# 含稀疏周期背景的Anderson–Bernoulli算子的无穷多个谱隙

CONG CHEN 和 YONG LI

摘要。我们研究具有周期背景的离散Anderson–Bernoulli算子。在单一耦合下，每个至少为三的最小周期都存在一种背景：每个周期至多含有四个非零位点，且其几乎必然谱具有无穷多个谱隙。我们给出两种构造。第一种构造每个周期至多使用七个非零位点，并将聚点固定为零。对于至少为五的周期，第二种构造每个周期恰好使用四个非零位点，并将插入链的最低狄利克雷特征值作为聚点。在这两种构造中，谱隙均从右侧趋近聚点。所选谱隙的宽度及其到聚点的距离，与一个共同几何因子分别除以第一族中的周期以及第二族中的周期的立方所得的量具有可比性。在每个所选序列中，长度具有可比性的谱区间将相邻谱隙彼此分隔开来。

arXiv:2611.29157v1 [math.SP] 22 Nov 2026

## 1. 引言与主要结果

薛定谔算子谱理论中的一个基本问题是，势的空间结构如何决定谱带和谱隙的分布。在一维情形下，周期势产生有限条谱带。由某些非周期子移位生成的势则产生康托尔谱 [3]。对于遍历族，其谱几乎必然是一个固定集合 [11]，因此可以进一步探讨：在确定性背景中加入独立的格点无序后，谱隙结构会如何变化。

Bellissard 曾提出这样的问题：带有 Anderson扰动的有界遍历背景，是否必然具有仅含有限个谱隙的几乎必然谱？Avila、Damanik 和 Gorodetski 证明，当背景沿着一个具有满支撑遍历测度的连通紧基空间上的同胚连续取样时，对于非退化紧支撑噪声，谱隙数有限 [12]。最小周期为 $p > 1$ 的周期背景，其平移包络由 $p$ 个离散相位组成。这些相位的循环旋转与 Bernoulli移位共同生成本文所研究的随机模型。对于周期背景，Damanik 和 Gorodetski 曾提出，受扰动算子的谱是否为有限个区间的并 [13]。这个问题比询问谱是否包含一个区间更强。在周期背景情形下，周期噪声实现的谱已经提供了区间。

前两个背景周期对应的谱是有限个区间的并。对于常数背景，安德森谱公式表明，在伯努利情形下，谱至多由两个区间组成 [3]。在二周期情形下，重复长度为二的四个二进制词即可得到几乎必然谱的全部 [4, 9]。在三周期情形下，一个长度为六的周期噪声字可以产生一个区间，而所有长度为三的词的重复都无法得到该区间 [4]。Wood的学位论文给出了一个四周期的具体例子，并指出周期至少为四时存在无穷多个谱隙 [10]。Fillman和Wood构造了一个最小周期为四的模型，其谱隙从左侧聚集于零 [6]。我们先前的工作证明，存在无穷多个谱隙所需的最小背景周期为三 [2]。

We a探讨能否在每个指定的最小周期下实现此类谱 $p \geq 3$ ，
基于 耦合，以及每个周期内非零背景位点数量的上界，且该上界

关键词和短语。 随机薛定谔算子、安德森–伯努利算子、谱隙、一致双曲性、射影多锥。CONG CHEN: chencong25@mails.jlu.edu.cn。

与 $p$ 无关。我们还要考察，对于所有这些周期，所选谱隙能否累积于同一个能量。稀疏确定性势只需每个周期包含一个非零位点，即可打开所有 $p-1$ 有界 Floquet 间隙 [7]。在我们的设定中，重复较短的背景块不会改变最小周期，而每个新增的零背景位点仍带有一个独立的噪声位。较长的块必须保留产生谱隙的连接，同时容纳每个新的噪声字。

对于实周期背景 $v=(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ 和耦合 $\lambda>0$，周期 Anderson–Bernoulli 族 [6, 2] 的总势及其背景的最小周期为

$$V_\omega(j)=v_j+\lambda\omega_j \quad (j\in\mathbb{Z}), \qquad \omega\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}},$$
$$p=\min\{q\in\mathbb{Z}_{>0}: v_{j+q}=v_j \text{ for all } j\in\mathbb{Z}\}.$$

令 $\lambda=0$，得到确定性周期模型；令 $v\equiv 0$，则得到 Anderson–Bernoulli 模型。在我们的构造中，我们指定 $p$，并保持耦合 $\lambda$ 不变。**主要结果**。具有势 $V_\omega$ 的离散薛定谔算子 $H_\omega$ 作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$，其形式为

$$(H_\omega u)(j)=u(j+1)+u(j-1)+(v_j+\lambda\omega_j)u(j). \tag{1.1}$$

变量$\omega_j$ 独立同分布，其中 $\mathbb{P}(\omega_j=1)=\theta$，且$\mathbb{P}(\omega_j=0)=1-\theta$，其中 $0<\theta<1$。对于固定的 $\theta$，几乎必然谱 $\Sigma(v)$ 是确定的，并且对 $v$ 的所有相位都相同。

**定理 A**。存在一个耦合 $\lambda>0$，使得对每个整数 $p\geq 3$，都可以选取一个背景 $v$，其最小周期为 $p$，满足

$$\#\{j\in\mathbb{Z}: 0\leq j<p,\ v_j\neq 0\}\leq 4.$$

对于该背景，$\Sigma(v)$ 对每个 $\theta\in(0,1)$ 都有无穷多个谱隙。

证明。对于 $p=3,4$，使用定理 1.1 中的背景。对于 $p\geq 5$，定理 1.2 给出了一个在相同耦合下每周期恰有四个非零位点的背景。□

两种构造使用相同的耦合。第一种构造对每个 $p\geq 3$都给出从右侧聚集到零的谱隙。第二种构造对于 $p\geq 5$使用每周期恰有四个非零背景位点的背景，并具有依赖于周期的聚点能量。在第一种构造中，我们对 $p=3$、4、5 分别使用不同的块，并在 $p\geq 6$时针对每种奇偶性延长一个块中的零段。令

$$\lambda=\frac{6083}{500}, \qquad v_1=-\frac{11493}{1000}, \qquad v_2=-\frac{153}{125}, \qquad L=\frac{31}{2}. \tag{1.2}$$

令 $e\in(0.568030, 0.568031)$ 为 $(0, v_1, v_2)$ 的连接能量。在 $e$ 处，两个周期尾部上的衰减解按照引理 3.1 中的规定，通过一个有限桥接段连接起来。令

$$\bar v_1=v_1-e, \qquad \bar v_2=v_2-e, \qquad h=1-L-e.$$

令 $0^{[m]}$ 表示由 $m$ 个连续零组成的字符串，其中 $0^{[0]}$ 为空字符串。定义以下块，并在最后两行中取 $k\geq 0$：

$$\begin{aligned}
V^{(3)}&=(-e,\bar v_1,\bar v_2),\\
V^{(4)}&=(-1-e,-1,\bar v_1-1,\bar v_2),\\
V^{(5)}&=(-L-e,0,L,\bar v_1,\bar v_2),\\
V^{(6+2k)}&=(h,1,0^{[2k]},1,L,\bar v_1,\bar v_2),\\
V^{(7+2k)}&=(h,2,1,0^{[2k]},2,L,\bar v_1,\bar v_2).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

**定理 1.1.** 固定 (1.2) 中的耦合 $\lambda$。对每个整数 $p\geq 3$，令 $v$ 为 $V^{(p)}$ 在 (1.3) 中的周期延拓，其中 $v_n=V^{(p)}_{n\bmod p}$，且各项从零开始编号。以下两个结论成立。

(a) 最小周期为 $p$。对于 $p \geq 6$，背景取值于 $\{0, 1, 2, L, h, \bar{v}_1, \bar{v}_2\}$，且当 $p$ 为偶数时，每周期恰有六个非零位点；当 $p$ 为奇数时，每周期恰有七个非零位点。(b) 对于每个 $0 < \theta < 1$，(1.1) 的几乎必然谱均为同一集合 $\Sigma_p = \Sigma(v)$，且包含零。存在两两不同的有界谱隙$G_{p,j}$，属于 $\Sigma_p$，满足

$$G_{p,j} \subset (0, \infty), \qquad \lim_{j \to \infty} \sup G_{p,j} = 0.$$

定理 1.1 的证明见第 5 节。

为了构造每个周期有四个非零位点的背景，我们令聚点能量依赖于 $p$。对于 $p \geq 5$，$p-4$ 个格点上的自由链的最低狄利克雷特征值为

$$E_p = -2\cos\left(\frac{\pi}{p-3}\right).$$

当 $p \to \infty$ 时，聚点能量 $E_p$ 趋于 $-2$。

**Theorem 1.2.** 采用定理 *1.1* 的耦合。对每个整数 $p \geq 5$，将块扩展 $k$

$$\widetilde{V}^{(p)} = (-L - e,\, 0^{[p-4]},\, L + E_p,\, \bar{v}_1 + E_p,\, \bar{v}_2 + E_p) \tag{1.4}$$

为周期形式。以下两个结论成立。

(a) 其最小周期为 $p$，每周期恰有四个非零背景位点。~(b) 对于每个 $0 < \theta < 1$，几乎必然谱 $\Sigma_p$ 包含 $E_p$，并且有无穷多个互不相同的有界谱隙从右侧累积到 $E_p$。

定理 1.2 的证明见第6节。

注 1.3。 定理 A 有两方面值得关注。

(a) 非零背景位点的比例至多为 $4/p$。式 (1.4) 中的项关于 $p$一致有界，因此背景在一个周期内的平均绝对值为 $O(p^{-1})$。这为每个非退化的、定义在 $\{0,1\}$上的伯努利分布，提供了在相同耦合下背景支撑密度任意小的例子。

(b) 为使定理 1.1 中的连接能量保持为零，当 $p \geq 6$ 时，我们在偶周期和奇周期对应的不同块中插入成对的零背景位点。允许能量随 $p$ 变化可简化构造。在最低狄利克雷特征值$E_p$处，当链及其两侧相邻位点上的噪声均为零时，沿链及其两侧相邻位点的传递满足 (6.1)。此时，一个块公式即可适用于两种奇偶性，且每周期有四个非零位点。如果链上任一噪声位为 1，端点格林函数界 (6.2) 就能对链长一致地控制出射斜率。对于 $p \geq 6$，连接能量为 $E_p < 0$。在 $p = 5$处，链只有一个位点，因此 $E_5 = 0$和 $\widetilde{V}_{(5)} = V^{(5)}$。于是，两种构造给出相同的背景和连接。

**证明结构。** 扩展三周期连接。 在所选能量 $E_*$处，四个块矩阵与三周期模型的块矩阵仅相差一个公共符号。对于较长周期，我们通过在$E_* = 0$处插入成对的零背景格点，或插入一条自由链并令 $E_* = E_p$ 为其最低狄利克雷特征值，来获得这种一致性。射影区间中的严格包含关系控制着其余噪声词。

分离谱隙。 对于每个充分大的 $n$，我们匹配两个迭代尺度。多锥不变性给出一个预解区间$\mathcal{J}_{p,\,n}$，而周期词的弗洛凯估计给出一个位于谱内部的区间$S_{p,\,n}$。以下顺序将这些预解区间置于彼此不同的有界谱隙中。

$$\sup S_{p,n+1} < \inf \mathcal{J}_{p,n} \leq \sup \mathcal{J}_{p,n} < \inf S_{p,n}.$$

测量谱隙。谱隙宽度及其到 $E_*$ 的距离均为 $R_B^{-2n}/d_p$量级。这里，$R_B^{-2n}$来自双曲迭代，$d_p$ 是 $E_*$处连接斜率之差的能量导数。根据朗斯基恒等式， $d_p$ 等于归一化连接解的平方范数。在零能量族中，它的量级为 $p$ ； 在

共振族中，它的量级为。比较常数与 $p$无关，而起始索引可能取决于背景。参见推论 5.7 和 6.1。

**本文的组织结构**。 第2节介绍谱与射影预备知识。第 3 节构造三周期情形下的连接，并处理短周期情形。第 4 节通过插入成对的零背景位点来扩展这一构造。第 5 节证明谱隙分离和宽度估计，并将其应用于累积能量为零的族。第6节证明共振构造及其定量估计。附录 A 验证整数尺度的数值界。附录B证明三周期模型的连接能量是代数的。

## 2. 谱与射影预备知识

**2.1. 传递**。 格点 $n$ 处的总势为 $V_n = v_n + \lambda\omega_n$。对于差分方程 $H_\omega u = Eu$的解 $u$，使用状态 $X_n = (u(n)\ -u(n-1))^{\mathsf{T}}$。经过单个格点的传递由下式给出

$$X_{n+1} = T_{E-V_n} X_n, \qquad T_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $m < n$，从 $m$到 $n$的传递为 $T_{E-V_{n-1}} \cdots T_{E-V_m}$。因此，空间词中的第一个格点对应最右侧的因子。

我们用斜率 $z = -u(n-1)/u(n)$表示非零状态 $X_n$在 $\mathbb{RP}^1$中的直线，其中当 $u(n) = 0$时，$z = \infty$。对于行列式为一的矩阵 $M$， $Mz$ 表示像直线的斜率。对于有限的 $z$，令 $h_M(z)$ 为 $M(1,\ z)^{\mathsf{T}}$的第一坐标。于是

$$h_M(z) = M_{11} + M_{12} z, \qquad Mz = \frac{M_{21} + M_{22} z}{h_M(z)}, \qquad \frac{d(Mz)}{dz} = h_M(z)^{-2}.$$

特别地， $T_a z = -1/(a+z)$。 $h_M$ 的零点映到无穷远处。矩阵 $M$ 和 $-M$具有相同的射影作用。

当 $|\mathrm{tr}\ M| > 2$时，矩阵 $M \in \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R})$是双曲的。其不稳定直线和稳定直线分别记为 $u_M$，$s_M$，对应于模分别为 $\rho_M > 1$和 $\rho_M^{-1}$的特征值。在有限图中，我们也用相同的记号表示它们的斜率。在有限不动斜率 $z$处，$(1,\ z)^{\mathsf{T}}$ 上的特征值为 $h_M(z)$。将向量表示在特征基中可得

$$\frac{Mz - u_M}{Mz - s_M} = \rho_M^{-2} \frac{z - u_M}{z - s_M} \tag{2.1}$$

在两边都有定义的地方成立。每次经过该块，都会使这个比值乘上同一个标量。

**定义2.1**。 设 $B(E)$ 和 $A(E)$ 分别为左、右周期尾部经过一个周期的传递矩阵。假设它们在 $E_*$ 附近都是双曲的。设 $D(E)$ 为经过两尾部之间有限块的传递矩阵。在 $E_*$ 处的异宿连接是指射影直线上的等式 $D(E_*)u_{B(E_*)} = s_{A(E_*)}$。在共同的局部坐标中，令 $z_-(E)$ 和 $z_+(E)$ 表示 $D(E)u_{B(E)}$ 和 $s_{A(E)}$。若 $(z_- - z_+)'(E_*) \neq 0$，则该连接是横截的，其中撇号表示对 $E$ 求导。

根据链式法则，坐标变换会使差值的导数乘以该坐标变换在共同斜率处的非零导数。在连接处，共同直线给出一个在两端都衰减的解。关于连接表述，参见[6]。横截性的朗斯基证明见 [2]。

对于处于相同能量的两个解 $u$， $v$，朗斯基 $u(n)v(n+1) - u(n+1)v(n)$ 关于 $n$ 为常数，因为它是在 $n+1$ 处它们的状态的行列式。在此计算中，令$v = v(E)$为一个关于 $E$ 可微变化的实解。点表示在固定总势 $V$ 下关于 $E$ 的微分。令

$$W_n = v(n)\dot{v}(n+1) - v(n+1)\dot{v}(n), \qquad W_n - W_{n-1} = v(n)^2. \tag{2.2}$$

固定一个能量区间，在该区间上两个周期尾部都是双曲的，并且在左端和右端衰减的解 $v_-(n,\ E)$ 和 $v_+(n,\ E)$ 可归一化为在$n=0$处等于一。令 $z_\pm(E)\ =-v_\pm(-1,\ E)$。

在每个衰减尾部，解在块边界处呈几何级数形式，而微分至多引入一个线性因子。因此， $W_n$ 在相应端点趋于零。由于$W_{-1}=-v(-1)$，在连接点任一侧对 (2.2) 求和可得

$$(z_- - z_+)'(E) = \sum_{n<0} |v_-(n,E)|^2 + \sum_{n\geq 0} |v_+(n,E)|^2 > 0. \tag{2.3}$$

在连接点处，两个归一化解相等，因此该导数等于它们的公共解在 $\ell^2$ 中的平方范数。

2.2. **周期谱逼近**。 一个块由格点 $kp$、.....、 $kp+p-1$ 组成，其中 $k\in\mathbb{Z}$为某个值。它从背景相位零处开始。其噪声字为 $\nu\in\{0、1\}^p$，且每个这样的字都具有正概率。

**引理 2.1**。 以下两个结论成立。

(a) 几乎每个实现的谱 $\Sigma$ 都与 $\theta\in(0、1)$ 无关，并且满足

$$\Sigma = \bigcup_{\omega} \sigma(H_\omega) = \overline{\bigcup_{\omega \text{ periodic}} \sigma(H_\omega)}.$$

（b）若噪声配置的周期为 $q$，则 $\mathrm{lcm}(p,q)$ 是总势的一个周期。它是 $p$ 的倍数，因此，沿此共同周期的单调矩阵 $P(E)$ 是若干完整块矩阵的乘积。迹 $\Delta(E)\ =\mathrm{tr}\ P(E)$ 即为Floquet判别式。对于实数 $E$,

$$E\in\sigma(H_\omega) \quad\Longleftrightarrow\quad |\operatorname{tr} P(E)|\leq 2.$$

证明。对于固定的 $\theta\in(0,1)$，平移 $p$ 个格点保持 $v$ 不变，且对于伯努利噪声是遍历的，因此几乎必然谱是确定的。平移一个格点会将算子共轭到具有相邻背景相位的算子，同时保持噪声分布不变。

对于所有配置的并集，在 [2], 中使用Weyl序列论证，以 $p\mathbb{Z}$ 中的平移代替 $3\mathbb{Z}$，从而使背景相位对齐。周期逼近是 [6], ，而迹判据是 [3]。□

每个周期谱都是其内部的闭包，因此周期逼近意味着 $\mathrm{int}\,\Sigma$ 在 $\Sigma$ [6] 中稠密。

2.3. **多锥与一致双曲性**。

**定义 2.2**。 一个闭射影多锥 是 $K$ 的非空真子集，由有限个两两不相交的非退化闭弧组成。对于有限族$\mathcal{F}\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，如果对每个 $M\in\mathcal{F}$ 都有 $MK\subseteq K$，则该多锥是正向不变 的。如果在长度为 $q$ 的字下严格不变 ，则

$$M_q\cdots M_1 K\subseteq \operatorname{int} K \qquad (M_1,\dots,M_q\in\mathcal{F}).$$

这里的内部取自射影直线。对于 $q=1$ ，这表示在生成元作用下严格不变。

**引理 2.2**。 在实能量 $E_0$ 处，设某个多锥 $K$ 对固定 $q\geq 1$ 的块矩阵的每个乘积都严格不变 。则 $E_0$ 的某个邻域与 $\Sigma$ 不相交。

证明。 紧致性和有限性保证在一个共同的能量邻域内，所有严格包含关系都成立。根据多锥判据，长度为 $q$ 的乘积族是一致双曲的；将矩阵按长度为 $q$ 的块分组后，原矩阵族 [1, 6] 也具有一致双曲性。Johnson 定理的块形式排除了该邻域与 $\Sigma$ [6]的交集。□

备注 2.3。 设 $K$ 是一个正向不变多锥，其边界为射影直线上的 $\partial K$ 。边界转移图 的顶点集为 $\partial K$ ；当存在某个 $M \in \mathcal{F}$使得 $Mx = y \in \partial K$时，就有一条边 $x \to y$ 。如果该图无环，那么长度为 $|\partial K|$（即边界点的数量）的每个字都会将 $K$ 映入其内部 [2]。

## 3. 三周期的连接能量和射影区间

我们确定背景为三周期时的连接能量 $e$，并界定八个块映射的像。第 4 节中的插入操作在该能量处将所需的四个矩阵保持到一个公共符号以内。第 5 节讨论较长块的能量依赖性。

我们使用背景为 $(0, v_1, v_2) = (0, -11.493, -1.224)$ 的三周期模型的未平移能量坐标。有限小数表示精确有理数。对于按空间顺序排列的三个噪声位 $i, j, k \in \{0, 1\}$，第 2.1 节记号中的传递矩阵为

$$M_{ijk}(E) = T_{E-v_2-\lambda k} T_{E-v_1-\lambda j} T_{E-\lambda i}.$$

设 $A = M_{000}, R = M_{001}, C = M_{010}, B = M_{011}, D = C^2$ 并固定

$$w = -\tfrac{3}{2}, \quad t = -\tfrac{307}{200}, \quad x^- = -\tfrac{1}{4}, \quad x^+ = 0, \qquad X = [x^-, 0], \qquad \mathcal{I} = [w, 0.104].$$

多锥从 $w$ 开始。点 $t < w$ 确定起始区间的左端点$[t, 0]$，该区间用于 $B$ 次迭代。在诸如 $M0$、$Bt$ 和 $D0$ 的表达式中，矩阵作用于所指示的斜率。

表 1 总结了这四个矩阵各自的作用。

| 矩阵 | 噪声字 | 在证明中的作用 |
|---|---|---|
| $A$ | 000 | 稳定斜率 $s_A$ 给出了向右衰减的尾部。 |
| $R$ | 001 | 恒等式 $RA^{-1}C = B$ 给出了边界像 $R(A^{-1}C0) = B0$。 |
| $C$ | 010 | 两个带有矩阵 $C$ 的块在 $E = e$处连接两个斜率，并且 $C^2 u_B = s_A$。 |
| $B$ | 011 | 不稳定斜率 $u_B$ 使尾部向左衰减。 |

**表 1** 三周期的传递矩阵

我们使用依赖能量的斜率 $\ell = Cx^-$、$j_1^+ = A^{-1}C0$ 和 $\widehat{i} = u_B + \rho_B^{-4}$。下文 (b)–(d) 部分中的界限取在连接能量 $e$处。

**引理 3.1**。 以下陈述成立。

(a) 在 $J = [0.568030, 0.568031]$ 中存在唯一的能量 $e$，使得 $Du_B = s_A$。(b) 在 $E = e$处，斜率满足

$$s_B < -100 < t < w < u_A < D0 < s_A < \ell < x^- < 0 < u_B < \widehat{i} < 0.104, \tag{3.1}$$

$$0 < Bt < 0.08734, \qquad Bt < Bw < 0.088 < 0.1 < B0 < u_B, \qquad D0 > -0.53. \tag{3.2}$$

(c) 在 $E = e$ 处，下面的每个射影映射在其指定的源区间上都没有极点，并且

$$C\mathcal{I} \subset (w, x^-), \qquad A[\ell, 0.104] \subset (w, D0),$$
$$R[w, j_1^+] \subset (Bw, B0], \qquad R[\ell, 0.104] \subset (Bw, B0). \tag{3.3}$$

对于 $R$ 中的第一个包含关系，等式 $Rz = B0$ 仅在 $z = j_1^+$ 处成立。

(d) 在 $E = e$ 处，分别在 $[w, s_A]$、$[s_A, \infty)$ 和 $[t, \infty)$ 上，分母满足 $h_A < 0$、$h_{A^{-1}} < 0$、$h_B > 0$。

证明。 矩阵元和固定斜率界见 [2] 的附录 A.2 和 A.3 节。这些矩阵元由三个传递矩阵的乘积得到

$$T_z T_y T_x = \begin{pmatrix} (zy-1)x - z & zy - 1 \\ 1 - yx & -y \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

在整个 $\mathcal{J}$ 上都有

$$-0.55183 < u_A < -0.55181, \qquad -0.51438 < s_A < -0.51436, \qquad 0.10258 < u_B < 0.10260,$$
$$\rho_A^2 < 2.13, \qquad \rho_B > 10.43, \qquad \widehat{i} < 0.104. \tag{3.5}$$

$C\mathcal{I}$、 $A[\ell, 0.104]$以及 $R$的两个分支的估计、 $D0 > -0.53$ 和$Bw < 0.088 < 0.1 < B0 < u_B$ 的界，以及相应的分母符号，见 [2]附录中的A.4节和A.6–A.8节。

要定位该连接，使用不动点多项式 $F_M(z) = M_{12}z^2 + (M_{11} - M_{22})z - M_{21}$。对于表2中的每个能量，将其代入（3.4）可得：在 $s_A$ 区间上， $F_A$ 在左端点和右端点处分别取负值和正值；在 $u_B$区间上， $F_B$ 在左端点和右端点处分别取负值和正值。相应区间内的分支由 $-1 < h_A < 0$ 和 $h_B > 1$ 得出。

| $E$ | $s_A(E)$ | $u_B(E)$ |
|---|---|---|
| 0.568030 | $(-0.5143698755, -0.5143698754)$ | $(0.1025909043, 0.1025909044)$ |
| 0.568031 | $(-0.5143720045, -0.5143720044)$ | $(0.1025909284, 0.1025909285)$ |

**表2** $\mathcal{J}$端点处的斜率界

在这些区间上，经过 $u_B$ 的 $D$ 分支是递增的。在 $u_B$ 区间的两个端点处计算 $D$，并减去 $s_A$ 区间对应的另一端点处的值，可得 $\delta(E) = D(E)u_B(E) - s_A(E)$ 的以下界。

$$\delta(0.568030) \in (-1.38, -1.37) \times 10^{-6},$$
$$\delta(0.568031) \in (1.38, 1.39) \times 10^{-6}.$$

在整个 $\mathcal{J}$上， $s_A$ 和 $u_B$ 有限且连续。 $Du_B$ 也如此，因为 $C$ 在 $\mathcal{I}$ 上没有极点，且将其映射到自身。对于递增尾部和递减尾部之间的两个 $C$ 块，(2.3) 给出在 $\mathcal{J}$ 上 $\delta'(E) > 0$。因此， $\delta$ 在 $\mathcal{J}$的内部有唯一零点 $e$。在 $e$ 处， $D$ 在 $\mathcal{I}$ 上的单调性给出 $D0 < Du_B = s_A$。

在新端点 $t = -307/200$ 处，我们有 $s_B < t$、 $B_{12} > 0$ 和 $h_B(s_B) > 0$。因此，在整个 $[t, \infty)$ 上 $h_B > 0$，且 $Bt < Bw$。公式 $Bt = (1 - qv)/((cq - 1)v - c)$，其中 $q = e - 0.673$、 $c = e - 10.942$ 和 $v = e + t$，给出

$$0 < Bt < \frac{1 - (0.104969)(0.966969)}{10.373969 - (0.08896)(0.966970)} < 0.08734.$$

□

**3.1. 最后两个位置与短周期。** 长度为$p$ 的块的前 $p-2$ 个格点构成其前缀。如果一个噪声字的所有前缀位均为零，则该噪声字是活跃的。最后两位可以任意取值，因此共有四个活跃字。其他字则是非活跃的。第 5 节使用三个目标区间

$$(w, D0), \qquad (Bt, B0), \qquad (x^-, 0).$$

**引理 3.2。** 设周期为三的种子的最后两个格点处的入射斜率为$s \in (0.036, 0.09)$。对于这些格点处的噪声符号（$j$、 $k$） $= (0, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 0)$、$(1, 1)$ 时，出射斜率分别属于$(w$、 $D0)$、$(Bt$、 $B0)$、$(x^-$、$0)$、$(x^-$、$0)$。每个长度为三的非活跃字都将 $I$ 的全部映射到相应的区间中。

证明。若 $j = 0$，则 $12 < e - v_1 + s < 14$，因此经过第一步后的斜率为 $v \in (-1/12, -1/14)$。若 $k = 0$，则 $5/3 < e - v_2 + v < 7/4$，从而像落在 $(-3/5, -4/7)$ 中。若$k = 1$，则 $10 < -(e - v_2 - \lambda + v) < 100/9$，从而像落在 $(0.09, 0.1)$ 中。

如果 $j = 1$，那么 $-0.069 < e - v_1 - \lambda + s < 0$，且第一步之后的斜率超过$1000/69$。因此，最后一步的分母超过 $1000/69 - 10.375 > 4$。所述包含关系由 (3.2) 得出。

对于任意长度为三的非活跃字，第一个位置的噪声符号为 1。输入 $z \in \mathcal{I}$ 时，它的出射斜率为 $(\lambda - e - z)^{-1} \in (1/14,\ 1/11.4) \subset (0。036,\ 0。09)$。□

**引理 3.3**。对于周期四的未平移背景 $(-1, e-1, v_1-1, v_2)$，临界能量 $e$ 处的四个活跃矩阵分别为 $A, R, C, B$。每个非活跃矩阵都将 $I$ 中的所有点映射到上方三个开区间之一。

证明。由恒等式 $T_{y+1}T_1T_{x+1} = T_yT_x$可知，当格点 1（从 0 开始计数）处的噪声符号为 0 时，乘积等于由其余符号确定的三个格点对应的原始矩阵。引理 3.2 涵盖了第一个符号为 1 的情形。

如果插入格点处的符号为 1，令 $i$ 为第一个噪声位，$z \in \mathcal{I}$ 为入射斜率。设 $r = e + 1 + z - \lambda i$。经过前两个格点后，斜率为

$$U = \frac{r}{1 + (\lambda - 1)r}, \qquad r \in [0.068030, 1.672031] \text{ or } [-12.097970, -10.493969].$$

分母在第一个区间上为正，在第二个区间上为负。该函数在每个区间上递增。代入端点得到 $0.03866 < U < 0.091$。例如，在正分支的下端，$0.068030 > 0.03866(1 + 11.166 \cdot 0.068030)$。在负分支的上端，使用 $U = 1/(11.166 + 1/r)$。

令 $j$，$k$ 为最后两个噪声位，并设 $Y = e - v_1 + 1 - \lambda j + U$，$d = e - v_2 - \lambda k$。经过四步后的像为 $Z = -Y/(dY - 1)$。$Y$的界为

$$\begin{aligned} 13.09969 < Y < 13.152031 \qquad & (j = 0), \\ 0.93369 < Y < 0.986031 \qquad & (j = 1). \end{aligned}$$

如果 $k = 0$，则 $dY - 1 > 1.792030(0.93369) - 1 > 0$。如果 $k = 1$，则 $d < 0 < Y$。由于 $\partial_Y Z = (dY - 1)^{-2}$，$\partial_d Z = Y^2(dY - 1)^{-2}$，因此只需在每个矩形的角点处计算 $Z$，其中两个坐标要么都取最小值，要么都取最大值。表 3 列出了所得的界。

| $j \backslash k$ | $k = 0$ | $k = 1$ |
|---|---|---|
| $j = 0$ | $(-0.59,\ -0.58)$ | $(0。095,\ 0。097)$ |
| $j = 1$ | $(-1.40,\ -1.27)$ | $(0.08737, 0.089)$ |

**表 3** 周期四的斜率界

最后一项的裕度最小，因为 $1/(10.373970 + 1/0.93369) > 0.08737 > 0.08734 > Bt$。因此，第一列位于 $(w,\ D0)$ 内，第二列位于 $(Bt,\ B0)$ 内。□

**引理 3.4**。对于周期五的未平移背景 $(-L, e, e+L, v_1, v_2)$，临界能量 $e$ 处的四个活跃矩阵分别为 $-A, -R, -C, -B$。每个非活跃字都将 $I$ 映射到引理 *3.2* 中相应的区间。

证明。设 $i$，$j$ 是长度为三的替换块两端的噪声位，并设 $z \in \mathcal{I}$ 为其入射斜率。如果中间符号为零，直接相乘可得

$$T_{-L-\lambda j}T_0T_{e+L-\lambda i} = -T_{e-\lambda(i+j)}.$$

若 $i + j \in \{1,\ 2\}$，则出射斜率满足 $1/(\lambda(i + j) - e - z) \in (0.039,\ 0.088)$，使用$w \le z \le 0.104$。

如果中间符号为 1，令 $v = e + L - \lambda i + z > 2.4$。中间位置的出射斜率为 $u = (\lambda + 1/v)^{-1} \in (0,\ \lambda^{-1})$。在右端点，出射斜率介于 $(L+\lambda)^{-1}$ 和 $(L-\lambda^{-1})^{-1}$之间，这两者都属于 $(0.036,\ 0.09)$。现在可以应用引理 3.2。□

### 4. 插入成对的零背景格点

零插入也出现在构造豪斯多夫维数为零的谱时，适用于所有非零耦合常数 [5] 下的通用极限周期势。这里，插入的格点承载伯努利噪声。考虑 (1.3) 中满足 $p \geq 6$ 的背景。在 $E = 0$ 处，最后两个格点 $T_{E-v_n-\lambda\omega_n}$ 的传递矩阵参数分别为 $e - v_1 - \lambda b$ 和 $e - v_2 - \lambda c$，其中 $b,\ c \in \{0,\ 1\}$。前缀的两个端点具有无噪声参数

$$x = e + L - 1, \qquad y = -L.$$

前缀内部的无噪声参数为

$$(-1, 0^{[2k]}, -1), \qquad (-2, -1, 0^{[2k]}, -2)$$

分别对应偶周期和奇周期。在每个格点处，值为 1 的噪声位会使参数减少 $\lambda$。

**引理 4.1**。令 $E = 0$，并假设入射斜率属于 $I = [-3/2,\ 0.104]$。以下两个结论成立。

(a) 若前缀的所有内部位均为 *0*，且其端点位为 $i, j$，则前缀矩阵为 $\varepsilon_p T_{e-\lambda(i+j)}$，其中 $\varepsilon_{6+2k} = (-1)^k$ 且 $\varepsilon_{7+2k} = (-1)^{k+1}$.(b) 若前缀中任意位置至少有一位为1，则出射斜率属于 $(0.036, 0.09)$，且对 $k$ 一致。

证明。令 $z \in \mathcal{I}$ 为入射斜率。由恒等式可得 (a) 部分

$$M := T_{-1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_{-2}T_{-1}T_{-2} = -M, \qquad T_0^2 = -I_2$$

以及 $T_{y-\lambda j} M T_{x-\lambda i} = T_{x+y+1-\lambda(i+j)}$。若所有内部位均为零且 $i + j \geq 1$，则出射斜率为 $(\lambda(i + j) - e - z)^{-1}$。引理 3.4 的证明中所用的估计表明，该值落在 (0.039,0.088) 内。

现在假设至少有一个内部位为 1。对于偶周期，令 $q = 1$；对于奇周期，令 $q = 2$。令 $\eta$ 为第一个内部位点处的噪声位。在左端点，分母满足 $\tau = x - \lambda i + z \geq e + L - 1 - \lambda - 3/2 > 1.4$，因此经过第一个内部位点后的斜率为

$$\xi = \frac{1}{q + \lambda\eta + 1/\tau} \in (0, 1/q).$$

对于偶周期，$\xi$ 是进入零背景成对序列的斜率。对于奇周期，在该序列之前还多出一个位点，其噪声位为 $\eta'$，参数为 $-1 - \lambda\eta'$，因此进入时的斜率为 $\xi' = (1 + \lambda\eta' - \xi)^{-1} \in (0,2)$。

一对具有零背景和噪声位 $a, d$ 的格点对斜率的作用为

$$F_{ad}(z) = \frac{z - \lambda a}{1 + \lambda d(z - \lambda a)}.$$

即使这两个格点之间的斜率为无穷大，该格点对仍按此公式作用。特别地，$F_{00}$ 是恒等映射。令 $S = (-\infty, -8] \cup [0, 9/100]$。平移 $z \mapsto z - \lambda$ 将 (0,2) 映射到 $(-\infty, -8)$，并将 $S$ 映射到自身。映射 $z \mapsto z/(1 + \lambda z)$ 将非负实轴映射到 $[0, 1/\lambda)$，并将 $(-\infty, -8]$ 映射到 $(1/\lambda, 8/(8\lambda - 1)]$,，其中 $8/(8\lambda - 1) < 9/100$。因此，第一个噪声位不同于 00 的格点对会将斜率送入 $S$，而之后的每个格点对都会将其保持在其中。

设 $z'$ 为进入最后一个内部位置的斜率，$\eta_{\text{last}}$ 为其噪声位。则出射斜率$u$ 满足

$$0 < u = \frac{1}{q + \lambda\eta_{\text{last}} - z'} \leq \frac{100}{91} < 1.1, \qquad z' \in S.$$

如果每一对零背景对应的位都是 00（包括 $k = 0$ 的情况），那么剩余的两个或三个内部位点中必有一个噪声位为 1。如果最后一个内部位置的位为 1，那么它的入射斜率小于 $q$，因此 $0 < u < 1/\lambda$。

假设最后一个内部位为 0。对于偶周期，我们有 $\xi < 1/(1+\lambda)$，从而得到$u = (1-\xi)^{-1} < 1 + 1/\lambda$。

对于奇周期，如果中间比特为 1，那么 $\xi' < (\lambda + 1/2)^{-1} < 1$ 和 $u = (2-\xi')^{-1} < 1$。如果中间比特为 0，则第一位必须为 1。在这种情况下

$$\xi < \frac{1}{2+\lambda}, \qquad \xi' < \frac{2+\lambda}{1+\lambda},$$

再次得到 $u < 1 + 1/\lambda$。

在所有情况下， $u \in (0, 1.1)$。在右端点处，我们得到

$$0.036 < \frac{1}{L+\lambda} < \frac{1}{L+\lambda j - u} < \frac{1}{L-1.1} < 0.07.$$

□

**命题 4.2**。 固定 $p \geq 3$ 并使用 (1.3) 中的背景 $V^{(p)}$。以下陈述成立。

(a) 在能量为零时，所有前缀位均为零且末尾比特分别为 00、01、10、11 的四个字，分别给出种子矩阵 $A$、$R$、$C$、$B$，其能量为 $e$，相差一个公共符号。(b) 令 $D = C^2$，并令 $H = u_B + \rho_B^{-4}$处于种子能量 $e$。每个其他字的矩阵都将 $[w, H]$ 紧致地映射到以下集合之一：$(w、\ D0)$、$(Bt、\ B0)$以及 $\operatorname{int} X$。(c) 四个活跃矩阵函数在每个能量处都满足 $RA^{-1}C = B$。

证明。 在三周期下，四个活跃字就是种子中的那些字，而引理 3.2 控制非活动词。引理 3.3 和引理 3.4 分别处理在周期四插入一个格点以及在周期五插入单个内部位点的情形。对于 $p \geq 6$，当所有前缀位均为零时，引理 4.1 给出所断言的矩阵恒等式。对于其他每个字，前缀映射 $[w, H] \subset \mathcal{I}$ 将其映入 (0.036, 0.09)，而引理 3.2 则通过最后两个步骤将该区间映入三个开目标区间之一。

在能量 $E$ 处，令 $M_{bc}$ 为末尾位为 $b, c$ 的活跃矩阵。令 $P$ 为公共前缀矩阵，并令 $V_b, U_c$ 分别为倒数第二个位点和最后一个位点处的传递矩阵。于是$M_{bc} = U_c V_b P$，其中任意公共符号均吸收到 $P$ 中。因此，

$$M_{01} M_{00}^{-1} M_{10} = U_1 V_0 P \, P^{-1} V_0^{-1} U_0^{-1} \, U_0 V_1 P = M_{11}.$$ □

## 5. 周期扩展与谱隙分离

在临界能量处，只需有限个区间包含关系即可证明存在无穷多个谱隙。我们使用先前工作 [2] 中的双曲迭代和周期词。延长周期会改变活跃矩阵的能量导数，并引入新的字，因为在每个新增格点处，两种噪声取值都可以出现。

对于下一个命题，设 $v$ 是一个周期为 $p$、具有几乎必然谱$\Sigma(v)$ 的实背景。对于二元噪声字 $\nu \in \{0,\ 1\}^p$，令 $M_\nu(E)$ 表示其在 $p$ 个格点上的传递矩阵。指定四个互不相同的字为活跃字，其矩阵函数分别为 $A,\ R,\ C,\ B$。采用第 2.1 节的坐标以及第 3 节的常数 $t,\ w,\ x = x^-$。令 $D = C^2$，且 $H(E) = u_B(E) + \rho_B(E)^{-4}$。这里， $u_B$ 是 $B$ 的不稳定斜率，而 $\rho_B$ 是其扩张特征值模。

指标 $n$ 用于标记构造中的尺度。令$\mathcal{J}_{p,n}$ 表示由 (5.4) 定义的候选预解式区间，$G_{p,n}$ 表示将包含该区间的间隙，$S_{p,n}$ 表示同一尺度上的闭谱区间。

**命题 5.1**。 设能量 $E_*$ 满足以下条件。

(i) 种子匹配。 在 $E_*$ 处，矩阵 $A$、$R$、$C$、$B$ 与引理 *3.1* 在 $e$ 处对应的种子矩阵一致，至多相差一个公共符号。(ii) 矩阵恒等式。 恒等式 $RA^{-1}C = B$ 在 $E_*$ 的一个邻域内成立。

(iii) 非活跃字。 对于每个其余的字 $\nu$，像 $M_\nu(E_*)[w, H(E_*)]$ 紧包含于其中一个

$$(w,\ D0), \qquad (Bt, B0), \qquad (x, 0),$$

其中 $D0$、 $Bt$、 $B0$ 均在 $E_*$ 处取值。

设 $\delta_p(E) = D(E)u_B(E) - s_A(E)$ 表示经过两个 $C$ 块后入射不稳定斜率与 $A$ 的稳定斜率之差。令 $R_B = \rho_B(E_*)$ 和 $d_p = \delta_p'(E_*)$，其中撇号表示能量导数。以下结论成立。

(a) $d_p > 0$ 以及对每个 $0 < \theta < 1$ 都成立的 $E_* \in \Sigma(v)$ 。(b) 存在一个起始索引 $N$，它可能取决于背景，使得对每个整数 $n \geq N$，$J_{p,\ n}$ 都位于有界谱隙 $G_{p,\ n}$中，并且存在一个闭区间 $S_{p,\ n} \subset \text{int}\ \Sigma(v)$。

(c) 对于 $n > N$，这些区间按如下顺序排列

$$\sup G_{p,n} < \inf S_{p,n} \leq \sup S_{p,n} < \inf G_{p,n-1}.$$

(d) 对于 $n \geq N$ 和 $K \in \{G_{p,\ n}、 S_{p,\ n}\}$，

$$|K| \geq c_0 \frac{R_B^{-2n}}{d_p},$$

$$c_0 \frac{R_B^{-2n}}{d_p} \leq \inf K - E_* \leq \sup K - E_* \leq C_0 \frac{R_B^{-2n}}{d_p},$$

其中， $c_0$、 $C_0 > 0$ 仅取决于种子。

(e) 存在一个仅取决于种子的常数 $\kappa > 0$，使得每个充分小的右邻域 $(E_*、\ E_* + \varepsilon)$ 都包含一个间隙 $G_{p,\ n}$和一个谱区间 $S_{p,\ n}$，且二者的长度均至少为 $\kappa\varepsilon$。 $\varepsilon$的阈值可能取决于背景。

在以下命题中，我们始终保留命题 5.1 的假设。首先，我们对活跃矩阵进行归一化，并确定连接处的能量导数。

设 $\varepsilon \in \{1,\ -1\}$ 为 $E_*$处的公共符号。在 $E_*$ 的某个邻域内，将四个物理块矩阵分别乘以 $\varepsilon$，使所得的 $A,\ R,\ C,\ B$与 $E_*$处的种子一致。这一归一化保持恒等式 $RA^{-1}C = B$ 和射影映射不变。对于由 $q$ 个活跃块组成的字，将迹乘以 $\varepsilon^q$，从而保持其绝对值不变。

对于 $M = A,\ B$，令 $u_M,\ s_M$分别为不稳定斜率和稳定斜率，并令 $\rho_M$表示不稳定特征值的模。这些量在 $E_*$附近都是实解析的。

**引理 5.2.** 该连接是横截的。更准确地说， $\delta_p(E_*) = 0$，而 $d_p = \delta_p'(E_*)$等于连接解 $\psi$ 的平方 $\ell^2$-范数，其中该解在右侧 $A$ 尾部起点处按 $\psi(0) = 1$ 归一化。特别地， $d_p > 0$。

证明。 种子连接给出 $\delta_p(E_*) = 0$。构造一个势，使其左侧具有周期性 $B$ 尾部，中间有两个 $C$ 块，右侧具有周期性 $A$ 尾部。将原点设在第一个$A$ 块的起点。将分别在 $-\infty$和 $+\infty$ 处衰减的解归一化，使其在原点处均为 1。它们在原点处的斜率分别为 $Du_B$ 和 $s_A$。在 $E_*$ 处，两者斜率相同，因此这两个解拼接成一个实解 $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$。

在连接点应用朗斯基恒等式 (2.3)，得到

$$d_p := \delta_p'(E_*) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi(j)|^2 > 0. \tag{5.1}$$

因此， $\delta_p$ 是 $E_*$右侧的一个局部坐标。 □

导数将射影位移转换为能量增量。接下来，我们匹配两个整数尺度，并确定一个能量区间，使其端点具有所需的顺序。

上标 $*$ 表示在 $E_*$ 处求值。令 $R_A = \rho_A^*$、$R_B = \rho_B^*$、$u = u_B^*$、$\sigma = s_B^*$、$\Delta = s_A^* - u_A^*$，以及 $d_0 = \partial_z D^*(u) > 0$。两个方向族的系数为

$$P(z) = \Delta\frac{z - s_A^*}{z - u_A^*}, \qquad P_- = P(C^*x), \qquad P_+ = P(C^*0),$$
$$Q_- = d_0(u - \sigma)\frac{u - t}{t - \sigma}, \quad Q_+ = R_B^2 d_0(u - \sigma)\frac{u}{-\sigma}.$$

取 $r_0$，$r_1$，$\eta$，$T$，如引理 A.1 中所示。在周期词 $B^nC^2A^{m_n}$ 中，$n$ 计数 $B$ 块，而 $m_n$ 计数 $A$ 块。对于充分大的 $n$，定义

$$m = m_n = \min\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : R_A^{2j} R_B^{-2n} \geq r_0\}, \quad \alpha_n = R_A^{-2m}, \quad \beta_n = R_B^{-2n}, \quad r_n = \beta_n/\alpha_n. \tag{5.2}$$

**引理 5.3**。对于所有充分大的 $n$，(5.2) 中的整数和尺度满足 $r_0 \leq r_n < R_A^2 r_0 \leq r_1$、$m \asymp n$ 和 $n\alpha_n \to 0$。(5.4) 中的区间 $J_{p,\,n}$ 满足

$$E_* + \frac{P_-\alpha_n}{d_p} < \inf \mathcal{J}_{p,n} \leq \sup \mathcal{J}_{p,n} < E_* + \frac{P_+\alpha_n}{d_p}.$$

对于每个 $E \in J_{p,\,n}$，端点次序 (5.5) 成立。

证明。$m$ 的最小性给出 $r_0 \leq r_n < R_A^2 r_0 \leq r_1$，因此 $m \asymp n$ 和 $n\alpha_n \to 0$。引理 t

$$g(r) = \tfrac{1}{2}(P_- + Q_- r + \min\{Q_+ r, P_+\}).$$

根据引理引理 A.1，$g(r)$距（$P_- + Q_- r$，$\min\{P_+,\ Q_+ r\}$）的两个端点均超过 $3\eta/2$ 对所有 $r \in [r_0, r_1]$。

对于 $|E - E_*| = O_p(\alpha_n)$，解析性以及界 $m = O(n)$ 给出

$$\rho_A(E)^{-2m}/\alpha_n = 1 + O_p(n\alpha_n), \qquad \rho_B(E)^{-2n}/\beta_n = 1 + O_p(n\alpha_n).$$

下标 $p$ 允许隐含常数依赖于固定的周期背景。在能量 $E$ 处，令 $j_m^- = A^{-m}Cx$、$j_m^+ = A^{-m}C0$ 和 $h_n = u_B + \rho_B^{-4n}$。将（2.1）中的交比恒等式应用于 $B^n$ 以及 $A^{-m}$，并在 $A^{-m}$ 时交换两个不动点。在 $u_B$ 处展开 $D$ 得

$$\begin{aligned} j_m^{\pm} - s_A &= P_\pm\alpha_n + O_p(n\alpha_n^2), & DB^{n-1}0 - s_A &= \delta_p - Q_+\beta_n + O_p(n\alpha_n^2), \\ DB^n t - s_A &= \delta_p - Q_-\beta_n + O_p(n\alpha_n^2), & Dh_n - s_A &= \delta_p + O_p(\alpha_n^2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

例如，$B^n t - u_B = -(u_B - s_B)(u_B - t)(t - s_B)^{-1}\rho_B^{-2n} + O_p(\rho_B^{-4n})$。指数$n-1$对应于 $Q_+$ 中的因子 $R_B^2$。这四个展开在所述能量范围内均是一致的。

考虑闭区间

$$\mathcal{J}_{p,n} = E_* + \frac{\alpha_n}{d_p}[g(r_n) - \eta,\ g(r_n) + \eta]. \tag{5.4}$$

对于 $E \in \mathcal{J}_{p,n}$，我们有 $\delta_p(E)/\alpha_n = d_p(E - E_*)/\alpha_n + O_p(\alpha_n)$。代入（5.3）可得，对于所有充分大的 $n$，

$$DB^{n-1}0 < s_A < j_m^- < DB^n t < Dh_n < j_m^+. \tag{5.5}$$

不等式 $DB^n t < Dh_n$ 直接由 $B^n t < u_B < h_n$ 以及 $D$ 的严格单调性得到。

由于 $Q_- > 0$ 和 $r_n \geq r_0 > 0$，匹配区间两个端点处的裕量给出 $P_- < g(r_n) - \eta$ 和 $g(r_n) + \eta < P_+$。将这些界代入 (5.4)，即可证明所述包含关系。□

引理 5.3 中的端点不等式确定了多锥各分支的位置。取足够大的 $n$，使得 $m \geq 2$ 和 $n \geq 4$。固定 $E \in \mathcal{J}_{p,\,n}$，并在 $E$ 处计算下面的矩阵和斜率。令 $X = [x, 0]$，并定义

$$W = [w, DB^{n-1}0], \qquad L_0 = [Cx, CB0], \qquad J_j = A^{-j}CX \ (1 \leq j \leq m),$$
$$I_i = B^i[t, 0] \ (1 \leq i < n), \qquad I_n^* = [B^n t, h_n],$$
$$Y_i = CI_i \ (2 \leq i < n), \qquad Y_n^* = CI_n^*.$$

在 $I_n^*$ 和 $Y_n^*$ 中，星号标记末端区间，其右端点已向外延伸。令 $K$ 为这些区间与 $X$ 的并。令 $j_j^{\pm}$ 为 $J_j$ 的端点。

**引理 5.4**。对于所有充分大的 $n$ 以及每个 $E \in \mathcal{J}_{p,\,n}$，集合 $K$ 是 $[w, H]$ 中两两不相交的非退化闭区间的并。它们在实数轴上的顺序为

$$W,\ J_m, \ldots, J_1,\ L_0,\ Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Y_n^*,\ X,\ I_1, \ldots, I_{n-1}, I_n^*.$$

证明。引理 3.1 中的严格包含关系和不等式对于 $E_*$ 附近的 $E$ 仍然成立。$B$ 在 $[t, H]$ 和 $t < 0 < Bt < B0 < u_B$ 上递增。迭代得到 $B^i 0 < B^{i+1}t$。应用 $C$ 将 $Y_i$ 分离开来，并得到 $CB0 < CB^2 t$。由于 $Ch_n \leq CH < x$，区间 $Y_n^*$ 位于 $X$ 的左侧。

为了确定 $J_j$ 的顺序，令 $\ell = Cx$。由引理 3.1，$\ell > s_A$ 和 $A\ell < D0 < s_A = As_A$。由于 $A$ 在每个分支上递增，因此它在 $z_A \in$ 处有一个极点（$s_A$，$\ell$）。因此，其仿射分母满足 $h_A$（$s_A$）$< 0 < h_A$（$\ell$），其中 $A_{12} > 0$。反分支将 $[s_A, \infty)$ 递增地映射到 $[s_A, z_A)$。因此 $s_A < j_1^- < j_1^+ < \ell$。将 $A^{-j}$ 应用于 $j_1^+ < \ell$，得到 $1 \leq j < m$ 的 $j_{j+1}^+ < j_j^-$。最后，（5.5）将 $W$ 与 $J_m$ 分离开来。因此，$K$ 是 $[w, H]$ 中两两不相交的非退化闭区间的有限并。□

按照引理 5.4 对连通分支排序后，我们追踪它们在活跃矩阵作用下的端点。

**引理 5.5**。对于所有充分大的 $n$ 以及每个 $E \in \mathcal{J}_{p,\,n}$，多锥 $K$ 在块矩阵作用下是不变的。存在一个长度 $q$，使得每个长度为 $q$ 的字都会将 $K$ 映入其内部。特别地，$\mathcal{J}_{p,\,n} \cap \Sigma(v) = \varnothing$。

证明。设 $i_j^{\pm}$，$j_j^{\pm}$，$y_j^{\pm}$表示相应区间的端点，$\ell^{\pm}$ 表示 $L_0$的端点，且$w_n^+$表示 $W$的右端点。帽号表示 $I_n^*$和 $Y_n^*$的端点。按照注记 2.3 中的约定，表 4 列出了四个活跃矩阵作用下从 $\partial K$ 到 $\partial K$ 的所有转移。

| 矩阵 | 边界跃迁 |
|---|---|
| $A$ | $j_j^{\pm} \mapsto j_{j-1}^{\pm}$ $(2 \leq j \leq m)$，$\quad j_1^- \mapsto \ell^-$ |
| $R$ | $j_1^+ \mapsto i_1^+$ |
| $B$ | $0 \mapsto i_1^+$，$\quad i_j^{\pm} \mapsto i_{j+1}^{\pm}$ $(1 \leq j \leq n-2)$，$\quad i_{n-1}^- \mapsto \widehat{i}_n^-$ |
| $C$ | $x \mapsto \ell^-$，$\quad i_1^+ \mapsto \ell^+$，$\quad i_j^{\pm} \mapsto y_j^{\pm} (2 \leq j < n)$，$\quad \widehat{i}_n^{\pm} \mapsto \widehat{y}_n^{\pm}$，$\quad y_{n-1}^+ \mapsto w_n^+$ |

**表 4** $K$的边界跃迁

对于 $M = A,\ B$，将分子在两个固定斜率处因式分解，可得

$$Mz - z = -\frac{M_{12}(z - u_M)(z - s_M)}{h_M(z)}.$$

在 $W$ 上，我们有 $w < u_A < D0 < w_n^+ < s_A$ 和 $h_A < 0$。该公式给出 $Aw > w$ 和 $Aw_n^+ < w_n^+$，因此由单调性可得 $AW \subset$ 属于 $W$。在这些区间上，

$$AJ_j = J_{j-1} \quad (2 \leq j \leq m), \qquad AJ_1 = CX \subset L_0.$$

这里 $C0 < CB0$，因此只有 $CX$ 的左端点与 $L_0$ 的边界相交。其余每个连通分支都位于 $[Cx, H]$，且其像位于 $(w,\ D0)$。

位于 $I$ 区间之外的分支都位于 $[w,0]$。它们在 $B$ 下的像位于 $(Bt,\ B0]$，因为 $Bt<Bw$，其中 0 映射到 $B0$。普通区间满足

$$BI_j=I_{j+1}\quad(1\le j\le n-2),\qquad BI_{n-1}\subset I_n^*.$$

$BI_{n-1}$ 的左端点是唯一与 $I_n^*$边界相交的端点。在 $I_n^*$ 上，我们有 $s_B<B^nt<u_B<h_n$、$B_{12}>0$和 $h_B>0$。固定斜率公式给出 $B(B^nt)>B^nt$ 和 $Bh_n<h_n$，因此$BI_n^*\subset\operatorname{int}I_n^*$。

由于 $x<0<Bt<B0$，映射 $C$ 将 $X$ 和 $I_1$ 都映入 $L_0$。由 $Cw>w$和 $j_1^+<Cx<C0$ 可得 $C[w,j_1^+]\subset(w,\ D0)$。此外，由$D[w,H]\subset(w,\ x)$和 $B0<B^{n-1}0$，有 $CL_0=D[x,B0]\subset(w,\ w_n^+)$。

对于每个普通的 $Y_j$，其像 $CY_j=DI_j$ 位于$(w,\ w_n^+]$ 内，并且仅当 $j=n-1$时与 $w_n^+$相交。由(5.5)，最终的像满足 $CY_n^*=DI_n^*\subset\operatorname{int}J_m$。

对于 $R$，使用包含关系 $K\subset[w,j_1^+]\cup[Cx,H]$。在这些区间上，$R$ 没有极点。其端点值满足

$$Rw,\ R(Cx)>Bw>Bt,\qquad RH<B0,\qquad Rj_1^+=B0.$$

最后一个等式由 $RA^{-1}C=B$ 得出。因此 $RK\subset I_1$，且只有表中列出的边界接触点。

对于非活跃矩阵 $M$，将源区间参数化为 $z=w+s(H(E)-w),0\le s\le 1$。在 $E_*$ 处，$|h_M(z)|$，且 $Mz$ 到其目标区间任一端点的距离都有正的下界。目标端点随 $E$ 连续变化。由 $s$ 中的紧致性，同一包含关系在 $E_*$ 附近仍成立。对固定的 $p$，非活跃字只有有限多个，因此存在一个邻域适用于它们全部。

为 $[w,H(E)]$ 建立的包含关系同样适用于 $K\subset[w,H(E)]$。由于 $D0<w_n^+$，三个目标区间（$w,\ D0$）、（$Bt,\ B0$）和（$x,\ 0$）分别包含于 $W$、$I_1$和 $X$ 的内部。因此，每个非活跃字都映射 $K$ 到其内部。

在表 4 中，穿过这些 $J$ 区间的边界路径具有递减的索引，并且只能在 $L_0$ 或 $I_1$的端点处离开。穿过这些 $I$ 区间时，索引递增，可退出至一个$Y$ 区间或 $L_0$。从一个 $Y$ 端点出发，至多还有一条边，终止于一个没有出边的顶点。因此，该图是无环的，正如 [2]中对三周期的计算所示。

注记 2.3 现在给出了对所有固定长度的字的严格不变性。引理 2.2 适用于每个 $E\in\mathcal{J}_{p,n}$，因此 $\mathcal{J}_{p,n}\cap\Sigma(v)=\varnothing$。□

引理 5.5 将 $\mathcal{J}_{p,n}$ 排除在谱之外。为了区分连续尺度上的谱隙，我们现在利用 Floquet判别式定位谱区间。

**引理 5.6**。对于每个充分大的 $n$，存在一个闭区间 $S_{p,n}\subset\operatorname{int}\Sigma(v)$，满足

$$\sup\mathcal{J}_{p,n}<\inf S_{p,n}<\sup S_{p,n}\le E_*+\frac{2T\alpha_n}{d_p},\qquad |S_{p,n}|\ge\frac{\xi\alpha_n}{d_p},$$

其中 $\xi>0$ 仅取决于种子。连续尺度满足 $\sup S_{p,n+1}<\inf J_{p,n}$。

证明。将空间字 $B^nC^2A^m$ 从左向右读取并周期性重复。其一个周期的传递矩阵与 $A^{m_n}DB^n$ 相差一个符号。与 [2], 一样，令 $\Pi_M^+$，$\Pi_M^-$为 $M=A,\ B$的不稳定方向和稳定方向上的投影。令 $\tau_{ij}=\operatorname{tr}(\Pi_A^iD\Pi_B^j)$ 表示 $i,\ j\in\{+,\ -\}$。设 $v(z)=\underline{(1,\ z)^{\mathsf{T}}}$。投影公式 $\Pi_M^+v(z)=\frac{z-s_M}{u_M-s_M}v(u_M)$ 和$Dv(z)=h_D(z)v(Dz)$ 给出

$$\tau_{++}=-H_0\delta_p,\qquad H_0=\frac{h_D(u_B)(s_B-u_A)}{(s_A-u_A)(s_B-u_B)}\ne0.$$

归一化矩阵 $A$ 和 $B$ 分别具有负特征值和正特征值，因为$h_A(s_A)<0<h_B(u_B)$。将 $A^m$ 和 $B^n$ 按其谱投影展开。除以非零因子$(-1)^m\rho_A^m\rho_B^nH_0$后，迹恰好为

$$-\delta_p+\rho_A^{-2m}a+\rho_B^{-2n}b+\rho_A^{-2m}\rho_B^{-2n}c,\qquad(a,b,c)=(\tau_{-+},\tau_{+-},\tau_{--})/H_0.$$

在 $E_*$ 处，我们有

$$D^*v(u) = h_{D^*}(u)v(s_A^*), \qquad \det(D^*v(u), D^*v(\sigma)) = \sigma - u.$$

第一个恒等式给出 $\tau_{-+}^* = h_{D^*}(u)(s_A^* - \sigma)/(u - \sigma)$。行列式给出了 $A^*$ 的特征基中， $D^*v(\sigma)$里的 $v(u_A^*)$ 的系数，即 $(u - \sigma)/(\Delta h_{D^*}(u))$。因此 $\tau_{+-}^* = (u - u_A^*)/(\Delta h_{D^*}(u))$。将两个系数都除以 $H_0^*$，得到

$$a^* = \Delta + \frac{\Delta^2}{u_A^* - \sigma} > \Delta > P_+, \qquad b^* = \frac{(u - u_A^*)(u - \sigma)}{h_{D^*}(u)^2(u_A^* - \sigma)} > 0.$$

Lem引理 A.1 给出 $T > a^* + r_1 b^*$。当 $\delta_p(E) = s\alpha_n$ 与 $0 \le s \le T$ 一起时，除以 $\alpha_n$ 得到 s

$$\frac{\operatorname{tr}(A^{m_n} D B^n)}{(-1)^m \rho_A^m \rho_B^n H_0 \alpha_n} = -s + a^* + r_n b^* + O_p(n\alpha_n) \tag{5.6}$$

关于 $s$ 一致成立。令 $s_n = a^* + r_n b^*$。由 (5.2)， $R_A^{m_n} R_B^n \alpha_n = r_n^{-1/2}$。由此，(5.3) 前面的估计以及 $H_0$ 的连续性给出

$$|\rho_A^{m_n} \rho_B^n H_0 \alpha_n| \le M, \qquad M = \frac{2|H_0^*|}{\sqrt{r_0}},$$

对所有充分大的 $n$，在 $0 \le s \le T$ 上一致成立。选取一个小于 $a^* - P_+$、$T - a^* - r_1 b^*$ 和 $1/(2M)$ 的种子常数 $\xi > 0$。令 $S_{p,n}$为 $\alpha_n[s_n - \xi, s_n + \xi]$ 在 $E_*$ 处的局部逆像。由此闭区间上的 (5.6) 可知，当 $n$ 充分大时，迹的绝对值不超过 $M(\xi + O_p(n\alpha_n)) < 2$。由连续性和引理 2.1， $S_{p,n}$ 位于该周期词的谱内部，因此也位于 $\Sigma(v)$ 的内部。

该逆函数在零点处的导数为 $1/d_p$。因此$|S_{p,n}| = (2\xi + o_p(1))\alpha_n/d_p$，其中极限是在固定背景下取的。因此，当$n$充分大时，$|S_{p,n}| \ge \xi\alpha_n/d_p$。由于在 $P_+$ 处， $g(r_n) + \eta < P_+ < s_n - \xi < s_n + \xi < T$ 且具有一致的余量，展开式$E = E_* + \delta_p(E)/d_p + O_p(\delta_p(E)^2)$给出

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_{p,n} \cap \Sigma(v) = \varnothing, \qquad S_{p,n} \subset \operatorname{int}\Sigma(v), \\ \sup \mathcal{J}_{p,n} < \inf S_{p,n} < \sup S_{p,n} \le E_* + 2T\alpha_n/d_p. \end{gathered} \tag{5.7}$$

由 (5.2) 和引理 A.1，

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{r_n}{r_{n+1}R_B^2} \le \frac{r_1}{r_0 R_B^2} < 0.02, \qquad 2T \cdot 0.02 = 0.008 < P_- < g(r_n) - \eta.$$

由 (5.4) 和 (5.7)， $\sup S_{p,\,n+1} < \inf \mathcal{J}_{p,\,n}$。 □

**命题 5.1 的证明**。引理 5.2 给出 $d_p > 0$。引理 5.6 的谱区间趋近于 $E_*$，因此由闭性可得 $E_* \in \Sigma(v)$。

对于所有充分大的 $n$，引理 5.5 和引理 5.6 将预解区间$\mathcal{J}_{p,\,n}$ 置于两个谱区间 $S_{p,\,n+1}$ 和 $S_{p,\,n}$之间。由于两个谱区间都位于$\Sigma(v)$的内部，包含$\mathcal{J}_{p,\,n}$ 的连通分支 $G_{p,\,n}$ 有界，且满足

$$\sup S_{p,n+1} < \inf G_{p,n} < \sup G_{p,n} < \inf S_{p,n}.$$

特别地，$S_{p,\,n}$ 将$G_{p,\,n}$ 与$G_{p,\,n-1}$分开，而且这些间隙彼此不同。

由引理 5.3 和 (5.7)，两个区间 $K \in \{G_{p,\,n},\ S_{p,\,n}\}$ 都满足

$$E_* + \frac{P_-\alpha_{n+1}}{d_p} < \inf K \le \sup K \le E_* + \frac{2T\alpha_n}{d_p}.$$

它们的长度分别至少为 $2\eta\alpha_n/d_p$ 和 $\xi\alpha_n/d_p$。代入 $\alpha_n = R_B^{-2n}/r_n$和 $r_0 \le r_n \le r_1$ 即可证明所述估计，其中

$$c_0 = \frac{\min\{P_- R_B^{-2}, 2\eta, \xi\}}{r_1}, \qquad C_0 = \frac{2T}{r_0}.$$

对于足够小的 $\varepsilon > 0$，令 $q_n = C_0 R_B^{-2n}/d_p$ 并选取 $n$ 使得 $q_n < \varepsilon \le q_{n-1}$。两个区间均位于（$E_*$，$E_* + \varepsilon$）内，且每个区间的长度至少为（$c_0/C_0$）$q_n \ge \kappa\varepsilon$，其中$\kappa = c_0/(C_0 R_B^2)$。$\varepsilon$ 的阈值可能取决于背景。□

**定理 1.1 的证明**。对于每个固定的 $p$，命题 4.2 恢复了活跃矩阵在零能量处的临界连接，并验证了每个非活跃矩阵所对应的严格区间包含关系。根据引理 2.1，对于每个$0 < \theta < 1$，其谱几乎必然都等于同一个集合。根据命题 5.1，该谱包含零点，并且在零点右侧有无穷多个彼此不同且聚积于零点的有界谱隙。

对于 $p \ge 5$，$L$ 是周期块中的唯一最大值。任意正周期 $d$ 都必须在平移下保持该最大值的剩余类，因此 $p \mid d$。在周期四的情况下，同样的论证适用于唯一最小值 $\bar{v}_1 - 1$。在三周期的情况下，各项两两不同。最后，(1.3) 表明，每个偶周期 $p \ge 6$ 恰好有六个具有非零背景的格点，而每个奇周期 $p \ge 7$ 恰好有七个。在这两种情况下，背景值都属于定理中指定的集合。□

5.1. **连续尺度上的间隙宽度与位置**。我们将命题 5.1 应用于定理 1.1 中的背景，其中 $E_* = 0$，并取 $R_B$ 如该命题所述。

**推论 5.7**。设 $s_{p,\,n} = R_B^{-2n}/p$。存在与 $p$ 无关的常数 $c_-$、$c_+$、$\kappa > 0$，使得对于每个 $p \ge 3$，存在 $N(p) \in \mathbb{N}$、$\varepsilon_0(p) > 0$，以及两两不同的有界谱隙 $G_{p,\,n} \subset (0,\ \infty)$，对于所有整数 $n \ge N(p)$，这些间隙属于 $\Sigma_p$。以下陈述成立。

(a) 对于 $n \ge N(p)$，

$$c_- s_{p,n} \le |G_{p,n}| \le c_+ s_{p,n},$$
$$c_- s_{p,n} \le \inf G_{p,n} \le \sup G_{p,n} \le c_+ s_{p,n}.$$

(b) 对于 $n > N(p)$，在 $G_{p,\,n}$ 与 $G_{p,\,n-1}$ 之间，$\Sigma_p$ 中存在一个长度至少为 $c_- s_{p,\,n}$ 的区间。(c) 对于 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(p)$，区间 $(0,\ \varepsilon)$ 包含一个长度至少为 $\kappa\varepsilon$ 且与 $\Sigma_p$ 不相交的开区间。

证明。根据 $E_* = 0$ 处的命题 5.1，只需给出 $d_p/p$ 的上下界，且该界与 $p$ 无关。

对于 $\ell = 6,\ 7$，取 (5.1) 中连接处的解 $\psi_\ell$，其中右侧的周期尾部 $A$ 从格点零开始，且 $\psi_\ell(0) = 1$。在块 $i$ 中，令 $j_i$ 为最后一个内部位置。每一对新的零背景格点都紧邻插入在 $j_i$ 之前。令

$$c_\ell = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \bigl(|\psi_\ell(j_i)|^2 + |\psi_\ell(j_i - 1)|^2\bigr).$$

该解在两个周期尾部上都呈指数衰减，因此级数收敛。由于两个连续的零值会迫使该解恒等于零，$c_\ell > 0$。对于入射态 $(\psi_\ell(j_i)\ -\psi_\ell(j_i - 1))^{\mathsf{T}}$，在零能量下，传递矩阵穿过一对插入的、噪声变量均为零的格点时为 $T_0^2 = -I$。这两个插入格点上的振幅分别为 $\psi_\ell(j_i)$ 和 $-\psi_\ell(j_i - 1)$，相差一个公共符号。每个块中插入 $k$ 对格点后，原有格点上的振幅绝对值保持不变，且右侧尾部起始处的归一化也相同。由此，方程 (5.1) 给出精确恒等式

$$d_{\ell+2k} = d_\ell + k c_\ell, \qquad \ell = 6, 7, \quad k \ge 0. \tag{5.8}$$

令 $D_-$ 和 $D_+$ 分别为.....的最小值和最大值

$$\{d_j/j : 3 \le j \le 7\} \cup \{c_6/2, c_7/2\}.$$

这些常数均为正数。对于 $p = \ell + 2k$，当 $\ell = 6,\ 7$ 时，公式 (5.8) 将 $d_p/p$ 表示为 $d_\ell/\ell$ 和 $c_\ell/2$的加权平均，权重分别为 $\ell/p$ 和 $2k/p$。因此，对于每个 $p \ge 3$，都有 $D_- p \le d_p \le D_+ p$。

命题 5.1 给出了间隙以及其间谱区间的界，其中$c_- = c_0/D_+$ 和 $c_+ = C_0/D_-$。该命题的 (e) 部分给出了零点处的孔隙度界。□

注 5.8。对固定的 $p$， $\Sigma_p$ 中所选谱隙的尺度$s_{p,\ n}$ 具有相同的公比 $R_B^{-2}$。由此得到右孔隙度的统一下界。若用被省略区间的半径来衡量孔隙度，则下界为 $\kappa/2$。

在连续统周期化中，Kirsch、Kotani 和 Simon 假设在给定的正能量 [8]处反射非零，并沿着一列周期 $L_j \to \infty$，得到阶为 $1/L_j$ 的谱隙宽度下界。推论 5.7 中的几何因子描述了每个固定周期内的谱隙。

## 6. 通过共振狄利克雷链实现每周期四个非零背景位点

**定理 1.2 的证明**。使用 (1.2) 中的参数，并令 $e$为三周期模型的连接能量。对 $p \geq 5$，令 $m$ 为零背景链中的格点数，并设

$$m = p - 4, \qquad \alpha = \frac{\pi}{m+1}, \qquad \gamma = -E_p = 2\cos\alpha.$$

考虑 (1.4) 中的块 $\widetilde{V}^{(p)}$。

由于 $0 \leq \gamma < 2 < L$，零块之外的四个元素的符号为 $-$、$+$、$-$、$-$。每个块中恰有一个正元素，因此最小周期为 $p$。

对于 $p = 5$，我们有 $E_5 = 0$ 并且 $\widetilde{V^{(5)}}$ 是 (1.3) 中的 $V_{(5)}$，因此由定理 1.1 可得结论。假设 $p \geq 6$。在能量 $-\gamma$ 处，最后两个格点上的参数与 $e$ 处三周期模型的参数一致。

在能量 $-\gamma$ 处，令 $x$ 和 $y$ 分别为前缀两端的无噪声传递参数。跨越这 $m+2$ 个格点时，参数为

$$x = e + L - \gamma, \quad \underbrace{-\gamma, \ldots, -\gamma}_{m}, \quad y = -L.$$

对于 $k \geq -1$，设 $d_k = \sin((k+1)\alpha)/\sin\alpha$，表示自由链上的递推关系。递推关系 $d_k = \gamma d_{k-1} - d_{k-2}$ 给出

$$T_{-\gamma}^m = (-1)^m \begin{pmatrix} d_m & -d_{m-1} \\ d_{m-1} & -d_{m-2} \end{pmatrix} = (-1)^m \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

如果噪声在所有 $m$ 内部位点上均为零，且端点位为 $i,\ j \in \{0、1\}$，则

$$T_{y-\lambda j} T_{-\gamma}^m T_{x-\lambda i} = (-1)^m T_{e-\lambda(i+j)}. \tag{6.1}$$

通过乘法即可得到这一结论，因为 $x + y + \gamma = e$。因此，对于 $i = j = 0$，最后两个位点上的四种选择可在相差一个公共符号的意义下，恢复引理 3.1 中的四个活跃矩阵。

现在假设内部噪声字 $\eta \in \{0、1\}^m$ 至少有一个分量为 1。令 $\Delta_m$ 表示路径 $\{1, \ldots, m\}$ 的邻接矩阵，并令

$$K_\eta = \gamma I - \Delta_m + \lambda\,\mathrm{diag}(\eta).$$

未扰动矩阵 $\gamma I - \Delta_m$ 是半正定的，其核由 $s = (s_1, \ldots, s_m)^{\mathsf{T}}$ 张成，其中 $s_k = \sin(k\alpha)$。事实上，向量 $(\sin(k\ell\alpha))_{k=1}^m$、$1 \leq \ell \leq m$ 是 $\Delta_m$ 的特征向量，对应互不相同的特征值 $2\cos(\ell\alpha)$。

选取 $j_0$，使得 $\eta_{j_0} = 1$。令 $\delta_{j_0}$ 为第 $j_0$ 个标准基向量，并设 $K^{(j_0)} = \gamma I - \Delta_m + \lambda \delta_{j_0}\delta_{j_0}^{\mathsf{T}}$。由于 $s_{j_0} > 0$，秩一扰动在核上严格为正。因此 $K_\eta \geq K^{(j_0)} > 0$。

长度为 $k$ 的未扰动链的行列式为 $d_k = s_{k+1}/s_1$，其中 $d_0 = 1$。行或列索引上的帽号表示删除该行或列。

整条链的行列式关于其第 $j_0$个对角元是仿射的。该对角元的系数是 $j_0$两侧两个子链的行列式之积。利用$s_{m+1-j_0}=s_{j_0}$ 和$s_{m-j_0}=s_{j_0+1}$，我们得到

$$\det K^{(j_0)} = \lambda\, s_{j_0}^2/s_1^2,$$
$$\det K^{(j_0)}_{\widehat{m},\widehat{m}} = 1+\lambda\, s_{j_0}s_{j_0+1}/s_1^2.$$

当 $j_0=m$ 时，第二个行列式等于 1。求逆会反转正定矩阵的序，因此由余子式公式可得

$$0<(K_\eta^{-1})_{mm}\le \frac{s_1^2}{\lambda s_{j_0}^2}+\frac{s_{j_0+1}}{s_{j_0}}\le \lambda^{-1}+\gamma. \tag{6.2}$$

最后一个不等式用到了 $s_{j_0}\ge s_1$ 和 $s_{j_0+1}=\gamma s_{j_0}-s_{j_0-1}$，其中 $s_0=0$。

对于入射斜率 $z\in[-3/2,104/1000]$，经过左端点后的斜率为 $-1/t$，其中

$$t=x-\lambda i+z>\frac{568030}{10^6}+L-2-\lambda-\frac{3}{2}>\frac{2}{5}.$$

第 $k$ 个内部位置之后的斜率满足 $u_k=(\gamma+\lambda\eta_k-u_{k-1})^{-1}$，其中 $u_0=-1/t$。对三对角矩阵取舒尔补可得

$$u_m=\left[(K_\eta+t^{-1}\delta_1\delta_1^{\mathsf T})^{-1}\right]_{mm}.$$

事实上，连续的顺序主子矩阵的逆矩阵右下角元素满足相同的递推关系。每个子矩阵都是正定的，因此每个分母都为正。再次利用求逆时序关系反转这一性质，并结合 (6.2)，我们得到$0<u_m\le\gamma+\lambda^{-1}$。右端点处的出射斜率 $s_{\mathrm{out}}$ 满足

$$\frac{36}{1000}<\frac{1}{L+\lambda}\le s_{\mathrm{out}}=\frac{1}{L+\lambda j-u_m}<\frac{1}{L-2-\lambda^{-1}}<\frac{75}{1000}.$$

若所有内部位均为零且 $i+j\ge 1$，则由 (6.1) 以及引理 3.4 证明中的斜率估计可得 $s_{\mathrm{out}}\in$ (0.039,0.088)。因此，任何含有非零噪声位的前缀都会将 $\mathcal{I}$映入 (0.036,0.09)。在 $E=-\gamma$, $[w,H]\subset\mathcal{I}$处，引理 3.2 将整个像紧致地包含在三个目标区间之一中。

前缀仅含零的四个字在所有能量下共享相同的前缀矩阵。由此，命题 4.2 中的因式分解给出 $RA^{-1}C=B$。公式 (6.1) 表明，它们在 $-\gamma$ 处的矩阵与种子相差一个公共符号。命题 5.1 给出 $-\gamma$是一个谱点，其右侧有趋近于该点的互异有界谱隙。□

**推论 6.1.** 令 $\widetilde{s}_{p,n}=R_B^{-2n}/p^3$。对于定理 *1.2* 中的背景，采用与推论 *5.7* 相同的$R_B$ 。在每个指标 $n$处，使用相同的块顺序 $B^nC^2A^{m_n}$ 和相同的计数 $(n,2,m_n)$，其中各块由定理 *1.2* 的背景定义。存在~个常数 $c_-,c_+>0$，与 $p$无关，使得对每个 $p\ge 5$，都存在一个整数 $N(p)$~ ~ ~以及两两不同的有界谱隙 $G_{p,n}\subset(E_p,\infty)$，对所有整数 $n\ge N(p)$，均属于 $\Sigma_p$。以下陈述成立。

~(a) 对于 $n\ge N(p)$，

$$c_-\widetilde{s}_{p,n}\le|\widetilde{G}_{p,n}|\le c_+\widetilde{s}_{p,n},$$
$$c_-\widetilde{s}_{p,n}\le \inf\widetilde{G}_{p,n}-E_p\le\sup\widetilde{G}_{p,n}-E_p\le c_+\widetilde{s}_{p,n}.$$

~ ~ ~ ~(b) 对于 $n>N(p)$，在 $G_{p,\,n}$ 与 $G_{p,\,n-1}$ 之间，$\Sigma_p$ 中存在一个长度至少为 $\sim c_-s_{p,\,n}$的区间。

证明。对于 $p=5$，推论 5.7 表明，将常数放大 25 倍后即可得到所述界，因为 $5^{-1}=25\cdot 5^{-3}$。对于 $p\ge 6$，如前一个证明中那样，在 $E_*=E_p$ 处使用命题 5.1。保留该证明中的 $m,\alpha,\gamma,x$，并令 $b=v_1$。这里的 $d_p$同样表示 (5.1) 中的能量导数。

取 (5.1) 在 $E_p$处的连接解 $\psi$，其中 $\psi(0)=1$ 位于第一个 $A$块的起始处。令 $X_i=(a_i,b_i)^{\mathsf T}=(\psi(ip)\ -\psi(ip-1))^{\mathsf T}$。根据 (6.1)，在每个块入口处，该状态与三周期归一化连接的状态相差一个符号。两个周期尾部随块指标指数衰减，因此 $\sum_i\|X_i\|^2$ 有限且与 $p$无关。

在块 $i$ 中，设 $w_j=(-1)^j\psi(ip+j)$，且设 $q_i=(e+L-\cos\alpha)a_i+b_i$。第一步得到$w_0=a_i$、$w_1=-xa_i-b_i$。在链上，$w_{j+1}=\gamma w_j-w_{j-1}$，因此

$$w_j=a_i\cos(j\alpha)-q_i\,\frac{\sin(j\alpha)}{\sin\alpha}\qquad(0\le j\le m+1).$$

将 $j$ 与 $m+1-j$ 配对后，混合项消失。由于 $\sum_{j=1}^{m}\sin^2(j\alpha)=(m+1)/2$，链上的质量为

$$\sum_{j=1}^{m}|\psi(ip+j)|^2=\frac{m-1}{2}a_i^2+\frac{m+1}{2\sin^2\alpha}q_i^2. \tag{6.3}$$

在该块的另外四个格点处，振幅均被某个常数乘以 $\|X_i\|$所界，并且关于 $p$一致。事实上，$w_{m+1}=-a_i$，格点 $ip+m+2$ 处的状态为 $(-1)^mT_eX_i$，下一步使用两个固定参数 $e-b$ 和 $e-b-\lambda$ 中的一个。

由于 $m+1=p-3$ 和 $\sin\alpha\asymp p^{-1}$，对所有块求和得到 $\|\psi\|^2\le Cp^3$。对于反向界，只需取第零块。在那里，$a_0,\ b_0)=(1,\ s_A)$，并且根据 (3.5)，$q_0=e+L-\cos\alpha+s_A>14$。因此 $d_p=\|\psi\|^2\asymp p^3$，其中常数与 $p$ 无关。命题 5.1 现在给出了这些谱隙及其间谱区间的所述估计。□

注记 6.2。两个族都使用几何尺度 $R_B^{-2n}$。根据命题 5.1，它们的能量尺度与 $R_B^{-2n}/d_p$ 可比，其中 $d_p$ 是聚点能量处连接斜率之差的能量导数。公式 (5.1) 将这一导数与归一化连接解的平方范数联系起来。在零点处，每个插入的对都会使每个奇偶族中的平方范数增加一个固定的正量，因此由 (5.8) 得到 $d_p\asymp p$。在 $E_p$ 处，共振会在右侧周期尾部第一个块中的链上产生振幅为 $p$ 阶的正弦项。沿链求平方和，由 (6.3) 得到 $d_p\asymp p^3$。

~对于固定的 $p\ge5$ 和 $n\ge\max\{N(p),\ N(p)\}$，这两种构造在周期字 $B^nC^2A^{m_n}$ 中使用相同数量的块。因此，推论 5.7 和 6.1 给出

$$\frac{|\widetilde G_{p,n}|}{|G_{p,n}|}\asymp p^{-2},\qquad\frac{\inf\widetilde G_{p,n}-E_p}{\inf G_{p,n}}\asymp p^{-2},$$

其中比较常数与 $p$ 和 $n$无关。

## 附录 A. 整数尺度的估计

在本附录中，$R_A$，$R_B$ 表示三周期模型在连接能量处的扩张特征值模。常数 $P_\pm$，$Q_\pm$ 是射影展开式 (5.3) 中的系数，而 $a^*$，$b^*$ 是式 (5.6) 中对应的迹系数。

**引理 A.1.** 取

$$r_0=0.052,\qquad r_1=0.111,\qquad\eta=0.000004,\qquad T=0.2.$$

*Then*

$$R_A^2r_0<r_1,\qquad R_B>10.4336,\qquad P_->0.018,\qquad a^*+r_1b^*<T,$$
$$\min\{(Q_+-Q_-)r_0-P_-,\ P_+-P_--Q_-r_1\}>3\eta.$$

证明。设 $a=u_A^*,\ s=s_A^*,\ u=u_B^*,\ S=-s_B^*,\ \Delta=s-a$，并令 $z_-=C^*(-1/4)$ 和$z_+=C^*0$。表5给出了连接能量处的有理数界。在 [2] 中，$t$ 表示我们的 $z_+$。对于此处使用的 $t=-307/200$，引理 3.1 给出 $0<B^*t<0.08734$。这里 $h_M(v)=M_{11}+M_{12}v$，并且我们省略矩阵元素上的星号。

| 数量 | 有理区间 | 数量 | 有理区间 |
|---|---|---|---|
| $a$ | $(-0.55183,\ -0.55181)$ | $s$ | $(-0.51438, -0.51436)$ |
| $u$ | $(0.10258,\ 0.10260)$ | $R_A^2$ | $(1,\ 2。13)$ |
| $z_-$ | $(-0.47625,\ -0.47623)$ | $z_+$ | $(-0.42954,\ -0.42953)$ |
| $B_{11}$ | $(10.42449, 10.42450)$ | $B_{12}$ | $(0.08894, 0.08896)$ |
| $-C_{11}$ | $(2.466911, 2.466914)$ | $-C_{12}$ | $(1.188107,\ 1.188110)$ |
| $B_{22} = C_{22}$ | $[0.104969, 0.104970]$ | | |

**表5** $E = e$ 处从 [2]得到的有理数界

方程的根之和给出 $B$ 的不动点 $S = u+(B_{11}-B_{22})/B_{12}$。因此 $116 < S < 117$，且 $R_B = h_B(u) > 10.4336$。由于 $D = C^2 = (\operatorname{tr} C)C - I$，

$$h_D(u) = (-C_{11} - C_{22})(-C_{11} - C_{12}u) - 1.$$

两个因子均为正，因此矩阵元界给出

$$\begin{aligned} 5.1145 &< (2.466911 - 0.104970)(2.466911 + 1.188107 \cdot 0.10258) - 1 \\ &< h_D(u) < (2.466914 - 0.104969)(2.466914 + 1.188110 \cdot 0.10260) - 1 < 5.1147. \end{aligned}$$

I由此可知， $d_0 = (D^*)'(u) = h_D(u)^{-2}$ 满足 $0.038225 < d_0 < 0.03823$。公式 $P_\pm = \Delta(z_\pm - s)/(z_\pm - a)$给出

$$0.018 < \frac{0.03743 \cdot 0.03811}{0.07560} < P_- \le \frac{z_- - a}{4} < 0.01890,$$

$$P_+ - P_- = \frac{\Delta^2(z_+ - z_-)}{(z_+ - a)(z_- - a)} > \frac{0.03743^2 \cdot 0.04669}{0.12230 \cdot 0.07560} > 0.00707.$$

第一行中的上界使用了 $4(s-a)(z_- - s) \le (z_- - a)^2$。对于另外两个系数，我们有

$$\frac{Q_-}{d_0} = (u-t)\left(1 + \frac{u-t}{S+t}\right), \qquad \frac{Q_+}{d_0} = R_B^2 u\left(1 + \frac{u}{S}\right).$$

代入关于 $S$ 和 $u$ 的界，得到

$$Q_- < 0.03823 \cdot 1.63760\left(1 + \frac{1.63760}{114.465}\right) < 0.06352,$$

$$\frac{Q_+ - Q_-}{d_0} > 10.4336^2 \cdot 0.10258\left(1 + \frac{0.10258}{117}\right) - 1.63760\left(1 + \frac{1.63760}{114.465}\right) > 9.515.$$

尺度窗口中的两个边界满足

$$\begin{aligned} (Q_+ - Q_-)r_0 - P_- &> 0.038225 \cdot 9.515 \cdot 0.052 - 0.01890 = 0.0000129655, \\ P_+ - P_- - Q_- r_1 &> 0.00707 - 0.06352 \cdot 0.111 = 0.00001928. \end{aligned}$$

两者都大于 $3\eta = 0.000012$。此外， $R_A^2 r_0 < 2.13 \cdot 0.052 = 0.11076 < r_1$。

由 $0.03743 < \Delta < 0.038$、 $S + a > 115$ 以及关于 $d_0$ 的界，迹系数满足

$$P_+ < a^* = \Delta + \frac{\Delta^2}{S+a} < 0.039,$$

$$0 < b^* = d_0(u-a)\frac{S+u}{S+a} < 0.03823 \cdot 0.655\left(1 + \frac{0.655}{115}\right) < 0.026.$$

因此 $a^* + r_1 b^* < 0.041886 < T$。对于 (5.2) 中的相邻尺度， $r_1/(r_0 R_B^2) < 0.01961 < 0.02$和 $2T \cdot 0.02 = 0.008 < P_-$。 □

## 附录B. 连接能量的代数性

引理 3.1 中的连接能量 $e$ 是一个实代数数。

证明。对于第 3 节中的矩阵，令 $U = DBD^{-1}$和 $P(E) = \mathrm{tr}(AUA^{-1}U^{-1}) - 2$。交换子中的所有元素都属于 $\mathbb{Z}[1/10][E]$，因为 $A$、$B$、$C$ 的元素均属于该集合，且这些矩阵的行列式为一。这里 $\mathbb{Z}[1/10] = \{a/10^k : a \in \mathbb{Z}$、 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。

在 $E = e$处， $A$ 和 $U$ 的公共特征直线将交换子置于上三角形式，且两个对角元素都等于一。因此 $P(e) = 0$。为验证 $P$ 非零，在 $E = 0$ 处计算并模 3 化，利用 $10 \equiv 1$ (模 3)。公式 (3.4) 给出

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AUA^{-1}U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

因此 $P(0) \equiv 1$ (模 3)，所以 $P$ 非零，且 $e$ 是代数的。 □

## 参考文献

[1] A. Avila、J. Bochi 和 J.-C. Yoccoz，有限值 SL(2, ℝ)-余循环的一致双曲性，*Comment. Math. Helv.* **85** (2010)，813–884。doi:10.4171/CMH/212。[2] C. Chen 和 Y. Li，Anderson–Bernoulli 模型中产生无穷多个谱隙的最小背景周期，arXiv:2611.22703v1 (2026)。[3] D. Damanik 和 J. Fillman，一维遍历薛定谔算子：*II.* 特定类别，Graduate Studies in Mathematics，第 249 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2024。doi:10.1090/gsm/249。[4] D. Damanik、J. Fillman 和 P. Gohlke，乘积系统生成的薛定谔算子的谱特征，*J. Spectr. Theory* **12** (2022)，1659–1718。doi:10.4171/JST/445。[5] J. Fillman、M. N. Gradner 和 H. J. Hendricks，周期和遍历词模型的薄谱，*J. Funct. Anal.* **290** (2026)，111385。doi:10.1016/j.jfa.2026.111385。[6] J. Fillman 和 W. Wood，具有无穷多个谱隙的周期 Anderson–Bernoulli 模型，arXiv:2610.27160v1 (2026)。[7] M. Kaminaga，具有复值稀疏周期势的一维离散薛定谔算子的判别式扰动，*Tohoku Math. J. (2)* **77** (2025)，77–91。doi:10.2748/tmj.20230508。[8] W. Kirsch、S. Kotani 和 B. Simon，某些一维随机但确定性薛定谔算子的绝对连续谱缺失，*Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **42** (1985)，383–406。NUMDAM。[9] W. Wood，关于周期 Anderson–Bernoulli 模型的谱，*J. Math. Phys.* **63** (2022)，102705。doi:10.1063/5.0096118。[10] W. Wood，含随机噪声的周期薛定谔算子谱理论中的动力学方法，博士论文，加州大学欧文分校，2024。UCI 电子学位论文。[11] D. Damanik 和 J. Fillman，一维遍历薛定谔算子：*I.* 一般理论，Graduate Studies in Mathematics，第 221 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022。doi:10.1090/gsm/221。[12] A. Avila、D. Damanik 和 A. Gorodetski，随机扰动遍历势下薛定谔算子的谱，*Geom. Funct. Anal.* **33** (2023)，364–375。doi:10.1007/s00039-023-00632-z。[13] D. Damanik 和 A. Gorodetski，随机薛定谔算子的谱是否必须包含一个区间？，*Comm. Math. Phys.* **393** (2022)，1583–1613。doi:10.1007/s00220-022-04395-w。