

摘要

菲奇悖论指出，如果每个真命题都是可知的，那么每个真命题都是已知的。Humberstone 悖论指出，如果每个真命题都至少被有限多个主体中的一个所知，那么该集合中就有某个主体知道每个真命题。这两个悖论都会导致令人惊讶且不可接受的后果。在本文中，我们诊断出这些悖论背后一个关键的未明说的预设，即命题域对于交集和并集等布尔运算是封闭的，并提出一种统一的解决方案。我们论证，悖论性的推理隐含地依赖于这一封闭性假设。通过采用舍弃这些闭包条件的弱命题量化模态逻辑，我们提供了一种以语义为基础的解释，从而阻断这两个悖论。对全称实例化的限制并非特设的技术手段，而是反映了这样一种命题观：命题是认知态度能够把握的对象；在这一观点下，命题域不必对于布尔运算封闭，因为可把握命题的某些布尔组合本身可能并不可把握。

关键词：菲奇悖论、Humberstone 悖论、命题量化模态逻辑

1 引言

在一篇开创性著作中 [6], , Fitch 证明：如果每个真命题都是可知的，那么每个真命题都是已知的；或者等价地说，如果存在一个未知的真理，那么就存在一个不可知的真理。在文献中，这被称为“菲奇悖论”（也称为“菲奇可知性悖论”、“可知性悖论”或“丘奇-菲奇悖论”），例如参见 [2]。在相关的另一支文献中，Humberstone [9] 论证说：如果每个真命题都被一组有限多个主体中的至少一个所知，那么该组中就有某个主体知道每个真命题。这被称为“休姆伯斯通悖论” [1] 或“休姆伯斯通悖论” [11, 18]。

这两个悖论都会导致令人惊讶且无法接受的结论。可知性原则，即每个真命题都是可知的，曾被许多历史上的非实在论主张，例如迈克尔·达米特的语义反实在论、希拉里·普特南的内在实在论——

主义、柏林学派和维也纳学派的逻辑实证主义、皮尔士的实用主义、康德的先验唯心主义，以及贝克莱的形而上学唯心主义。菲奇悖论让我们从“相对温和且似乎合理”的可知性原则，走向“极不可信且显然为假”的全知原则（即每个真命题实际上都已为人所知） [15, pp. 1–2], , 从而消除了真理与知识之间的区别。鉴于相信每个真命题都可知的人，不应因此自动也相信

每个真命题都已为人所知，所以这种看法站不住脚。因此，我们需要找到一种方法，阻止菲奇论证得出前一个主张蕴涵后一个主张的结论。同样，似乎存在一种共享时空资源的分配方式，使所有主体能够通过个人和共同努力，最终得知所有真命题，而没有任何单一主体变得全知 [18, pp. 1183–1184], ；这一情形与休姆伯斯通悖论相矛盾。

自菲奇1963年的发表以来，围绕菲奇悖论已经形成了大量文献；参见 [2, 15] 及其中的参考文献。人们提出了许多处理方案，包括逻辑修正（如认知修正、直觉主义修正和次协调逻辑修正）、语义限制以及句法限制，其中 [2] 提供了一份全面的综述。

与广为人知的菲奇悖论相比，Humberstone 悖论受到的注意少得惊人。Bigelow 改写了 Humberstone 的论证， [1] 认为上帝存在。[1] Updike[18] 认为，即使不作知识对合取分配的假设（即，$K_a(p \wedge q) \rightarrow (K_a p \wedge K_a q)$），仍然可以重新得到Humberstone 悖论。两部作品都预设了 Humberstone 悖论的有效性。这个悖论与行动理论和神学等领域有关，参见 [11–13, 17, 18]。然而，鉴于其反直觉且不可接受的结果（例如 [1]），我们有理由寻求避免这一悖论。因此，一个自然的问题随之产生：是否存在任何能够阻止Humberstone 悖论的方法?

尽管菲奇悖论已有许多解决方案，但其中不少被指责为特设的：除了阻止悖论性推论之外，缺乏独立的哲学动机；而休姆伯斯通悖论则在很大程度上仍未得到处理。本文为这两个悖论提供一种统一的解决方案，其依据是一种简约且合理的命题量化语义。这种语义解释了悖论性步骤为何不正当，而非仅仅宣称它们无效。具体而言，通过在命题量化模态逻辑中重构休姆伯斯通悖论，我们表明，休姆伯斯通的论证并非普遍成立，因为其初始推导步骤受到了阻断。我们还表明，这一方法可以扩展到菲奇悖论以及休姆伯斯通悖论的各种变体。最后，我们详细回应了可能针对我们框架的哲学动机提出的异议，并阐明我们对全称实例化的限制为何构成一种有原则的解决方案，而非特设的 技术手段。

本文其余部分安排如下。第2节介绍休姆伯斯通悖论、其各种变体及其原始论证。第3节介绍菲奇悖论及其原始论证。第4节提出解决这些悖论的统一方法。最后，第5节讨论一个合理的异议，并给出我们的回应。

2 休姆伯斯通悖论及其变体

休姆伯斯通从集体知识到个体全知的论证，可以用形式化方式表达。为简单起见，我们将注意力限制在双主体情形，[2] 它可以用双模态逻辑表述如下：如果 $p \rightarrow (K_a p \vee K_b p)$，那么 $(p \rightarrow K_a p) \vee (q \rightarrow K_b q)$，其中 K_a 和 K_b分别是标准的知识算子，意为“a 知道.....”和“b 知道.....”。休姆伯斯通最初的论证如下。

[1]但请参见 Guigon [8] 和 Humberstone [10, 第 6], 章，他们质疑致成算子对合取具有分配性的假设。即便如此，Updike [18] 仍在致成算子不对合取具有分配性的框架中，重新得出了 Bigelow 的结果。[2]这一论证可以直接扩展到有限多个主体的情形。

(1) $p \to (K_a p \vee K_b p)$ 假设

(2) $(p \wedge q) \to (K_a(p \wedge q) \vee K_b (p \wedge q))$ (1)，将 $p \wedge q$ 代入 p

(3) $K_a(p \wedge q) \to K_a p$ 由单调性应用于 $(p \wedge q) \to p$ 可得

(4) $K_b(p \wedge q) \to K_b q$ 根据单调性应用于 $(p \wedge q) \to q$

(5) $(p \wedge q) \to (K_a p \vee K_b q)$ (2)–(4) 的一个真值函数后承

(6) $(p \to K_a p) \vee (q \to K_b q)$ 与 (5) 真值函数等价

Humberstone 将论证扩展到其他语境。例如，将K 替换为许可算子 P，并将 a (b)重新解释为道德准则而非主体，我们便得到$P_a\varphi$ （分别为 $P_b\varphi$），读作“根据道德准则 a （分别为 b），φ 是可许可的”。由于可许可性很可能具有单调性，类似于（1）–（6）的论证可得出如下结论：如果每个真命题都根据两个准则之一或另一个准则是可许可的（符号表示为 $p \to (P_a p \vee P_b p)$），那么至少存在一个准则，根据该准则，每个真命题都是可许可的（符号表示为（$p \to P_a p$） $\vee (q \to P_b q)$）。

再举一例，将上述（1）前件中的 p 替换为$K_c p$，我们便得到$K_c p \to (K_a p \vee K_b p)$，读作“$a$ 和 b 合起来的知识不亚于 c”。类似的论证可得（$K_c p \to K_a p) \vee (K_c q \to K_b q)$，其含义是，单独的 a 或单独的 b，其知识至少不亚于 c。

如果在上述论证中用信念替换知识，那么（1）表示 a 和 b 共同成功地拥有真信念，而（6）则表示 a或 b单独一方取得了这样的成功。接着，Humberstone 考虑了（1）的一个类似形式，目标是避免假信念，即假设双方都相信的任何事都是真的。乍一看，这似乎允许双方各自拥有对方所没有的假信念。但令人惊讶的是，事实并非如此：如果 a和b 双方都相信的任何事都是真的，那么他们中至少有一方只拥有真信念。证明如下，其中对于任意命题 φ，$B_i\varphi$ 读作“主体 i 相信 φ”。

（1′） $(B_a p \wedge B_b p) \to p$ 假设

(2′) $(B_a(p \vee q) \wedge B_b(p \vee q)) \to (p \vee q)$ （1′），将 $p \vee q$ 代入 p

（3′） $B_a p \to B_a (p \vee q)$ 由单调性应用于 $p \to (p \vee q)$

(4′) $B_b q \to B_b(p \vee q)$ 将单调性应用于 $q \to (p \vee q)$

(5′) $(B_a p \wedge B_b q) \to (p \vee q)$ (2′)–(4′) 的一个真值函数后承

(6′) $(B_a p \to p) \vee (B_b q \to q)$ 与 (5′) 真值函数等价

那么，正如 Humberstone 所指出的，如果我们用 $W_i\varphi$ 表示 i 想要某事成为事实φ，并假设算子 W具有单调性，那么将上述从（1′）到（6′）的论证中的B 替换为W，就会得到另一个令人惊讶的结果：如果 a 和 b都想要成为事实的事情确实如此（符号表示为（$W_a p \wedge W_b p$） $\to p$），那么要么 a的所有欲望都得到满足，要么 b的所有欲望都得到满足（符号表示为（$W_a p \to p$） $\vee$ （$W_b q \to q$））。这意味着，如果一个由有限多个主体组成的群体是集体全能的（更准确地说，是“全体满足”），那么该群体中至少有一名成员本身就是全能的。

3 菲奇悖论

菲奇论证可以用模态认识逻辑来表达：由 $p \to \Diamond Kp$ 可推出$p \to Kp$，其中 $\Diamond$ 表示“有可能”，而 K 表示“已知”。论证如下。[3]

(1′) $p \to \Diamond \mathrm{K}p$ 假设 (2′) $(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to \Diamond \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (1′)，以 $p \wedge \neg \mathrm{K}p$ 替换 p(3′) $\mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to (\mathrm{K}p \wedge \mathrm{K}\neg \mathrm{K}p)$ 根据 K 对 $\wedge$(4′) 的分配性 $\mathrm{K}\neg \mathrm{K}p \to \neg \mathrm{K}p$ 知识的事实性 (5′) $\mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to (\mathrm{K}p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (3′) 和 (4′) 的真值函数后承 (6′) $\neg(\mathrm{K}p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ 重言式 (7′) $\neg \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (5′) 和 (6′) 的真值函数后承 (8′) $\Box \neg \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (7′)，必然化规则 (9′) $\neg \Diamond \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ 等价于 (8′) (10′) $\neg(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (9′) 和 (2′) 的真值函数后承 (11′) $p \to \mathrm{K}p$ 与 (10′) 真值函数等价

Fitch [6] 及其他人（例如 Salerno [14]）指出，Fitch 论证中的推理可以推广到任何具有事实性且对合取具有分配性的算子。等价地，对于满足 $Op \to p$ 和 $O(p \wedge q) \to Op \wedge Oq$ 的任意算子 O，如果 $p \to \Diamond Op$，那么 $p \to Op$。[4]

4 关于命题量化的一个视角

细心的读者会注意到，休姆伯斯通的论证和 Fitch 的论证都依赖于隐含的命题量词。当明确写出这些量词时，Humberstone 悖论的形式为：如果 $\forall p(p \to K_a p \vee K_b p)$，那么 $\forall p(p \to K_a p) \vee \forall q(q \to K_b q)$；而菲奇悖论的形式为：如果 $\forall p(p \to \Diamond Kp)$，那么 $\forall p(p \to Kp)$。这些隐含的量词促使我们采用统一方法来阻止这两个悖论。下文中，我们首先解决 Humberstone 悖论及其变体，然后再讨论菲奇悖论。

命题量化这一概念由 Fine [5], 提出，他也给出了强有力的公理化体系。就我们的目的而言，并不需要这些体系的全部力量；相反，我们采用一种

[3]事实上，菲奇最初的结果是：如果存在一个未知的真理，那么就存在一个不可知的真理；等价地说，可知性意味着全知。菲奇将 [6, 定理 4] 的证明归功于一位匿名审稿人，Salerno [14] 认定此人是 Alonzo Church。文献中的证明略有不同。例如，van Benthem [19] 没有像我们这里这样推导（7′），而是利用了 $\Diamond$的单调性：$\Diamond K（p \wedge \neg Kp）\to \Diamond（Kp \wedge K\neg Kp）\to \Diamond（Kp \wedge \neg Kp）\to \Diamond \bot \to \bot$。这种变体对我们的目的并非必要；我们采用 Dummett 在 [4]中的表述。

[4]请注意，在上述推导中，K 对 $\wedge$ 的分配性和事实性都不是严格必需的。信念版本用 KD4定理 $B\neg Bp \to \neg Bp$ 代替事实性；例如参见 [12], , 其中使用了该定理的推广版本。知识版本也避免了 K 对 $\wedge$的分配性；例如参见 [11, 21]。通过适当调整，我们的方法也可以处理菲奇悖论的这些变体。

弱命题量化模态逻辑，它仅包含下文所需的公理和推理规则。具体而言，令 $\mathbb{S}$ 由以下公理和推理规则构成：[5]

命题演算 所有命题重言式的实例∀E $\forall p\varphi \to \varphi(q/p)$，其中 q 是一个在 φ 中对于 p 而言可自由代入的命题变元MP $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ I $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall p\psi}$，

$\forall$

前提是 ~~p 在 φ 中~~不自由出现单调性 $\varphi \to \psi \; K_a\varphi \to K_a\psi$

可证性和推导的概念按通常方式定义。我们用 $\vdash \varphi$ 表示 φ 在这个系统中是可证的。

请注意，我们的系统非常弱。例如，公理 ∀E只允许用可自由代入量化变元的命题变元进行实例化，而不允许用任意公式进行实例化。相比之下，在 Fine 的系统 AxS5π [5]中，全称实例化允许使用任何可自由代入量化变元的公式。作此限制是为了阻止 $\forall p\varphi \to \varphi(p \wedge q/p)$和 $\forall p\varphi \to \varphi(p \vee q/p)$成立，因为这会使命题域在合取和析取运算下封闭。此限制并非特设的：它体现了一种有原则的命题量化观，在这种观点下，命题域不必在布尔运算下封闭。我们将在第5节阐述其哲学动机。

设 $\mathbf{P}$ 是一个非空命题变元集合，$\mathbf{I}$ 是一个非空主体集合。所涉及的语言记作 $\mathcal{L}$，由以下语法递归定义：

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid \forall p\varphi,$$

其中 $p \in \mathbf{P}$，$a \in \mathbf{I}$。

上述语言在结构上进行解释。直观而言，由于命题被视为其为真的状态集合，命题量词的取值范围是 S 的某个指定子集族。形式上，结构 $\mathcal{M}$ 是一个元组 $\langle S, P, R, V\rangle$，其中 S 是一个非空状态集合；P 是 S 的一个非空子集族，称为命题域；对于每个 $a \in \mathbf{I}$，R_a 是 S 上的一个二元关系，称为可及关系；而 $V\colon \mathbf{P} \to P$ 是一个赋值。真理递归定义如下。给定结构 $\mathcal{M} = \langle S, P, R, V\rangle$ 和一个状态 $s \in S$，

$\mathcal{M}, s \vDash p$ 当且仅当 $s \in V(p)$$\mathcal{M}, s \vDash \neg\varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, s \nvDash \varphi$
$\mathcal{M}, s \vDash \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, s \vDash \varphi$ 且 $\mathcal{M}, s \vDash \psi$$\mathcal{M}, s \vDash \mathrm{K}_a\varphi$
当且仅当对于所有 t，若 sR_at，则 $\mathcal{M}, t \vDash \varphi$$\mathcal{M}$,
$s \vDash \forall p\varphi$ 当且仅当对于所有结构 $\mathcal{M}' = \langle S, P, R, V'\rangle$，满足 $V'(q) = V(q)$，对于所有 $q \neq p$,$\mathcal{M}', s \vDash \varphi$.

通常，P 会受到各种条件的限制：例如，要求 P 是布尔的、对公式封闭，或是 S [5, p 的幂集。 337]。不同的条件可能产生不同的逻辑。就我们的目的而言，我们不对 P施加任何限制。特别是，我们既不要求对

[5]此处，“q 在 φ 中对 p 可自由代入”是指，p 在 φ 中没有自由出现于 $\forall q$ 或 $\exists q$ 的辖域内（其中 $\exists p$是 $\neg$ 的缩写）。

交集封闭，也不要求对并集封闭。唯一的要求是，对于每个赋值V'和 $p \in \mathbf{P}$， $V'(p) \in P$，而这由结构的定义得到保证。这一点对于下面的证明至关重要。系统 $\mathbb{S}$ 相对于该语义是可靠的（验证是例行的）。

有了这些工具，我们现在可以在弱命题量化模态逻辑中分析休姆伯斯通悖论及其变体。由于对 P 没有限制，因此存在许多潜在的反模型，能够证明的定理也就更少。我们从休姆伯斯通悖论开始，也就是从（1）到（6）的论证。遵循休姆伯斯通的做法，我们将该论证改写如下，正如 Updike [18,p. 1185]所做的那样。

(i) $\forall p(p \to (K_a p \vee K_b p))$	假设
(ii) $(p \wedge q) \to (K_a(p \wedge q) \vee K_b(p \wedge q))$	(i), $\forall$E
(iii) $K_a(p \wedge q) \to K_a p$	由单调性应用于 $(p \wedge q) \to p$
(iv) $K_b(p \wedge q) \to K_b q$	由单调性应用于 $(p \wedge q) \to q$
(v) $(p \wedge q) \to (K_a p \vee K_b q)$	(ii),(iii),(iv), PC
(vi) $(p \to K_a p) \vee (q \to K_b q)$	(v), PC
(vii) $\forall q((p \to K_a p) \vee (q \to K_b q))$	(vi), $\forall$I
(viii) $\forall p \forall q((p \to K_a p) \vee (q \to K_b q))$	(vii), $\forall$I
(ix) $\forall p(p \to K_a p) \vee \forall q(q \to K_b q)$	(viii)，前束范式定理

请注意，若 P 对交运算封闭，上述论证就是有效的。[6] 若没有这一闭包条件，我们就无法直接从 (i) 得出 (ii)。相反，只使用含命题变元的 $\forall$E，(i) 得出 $p \to (\mathrm{K}_a p \vee \mathrm{K}_b p)$ 和 $q \to (\mathrm{K}_a q \vee \mathrm{K}_b q)$。于是我们得到 $(p \wedge q) \to (\mathrm{K}_a p \vee \mathrm{K}_b p) \wedge (\mathrm{K}_a q \vee \mathrm{K}_b q)$。要推出 (ii)，则需要 $(\mathrm{K}_a p \vee \mathrm{K}_b p) \wedge (\mathrm{K}_a q \vee \mathrm{K}_b q) \to \mathrm{K}_a(p \wedge q) \vee \mathrm{K}_b(p \wedge q)$。但如下方的带指定点的模型所示，这个蕴涵并非有效：$\mathrm{K}_a p$ 和 $\mathrm{K}_b q$ 为真，而 $\mathrm{K}_b p$ 和 $\mathrm{K}_a q$ 为假，因此前件为真，后件为假。所以，从 (i) 到 (ii) 的推导行不通。

考虑模型 $\mathcal{M} = \langle S, P, R, V \rangle$，其中 $S = \{s,t,u\}$，$R_a = \{(s,t)\}$，$R_b = \{(s,u)\}$,$P = \{\{s,t\},\{s,u\}\}$，$V(p) = \{s,t\}$，且 $V(q) = \{s,u\}$。可以验证，在 $(\mathcal{M}, s)$ 中，(i) 为真而 (ii) 为假。为说明 (i) 成立，请注意，对于任意满足 $V'(p) \in P$ 的 V'， $V'(p)$ 要么是$\{s,t\}$，要么是 $\{s,u\}$。无论哪种情况， $\mathcal{M}', s \vDash p \to (\mathrm{K}_a p \vee \mathrm{K}_b p)$（请注意，由于 $R_a(s) = \{t\}$ 且$R_b(s) = \{u\}$，若 $V'(p) = \{s,t\}$，则 $t \in V'(p)$，因此 $\mathcal{M}', s \vDash \mathrm{K}_a p$；若 $V'(p) = \{s,u\}$，则 $u \in V'(p)$，因此$\mathcal{M}', s \vDash \mathrm{K}_b p$）。为说明 (ii) 不成立，请注意，在 $(\mathcal{M}, s)$ 中，$p \wedge q$为真，但 $\mathrm{K}_a(p \wedge q)$ 为假（因为q 在 t 处为假），且 $\mathrm{K}_b(p \wedge q)$ 为假（因为 p 在 u 处为假）。这表明 (i) 并不蕴涵 (ii)。此外，(ix) 在 $(\mathcal{M}, s)$ 中为假。若 (ix) 为真，那么要么 $\mathcal{M}, s \vDash \forall p(p \to \mathrm{K}_a p)$，要么$\mathcal{M}$, $s \vDash \forall q(q \to \mathrm{K}_b q)$。若前者成立，则对于满足 $V_1(p) = \{s,u\}$ 的 R， $\langle S, P, V_1 \rangle, s \vDash p \to \mathrm{K}_a p$；由于$s \in V_1(p)$，可推出 $\langle S, P, R, V_1 \rangle, t \vDash p$，从而得到 $t \in V_1(p)$，矛盾。若后者成立，则对于满足 $V_2(q) = \{s,t\}$ 的 R， $\langle S$, $P, V_2 \rangle, s \vDash q \to \mathrm{K}_b q$；由于 $s \in V_2(q)$，可推出 $\langle S, P, R, V_2 \rangle, u \vDash q$，从而得到 $u \in V_2(q)$，同样矛盾。

现在我们转向第二个论证，即从（1′）到（6′）。证明系统与上文相同，只是用 B 替代 K。和之前一样，我们用显式的命题量词将其重新表述如下：

[6]从真值集 从 (i) 到 (ii) 的这一步在语义上是合理的，前提是 P 对交运算封闭，因为这样一来 $p \wedge q$ 就会属于 P，从而使 $p \wedge q$ 成为 $\forall$E 的可接受替换。 he

(i′) $\forall p((\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p) \rightarrow p)$ 假设 (ii′) $(\mathrm{B}_a(p \vee q) \wedge \mathrm{B}_b(p \vee q)) \rightarrow (p \vee q)$ (i′), ∀E (iii′) $\mathrm{B}_a p \rightarrow \mathrm{B}_a(p \vee q)$ 由单调性应用于 $p \rightarrow (p \vee q)$ 得出 (iv′) $\mathrm{B}_b q \rightarrow \mathrm{B}_b(p \vee q)$ 由单调性应用于 $q \rightarrow (p \vee q)$ 得出 (v′) $(\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b q) \rightarrow (p \vee q)$ (vi′) $(\mathrm{B}_a p \rightarrow p) \vee (\mathrm{B}_b q \rightarrow q)$ (vii′) $\forall q((\mathrm{B}_a p \rightarrow p) \vee (\mathrm{B}_b q \rightarrow q))$ (viii′) $\forall p \forall q((\mathrm{B}_a p \rightarrow p) \vee (\mathrm{B}_b q \rightarrow q))$ (ix′) $\forall p(\mathrm{B}_a p \rightarrow p) \vee \forall q(\mathrm{B}_b q \rightarrow q)$ (viii′)，前束范式定理

(ii'), (iii'),(iv'), PC

(v'), PC

(vi'), ∀I

(vii'), ∀I

上述论证在 P 对并集封闭时是有效的。[7] 若没有这一闭包条件，我们就无法直接从（i′）得到（ii′）。相反，仅使用带有命题变元的 ∀E，（i′）可推出（$\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p$）$\rightarrow p$ 和（$\mathrm{B}_a q \wedge \mathrm{B}_b q$）$\rightarrow q$。于是我们得到（（$\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p$）∨（$\mathrm{B}_a q \wedge \mathrm{B}_b q$））$\rightarrow$（$p \vee q$）。要推出（ii′），需要（$\mathrm{B}_a$（$p \vee q$）$\wedge \mathrm{B}_b$（$p \vee q$））$\rightarrow$（$\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p$）∨（$\mathrm{B}_a q \wedge \mathrm{B}_b q$）。但这一蕴涵并非有效，下面的带指定点的模型显示了这一点：$\mathrm{B}_a p$ 和$\mathrm{B}_b q$ 为真，而$\mathrm{B}_b p$ 和$\mathrm{B}_a q$ 为假，因此前件为真、后件为假。所以从（i′）到（ii′）的步骤受阻。

考虑模型 $\mathcal{M} = \langle S、P、R、V\rangle$，其中 $S = \{s,t,u\}$、$R_a = \{(s、t)\}$、$R_b = \{(s、u)\}$、$P = \{\{t\},\{u\}\}$、$V(p) = \{t\}$，以及 $V(q) = \{u\}$。可以检验，在（$\mathcal{M}$、s）中，（i′）为真，但（ii′）为假。为说明（i′）成立，注意对于任意满足 $V'(p) \in P$ 的 V'，$V'(p)$ 要么是 $\{t\}$，要么是 $\{u\}$。无论哪种情况，$\mathcal{M}'$、$s \vDash (\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p) \rightarrow p$（注意，如果 $V'(p) = \{t\}$，那么 $\mathrm{B}_b p$ 在 s 处为假，因为$u \notin V'(p)$，所以 $\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p$ 为假；如果 $V'(p) = \{u\}$，那么 $\mathrm{B}_a p$ 在 s 处为假，因为 $t \notin V'(p)$，所以 $\mathrm{B}_a p \wedge \mathrm{B}_b p$为假）。为说明（ii′）不成立，注意在（$\mathcal{M}$、$s$）中，$\mathrm{B}_a(p \vee q)$ 为真（因为 p 在 t处为真），$\mathrm{B}_b(p \vee q)$ 也为真（因为 q 在 u处为真），但 p 和 q 在 s处为假。这证明了（i′）并不蕴涵（ii′）。此外，（ix′）在（$\mathcal{M}$、s）中为假。若（ix′）为真，则要么 $\mathcal{M}$、$s \vDash \forall p(\mathrm{B}_a p \rightarrow p)$，要么 $\mathcal{M}$、$s \vDash \forall q(\mathrm{B}_b q \rightarrow q)$。若前者成立，则 $\langle S、P、R、V_1\rangle$、$s \vDash \mathrm{B}_a p \rightarrow p$ 对于 $V_1(p) = \{t\}$ 成立；由于 $R_a(s) = \{t\}$ 且 $t \in V_1(p)$，我们有 $\langle S、P、R、V_1\rangle$、$s \vDash \mathrm{B}_a p$，从而 $\langle S、P、R、V_1\rangle$、$s \vDash p$，所以$s \in V_1(p)$，矛盾。若后者成立，则 $\langle S、P、R、V_2\rangle$、$s \vDash \mathrm{B}_b q \rightarrow q$ 对于 $V_2(q) = \{u\}$ 成立；由于 $R_b(s) = \{u\}$ 且 $u \in V_2(q)$，我们有 $\langle S、P、R、V_2\rangle$、$s \vDash \mathrm{B}_b q$，从而 $\langle S、P、R、V_2\rangle$、$s \vDash q$，所以$s \in V_2(q)$，再次产生矛盾。

因此，我们已经证明，在弱命题量化模态逻辑 $\mathbb{S}$（它是一致的）中，休姆伯斯通悖论及其变体都被阻断了：对于每个悖论，我们都构造了一个（带指定点的）模型，其中前提成立而结论不成立。这一阻断也适用于 Updike [18],提出的无分配性休姆伯斯通悖论变体，因为他重构中的两个关键引理都要求对全称量化前提进行复合实例化（引理 1 中的集体全知、引理 2 中的可知性原则），而在我们受限的 ∀E 和 ∀E′ 公理下，分别无法进行这种实例化。

现在我们转向对菲奇悖论的分析。情况变得复杂起来，因为这里所需的系统更强，语义也更复杂。具体来说，令 $\mathbb{S}'$ 由以下公理和推理规则构成，其中特殊形式 递归定义如下：每个命题变元都是特殊形式，而如果 是特殊形式，那么 和 K也都是特殊形式。

[7]原因与注 6 中所述相似。具体而言，若 P对并集封闭，则从 (i′) 到 (ii′) 的推步在语义上便有依据，因为这样一来，$p \vee q$的真值集就属于 P，从而 $p \vee q$ 便是 ∀E 的一个可接受替换。

因此，特殊形式恰好是仅使用 $\neg$ 和 K由命题变元构造而成的公式；它们不含 $\wedge$、 $\vee$、 $\Box$或 $\Diamond$。这一类在语义上有其依据：由于 P 对相对补集和 m_K 封闭，但对 $m_\Box$、交集或并集不封闭，因此每个特殊形式的真值集都保证属于 P，而含有 $\wedge$、 $\vee$或 $\Box$ 的公式的真值集则未必如此。

命题演算 所有命题重言式的实例$\forall$E′ $\forall p\varphi \to \varphi(\psi/p)$，其中 ψ 是可在 φT 中自由代入 p 的特殊形式 $K\varphi \to \varphi$MP $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ I $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall p\psi}$，前提是 p 不在 φ 中自由出现

$\forall$

RN $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$ RE $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi}$ 单调性 $\varphi \to \psi$ $K\varphi \to K\psi$

所涉及的语言记作 $\mathcal{L}'$，它是在 $\mathcal{L}$ 的基础上扩展而来，并加入了算子 $\Box$。具体而言， $\mathcal{L}'$ 由以下语法递归定义：

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K\varphi \mid \forall p\varphi \mid \Box\varphi,$$

where $p \in \mathbf{P}$。其他联结词按通常方式定义；特别地， $\Diamond\varphi$ 是 $\neg\Box\neg\varphi$的缩写。

在语义上， $\mathcal{L}'$ 是在结构上解释的。一个结构 $\mathcal{M}$ 是一个元组 $\langle S, R_\Box, R_K, P, V\rangle$，其中 S， P， V的定义与之前相同， $R_\Box$ 和 R_K 是 S上的二元关系，并且 R_K 是自反的。[8]给定一个结构 $\mathcal{M} = \langle S, R_\Box, R_K, P, V\rangle$ 和一个状态 $s \in S$， $\mathcal{L}'$ 的语义在 $\mathcal{L}$的语义基础上扩展为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, s \vDash \Box\varphi &\iff \text{for all } t, \text{ if } sR_\Box t \text{ then } \mathcal{M}, t \vDash \varphi \\ \mathcal{M}, s \vDash K\varphi &\iff \text{for all } t, \text{ if } sR_K t \text{ then } \mathcal{M}, t \vDash \varphi \end{aligned}$$

$\Diamond\varphi$ 的语义如下，显然可得：

$$\mathcal{M}, s \vDash \Diamond\varphi \iff \text{there exists } t \text{ such that } sR_\Box t \text{ and } \mathcal{M}, t \vDash \varphi$$

就 于解决菲奇悖论的目的，我们要求 P 满足以下条件 s:

- 在相对补集下封闭：若 $X \in P$，则 $S \setminus X \in P$。
- 在模态运算 m_K下封闭：若 $X \in P$，则 $m_K(X) \in P$，其中对所有 $m_K(X) = \{s \in S \mid$，若 $sR_K t$ 则 $t \in X\}$。

类似地，定义对所有 t $m_\Box(X) = \{s \in S \mid$ ，若 $sR_\Box t$则 $t \in X\}$。我们不要求 P 在 $m_\Box$下封闭。

于是很容易验证， $V(K\varphi) = m_K(V(\varphi))$。现在我们如下重构菲奇悖论：

[8]Reca 注意，菲奇最初的论证假设知识具有事实性，这对应于 R_K的自反性。

(i′) $\forall p(p \to \Diamond \mathrm{K}p)$ 假设 (ii′) $(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to \Diamond \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (i′), $\forall \mathrm{E}'$(iii′) $\mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to (\mathrm{K}p \wedge \mathrm{K}\neg \mathrm{K}p)$ 单调性，命题演算 (iv′) $\mathrm{K}\neg \mathrm{K}p \to \neg \mathrm{K}p$ T公理 (v′) $\mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to (\mathrm{K}p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (iii′), (iv′), 命题演算 (vi′) $\neg(\mathrm{K}p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ 命题演算 (vii′) $\neg \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (v′), (vi′), 命题演算 (viii′) $\Box \neg \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (vii′), 必然化规则 (ix′) $\neg \Diamond \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (viii′), 定义 $\Diamond$, 替换等价规则 (x′) $\neg(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ (ix′), (ii′), 命题演算 (xi′) $p \to \mathrm{K}p$(xii′) $\forall p(p \to \mathrm{K}p)$

(x′), PC

(xi′), ∀I

上述论证在 P 对交运算封闭[9] 时是有效的。[9] 如果没有这一闭包条件，我们就无法直接从 (i′) 得到 (ii′)。相反，只使用特殊形式的 $\forall \mathrm{E}'$ 时，(i') 给出 $p \to \Diamond \mathrm{K}p$ 和 $\neg \mathrm{K}p \to \Diamond \mathrm{K}\neg \mathrm{K}p$。于是我们得到 $(p \wedge \neg \mathrm{K}p) \to (\Diamond \mathrm{K}p \wedge \Diamond \mathrm{K}\neg \mathrm{K}p)$。要推出 ($ii'$)，需要 $\Diamond \mathrm{K}p \wedge \Diamond \mathrm{K}\neg \mathrm{K}p \to \Diamond \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$。但这一蕴涵并非有效，下面的带指定点的模型表明了这一点：其中前件为真，而后件为假。因此，从 (i′) 到 (ii′) 的步骤受阻。

考虑模型 $\mathcal{M} = \langle S, R_\Box, R_K, P, V \rangle$ 其中 $S = \{s, t, u\}$, $R_\Box = \{(s, t), (s, u)\}$, $R_K = \{(s, s), (t, t), (u, u), (s, t), (s, u)\}$, $P = \{\{s, t\}, \{u\}, \{t\}, \{s, u\}\}$, $V(p) = \{s, t\}$。不难验证，P 对相对补集和模态运算 m_K 封闭。此外，在 $(\mathcal{M}, s)$ 中，(i′) 为真，但 (ii′) 为假。为说明 (i′) 成立，注意对于任意 V'，若 $V'(p) \in P$，则 $V'(p)$ 是 $\{s, t\}, \{u\}, \{t\}, \{s, u\}$ 中的一个。在每种情况下，$\mathcal{M}', s \vDash p \to \Diamond \mathrm{K}p$（如果 $V'(p) = \{u\}$ 或 $V'(p) = \{t\}$，则 $s \notin V'(p)$，因此 $\mathcal{M}', s \vDash p \to \Diamond \mathrm{K}p$；如果 $V'(p) = \{s, t\}$，则 $sR_\Box t$, $R_K(t) = \{t\}$，而 $t \in V'(p)$，所以 $\mathcal{M}', s \vDash \Diamond \mathrm{K}p$，从而 $\mathcal{M}', s \vDash p \to \Diamond \mathrm{K}p$；如果 $V'(p) = \{s, u\}$，则 $sR_\Box u$, $R_K(u) = \{u\}$，而 $u \in V'(p)$，所以 $\mathcal{M}', s \vDash \Diamond \mathrm{K}p$，从而 $\mathcal{M}', s \vDash p \to \Diamond \mathrm{K}p$）。为说明 (ii′) 不成立，注意 $\mathcal{M}, s \vDash p \wedge \neg \mathrm{K}p$ 且$\mathcal{M}, s \nvDash \Diamond \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$（否则，$t \vDash \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$ 或 $u \vDash \mathrm{K}(p \wedge \neg \mathrm{K}p)$，二者任一都会导致矛盾）。这证明了 (i′) 不蕴涵 (ii′)。此外，由 $\mathcal{M}, s \vDash p \wedge \neg \mathrm{K}p$ 可推出 $\mathcal{M}, s \nvDash p \to \mathrm{K}p$，进而得到 $\mathcal{M}, s \nvDash \forall p(p \to \mathrm{K}p)$，因此 (xii′) 在 $(\mathcal{M}, s)$ 中也为假。

我们解决菲奇悖论的方法与 Restall [13] 的方法相似：即使 both p and$\neg Kp$ 都是可知的，$p \wedge \neg Kp$ 却是不可知的。不过，两者之间存在重要区别。Restall[13] 不赞成可知性论题，即 (i′)。相反，他赞成自己所称的“合取可知性论题”：根据这一论题，每个真理都可以通过合取的方式得知；也就是说，它等价于一个合取式，其中每个合取项都是可知的。这比可知性论题弱。相比之下，我们赞成可知性论题。此外，Restall 接受了

[9]原因与 Humberstone 案例类似。具体而言，如果 P对交运算封闭，那么从 (i′) 到 (ii′) 的步骤在语义上就是合理的，因为这样一来，$p \wedge \neg Kp$ 的真值集就会属于 P，从而使 $p \wedge \neg Kp$ 成为 $\forall \mathrm{E}'$ 的可接受替换。

菲奇悖论的结论，而我们拒绝这一结论。我们不只是阻断了该论证：我们构造了一个反模型，表明可知性论题成立，而全知并不成立。

另一种相关进路是 Dummett 的 [3] （另见 [10, 第 398]页），他主张将可知性原则限制在基本（或原子）陈述上。他给出了真理的归纳刻画，在该刻画下，可知性原则仅适用于基本陈述，而不适用于例如由基本陈述构成的合取式。因此，他认可例如 $p \to \Diamond Kp$ 和 $q \to \Diamond Kq$，但不认可 $p \wedge q \to \Diamond K(p \wedge q)$。这一句法限制使 Dummett 得以避开菲奇悖论。

我们的进路与 Dummett 的进路有一项关键差异。Dummett 将可知性原则限制在基本陈述上，而我们保留其完整的一般形式，即 $\forall p(p \to \Diamond Kp)$，转而削弱命题量词：其实例化公理 $\forall \mathrm{E}'$ 仅允许特殊形式作为代入项。此外，Dummett 的限制是句法性的，以真理的归纳刻画为基础；而我们的限制是语义性的，以命题域的闭包条件为基础。我们的框架还为菲奇悖论与亨伯斯通悖论提供了统一的解决方案，而 Dummett 的方案仅针对菲奇悖论。

5 结论与对异议的回应

5.1 回应解决方案的动机与性质

在结束之前，我们先回应两个核心问题：我们提出这一方案的哲学动机，以及我们对这些悖论的“解决”方案的性质。

首先，认为我们的框架是特设的 这一担忧，建立在一个未明说的假设之上：命题量词唯一合理的语义，要求论域 P 对所有布尔运算和模态构造词封闭。标准的命题量化理论并不强制接受这一假设：正如 Fine [5]所指出的，对 P 的限制属于实质性的哲学选择，而非纯粹的逻辑默认。我们对全称实例化的限制（$\forall \mathrm{E}$）并非仅仅为了阻止悖论性推论才引入，而是源于一种具有独立动机的命题观：命题是可被把握的认知态度对象。

为阐明这一主张，我们区分可把握性与可知性。对于认知能力有限的单个主体而言，如果一个命题能够作为适合该主体之知识的认知态度的单一对象，那么它就是可把握的。可把握性所要求的不只是可理解性，还包括认知稳定性：一个可把握的命题必须能够作为连贯的知识候选项而被持有，而不会导致自我挫败。因此，诸如 $p \wedge \neg Kp$ 这样的摩尔式命题虽然可以理解，却不可把握：尽管人们能够理解它们所表达的内容，却无法连贯地将其作为知识候选项来持有，因此它们不可知，因为知道它们会导致自我挫败。可把握性在概念上先于可知性：命题必须可把握才可能可知，但可把握并不保证可知。例如，关于某个特定过去事件的命题，若该事件未留下任何可追溯的痕迹，那么这个命题既可理解又具有认知稳定性，因而是可把握的；然而它不可知，因为有限主体原则上无法收集足够的证据来确定其真理。我们主张，命题域应当恰好包含可把握的命题，也就是那些具有认知稳定性、适合作为知识候选项的命题。请注意，这一主张针对的是认知原则（如可知性论题）所量化的命题域，而不是每个可理解的陈述句是否都表达一个命题这一更广泛的问题；对于后一个问题，我们保持中立。我们的观点是，某个内容若原则上无法作为知识候选项被把握，就不属于反实在论者“每一个真理”这一量词的辖域，无论从某种更广泛的意义上说它是否算作命题。理由

在于，诸如可知性论题这样的认知原则关注的是有限主体能够知道什么，因此其量化范围应仅限于有限主体能够把握为认知态度对象的命题；这与反实在论者将命题视为可能成为验证或知识对象之物的观念相契合。按照这一观念，原则上无法作为知识候选项被把握的命题，并非反实在论者“每一个真理”这一量词所量化的对象。由于可把握性受有限主体的认知限制所约束，而非受纯粹逻辑结构所约束，可把握命题的集合未必具有通常认为命题域应具备的布尔闭包性质。

这些认知约束也决定了可把握命题的范围具备哪些闭包性质，又不具备哪些闭包性质。一方面，这一范围很可能在否定下封闭：如果一个命题可把握，那么它的否定也可把握，因为否定是一种真值函数运算，除了理解原命题之外，不需要额外的认知资源。它也很可能在知识算子下封闭：如果一个命题可把握，那么“该命题为人所知”这一命题也可把握，因为认知能力健全的主体原则上能够反思自己是否知道某个给定命题。这种在 m_K 下的闭包，不应与对 KK 原则（$Kp \to KKp$）的认可混为一谈：它只涉及知识归属的可把握性，而非其真值。另一方面，这一范围不必在必然性算子 $m_\Box$ 下封闭，因为把握一个命题在形而上学上必然，需要进行可能超出普通认知能力的本体论推理。它也不必在合取或析取下封闭：与否定不同，否定是一元运算，只要求人们取一个已经把握的命题并反转其真值；合取和析取则是二元运算，需要同时思考两个命题并把握二者之间的关系，而这可能超出有限主体的能力（如 Humberstone 案例所示），也可能产生自我挫败的内容（如 Fitch 情形所示）。因此，这种不对称反映的是一元运算与二元运算之间的认知差异，而非任意规定，理由将在下文详述。Th

[e] 闭包失效源于两个不同的原因，分别对应两个悖论 .

菲奇情形：认知自我挫败。在菲奇情形中， $p \wedge \neg Kp$ 是摩尔句的一种认知类比：它可能为真，但任何最低限度反思主体都无法将其作为一个统一的知识对象来思考。这里“可把握”有特定含义：它指有资格成为知识候选项，而不只是能够被思考或相信，也不等同于可知。如上所述，可把握性在概念上先于可知性：一个命题必须可把握，才能可知；但可把握并不保证可知（例如，关于那些未留下任何可恢复痕迹的过去事件的命题）。人们当然可以思考、假设，甚至相信 $p \wedge \neg Kp$，但无法自洽地将其视为知识候选项。关键不只是$p \wedge \neg Kp$ 不可知（这一主张可能会陷入循环论证，因为菲奇论证所确立的正是不可知性）。相反，关键在于， $p \wedge \neg Kp$ 根本无法稳定地被把握为知识候选项。为说明这一点，姑且用归谬法假设 $p \wedge \neg Kp$ 是已知的：

(1) $K(p \wedge \neg Kp)$ 假设

(2) $Kp \wedge K\neg Kp$ 知识对合取分配

(3) $K\neg Kp \to \neg Kp$ 知识的事实性

(4) $Kp \wedge \neg Kp$ （2）和（3）的真值函数后承

因此，假设 $p \wedge \neg Kp$ 已知，会导致逻辑矛盾。这并非仅仅是一种语用上的怪异现象，而是该命题的一项结构性特征：其真值条件本身就会破坏它被知晓的可能性。对于将真理概念与验证或知识的可能性联系起来的反实在论者而言，一个其为真就会使其不可知的命题，并不是一个合法的真理候选项；它不属于反实在论者“每一个真理”这一量词所涵盖的命题范围。这并非为规避悖论而引入的规定，而是反实在论观念关于命题本质的必然结论：命题是验证的可能对象，而非任意的真值函数构造。

这种方法秉承了Tennant关于可知性的笛卡尔限制 [16], 的精神：根据这一限制，可知性原则仅适用于其被知晓与之相容的命题（“笛卡尔”命题）。 $p \wedge \neg Kp$ 是非笛卡尔的，因为假定它已被知晓会导出矛盾。我们超越Tennant之处在于：我们为这一限制提供了语义基础：我们的受限域语义并非通过句法检验逐一筛选命题是否具有笛卡尔相容性，而是通过命题域的结构，在整体上排除自我挫败合取。受限 $\forall$E′ 公理只允许对特殊形式（由命题变元和 $\neg$以及K构成的公式）进行替换，它直接追踪哪些公式对应于可把握命题，从而为我们关于 P的语义约束提供精确的句法对应物。

对特设的特设的 担忧而言，另一个来源涉及这一实例化公理的具体辖域。有人可能会问，为什么特殊形式恰好是 $\neg, K$组合，而不是也包括 $\Box\varphi$的更广泛类别，或仅包含命题变元的更狭窄类别。答案在于，该类别由 P上的闭包条件决定：由于 P 在相对补集和m_K下闭包，任意 $\neg, K$组合的真值集都必然属于 P；由于 P在$m_\Box$、交集或并集下不闭包，包含 $\Box$、 $\wedge$或 $\vee$ 的公式的真值集未必属于 P。因此，特殊形式恰好是那些作为代入项的可接受性在语义上得到保证的公式。这一实例化公理并非任意的句法截断；它是依据命题域的闭包性质校准的，其辖域恰好反映了哪些公式必然表达 P中的命题。

休姆伯斯通案例：有限认知资源。在休姆伯斯通案例中，无法对合取封闭的原因有所不同。把握一个命题会消耗有限的认知资源：注意力、记忆、计算能力，甚至时空位置，正如休姆伯斯通悖论所依据的共享资源直觉所强调的那样 [18,第 1183–1184] 页。某个主体可能分别能够把握两个命题，但二者的合取却超出任何单一主体的能力范围。因此，可把握命题的领域未必对合取封闭；这并非人为规定，而是对有限认知结构性局限的反映。相同的考虑也适用于析取：把握一个析取命题可能需要同时思考两个析取支及其关系，这同样可能超出任何单一主体的能力范围。因此，在这两种情况下，布尔闭包的缺失都有独立的哲学根源，而非人为设定的限制。

我们的方法具有统一性：它通过单一约束，即 P 无需对交集或并集封闭，来解决菲奇悖论与亨伯斯通悖论，以及涉及信念、可许可性和欲望的变体。这种统一性进一步证实，我们的限制揭示了这些悖论论证中共同的结构性缺陷，而不是针对孤立问题所作的临时修补。

其次　担心我们的框架只是在压制悖论的表达　　es

而不是解决悖论，是误解了该解决方案的地位。我们并不否认，在其他逻辑系统中可以对不受限制的命题域进行绝对全称量化；我们的观点是，这种不受限制的量化曲解了可知性原则和集体全知原则的内容。当这些原则以“每个真命题都是可知的”和“每个真命题都为某人所知”这样的非正式方式表述时，量词所涵盖的是那些根据这些原则本身即可把握的真命题。我们的框架恰好捕捉到了这一预期解读：前提 $\forall p(p \to \Diamond Kp)$ 在我们的模型中成立，当且仅当每个可把握的真命题都是可知的；我们认为，这捕捉到了反实在论者的可知性原则所要表达的内容；同样，集体全知原则 $\forall p(p \to K_a p \vee K_b p)$ 成立，当且仅当每个可把握的真命题至少为一个主体所知。我们的框架所阻止的并不是对这些前提的陈述，而是从这些合理前提推出荒谬结论的无效推理：它表明，从量化前提转向实例化的合取或析取公式这一步，依赖于对命题域进行无根据的扩展。这不是语言上的规避，而是一种诊断性的澄清：悖论并非源于可知性原则或集体全知原则背后的核心直觉，而是源于一种在其标准量化重构中被默默假定的、过度宽泛的命题观。

我们强调，我们并不认为菲奇或休姆伯斯通的非正式论证在所有语境中都是谬误。作为相关认知承诺的表达，这些论证完全连贯。只有在使用命题量词，并采用过于宽泛的域闭包假设来形式化这些承诺时，问题才会出现。因此，我们的主张并非否定这些承诺，而是对它们进行更准确的形式化，在保留其直觉说服力的同时避免荒谬的后果。这构成了对这些悖论的真正解决方案：我们指出了导致矛盾的隐藏预设，表明这一预设在哲学上并非不可或缺，并提供了一个统一且具有语义基础的替代框架，使原先的动机原则仍然成立。

总之，我们的方法在两个关键方面推进了相关研究。首先，它为两个长期存在的认知悖论提供了统一的诊断，指出它们共同根源于未经审视的域闭包假设。其次，它将先前针对菲奇悖论提出的特设的 句法限制建立在严格的模型论基础之上，从而回应了长期以来的担忧：这些限制缺乏独立的理据。我们希望这能澄清，我们的框架并非零敲碎打的逻辑把戏，而是对命题量化应如何应用于认知语境所作的原则性重新思考。

5.2 技术贡献总结

总而言之，就我们提案的技术核心而言，我们已经证明，菲奇和 Humberstone 的论证中的悖论性推论，都关键地依赖于一个关于命题域的隐含假设，即该命题域对交集和并集封闭。通过构造有意设计得较弱的命题量化模态逻辑，我们表明，放弃这一假设能够以统一且有效的方式阻止这些悖论。

在句法层面，我们系统的关键在于对全称实例化的限制（在 Humberstone 案例中为 ∀E，在 Fitch 案例中为 $\forall E'$）。不同于标准系统——在那些系统中，对于任意合式的 ψ，$\forall p\varphi$ 都蕴含 $\varphi(\psi/p)$——我们的框架将替换限制在与可把握命题相对应的形式内：在多主体 Humberstone 情形中是命题变元，在 Fitch 情形中则是特殊形式（由命题变元通过 $\neg$ 和 K 构成的公式）。这一限制不只是技术性权宜之计；它正是我们在语义层面决定不要求闭包的精确句法对应物

命题域 P 在交集或并集下的闭包。因此，从一般前提（例如 $\forall p$（$p \to K_a p \vee K_b p$））到涉及合取或析取的特定实例（例如 $p \wedge q \to K_a$（$p \wedge q$）$\vee K_b$（$p \wedge q$））这一步会受阻，因为无法保证这类复合公式的真值集属于 P。

与现有解决方案相比，这种方法有两项明显优势。首先，它实现了统一：通过否定交集与并集下的闭包，同一机制便能同时化解休姆伯斯通悖论、涉及信念、欲望和可许可性的相关变体，以及菲奇悖论。这表明，这些难题并非彼此孤立的反常现象，而是标准重构中命题过度生成这一共同问题的表现。其次，它为句法限制提供了语义基础：以往的方案（如 Dummett 的方案）曾因将可知性原则限定于原子陈述而被指责为特设的，而我们的限制域语义则提供了独立的模型论动机。尽管我们系统中的限制实例化公理并非标准公理，但也并非毫无先例：Fine [5] 已经考察了全称实例化公理具有不同强度的命题量化模态逻辑；命题量化方面更广泛的文献（例如 [7]）探讨了多种域条件；而动态认识逻辑中也会出现一致替换失效的情况，这表明非标准的替换行为并非命题量化系统所独有 [20]。这一限制有助于解释这些悖论最初为何会出现。

关键的是，我们的分析并未质疑菲奇或 Humberstone 原始的、未量化推理本身的非正式有效性。相反，我们指出，他们直觉上的认知承诺与用于将其形式化的标准工具之间存在不匹配。对不受限制的命题域进行隐含量化，会引入本体论承诺，具体而言，就是对交集和并集封闭；而这些承诺并不包含在原始的非正式原则之中。通过改进底层逻辑，使其符合认知把握方面的约束，我们既保留了反实在论和集体认识论的精神，又避免陷入全知。由此来看，我们的工作不仅提供了一种技术性修正，也阐明了在认知语境中连贯处理命题量化所需的逻辑架构。

致谢

本文得到国家社会科学基金重点项目（项目编号：24AZX019）资助。作者感谢 Lloyd Humberstone 的鼓励，以及他对本文早期稿件提出的诸多有益意见；同时感谢本刊匿名审稿人对投稿版本提出的深刻且富有建设性的意见。

参考文献

[1] J. Bigelow。Omnificence。*Analysis*，65(3):187–196，2005。[2] B. Brogaard 和 J. Salerno。菲奇可知性悖论。载于 Edward N. Zalta 编，《斯坦福哲学百科全书》。斯坦福大学形而上学研究实验室，2019 年秋季版，2019。[3] M. Dummett。维克多的错误。*Analysis*，61:1–2，2001。[4] M. Dummett。菲奇可知性悖论。载于 J. Salerno 编，《可知性悖论新论》，第 51–52 页。牛津大学出版社，2009。

[5] K. Fine。模态逻辑中的命题量词。*Theoria*，36(3):336–346，1970。[6] F. B. Fitch。某些价值概念的逻辑分析。符号逻辑杂志，28(2):135–142，1963。[7] P. Fritz。《命题量词》。剑桥大学出版社，2024。[8] G. Guigon。导致与合取：对 Bigelow 关于 Omnificence 的回应。*Analysis*，69(3):452–458，2009。[9] L. Humberstone。集体全知的形式问题。*Philosophical Studies*，48(3):401–423，1985。[10] L. Humberstone。《模态逻辑的哲学应用》。伦敦：College Publications，2015。[11] M. Jago。关于可知性的闭包。*Analysis*，70(4):648–659，2010。[12] B. Linsky。事实词、盲点与一些悖论。*Analysis*，64:10–15，1986。[13] G. Restall。并非每个真命题都能被知道（至少不能同时知道全部真命题）。载于 J. Salerno 编，《可知性悖论新论》，第 339–354 页。牛津大学出版社，2009。[14] J. Salerno。可知性黑色电影：1945–1963。载于 J. Salerno 编，《可知性悖论新论》，第 29–48 页。牛津大学出版社，2009。[15] J. Salerno，编。《可知性悖论新论》。牛津大学出版社，英国牛津，2009。[16] N. Tennant。《驯服真理》。牛津大学出版社，英国牛津，1997。[17] E. Updike。收集真命题：一个一题两解的悖论。*Analytic Philosophy*，63(3):156–173，2022。[18] E. Updike。休姆伯斯通悖论与合取。*Erkenntnis*，89:1183–1195，2024。[19] J. van Benthem。使我们获得知识的行动。载于 J. Salerno 编，《可知性悖论新论》，第 129–146 页。牛津大学出版社，2009。[20] H. van Ditmarsch、W. van der Hoek 和 B. Kooi。《动态认识逻辑》，Synthese文库第 337 卷。施普林格，2007。[21] T. Williamson。证实主义与非分配性知识。*Australasian Journal of Philosophy*，71:78–86，1993。