Im关于哈德维格-德布伦纳数的已证下界 S

Chaya Keller*

arXiv:2611.29166v1 [math.CO] 22 Nov 2026

摘要

Alon 和 Kleitman 著名的（p，q）定理断言，对于任意 $d \in \mathbb{N}$ 和任意 $p \geq q \geq d+1$，在 $\mathbb{R}^d$ 中的每个凸集族，若任意 p 个集合中都有某些 q 个相交，则可用 c 个（p，q，d）点刺穿。最小的数 c（p，q，d）称为 Hadwiger-Debrunner 数，记作 HD_d（p，q）；确定这些数是一个由来已久的开放问题。我们证明，对于任意 $d \geq 2$，HD_d（p，$d+1$）$\geq p^{d-o(1)}$；更一般地，HD_d（p，q）$\geq p^{\frac{q-1}{q-d}-o(1)}$。我们的界由一族平行多面体得到，并且在所有 VC 维数有界的族中，该界在多对数因子范围内是紧的。证明使用超图容器方法。

1 引言

1.1 背景

（p,q）定理与哈德维格-德布伦纳数。对于 $p,q \in \mathbb{N}$，若集合族 F 满足（p,q）性质，则 F 中任意 p 个集合里，都有一些 q 个相交。用这种记法，经典的 Helly 定理指出：在 $\mathbb{R}^d$ 中，若一个由至少 $d+1$ 个凸集组成的有限族满足（$d+1,d+1$）性质，则可以用一个点将其刺穿。1957年，Hadwiger 和 Debrunner [8] 猜想，对于任意 $p \geq q \geq d+1$，都存在 c（p,q,d），使得在 $\mathbb{R}^d$ 中，任何满足（p,q）性质的至少由 p 个凸集组成的有限族，都可以用 c（p,q,d）个点刺穿。在他们于1992年提出的经典（p,q）定理中，Alon 和 Kleitman [1]证明，对于任意 $p \geq q \geq d+1$，c（p,q,d）确实是有限的。最小刺穿数c（p,q,d）称为哈德维格-德布伦纳数（简称 HD 数），记为 HD_d（p,q）。

关于 HD 数的定量界。 Alon 和 Kleitman 在证明中给出的 $\mathrm{HD}_d(p,q)$ 上界非常大。他们探讨了可能的改进方法，并在论文结尾提出了更精确地估计 $\mathrm{HD}_d(p,q)$ 的问题。这个问题已成为最著名的定量 Helly 型问题之一（例如，见 [4, 问题 2.12]），在过去 30 年里，无论是一般情形（例如，[6, 10, 12, 15]）还是特殊情形（例如，[13, 14]），都得到了广泛研究；然而，它仍远未解决。研究最充分的情形是 $q = d+1$，其 (p,q) 性质假设最弱（例如，[13, 14, 15]）。

Keller、Smorodinsky 和 Tardos [12]，得到的目前已知最佳一般上界为 $\mathrm{HD}_d(p,q) \leq \tilde{O}(p^{\frac{q-1}{q-d}\cdot\rho_d})$，其中 $\rho_d \approx d-0.5$ 是弱 ε-网定理 [16, 17]中的指数（见下文）。对于 $q \geq \log p$，[中得到了更强的界

12]。已有多项研究得出了下界，这些研究可分为两条研究路线，下面将分别介绍。

通过弱 ϵ-网得到 HD 数的下界。 第一行从弱 ε-网定理中的下界推导出 $\mathrm{HD}_d(p,\ q)$ 的下界。集合 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的弱 ε-网

*内盖夫本-古里安大学计算机与信息科学学院计算理论研究所，以色列贝尔谢巴84105；以及以色列阿里埃勒大学计算机科学学院。chayak@bgu.ac.il

是一个集合 $N \subset \mathbb{R}^d$，使得每个包含 P 中至少 $\varepsilon|P|$ 个点的凸集，都包含 N 中的一个点。弱 ε-网定理断言，任何 $P \subset \mathbb{R}^d$ 都有一个大小至多为 $f_d(\varepsilon)$ 的弱 ε-网。正如 [10]，中所指出的，对于任意 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和任意 $p, q \in \mathbb{N}$，$\mathbb{R}^d$ 中包含 P 的至少 $\varepsilon|P|$ 个点的凸集族 F（$\varepsilon = \frac{q}{p}$），满足 (p, q) 性质。因此，任何表明 $f_d(\varepsilon) > \ell$（$\varepsilon = q/p$）的构造，都意味着下界 $\mathrm{HD}_d(p, q) > \ell$。$\mathrm{HD}_d(p, q)$ 的第一个下界就是这种形式：$\mathrm{HD}_d(p, q) \geq \Omega(\frac{p}{q}\log^{d-1}(\frac{p}{q}))$，这是由 Bukh、Matoušek 和 Nivasch [6]获得的下界 $f_d(\varepsilon) \geq \Omega(\frac{1}{\epsilon}\log^{d-1}(\frac{1}{\varepsilon}))$ 所推出的。最近，Bhore、Browne 和 Zheng [5] 获得了 $f_d(\varepsilon)$ 的大幅改进下界，从而推出 $\mathrm{HD}_d(p, q) = \Omega_d((\frac{p}{q})^{\gamma_d})$ 的界，其中 $\gamma_d = \frac{1}{2}\lfloor\frac{\sqrt{8d+25}-1}{2}\rfloor$；对于 $d \geq 3$，该值至少为 $3/2$，并且当 $d \to \infty$ 时为 $\sqrt{d/2} + O(1)$。确定 $f_d(\varepsilon)$ 的问题仍远未解决。无论如何，通过这一路径能够得到的 $\mathrm{HD}_d(p, q)$ 的最佳下界是 p^{ρ_d}，其中 ρ_d 是弱 ε-网定理中指数的最佳上界。如上文所述，$\rho_d \approx d - 0.5$ 由 Rubin [16, 17]获得。

通过超平面族得到 HD 数的下界。第二条研究路线通过在 $\mathbb{R}^d$ 中构造特定的超平面族，并利用超图容器引理 [2, 18]得到 $\mathrm{HD}_d(p, q)$ 的下界。Keller 和 Smorodinsky [10] 首先得到了这一类的下界：他们采用 Balogh 和 Solymosi [3] 的一般位置构造，证明 $\mathrm{HD}_2(p, 3) = \Omega_\varepsilon(p^{6/5-\varepsilon})$；更一般地，对于每个 $\varepsilon > 0$，都有 $\mathrm{HD}_2(p, q) = \Omega_\varepsilon(p^{1+\frac{1-\varepsilon}{4q-7}})$。Roche-Newton [15] 将 $\mathrm{HD}_2(p, 3)$ 的下界提升至 $\Omega_\varepsilon(p^{5/4-\varepsilon})$。Keller 和 Smorodinsky [11] 利用 Suk 和 Zeng [19]的高维一般位置构造，得到了下界 $\mathrm{HD}_3(p, 4) \geq p^{2-o(1)}$。最近，Chen、Ge 和 Shu [7] 使用随机稀疏化的超平面族，证明 $\mathrm{HD}_d(p, q) \geq p^{1+\frac{d-1}{q-1}-o(1)}$，特别是 $\mathrm{HD}_2(p, 3) \geq p^{3/2-o(1)}$。此外，他们将高维整数网格中充分处于一般位置的子集大小的上界，通过迁移论证转化为 $\mathrm{HD}_d(p, q)$ 的下界，并利用另一个超平面族证明了下界 $\mathrm{HD}_d(p, d+1) \geq p^{\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor-o(1)}$。

总之，目前已知的 $\mathrm{HD}_d(p, d+1)$ 的最佳下界为 $\mathrm{HD}_2(p,3) \geq p^{3/2-o(1)}$ [7]、$\mathrm{HD}_3(p, 4) \geq p^{2-o(1)}$ [7, 11] 以及 $\mathrm{HD}_d(p, d+1) \geq p^{\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor-o(1)}$，适用于 $d \geq 4$ [7]。对于更大的 q，目前已知的最佳下界为 $\mathrm{HD}_d(p, q) = \Omega_d((\frac{p}{q})^{\gamma_d})$ [5]。

1.2 我们的结果

本文证明了 Hadwiger-Debrunner 数的一个新下界。

定理 1.1. 对于每个固定的整数 $d \geq 2$，存在一个常数 $c_d > 0$，使得对于每个充分大的整数 p，

$$\mathrm{HD}_d(p, d+1) \geq c_d \frac{p^d \log\log p}{(\log p)^{\max\{3d+1, d^2\}}}.$$

特别地，$\mathrm{HD}_d(p, d+1) \geq p^{d-o(1)}$。此外，对于任意 $q \geq d+2$，

$$\mathrm{HD}_d(p, q) \geq c_{d,q} \frac{p^{\frac{q-1}{q-d}} \log\log p}{(\log p)^{3d+1}}.$$

特别地，$\mathrm{HD}_d(p, q) \geq p^{\frac{q-1}{q-d}-o(1)}$。该构造中的凸集是紧平行多面体。

讨论。 定理 1.1 显著改进了关于 $\mathrm{HD}_d(p, d+1)$ 的最佳已有下界，其中任意 p，d。此外，在具有以下性质的

族中，它在多对数因子意义下是尖锐的：具有 有界 *VC* 维数 [20]。事实上，根据 ε-网定理 [9]，，每个这样的族都存在一个大小为 $O(\frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon}))$ 的 ε-网（特别地，也存在一个弱 ε-网）。因此，证明上界 $\mathrm{HD}_d(p,\ q) \leq \tilde{O}(p^{\frac{q-1}{q-d}\cdot\rho_d})$ 时在 [12] 中采用的论证，对这类族给出了 $\tilde{O}(p^{\frac{q-1}{q-d}})$ 的上界。

我们注意到，先前用于获得 $\mathrm{HD}_d(p,d+1)$ 下界的两种策略都无法得到强于 $p^{d-o(1)}$ 定理 1.1下界的更强下界。事实上，如上所述，通过弱 ε-网的方法无法得到强于 p^{ρ_d}的界，适用于 $\rho_d \approx d-0.5$。通过超平面的方法得到的族具有有界的 VC 维数；如上所述，定理1.1的界在此类范围内是紧的。

开放问题。 我们不知道定理 1.1 的下界是否紧。要证明 $\mathbb{R}^2$ 中的界是紧的，一个自然的方法是证明平面中的每个有限点集都存在一个大小为 ε的弱 $O(1/\varepsilon)$-网。对于 $d \geq 3$，由于 Bhore、Browne 和 Zheng [5] 关于 ε-网定理给出的上述超线性下界，这种方法无法证明界是紧的。因此，如果定理 1.1 对 $d \geq 3$是紧的，那么要证明这一点，或许需要为(p,q) 定理设计一种概念上截然不同的证明；这本身无疑就是一个有趣的目标。

1.3 论文组织

在第 2节中，我们将详细介绍证明。在第 3 节中，我们将给出 $\mathrm{HD}_2(p,3)$ 的下界证明。在第 4 节中，我们将介绍对 $\mathrm{HD}_d(p,d+1)$ 的推广，其中 $d \geq 2$。最后，在第 5 节中，我们将给出 $\mathrm{HD}_d(p,q)$ 在 $q \geq d+2$ 下的下界。

2 证明概述

我们通过构造一个特定的平行多面体族，并利用 容器引理 [2, 18] 证明该族满足 (p,q) 性质，且其刺穿数至少达到定理中所述的下界。为清晰起见，我们首先详细介绍最基本情形 $d=2$, $q=3$ 的构造和证明，然后简要说明如何将其推广到 $d>2$ 以及 $q>d+1$。

2.1 $\mathrm{HD}_2(p,3)$ 的下界

随机条带族。我们的第一个想法是用随机窄条带族替换先前在平面（[7, 10, 15]）中的构造所使用的直线族。对于$i=1,\ldots,n$，我们从 $[0,1]^2$ 中独立且均匀地抽取$\{P_i=(a_i,b_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$，并定义如下条带族：

$$S_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y-a_ix-b_i|\leq 1/n\}, \qquad \mathcal{S}_n=\{S_1,\ldots,S_n\}.$$

我们将证明，以高概率，这些条带与一个足够大的正方形的交集构成一个紧致平行四边形族，从而证明定理1.1的断言。

我们将抽取系数对（a_i,b_i）的单位正方形 $[0,1]^2$,称为系数空间。注意，尽管系数仅取自单位正方形，这些集合 S_i 却是整个（x,y）平面上的窄带。为避免混淆，我们将这些带称为条带，并将系数空间中直线周围的带称为管状区域 。

证明的一般结构。我们证明，当$n\to\infty$趋于某值时，族$\mathcal{S}_n$ 以趋于 1 的概率满足以下两个性质：

(A) 平面上的每个点都属于少于 $r_n=\lceil 8\log\ n/\log\log\ n\rceil$ 条带。

(B) 每个由 $p_n = \lceil \sqrt{n}(\log n)^3 \rceil$ 条带组成的子族，都包含三条具有公共点的条带。

根据 (A)，要穿刺所有条带，至少需要 n/r_n 个点。对于给定的 p，选择阶为 $p^2/(\log p)^6$ 的 n，并令常数足够小，即可得到 $p_n \le p$，因此 (B) 给出了 (p,3) 性质。穿刺该族所需的点数至少为 n/r_n，其阶与定理中所述的下界相同。

利用几何观察和并集界证明 (A)。证明 (A) 是较容易的部分。我们注意到，如果某个点属于 t 条带，那么必定存在一个同时属于 t 条带的点，该点位于两条条带边界的交集上（见下方图1）。这类交点的数量至多为 $4\binom{n}{2}$，对于每个这样的点，我们可以利用条带之间的独立性，以及其他每条条带包含该点的概率约为 $2/n$这一事实，给出它属于至少 $t-2$ 条其他条带的概率上界。断言 $t \le r_n$ 可由对这些 $4\binom{n}{2}$交点应用并集界得出。

从平面中的交集过渡到系数空间中的近共线性。命题 (B) 的证明背后的基本观察是，平面中条带之间的交集可以转化为系数空间中相应系数点对 (a_i, b_i) 的近共线性。我们注意到，如果三个系数点 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1,2,3}$ 位于直线 $b = ua + v$ 上，那么相应条带的中心线 $y = a_i x + b_i$ 都会经过 $(-u, v)$。只要这三个系数点到直线 $b = ua + v$ 的垂直距离不超过 $1/n$，三个条带仍会包含点 $(-u, v)$。因此，系数空间中以直线 $b = ua + v$ 为中心、垂直半宽为 $1/n$ 的管，记作 $T_{u,v}(1/n)$，由所有包含平面中点 $(-u, v)$ 的条带的系数组成，如图 2 所示。

化归为3-均匀超图中的独立集。为了证明命题 (B)，我们将系数方形 $[0,1]^n$ 划分为边长为 n^{-3} 的 $V = n^6$ 个正方形，称为单元。设管 $T_{u,v}(1/n)$ 包含三个完整的单元。那么，从这三个单元中各选取一个系数点，所得的三个条带都会包含点 $(-u,\ v)$。

在采样系数点 P_i 之前，我们定义 H 为一个 3-一致超图，其顶点为这些单元。若三个不同的单元包含在同一个形如$T_{u,\ v}(1/n)$的管中，则它们构成 H 的一条边。一个不含相交三元组的条带子族，对应于这样一组采样系数点：其所在单元构成 H的一个独立集，也就是说，这是一组不包含任何边的 H 顶点。（这里我们利用了这样一个事实：高概率下，采样点来自不同的单元。）因此，为了证明 (B)，只需证明，样本中包含的 H 任意独立集的大小都小于 p_n。

利用超图容器引理。自2012年问世以来，超图容器引理 [2, 18] 已成为限制超图中独立集大小的一种核心方法。在我们的情形下，只要一个3-一致超图足够稠密，且其边在顶点间“均匀分布”，也就是说，没有任何一个顶点或任何一对顶点包含在“过多”的边中，就可以应用该引理。该引理允许构造一个“不太大”的顶点集族$\mathcal{C}$，这些顶点集称为容器；每个容器都“不太大”，并且超图中的每个独立集都包含于某个容器 $C \in \mathcal{C}$。

我们对 H 及其子超图（见下文）迭代应用容器引理，从而得到一个由至多 $\exp(\sqrt{n}(\log\ n)^{5/2})$ 个容器组成的族$\mathcal{C}$，这些容器位于 H中，且各自大小至多为 $\sqrt{\log n/n} \cdot V$，使得每个独立集都包含于其中一个容器中。我们在对点$\{(a_i, b_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$进行采样之前$before$ 完成这一步。

每个容器 C 在系数方形中占据面积 $|C|/V$，因此其所包含单元的样本点的期望数量约为 $n|C|/V$。根据容器大小的上界，这个期望远小于 p_n。因此，容器中至少含有 p_n 个点的概率极小，并且可以利用二项随机变量的尾部估计进行界定

。由于容器的数量不太多，我们可以使用并集界证明，以高概率，没有容器含有至少 p_n 个样本点。因此， $[0,1]^2$ 中与抽样点对应的单元不含大小为 p_n的独立集，这意味着对应的条带满足 (p_n,3)-性质，从而证明了 (B)。

通过迭代应用容器引理来构造$\mathcal{C}$。构造$\mathcal{C}$ 的过程是迭代进行的。首先以包含所有单元的单个容器作为起点，然后不断将每个较大的容器 J 替换为包含在其中的一族较小容器，我们称之为它的子容器。每次这样的替换，都是将容器引理应用于一个经过特定选择的子超图 $H_J \subset H$ ，其顶点集就是相应的 J。我们使用的容器引理形式（下文的引理3.5 ）保证，其输入超图的每个独立集都包含在某个子容器中，并且每个子容器至多保留该超图中 $1/4$的边。H_J 的一个性质是，每个单元的度至多为 H_J 平均度的某个常数倍（见下文）。因此，容器引理所保证的超边缩减会迫使每个子容器至少省略 J中固定比例的单元。由于 H_J 是 $H[J]$的子超图，包含在 H 中的 J 的每个独立集在 H_J 中也都是独立集，因此必包含在某个子容器中。我们重复这一步骤，直到容器达到所需大小。

将容器引理应用于每个子超图 H_J。证明中最复杂、最具技术性的部分，是选取 3-均匀子超图 H_J ，并证明每个 H_J 都满足应用容器引理所需的条件。具体而言，必须满足三个条件：

(i) $|E(H_J)| = \Omega(|J|^3/n\log n)$;

(ii) H_J 中每个单元的度至多为 H_J的平均顶点度的某个常数倍;

(iii) H_J中的任意单元对至多包含在 $O(V/n)$条边中。

我们按照下文所述的步骤逐边构造 H_J 。为确保满足(ii)，我们固定 D，并维护一个子集 J' ，其中包含所有总度尚未达到 D的单元，然后在每一步之后更新该子集。通过适当选择 D ，并且只添加其所有单元在相应步骤中都属于 J' 的边，我们便能保证满足(ii)。为确保满足(iii)，我们在每一步检查：我们想要添加的三元组中的三个单元对，迄今为止选取的边中各自至多出现于 $O(V/n)$条边中。然而，我们如何保证这一过程能够持续进行 $\Omega(|J|^3/n\log\ n)$ 步，并且每一步都有满足所检查条件的可用三元组?

在这里，添加边的过程发挥了作用。关键在于处理条件 (iii)。我们观察到，对于任意固定的 $w>0$，系数空间中 x 坐标彼此接近的点对，属于形如 $T_u(w)$ 的管的数量远多于 x 坐标彼此相距较远的点对（见图 3）。具体而言，如果 J 中单元的并集为 A，那么包含水平间距为 g 的点对的管所占据的参数区域面积为 $4w^2/g$。为对此进行补偿，对于每个管，我们记 $2wL$ 为其与 A 的交集面积，并且仅将“相距较远”的点的三元组纳入超图 H_J ，具体来说，即连续水平间距至少为 $L/8$ 的三元组。因此，一个管若对 H_J 中包含间距为 g 的点对的边数作出贡献，则必须满足 $L\le 8g$。此时第三个点可用的面积至多为 $16wg$，从而抵消包含这两个点的管的面积中的因子 $1/g$ 。

基于这一观察，并对单元中的所有点取平均，对于每个 $J'\subset J$，我们定义一个较为复杂的权重函数 $\eta(J')$，作用于 J' 中的单元三元组，以确保包含一个单元对的单元三元组的总权重，近乎均匀地分布在各单元对上。接着，我们逐边构造超图 H_J ，在每一步中使用权重函数 $\eta(J_\imath)$从 $H[J']$中抽取一条边，并

将其加入 H_J。该权重函数使我们能够证明，在每一步中，都有满足所检验条件的可用三元组，并且这一过程可以持续进行，直到收集到足够多的边。后一个证明相当技术性，并用到了管区域面积的计算。

2.2 $\mathrm{HD}_d(p, d+1)$的下界

证明的一般结构。一般结构与平面情形相同。我们对系数点进行抽样：$\{P_i = (a_i, b_i)\}_{i=1,\dots,n}$，现在是在 $[0,1]^d$ 中进行抽样，其中每个 $a_i \in [0,1]^{d-1}$都是由 $d-1$ 斜率组成的向量。条带变成了薄片，而 $T_{u,v}(1/n)$ 是系数空间中关于超平面 $b = u \cdot a + v$ 的管。如同在平面情形中一样，如果该管包含 $d+1$个完整的单元，那么从每个单元中各选取一个点，就会得到包含点 $(-u, v) \in [0,1]^d$的 $d+1$ 个薄片。因此，我们可以定义一个超图 H，其顶点是这些单元，超边是包含在形如 $T_{u,v}(1/n)$ 的管中的 $(d+1)$ 元单元组，并使用容器引理来界定 H 中包含于我们样本内的独立集的最大大小，从而证明 (B) 的对应结论。

更复杂的权重函数。 推广到所有 $d \geq 2$的主要困难在于，上述条件 (iii) 中的“均匀分散”性质从胞元对扩展到了 H_J中每个由两个至 d 个胞元构成的固定集合，而在 $\mathbb{R}^d$中通常更难处理。在平面上，两个系数点之间较大的水平间距意味着包含这两个点的管的数量较少，即 $T_w(u, v)$。在 $d = 3$维空间中，斜率向量彼此充分分离的三点组却可能同时包含在许多管中。例如，斜率向量为$(0,0), (1,0), (1/2, \varepsilon)$时，就会出现这种情况，因为点$(1/2, \varepsilon)$靠近连接$(0,0)$,$(1, 0)$的直线。更精确地说，对于 $d = 3$，包含这三个点的管所构成的集合的测度与这三个斜率向量所形成三角形的面积成反比。对于 d 个在$\mathbb{R}^d$中斜率向量仿射无关的系数点，相应的测度与其斜率单纯形的（$d-1$）维体积成反比。如果我们只固定 $j < d$ 个斜率向量张成（$j-1$）维仿射子空间的系数点，管中心仍可沿垂直于该子空间的 $d-j$ 个方向倾斜。加入 $d-j$ 个点以补全单纯形后，其体积在相差一个仅依赖于维数的常数因子的意义下，等于固定面的体积乘以新增斜率向量的垂直分量所张成空间的体积。</output>

我们利用这种因式分解来界定包含固定 j 点的补全的总权重。我们为一个（$d+1$）元组设置权重，将包含该元组的管状区域的测度与其斜率向量所张成的最大（$d-1$）维单纯形体积结合起来。将给出该体积的行列式沿垂直于固定面的方向展开，会产生一些项，它们与管测度中对应的逆因子相消。剩下的逆因子是固定面的体积，因此我们对每个面的体积施加下界。如果斜率向量集中在某个仿射子空间附近，我们会先对狭窄方向重新缩放，以确保有足够多的元组通过这些体积截断值。随后，我们对各单元的权重取平均，并利用总权重及补全权重的界，选出 H_J 中许多具有所需度数界的边。

2.3 $\mathrm{HD}_d(p,\ q)$的下界

该构造可推广到任意固定的 $q \geq d+2$，并使用相同的随机带状区域。现在我们使用一个 q-均匀超图，其中一条边由 q 个包含在形如 $T_w(u,\ v)$ 的共同管状区域中的单元组成。一个元组的权重仍取其 d 点面中最大的单纯形体积。 $q-d$ 个额外点必须全部位于同一管状区域中，因此总权重中的因子 w 变为 w^{q-d}。小行列式估计表明

有足够多种额外点的选取方式，能使所有面同时满足体积截断值。为界定 j 个固定点的补全权重，我们对 $2 \le j \le d$ 使用相同的行列式消去。当 $d < j < q$ 时，固定点中的一个 d 点面已能界定包含所有点的管状区域的测度，而在每个管状区域内对其余 $q-j$ 个点积分会贡献一个因子 w^{q-j}。由此得到的容器界表明，高概率下，不含相交q元组的最大子族大小为 $O_{d,\ q}(n^{(q-d)/(q-1)}(\log\ n)^3)$。结合深度界（即上文 (A) 的类似结论），可得 $\mathrm{HD}_d(p,\ q) \ge p^{(q-1)/(q-d)-o(1)}$。

3 $\mathrm{HD}_2(p,\ 3)$下界

在本节中，我们证明平面上的$(p,\ 3)$ 定理的下界。上文第2 节概述了证明。第3.1节证明了第2节中的断言 (A)，并说明 (A) 和 (B) 如何推出该定理的断言。第3.2 节定义单元超图 H，并利用容器界推出 (B)。第3.3 节构造辅助超图 H_J，并证明度数界。第3.7 节利用这些界构造容器，从而完成 (B) 的证明。

3.1 随机条带与穿刺界

几乎必然，任意含有至少两个条带的相交子族，都有一个公共点，位于其中两条边界直线的交点处。这些边界交点为第2节中 (A) 的并集界提供了有限个候选点。此外，截短条带时，我们可以据此选取一个正方形，使所有相交三元组都得以保留。

对于 $1 \le i \le n$，独立且均匀地选取 $P_i = (a_i,\ b_i)$，从 $[0,1]^2$, 中选取，并令

$$S_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y - a_i x - b_i| \le 1/n\}, \qquad \mathcal{S}_n = \{S_1, \dots, S_n\}.$$

半宽度 $1/n$按垂直方向测量。对于有限族 $\mathcal{F}$，用 $\alpha_3(\mathcal{F})$ 表示其中不含三个不同成员具有公共点的子族的最大大小，并记

$$\mathrm{depth}(\mathcal{F}) = \max_{z \in \mathbb{R}^2} |\{F \in \mathcal{F} : z \in F\}|.$$

若 $|\mathcal{F}| \ge p$，则 $(p,\ 3)$ 性质等价于 $\alpha_3(\mathcal{F}) < p$。此外，每个穿刺点至多与 $\mathrm{depth}(\mathcal{F})$ 个成员相交。我们将使用以下阈值

$$p_n = \left\lceil \sqrt{n}\,(\log n)^3 \right\rceil, \qquad r_n = \left\lceil \frac{8 \log n}{\log \log n} \right\rceil.$$

所有对数均为自然对数。用此记号，(A) 为 $\mathrm{depth}(\mathcal{S}_n) < r_n$，而 (B) 为 $\alpha_3(\mathcal{S}_n) < p_n$。我们将在下文证明 (A)，并在截断论证中使用 (B)。(B) 的证明见第 3.2–3.7 节。

深度。 固定点 $(x,\ y)$ 落在随机条带中的概率至多为 $2/n$。事实上，在给定其斜率 a 后，符合条件的截距构成一个长度为 $2/n$ 的区间。为了界定整个平面上的深度，我们将条带边界的交点作为候选点。

这些斜率几乎必然互不相同。若一个至少包含两个条带的子族有公共点，则其交集是紧致的，因为任意两个条带的交集都是紧致平行四边形。在交集的某个极点处，两条活跃边界直线不平行。否则，就可以沿着这些活跃直线的公共方向向两个方向稍微移动，同时仍留在交集中

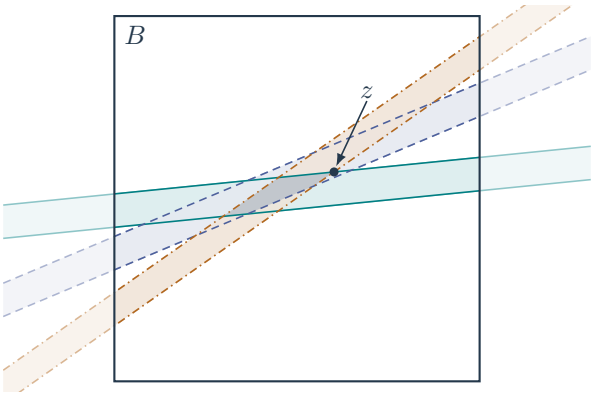


图1：公共交集的一个极点 z 位于两条条带边界上。固定样本后，选择正方形 B 以包含所有不平行边界的交集。在图中，每个条带仅由 B的垂直边截断。

因此，任何这样的子族都有一个公共点，该点位于其中两个成员的边界交点处（图1）。

来自两个不同条带的边界之间至多有 $4\binom{n}{2}$ 个交集。以确定某个候选点的两个条带为条件，其余条带相互独立，且每个条带包含该点的概率至多为 $2/n$。对于 $3 \le r \le n$，由并集界可得

$$\mathbb{P}(\operatorname{depth}(\mathcal{S}_n) \ge r) \le 4\binom{n}{2}\binom{n-2}{r-2}(2/n)^{r-2} \le 2n^2\left(\frac{2e}{r-2}\right)^{r-2}.$$

当 $r = r_n$ 时，最后一个表达式趋于零，因为 $(r_n - 2)\log(r_n - 2) = (8 + o(1))\log n$。

紧性以及 n 的选取。暂且假设 $\alpha_3(\mathcal{S}_n) < p_n$ 的概率趋于一。固定一个同时满足这两项估计、斜率和截距各不相同且 $\max_i a_i < 1$的样本。令 $B = [-M, M]^2$ 包含所有不平行条带边界的交集，并取足够大的 M，使得

$$(1 - \max_i a_i)M > 1 + 1/n.$$

对于 $|x| \le M$，每个 $(x, y) \in S_i$都有 $|y| \le a_i M + 1 + 1/n < M$。因此，$F_i = S_i \cap B$是一个具有两条垂直边和非空内部的紧致平行四边形。$F_i$ 互不相同，因为它们在 $x = 0$ 上的迹是不同的区间。每个相交的条带三元组都在两条边界的交点处有一个公共点，因此截断后仍然相交。因此，截断族 $\mathcal{F}_n = \{F_1, \dots, F_n\}$ 满足

$$\alpha_3(\mathcal{F}_n) < p_n, \qquad \tau(\mathcal{F}_n) \ge \frac{n}{r_n} = \Omega\left(\frac{n \log\log n}{\log n}\right).$$

对于给定的充分大的 p，取 $n = \lfloor c_0 p^2/(\log p)^6 \rfloor$，其中绝对常数$c_0 > 0$充分小。于是 $n \ge p$，而 $\log n \le 2\log p$给出 $\sqrt{n}(\log n)^3 \le 8\sqrt{c_0}\, p$，因此 $\overline{p_n} \le p$。由于$n \asymp p^2/(\log p)^6$且 $\log n \asymp \log p$，$\tau(F_n)$的上述界给出了定理 1.1 的平面情形。剩下要证明 $\alpha_3(S_n)$的估计。

3.2 单元超图与采样步骤

为了证明 (B)，我们记录哪些单元三元组能够保证相应条带存在公共点，无论代表元如何选择。这使我们能够在采样之前定义超图 H。

点 $z=(-u,\ v)$ 恰好在与 $(a,\ b)$ 相关联的条带内，当且仅当 $|b-ua-v|\le 1/n$。因此，条带的公共点对应于系数空间中直线周围的一根管。我们记

$$T_{u,v}(w)=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:|b-ua-v|\le w\}$$

对于垂直半宽度为 w 的管。该管在系数空间中的部分为 $T_{u,\ v}(w)\cap[0,1]^2$。

将 $[0,1]^2$ 划分为 $V=n^6$ 边长为 $\eta=n^{-3}$ 的正方形单元，并将每个边界点只分配给一个单元。令 H 为定义在这些单元上的 3-均匀超图。若存在某个管$T_{u,\ v}(1/n)$ 包含三个互不相同的单元，则这三个单元构成一条边。等价地，存在一个点$z=(-u,\ v)$ 属于 $(x,\ y)$ 平面中的条带，且对于从每个单元中各选一个代表点的任意选择，该点都属于对应的条带（图 2）。此定义使 H 与样本无关。

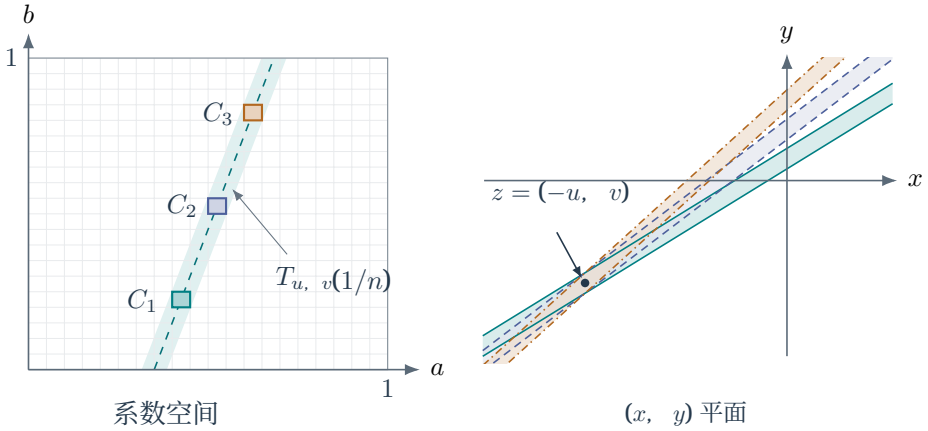


图 2：左侧的管包含三个完整的单元。对于从每个单元中各选取一个系数点的任意选择，点 $z=(-u,\ v)$ 都属于这三个条带。右侧的条带是以单元中心绘制的。宽度和单元大小仅为示意。

从容器到 (B)。容器的面积决定它可能接收多少个样本点。容器的数量决定取并集界的代价。命题3.1 给出了这两个界。

命题 3.1。对于所有充分大的 n，存在一个由容器构成的确定性族 $\mathcal{C}$，覆盖 H 的独立集，使得

$$\max_{C\in\mathcal{C}}\frac{|C|}{V}=O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right),\qquad \log|\mathcal{C}|=O\left(\sqrt{n}\,(\log n)^{5/2}\right).$$

为了解这如何推出所需的估计，在抽取 n系数点之前先固定这些容器。发生单元碰撞的概率至多为 $\binom{n}{2}/V=O(n^{-4})$。若没有发生碰撞，则任何不含相交三元组的子族都占据不同的单元，这些单元构成 H的一个独立集。因此，其大小至多为任一容器中的最大样本数。

对于固定的 $C\in\mathcal{C}$，其单元中的样本点数量服从参数为 n和 $|C|/V$、均值至多为 $A\sqrt{n}\log n$（其中 A为绝对常数）的二项分布。该分布是无条件的。根据二项分布上尾界，并对 $\mathcal{C}$应用并集界，某个容器中至少含有 p_n 个样本的概率至多为

$$|\mathcal{C}|\left(\frac{eA\sqrt{n\log n}}{p_n}\right)^{p_n}=o(1).$$

对数中的负项的阶为 $p_n \log\log n$，它占优于 $\log |\mathcal{C}|$。加上碰撞概率，即可证明 $\mathbb{P}(\alpha_3(\mathcal{S}_n) \geq p_n) = o(1)$。证明的其余部分将建立命题 3.1。

3.3 具有受控度的许多三元组

对于一个 3-一致超图 G，设 $e(G)$ 表示其边数，设 $\Delta_j(G)$ 表示包含任意固定 j 顶点集合的边的最大数量。在容器构造的每一步中， J 是当前的单元集合。我们从 $H[J]$中选取许多边，并限制任意单元对中所包含的被选边数量，以便能够应用容器定理。我们还限制经过任意单个单元的边数，从而删去被选边的固定比例就需要删去单元的固定比例。

下面关于 $\Delta_1(H_J)$和 $\Delta_2(H_J)$的界分别对应引言中的 (i) 和 (ii)。

命题 3.2。 存在绝对常数 c、$C > 0$，使得对于所有充分大的 n，以下结论成立。对于每个由 $m \geq 2V/\sqrt{n}$ 个 J 单元组成的集合，都存在 $H[J]$的一个子超图 H_J，其顶点集为 J，并且满足

$$e(H_J) \geq c\,\frac{m^3}{n \log n}, \qquad \Delta_1(H_J) \leq C\,\frac{e(H_J)}{m}, \qquad \Delta_2(H_J) \leq C\,\frac{V}{n}.$$

构造思路。在第 3.4 节中，我们处理 A 中单元的并集，并为点的三元组赋予权重 K。水平间距为 g 的点对位于管状区域 $T_{u,v}(w)$ 中，其参数 (u, v) 填满面积为 $4w^2/g$ 的区域。因此，间距较小的点对有更多可能的见证。只有当三元组的相邻间距至少为 $L/8$时，我们才将其计入管中，其中$2wL$ 是管内 A 的面积。于是，对间距为 g 的点对有贡献的管必须满足 $L \leq 8g$，因此第三个点可用的面积至多为 $16wg$。因子 $1/g$ 和 g相互抵消（图 3）。引理 3.3 表明，这一规则能使经过每个点对的权重保持较小，同时保留较大的总权重。

在第 3.5 节中，我们取 $w = 1/(100n)$。引理 3.3 中的斜率界确保，将见证管道的半宽度从 w 扩大到 $1/n$ 后，能覆盖三个完整的单元。我们对各单元上的点权重取平均，得到每个胞腔三元组 E的权重 ω_E，并以概率 ω_E保留每条边。经过点对的权重上界给出了单元对的期望度数上界。引理 3.4 表明，在 J的每个足够大的子集中，都存在许多成对度数有界的候选边。

在第3.6节中，我们 H_J 逐条添加边。每一步，我们从引理3.4 中，选取度数仍低于阈值的单元所对应的候选项。我们需要一个尚未使用且避开度数已达到阈值的点对的候选项。每添加一条边，只会使三个点对的度数增加，因此达到阈值的点对很少。每个这样的点对至多出现在 $2V/n$ 个候选项中，所以在每一步都能找到一条符合条件的边，直到 H_J 达到所需大小。

3.4 正方形内点的加权估计

令 $A \subseteq [0,1]^2$ 为面积为 $\alpha > 0$的博雷尔集。在应用中， A 是 J的单元的并集。将点的坐标记为 $P = (a(P),\ b(P))$。对点和管状区域参数的积分均相对于勒贝格测度进行。

我们通过对见证这些三元组的管状区域积分，为每个三元组赋予权重。为了从下方估计总权重，我们固定一个管状区域，并计算它贡献了多少个三元组。为了估计包含给定点对的三元组的权重，我们固定该点对，并估算它的每个见证管道通过第三个点能够贡献多少。

引理 3.3。 对于 $0 < w \le 1/10$ ，存在一个定义在 $[0,1]^2$，中三点组上的对称可测权重 K ，其取值属于 $[0,1/2]$，并具有以下性质。

1. 如果 $K(P_1,P_2,P_3) > 0$，这三个点位于一个共同管状区域 $T_{u,v}(w)$ 中，且满足 $|u| \le C/\alpha$。按第一坐标对这些点排序后，相邻间距均至少为$c\alpha/\log(2/\alpha)$。

2. 按第一坐标排序的 A 中三元组的总权重满足

$$\int_{\substack{P_1,P_2,P_3\in A\\ a(P_1)<a(P_2)<a(P_3)}} K(P_1,P_2,P_3)\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2\,\mathrm{d}P_3 \ge c\,\frac{w\alpha^3}{\log(2/\alpha)}.$$

3. 每个点对 $P,Q\in[0,1]^2$ 都满足 $\int_A K(P,Q,Z)\mathrm{d}Z \le 8w$。

这里 $c,C>0$ 是绝对常数。

证明。 对于一个固定的管 $T_{u,v}(w)$，令

$$f(a)=\frac{1}{2w}\int_{-w}^{w}\mathbf{1}_A(a,ua+v+t)\,\mathrm{d}t,\qquad L=\int_0^1 f(a)\,\mathrm{d}a.$$

我们将 $\mathbf{1}_A$ 在正方形外延拓为零。因此 $0\le f\le 1$ 和 $2wL=$ 面积$(A\cap T_{u,v}(w))$。截面量 f 和 L 依赖于 (u,v)。在水平坐标 a 处，该管有一条长度为 $2w$ 的竖直线段，而 $f(a)$ 是该线段属于 A 的比例。特别地，长度为 s 的水平坐标区间对 L 的贡献至多为 s 。

分离规则。固定两个点 P、Q，其水平间距为 $g=|a(P)-a(Q)|>0$。令$\mathcal{T}(P$、$Q)$ 表示包含这两个点的管状区域参数 $(u$、$v)$ 的集合。映射

$$(u,v)\longmapsto\big(b(P)-ua(P)-v,\ b(Q)-ua(Q)-v\big)$$

的行列式绝对值为 g。两个残差都必须位于 $[-w,w]$ 中，因此面积$(\mathcal{T}(P$、$Q))=4w^2/g$。所以，较小的水平间距会产生较大的可能见证参数区域。

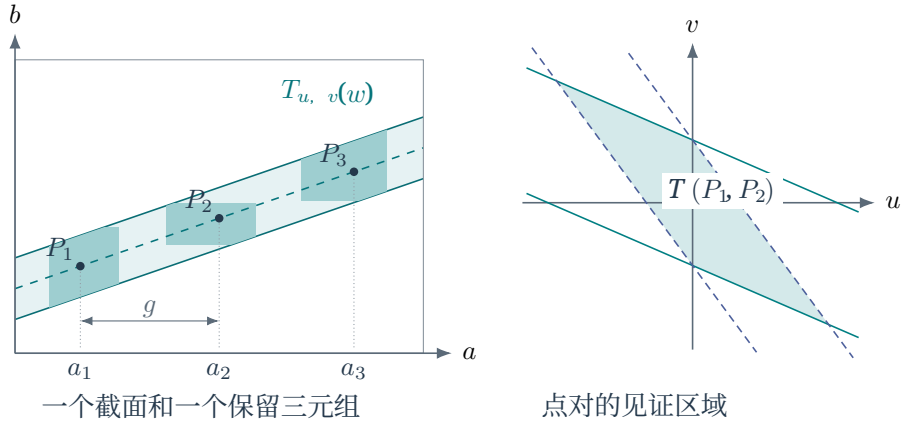
对于每个管，只有当一个三元组的相邻水平间距至少为 $L/8$时，我们才计入该三元组。三元组中任意一对点的间距，要么是其中一个相邻间距，要么是两者之和。因此，若一个保留三元组包含 P、Q，则 $g\ge L/8$。在每个能够贡献这类三元组的管中，第三个点必须位于截面 $A\cap T_{u,v}(w)$内，其面积为 $2wL\le 16wg$。补全面积中的这一因子 g 将与 $\mathcal{T}(P$、$Q)$ 的面积中的因子 $1/g$ 相消。图 3 展示了这两个区域。

计算截面中的点对和三元组。 为了估算可用权重，我们将点对按其水平间距赋权，将三元组按其水平跨度赋权。对于固定的管，令

$$M=\int_{0<a_1<a_2<1}(a_2-a_1)f(a_1)f(a_2)\,\mathrm{d}a_1\,\mathrm{d}a_2,$$
$$Q=\int_{0<a_1<a_2<a_3<1}(a_3-a_1)f(a_1)f(a_2)f(a_3)\,\mathrm{d}a_1\,\mathrm{d}a_2\,\mathrm{d}a_3.$$

为了计算 M 在所有管状区域上的积分，写出 $a_i=a(P_i)$，并利用 f 的定义将 M 表示为

$$M=\frac{1}{(2w)^2}\int_{\substack{P_1,P_2\in A\cap T_{u,v}(w)\\ a_1<a_2}}(a_2-a_1)\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2.$$



一个截面和一个保留三元组　　点对的见证区域

图 3： 左侧管中较深部分的总面积为 $2wL$。保留三元组的两个相邻间距均至少为 $L/8$。右侧，P_1，P_2 的两个残差约束在见证参数空间中界定出一个面积为 $4w^2/g$ 的平行四边形。对于保留三元组的每个见证，可允许的补全区域面积至多为 $2wL \le 16wg$。

现在，我们可以先对包含固定点对 P_1、P_2的管状区域进行积分。它们的参数区域面积为 $4w^2/(a_2 - a_1)$，因此间隔与归一化因子（$2w$）$^{-2}$ 共同使每个点对的总贡献恰好为 1。交换这两个点会互换其第一坐标的两种可能顺序，而并列情况构成零测集。因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} M \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{\alpha^2}{2}.$$

此外 $LM = 2Q$。在乘积 LM 中，因子 L 提供了第三个水平坐标，此外还有 M 中的两个坐标。将这三个坐标按 $a_1 < a_2 < a_3$ 排序后，M 中的三种点对选择各自具有共同密度 $f(a_1)f(a_2)f(a_3)$，再乘以该点对的间距。三个间隔因子的和为 $2(a_3 - a_1)$。对排序后的坐标积分，所得结果是 Q 定义值的两倍。因此，具有较大 L 的管可以将相当一部分点对权重转化为三元组权重。

保留质量足够大的截面。 我们对斜率加以限制，使管状区域之后可以扩张到覆盖完整单元。我们还要求 L 有一个下界，以便保留对质量通过 $Q = LM/2$产生三元组质量。我们将见证参数限制为

$$W = \{(u, v) : |u| \le R,\ L \ge \lambda\}, \qquad R = \frac{C_0}{\alpha}, \qquad \lambda = \frac{c_0\alpha}{\log(2/\alpha)},$$

其中 C_0 是足够大的绝对常数，而 c_0 是足够小的绝对常数。

对于管状区域中的两个点，作差它们的垂直残差可得 $|u|(a_2 - a_1) \le |b(P_2) - b(P_1)| + 2w \le 1 + 2w$，其中 $a_1 < a_2$。因此，只有当 P_2 位于 P_1右侧水平距离不超过$(1 + 2w)/R$ 的范围内时，具有 $|u| > R$ 的管状区域才会对点对有所贡献。对于每个固定的 P_1，可供 P_2 取值的面积至多为$(1 + 2w)/R$，因为垂直纤维的长度至多为一。根据对所有管状区域上的 M 积分的计算，每个这样的点对对这些斜率上的积分至多贡献1。对 $P_1 \in A$ 积分可知，舍弃的对权重至多为 $\alpha(1 + 2w)/R$。取足够大的 C_0，使得该值至多为 $\alpha^2/8$。

对于一个固定的管状区域，f 的支集包含在长度至多为 $h(u) = \min\{1, (1 + 2w)/|u|\}$的区间内，其中 $h(0) = 1$。事实上，$f(a) > 0$ 意味着 $ua + v \in [-w, 1 + w]$。因此，在定义 M的积分中，间隙至多为 $h(u)$，而 $f(a_1)f(a_2)$在有序对上的积分为 $L^2/2$。由此得到 $M \le h(u)L^2/2$。对每个固定的 u，对定义进行积分

在 v 上对 L 进行积分，得到 $\int_{\mathbb{R}} L\mathrm{d}v = \alpha$。固定 a 和偏移量 t，变量替换 $b = ua + v + t$ 测量了 A 在 a处的垂直纤维长度。对 a 积分得到 α，再对 t 取平均后，该值保持不变。对于满足 $L < \lambda$ 的管状区域，我们使用 $L^2 \le \lambda L$。因此，满足$|u| \le R$ 和 $L < \lambda$ 的点对质量至多为

$$\frac{\lambda\alpha}{2}\int_{-R}^{R} h(u)\,\mathrm{d}u = O(\lambda\alpha\log(2/\alpha))\,.$$

对 $1 \le |u| \le R = C_0/\alpha$ 上的 $h(u) = O(1/|u|)$ 进行积分，便得到对数因子。固定 C_0 后，选择足够小的 c_0，使这一损失也至多为 $\alpha^2/8$。因此，原始对权重 $\alpha^2/2$ 中至少有一半落在 W 中。在 W 上使用 $Q = LM/2$ 和 $L \ge \lambda$，得到 $\int_W Q\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \ge \lambda\alpha^2/8$。

分离的代价。对于 $(u,v) \in W$，令 Q^* 表示满足分离规则的三元组对 Q 的贡献。固定外侧坐标 $a_1 < a_3$。中间坐标仅当落在 $(a_1, a_1 + L/8)$ 时才会违反第一个间隔条件；仅当落在 $(a_3 - L/8, a_3)$ 时才会违反第二个间隔条件。由于 $f \le 1$，每个区间的 f-质量至多为 $L/8$。为界定任一条件造成的总损失，将 $L/8$ 乘以外侧点对的权重 $(a_3 - a_1)f(a_1)f(a_3)$，再对 $a_1 < a_3$ 积分。每个条件造成的损失至多为 $LM/8 = Q/4$，因此 $Q^* \ge Q/2$。

权重分配。对于第一坐标各不相同的三个点，将它们排序，使得 $a_1 < a_2 < a_3$。权重等于能够保留该三元组的管状区域参数域的面积，乘以其水平跨度，再除以 $8w^2$。

$$K(P_1,P_2,P_3) = \frac{a_3 - a_1}{8w^2}\int_W \mathbf{1}\left\{\begin{array}{l} P_1,P_2,P_3 \in T_{u,v}(w), \\ a_2 - a_1 \ge L/8, \quad a_3 - a_2 \ge L/8 \end{array}\right\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

当两个第一坐标重合时，令 $K = 0$。由于顺序由第一坐标决定，因此该权重是对称的。正权重意味着存在见证，其满足 $|u| \le R$，且两个间隔均至少为 $L/8 \ge \lambda/8$，这正是第 (1) 部分所要求的。K 中的积分度量的是包含外侧点对的管状区域的一个子集，而该管状区域的完整参数面积为 $4w^2/(a_3 - a_1)$。因此，K是保留的见证所贡献面积占该面积比例的一半，由此得到 $K \le 1/2$。

要计算 A 中按第一坐标排序的三元组的总权重，先对每个管状区域中的三元组积分。固定第一坐标后，间隔条件只涉及这些坐标和 L。对每个高度 $b(P_i)$积分，得到相应垂直截面的长度 $2wf(a_i)$。因此，三重积分为 $(2w)^3Q^*$，其中包括张成因子 $a_3 - a_1$。除以 $8w^2$ 后，得到总权重 $w\int_W Q^*\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \ge w\lambda\alpha^2/16$；根据 λ的定义，这就证明了第 (2) 部分。

对于点对界，固定 P，Q，其间隙为 $g > 0$。对于补全 Z，任何被计数的管都属于 $\mathcal{T}(P,\ Q)$，且具有 $L \le 8g$。对于每个这样的管，我们可以通过将整个截面 $A \cap T_{u,\ v}(w)$ 作为补全区域，并利用张成因子至多为一，来界定在 Z 上的积分。因此，先对 Z 积分可得

$$\int_A K(P,Q,Z)\,\mathrm{d}Z \le \frac{1}{8w^2}\int_{\mathcal{T}(P,Q)\cap\{L\le 8g\}} 2wL\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \le \frac{1}{8w^2}\frac{4w^2}{g}\,16wg = 8w.$$

对于 $g = 0$，权重为零。 □

3.5 将权重舍入为边

现在，我们将点对的界转化为胞元对的界。

引理 3.4. 对于所有充分大的 n，以及由 $m \geq V/\sqrt{n}$ 个单元组成的任意集合 J，$H[J]$都有一个子超图，其边数至少为 $c\,m^3/(n \log n)$，且成对度数至多为 $2V/n$，其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。

证明。选择 $w = 1/(100n)$ 留下了余地，可以用每个点所在的整个单元替代该点。对 J 的单元并集 A 应用引理 3.3，取 $\alpha = m/V$ 和这个 w 值。由于$\alpha \geq n^{-1/2}$，正权重三元组的相邻间距至少为 $c/(\sqrt{n}\log n) > \eta$（当 n 足够大时）。因此，这三个点分别位于不同的单元中。此外，根据引理中的见证，$|u| \leq C\sqrt{n}$。在单元内移动一个点，至多会使 $b - ua - v$ 改变 $(1 + |u|)\eta$。当 n 足够大时，

$$w + (1 + C\sqrt{n})\eta \leq 2w < 1/n.$$

因此，这三个完整的单元都位于 $T_{u,\,v}(1/n)$ 中，并构成 $H[J]$ 的一条边。

对单元取平均。 对于 J 中由不同单元组成的无序三元组 $E = \{C_1, C_2, C_3\}$，定义

$$\omega_E = V^3 \int_{C_1 \times C_2 \times C_3} K(P, Q, Z)\, \mathrm{d}P\, \mathrm{d}Q\, \mathrm{d}Z.$$

这是从每个单元中均匀选取一个点时 K 的平均值。权重属于 $[0, 1/2]$，而 $\omega_E > 0$ 意味着 E 是 $H[J]$的一条边。

由于 K 是对称的，并且在包含重复单元的三元组上为零，因此对无序单元三元组求和，以及对按第一坐标排序的三元组积分，所得结果均为带标号三元组对应总量的六分之一。因此

$$\mu := \sum_E \omega_E = V^3 \int_{\substack{P_1, P_2, P_3 \in A \\ a(P_1) < a(P_2) < a(P_3)}} K(P_1, P_2, P_3)\, \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P_2\, \mathrm{d}P_3 \geq c\, \frac{m^3}{n \log n},$$

其中，我们利用了当 n 足够大时，$\log(2/\alpha) \leq \log\, n$。对于一对不同的固定单元 C_1，C_2，对可能的第三个单元求和，即可应用逐点点对界。

$$\sum_{C_3 \in J \setminus \{C_1, C_2\}} \omega_{\{C_1, C_2, C_3\}} \leq V^3 \int_{C_1 \times C_2} \left(\int_A K(P, Q, Z)\, \mathrm{d}Z \right) \mathrm{d}P\, \mathrm{d}Q \leq 8wV.$$

最后一个不等式利用了 $\mathrm{area}(C_1) = \mathrm{area}(C_2) = 1/V$。

选择边。 以概率 ω_E独立保留每条边。保留边的期望数量为 μ，每个点对的期望度数至多为 $8wV$。切尔诺夫界给出保留边少于 $\mu/2$ 条的概率至多为 $e^{-\mu/8}$。它还给出某个固定点对的度大于 $2V/n$ 的概率至多为 $\exp(-c'V/n)$，其中 $c' > 0$ 为绝对常数。由于点对数量少于 V^2，当 n 足够大时，这些失败事件的并集的概率小于 1，且对 $m \geq V/\sqrt{n}$ 一致成立。针对给定的 J，固定一个成功的子超图。 −

□

3.6 同时控制顶点度

我们使用引理 3.4 中的候选边来构造 H_J 同时使每个单元的度低于 (i) 中的界。

命题 3.2 的证明。固定 $J$with $m \geq 2V/\sqrt{n}$，并令 $t \equiv \lfloor c_1 m^3/(n \log\, n) \rfloor$。对于每个$U \subseteq J$with $|U| \geq 3m/4$，我们都有 $|U| \geq V/\sqrt{n}$。引理 3.4 给出了 $H[U]$的一个子超图，其边数至少为 $c(3m/4)^3/(n\log\, n)$。取足够小的 $c_1 > 0$，使得该数量至少为 $20t$。

我们通过不断添加边来构造 H_J，直到其边数达到 t。每一步，我们都会得到一组候选项，这些候选项位于度数仍低于其阈值的单元上。若某个候选项尚未使用，且其三个点对的度数均低于各自的阈值，则该候选项符合条件。

在选出的边少于 t 时，若某个顶点当前的度至少为 $12t/m$，则称其为饱和顶点；若某个点对当前的度至少为 $6V/n$，则称其为饱和点对。顶点度数之和小于 $3t$，所以饱和顶点少于 $m/4$ 个。令 U 由其余顶点组成。根据引理 3.4，我们可以取出至少 $20t$ 条位于 U 上的候选边，使得每个点对出现的次数至多为 $2V/n$。

当前成对度数之和小于 $3t$，所以饱和点对少于 $3t/(6V/n)$ 个。每个饱和点对至多排除 $2V/n$ 条候选边，合起来至多排除 t 条。已使用的候选边少于 t 条。因此，仍有一条未使用的候选边避开所有饱和点对，且其顶点全部属于 U。添加这条边并重复上述过程。

度超过阈值的幅度最多为 1。当构造过程达到 t条边时，最大顶点度至多为 $12t/m + 1$，最大成对度数至多为 $6V/n + 1$。当 n 足够大时，我们有 $t/m \geq 1$ 和 $t \geq c_1 m^3/(2n \log n)$，由此得到所述界。 □

3.7 构造容器

我们从所有单元开始，并在每个大型容器 J 处对 H_J 应用容器引理，从而构造$\mathcal{C}$。每个子容器至多保留 H_J 的四分之一的边。根据单元度上界，它因此必须舍弃 J 中至少固定比例的单元。这限制了树的深度。结合每一步子容器数量的上界，便可控制叶节点的数量；这些叶节点构成$\mathcal{C}$。

我们采用容器定理的一种固定的边约简形式。最大度指的是没有重复超边的超图的最大度。

引理 3.5 (Saxton–Thomason [18])。存在绝对常数 $c_*, C_*, \rho_0 > 0$，使得以下性质成立。设 G 是一个 3-均匀超图，其顶点数为 m，平均度为$d = 3e(G)/m > 0$。若 $0 < \rho \leq \rho_0$ 且

$$\frac{\Delta_2(G)}{d\rho} + \frac{1}{d\rho^2} \leq c_*,$$

那么存在一个族 $\mathcal{D}$，覆盖 G 的独立集，使得每个 $D \in \mathcal{D}$ 都满足$e(G[D]) \leq e(G)/4$，且 $\log |\mathcal{D}| \leq C_* m\rho \log(1/\rho)$。

这由 [18] 的定义 3.2 和推论 3.6 得出，其中边约简参数为$1/4$。对于一致度三，它们的共度函数为 $4\delta_2 + 2\delta_3$，其中 $\delta_j \leq \Delta_j(G)/(d\rho^{j-1})$。由于 $\Delta_3(G) \leq 1$，所显示的条件使该共度函数足够小。

命题 *3.1* 的证明。从所有单元的集合开始。在当前集合 J 满足$m = |J|$时，若 $m \leq AV\sqrt{}$对数 n/n，则停止，其中 A 是一个足够大的绝对常数。在非终止集合中，对于较大的 $m \geq 2V/\sqrt{n}$，有 n，因此命题 3.2 给出 H_J 满足

$$d(H_J) \geq c\,\frac{m^2}{n \log n}, \qquad \Delta_2(H_J) \leq C\,\frac{V}{n}.$$

令 $\rho = \kappa\sqrt{n \log n}/m$。这样选取后，容器条件的第二项至多为$C'/\kappa^2$。第一项至多为

$$\frac{C' V \sqrt{\log n}}{\kappa m \sqrt{n}} \leq \frac{C'}{\kappa A}.$$

选取 κ，然后令 A 充分大。停止阈值还给出 $\rho \le (\kappa/A)n/V$，它趋于零。因此，引理3.5 适用。将其容器用作树中 J 的子节点。

对于每个子节点 D，引理给出 $e(H_J[D]) \le e(H_J)/4$，因此 H_J的边至少有 $3e(H_J)/4$条被移除。每个被移除的单元至多关联 $\Delta_1(H_J) \le Ce(H_J)/m$条边，所以 $|J \setminus D| \ge 3m/(4C)$。因此，每个非终止步骤都会使单元数量减少一个固定比例。这棵树的深度为 $O(\log V) = O(\log n)$。

在每个非终止节点处，当 n 足够大时，$\overline{m\rho} = \kappa\sqrt{n}\log n$ and $\log(1/\rho) \le \log V$。因此，子节点数量的对数为 $O(\sqrt{n}(\log n)^{3/2})$。将这一界与深度界相乘，可得叶节点数量的对数至多为 $O(\sqrt{n}(\log n)^{5/2})$。包含于 J 中的 H 的每个独立集在 H_J中也独立，因此它包含于 J的某个子节点中。沿着子节点继续进行，直到满足停止条件，即可知叶节点覆盖了 H 的独立集。

所有辅助选择都是针对一个固定有限网格的子集进行的。我们可以在抽取系数点之前固定整棵树。它的叶节点给出$\mathcal{C}$，同时满足所需的两个界。 □

命题3.1 通过第 $\alpha_3(\mathcal{S}_n)$ 节中的抽样论证给出了 $\alpha_3(\mathcal{S}_n)$ 的估计3.2。结合第3.1节中的深度估计和截断，这就完成了定理1.1平面情形的证明。

4 $\mathrm{HD}_d(p, d+1)$的下界

本节证明$(p, d+1)$ 定理在 $\mathbb{R}^d$中的下界。第2节简要概述了证明思路。在本节中，d 固定，常数可以依赖于 d。与平面情形一样，我们利用几何估计构造容器，然后估计每个容器中的样本点数。

令 $m = d-1$和 $Q = [0,1]^m$。对于 $1 \le i \le n$，从 $Q \times [0,1]$ 中独立且均匀地选取 $P_i = (a_i, b_i)$，并令

$$S_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : |y - a_i \cdot x - b_i| \le 1/n\}, \qquad \mathcal{S}_n = \{S_1, \dots, S_n\}.$$

点（$-u$，v）属于与（a，b）关联的带状区域，当且仅当（a，b）属于管 $T_{u,\,v}(1/n)$，其中

$$T_{u,v}(w) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^d : |b - u \cdot a - v| \le w\}.$$

对于一个族 $\mathcal{F}$，令 $\alpha_{d+1}(\mathcal{F})$ 表示其中不含 $d+1$ 个具有公共点的不同成员的子族的最大大小，并令 depth（$\mathcal{F}$）表示经过任意一点的$\mathcal{F}$ 的成员数的最大值。设 $\ell = \log(en)$ 且 $b_d = \max\{3, d - 1/d\}$，我们证明，当 $n \to \infty$ 时，随着其趋于无穷，以下结论以趋近于 1 的概率成立：

$$\alpha_{d+1}(\mathcal{S}_n) \le C_d n^{1/d} \ell^{b_d}, \qquad \mathrm{depth}(\mathcal{S}_n) \le C_d \frac{\log n}{\log\log n}. \tag{1}$$

它们分别是 (B) 和 (A) 的对应结果。我们还说明了截断片时，如何保留 (B) 中所用的交集。

4.1 几何估计

平面估计控制经过固定点对的三元组的权重。这里，我们需要一个适用于固定集合大小从二到 d 的界。如果 j 固定斜率向量张成一个 $(j-1)$ 维仿射子空间，则有 $d-j$ 个垂直于该仿射子空间的方向。沿这些方向展开行列式

可以控制补全的权重，包括剩余斜率向量趋近固定仿射子空间时的情况。

令 $w = 1/(100n)$ 和

$$q_j = d + 1 - j - \frac{j-1}{m}, \qquad 2 \le j \le d.$$

以下命题是度数界的连续形式。固定核的 j 个参数后，积分是对其余 $d+1-j$ 个参数进行的。

命题 4.1。 若 $A \subseteq Q \times [0,1]$ 是体积为 $\alpha \ge n^{-m/d}$ 的博雷尔集，则对于所有足够大的 n，存在一个对称可测函数 $K\colon\ A^{d+1} \to [0,1]$，满足

$$\int_{A^{d+1}} K \ge c_d w \alpha^{d+1}/\ell^d, \qquad and \tag{2}$$

$$\sup_{P_1,\dots,P_j \in A} \int_{A^{d+1-j}} K(P_1,\dots,P_j,Z_1,\dots,Z_{d+1-j})\,\mathrm{d}Z_1 \cdots \mathrm{d}Z_{d+1-j} \le C_d w \alpha^{q_j}, \tag{3}$$

对所有 $2 \le j \le d$ 均成立。

每个权重为正的元组都位于半宽度为 w 的管内，且 $\|u\|_\infty \le n^2$。

对于 $k+1$ 个斜率向量 a_0、.....、a_k，令 D_k 表示 $k!$ 乘以它们的单纯形的 k 维体积，其中 $D_0 = 1$。等价地，D_k 是 $a_i - a_0$、$1 \le i \le k$ 的格拉姆行列式的平方根。在此前的单纯形非退化的前提下，再添一个点会使该量乘以此点到先前仿射张成空间的距离。对于 $d+1$ 个投影，令 D_* 为其所有 d 点面上 D_m 的最大值。

一个水平分布集。 固定一个足够小的 $r = r_d > 0$，具体取值见下文的归一化。设 $E \subseteq Q \times [0,1]$ 的体积为 $\gamma > 0$，并且对于 $\mathbb{R}^m$ 中任一仿射超平面周围半宽度为 r 的带状区域，其完整垂直纤维中至多包含 E的$(1-\delta)\gamma$，其中 $0 < \delta \le 1/2$。对于 $\pi = (u,\ v)$，令 $\chi_\pi(a,\ b)$ 为 $|b - u\cdot a - v| \le w$的指示函数，并定义

$$U_\pi(a) = \frac{1}{2w}\int \mathbf{1}_E(a,b)\chi_\pi(a,b)\,\mathrm{d}b, \quad L_\pi = \int_Q U_\pi, \quad \theta_\pi = \min\{1, \gamma/L_\pi\},$$

当 $L_\pi = 0$时取 $\theta_\pi = 1$。特别地，$U_\pi \le 1$ 且 $\theta_\pi L_\pi = \min(\gamma,\ L_\pi)$。

给定 $\kappa = c_{d,\ r}\delta$，若一个元组满足 每个投影的 k-面都满足

$$D_k \ge \kappa \gamma^{k/m}, \qquad 1 \le k \le m. \tag{4}$$

对于一个足够大的常数 $R = R_{d,\ r}$，记 $\Omega = \{(u,\ v)\colon \|u\|_\infty \le R\}$。我们在 E 上的核为

$$W(P_1,\dots,P_{d+1}) = \mathbf{1}_{\text{admissible}} \frac{D_*}{(2w)^d} \int_\Omega \theta_\pi \prod_{i=1}^{d+1} \chi_\pi(P_i)\,\mathrm{d}\pi. \tag{5}$$

对于投影行列式为 $D_m > 0$ 的 d 系数点，从 (u,v) 到其 d 图像高度的映射，其雅可比矩阵的绝对值为 D_m。包含这些点的管的无约束参数体积为 $(2w)^d/D_m$。利用达到 D_* 的一个面可得 $0 \le W \le 1$。

引理 4.2。 对于上述水平分布集，可以选取 $\kappa = c_{d,\ r}\delta$ 使得$\int_{E^{d+1}} W \ge c_d w \delta^d \gamma^{d+1}$。固定任意 j 个参数后，其补全积分至多为$C_d w \gamma^{q_j}/\delta$，其中 $2 \le j \le d$。

证明。质量。 若一个有序的 d点单纯形在第一次连续投影之后，每次连续投影所得点与其前面各点的仿射张成空间的距离都至少为 r ，则称该单纯形为宽型。每个这样的张成空间都包含于 $\mathbb{R}^m$ 的某个超平面中，因此，在任意一个宽型前缀之后，下一个点都可以从测度至少为 $\delta\gamma$的集合中选取。因此， E^d 中的宽型元组的测度至少为 $\delta^m\gamma^d$。它们的行列式至少为 r^m。它们的每个子面行列式都至少为一个仅依赖于 $d,\ r$的正常数，因为可以通过添加长度至多为 $\sqrt{m}$的高，将其扩展为完整单纯形。 —

当 R 足够大时，宽型元组的所有可行斜率都位于 Ω 中。事实上，其指定图高度位于 $[-w, 1+w]$ 中，而高度方程的行列式至少为 r^m。因此，对 d 系数高度积分，并使用刚刚计算出的雅可比矩阵，可得

$$\int_{\Omega}\int_{Q^d} \mathbf{1}_{\text{broad}} D_m \prod_{i=1}^{d} U_\pi(a_i)\,\mathrm{d}a_1\cdots\mathrm{d}a_d\,\mathrm{d}\pi = \int_{E^d} \mathbf{1}_{\text{broad}} \ \geq\ \delta^m\gamma^d. \tag{6}$$

此外，$\int_\Omega L_\pi\,\mathrm{d}\pi = (2R)^m\gamma$，先对截距积分即可得到。式（6）在 $L_\pi < \lambda\gamma$ 上的部分至多为 $C_d(\lambda\gamma)^m\int_\Omega L_\pi\,\mathrm{d}\pi$，因为内积分有上界 $C_d L_\pi^d$。取$\lambda = c'_{d,\ r}\delta \leq 1$足够小，以保留至少一半的质量。

固定一个剩余平面和一个宽型单纯形。若要用其 k 个顶点和一个新点 z违反（4），则投影 z 到这些顶点张成的（$k-1$）维仿射子空间的距离必须小于$C_{d,\ r}\kappa\gamma^{k/m}$ 。半径为t 的（$k-1$）维仿射子空间邻域与 Q 的交集体积至多为 $C_d t^{m-k+1}$，这是通过分别正交投影到该仿射子空间及其补空间得到的。因此，选取这些顶点所对应的禁区体积至多为

$$C_{d,r}\kappa^{m-k+1}\gamma^{\,k(m-k+1)/m} \leq C_{d,r}\kappa\gamma, \qquad k(m-k+1)-m = (k-1)(m-k) \geq 0.$$

仅有 $O_d(1)$ 个面。选取 $c_{d,\ r}$ 足够小，使宽型顶点本身满足所有截断条件，且禁用集合的并集体积至多为 $\lambda\gamma/2$。由于 $U_\pi \leq 1$且 $L_\pi \geq \lambda\gamma$，有效的额外点所携带的 U_π质量至少为 $L_\pi/2$。对 $d+1$个高度在（5）中的情况积分，会留下因子 $2w$ 以及各个 $d+1$ 截面的概率密度乘积。对宽面使用 $D_* \geq D_m$，并用 $\theta_\pi L_\pi \geq \lambda\gamma$ 得到 $\int W \geq 2w(\lambda\gamma/2)(\delta^m\gamma^d/2)$。

补全。 固定 j 个系数点，令 $k = j-1$ 且令 $t = m-k = d-j$。如果它们的 $D_k < \kappa\gamma^{k/m}$ ，则积分为零。否则，以第一个固定投影为原点建立标准正交坐标，并取其与其他固定投影之差所张成空间中的前 k 个坐标轴。令 $h_i \in \mathbb{R}^t$ 表示每个 $t+1$ 个自由投影的法向分量。所有固定投影的法向分量均为零。

对于 d 点的每个面，用一行全为 $\mathbf{1}$ 的行、 k 切向坐标行和 t 法向行写出其增广行列式。沿法向行展开。非零法向子式只使用自由列，而其余每个切向子式都可用 d来界定。因此，即使对于取到最大值的面，也有

$$D_* \ \leq C_d \sum_{\substack{I\subseteq[t+1]\\ |I|=t}} |H_I|, \qquad H_I = \det(h_i : i\in I). \tag{7}$$

对于 $t=0$ ，空行列式等于 $\mathbf{1}$。例如，固定 $d=4$ 点对后，会留下一个二维法向空间。右侧的三项分别是由三个可能的自由法向量点对张成的平行四边形的面积。

对于此和中的指标集 I ， I 的 j 个固定点和 t 个自由点在投影到 m维空间后所得的行列式恰好 为 $D_k|H_I|$。事实上，减去第一个固定列，并使用差分构成的分块三角矩阵。其对角分块分别是固定点的切向差，以及 I中自由点的法向分量。

估计 7 在 W的积分中的一项。之外有一个自由点。先对其积分，并在求上界时舍去可容许性。在每个平面上，它与帽的积分为 $2w\theta_\pi L_\pi \le 2w\gamma$。其余 d 个点的见证体积至多为 $(2w)^d/(D_k|H_I|)$，当 $H_I \neq 0$时。含有 $H_I = 0$ 的项在此估计之前的贡献为零。因此，法向子式相消；再对 t个点在 I 上进行积分 E 得到

$$C_d \frac{2w\gamma}{(2w)^d} \int_{E^t} |H_I| \, \frac{(2w)^d}{D_k|H_I|} \;\le\; C_d \, \frac{w\gamma^{t+1}}{D_k} \;\le\; C_d \, \frac{w}{\kappa} \gamma^{\,d+1-j-(j-1)/m}.$$

在所示积分中，被积函数在 $H_I = 0$ 上取零。对 I 求和即可证明行界。

□

仿射归一化。 我们通过限制在一个核心内，并且只对水平坐标进行缩放，来证明命题 4.1。固定 $r > 0$ 使其足够小，以至于

$$\zeta = 2r(\sqrt{m})^{m-1} < 1, \qquad Q_0 = (2\zeta)^{-1} \ge \max\{2, (\sqrt{m})^{m-1}\}.$$

在阶段 $i = 0$，1，.....使用

$$\delta_i = \tfrac{1}{4}(\ell^{-1} + \zeta^{\,i/m}).$$

如果当前集合满足扩散假设且 δ_i，则停止。否则，保留其位于某个半宽度为 r 的水平薄片上方的部分，该薄片包含超过 $1 - \delta_i$ 的质量。其水平投影包含在一个正交盒内，该盒有 $m - 1$ 条边长至多为 $\sqrt{m}$，且有一条边长至多为 $2r$。将此盒仿射映射到 Q，同时保持垂直坐标不变。逆线性部分 B_i 的范数至多为 $\sqrt{m}$，且行列式的绝对值至多为 ζ。所有盒边长均可取为正。由于 $\delta_i \le 1/2$，每一步都会使归一化体积至少增大 Q_0 倍。因此，步骤数至多为 $k_0 \le \log(1/\alpha)/\log\, Q_0 = O_d(\ell)$。

令 β 为原坐标中保留的体积，令 D 为复合逆水平映射 B 的行列式绝对值。则终端归一化集合 E 的体积为 $\gamma = \beta/D$，且

$$c_d\alpha \le \beta \le \alpha, \qquad \beta \le D \le \zeta^{k_0} \le 1.$$

事实上，$\sum_{i<k_0} \delta_i = O_d$（1）由几何级数以及对 k_0的界可得，因此 $\prod_{i<k_0}(1-\delta_i) \ge c_d$。应用引理4.2，取 $\delta = \delta_{k_0}$。将其核拉回到核心，并将其延拓为零至A^{d+1}。其质量增加一个因子 D^{d+1}，从而至少为 $c_d w \delta_{k_0}^d \beta^{d+1}$。由于 $\delta_{k_0} \ge 1/$（4ℓ）这就证明了（2）。一个 j点补全积分增加一个因子 D^{d+1-j}，且至多为

$$C_d w \beta^{q_j} \, \frac{D^{(j-1)/m}}{\delta_{k_0}} \;\le\; 4C_d w \alpha^{q_j}.$$

这里 $q_j \ge 0$ 和 $D^{(j-1)/m} \le \zeta^{k_0/m}$。递减阈值利用水平行列式的收缩，在每一行中同时吸收因子 $1/\delta_{k_0}$。

管状区域半宽保持不变。归一化斜率 u' 拉回后变为 $B^{-\mathsf{T}}u'$，奇异值给出

$$\|B^{-\mathsf{T}}\|_2 \le \|B\|_2^{m-1}/D \le (\sqrt{m})^{(m-1)k_0}/\beta \le C_d\alpha^{-2}.$$

由于 $\alpha \ge n^{-m/d}$ 且 $2m/d < 2$，该界乘以固定的归一化斜率界，对于足够大的 n^2 而言至多为 n。这就完成了命题 4.1的证明。

4.2 单元超图及其容器

现在，我们将加权元组转化为单元上的边。对于每个大集合 J 的单元，我们选取一个辅助超图 H_J，其度数界使我们能够在每个容器步骤中缩小 J。

记 $s_0 = d+1$ 为边大小，记 $L = \ell^d$ 为（2）中的损失。将系数立方体划分为 $V = n^{5d}$ 个边长为 $\eta = n^{-5}$ 的单元，并采用固定的边界约定。在这些单元上定义一个 s_0-均匀超图 H。其边由 s_0 个彼此不同且共同包含在一根半宽度为 $1/n$ 、满足 $\|u\|_\infty \le n^2$ 的管中的单元组成。根据命题 4.1 加权的元组在其对应单元彼此不同时属于边，因为将点的所有坐标在其所在单元内改变，至多会使残差变化 $(1+mn^2)n^{-5} < 1/n - w$，当 n 足够大时成立。

引理 4.3。设 J 由 $M = \alpha V$ 个单元组成，其中 $\alpha \ge 2n^{-m/d}$。存在一个超图$H_J \subseteq H[J]$，其顶点集为 J，没有重复超边，并且满足

$$e(H_J) \ge c_d w M^{s_0}/L, \qquad \Delta_1(H_J) \le C_d e(H_J)/M,$$
$$\Delta_j(H_J) \le C_d w V^{s_0-j}\alpha^{q_j}, \qquad 2 \le j \le d.$$

这里， Δ_j 是经过 j 个顶点的边的最大数量。

证明。先任取 J 满足 $\alpha \ge n^{-m/d}$。将其并集代入命题 4.1 。给每个由不同单元组成的无序元组赋予权重，该权重为 V^{s_0} 乘以其核在任意固定顺序下对应乘积空间上的积分。所有边的权重均不超过 1。包含同一单元中两个点的元组，其总测度至多为 $\binom{s_0}{2}\alpha^{s_0-1}/V$，在此密度范围内一致为 $o(w\alpha^{s_0}/L)$。将有序和除以 $s_0!$，可得总权重至少为 $c_d' w M^{s_0}/L$。将式（3）在这 j 个固定单元上积分，可得经过它们的最大总权重至多为 $T_j = C_d w V^{s_0-j}\alpha^{q_j}$。

现在取 $\alpha \ge 2n^{-m/d}$ 并令 $t = \lfloor c_d'' w M^{s_0}/L \rfloor$，其中 c_d'' 足够小，使得任意至少含有 $3M/4$ 个顶点的子集所提供的权重总和至少为 $10t$。在贪心选取的每一步，将度达到 $4s_0 t/M$的顶点称为饱和顶点，并将度达到 $2d\binom{s_0}{j}T_j$ 的 j 集称为饱和集，其中 $2 \le j \le d$。只要已选边数少于 t，饱和顶点就少于 $M/4$ 个。对未饱和顶点重新应用加权界。它们的权重仍满足原有界 T_j，因为其密度至多为 α 且 $q_j \ge 0$。由度数求和可知，饱和的 j 集至多有 $t/(2dT_j)$ 个。因此，在所有 j 中避开这些集合，总共至多损失 $t/2$ 的权重。已使用的边另至多占用 t，因此仍可添加一条新边。经过 t 步后，每个度数界的超出量至多为 1；由于在整个范围内对于足够大的 n都有 t/M， $T_j \ge 1$，故这部分超出可以吸收。 □

命题 4.4. H 的独立集均由一个顶点子集的确定性族 $\mathcal{C}$ 覆盖，该族满足

$$\max_{C\in\mathcal{C}} |C|/V \le n^{-m/d}\ell^{b_d}, \qquad \log|\mathcal{C}| \le C_d n^{1/d}\ell^{b_d}.$$

证明。我们使用 Saxton–Thomason 定理 [18, 定理 3.2 和推论 3。6]。对于固定的 s_0，一个定义在 M 个 M 顶点上的平均度为 d 的超图，在满足以下条件时，其容器所张成的边至多为总边数的四分之一： $\rho > 0$ 且所有比值 $\Delta_j/(\bar{d}\rho^{j-1})$、$2 \le j \le s_0$以及参数 ρ 相对于 s_0充分小。容器的数量的对数至多为 $C_{s_0} M\rho\log(1/\rho)$。

从所有单元开始，当某个密度为 α 达到 $\alpha \le \alpha_0 = n^{-m/d}\ell^{b_d}$ 时，停止。否则，取H_J 自引理 4.3，并选择

$$s(\alpha) = K_d\big((nL)^{1/d} + L\alpha^{-1/m}\big), \qquad \rho = s(\alpha)/M.$$

这里的 K_d 是一个充分大的常数。由于 $V = n^{5d}$ 和 $\alpha > \alpha_0$，这些节点处的 $\rho = o(1)$ 一致成立。平均度至少为 $c_d w M^d / L$。对于 $2 \le j \le d$，容器条件中的比值至多为

$$\frac{C_d L}{(s(\alpha)\alpha^{1/m})^{j-1}} \le \frac{C_d}{K_d^{j-1} L^{j-2}}.$$

对于 $j = s_0$，比值至多为 $C_d n L / s(\alpha)^d$，因为 $\Delta_{s_0} = 1$。这验证了所有条件。

将 H_J 的容器用作当前节点的子节点。每个容器至少缺少 $3e(H_J)/4$条边。因此，顶点度数界保证每个子节点的大小至多为 $\lambda_d M$，其中$\lambda_d < 1$为某个常数。由于 $H_J \subseteq H[J]$，$H[J]$的所有独立集都被这些子节点覆盖。深度为 $O_d(\ell)$。为计算当 $s(\alpha)$变化时的叶节点数，考虑任意一条路径，其内部密度依次为 α_1、.....、 α_h。它们每一步都至少缩小为原来的 λ_d，因此

$$\sum_{i=1}^{h} \alpha_i^{-1/m} \le \alpha_h^{-1/m} \sum_{t \ge 0} \lambda_d^{t/m} \le C_d \alpha_0^{-1/m}.$$

由于 $\log(1/\rho) \le \log V$，这条路径上分支数的对数之和至多为

$$C_d[\ell^2 (nL)^{1/d} + \ell L \alpha_0^{-1/m}] \le C_d' n^{1/d} \ell^{b_d}.$$

对于最后一个界，关于 b_d 的两个条件分别是 $b_d \ge 3$ 和 $b_d \ge d + 1 - b_d/m$，后者等价于 $b_d \ge d - 1/d$。在每个分支处，为所有子节点赋予相等的概率。对每条路径的界都意味着每个叶节点的概率至少为 $\exp(-C_d' n^{1/d} \ell^{b_d})$，从而证明了所述计数。所有选择都取自有限网格，可以在抽取样本之前确定。

□

4.3 采样与穿刺界

容器给出了（1）中的第一个界。对于固定的终端容器，其被采样标签占据的数量服从二项分布，均值至多为 $n\alpha_0 = n^{1/d}\ell^{b_d}$。取 $h = \lceil B_d n^{1/d} \ell^{b_d} \rceil$。二项分布上尾与并集界给出

$$\mathbb{P}(\text{某个终端容器至少接收 } h \text{ 个标签}) \le \exp(C_d n^{1/d} \ell^{b_d})(e/B_d)^h = o(1)$$

对于充分大的 B_d成立。如果一个子族不含相交的（$d+1$）元组，则其占用单元在 H中相互独立：任意一条边的代表元都具有公共点（$-u$，v）。当样本单元重复时，这一观察同样适用。因此，这样的子族包含在一个终端容器中，并且以高概率少于 h个标签。

深度。 在固定点处，根据对 a_i 进行条件化并对 b_i积分，位于一个随机片中的概率至多为 $2/n$。几乎必然地，片的法向量中任意 d 个（$-a_i$，1）都是线性无关的。它们对应的片具有有界交集。因此，至少 d 个片的非空交集具有一个顶点，该顶点由来自不同片的 d 个线性无关的带符号边界平面支撑。在给定定义这些片的 d 个片的条件下，其余每个片独立地以至多 $2/n$的概率包含该顶点。对候选顶点应用并集界可得

$$\mathbb{P}(\operatorname{depth}(\mathcal{S}_n) \ge t) \le 2^d \binom{n}{d} \left(\frac{2e}{t-d}\right)^{t-d} \quad \text{for integers } t > d.$$

取 $t = r_n = \lceil (2d+2) \log n / \log\log n \rceil$ 即可证明 (1) 的第二部分。

利用紧性并选择 n。 将每个带状区域 S_i 与 $[-n^2,n^2]^m\times\mathbb{R}$ 相交，并将所得的体称为 F_i。它是 $[-n^2,n^2]^m\times[-1/n,1/n]$ 经 $(x,z)\mapsto(x,a_i\cdot x+b_i+z)$得到的仿射像，因此是一个满维紧致平行多面体。这些体几乎必然互不相同，例如可由它们在 $x=0$处的垂直截面看出。每条单元边仍能证明截断后的带状区域具有公共点，因为其斜率满足 $\|u\|_\infty\le n^2$。因此，同一容器占据数上界可证明紧致族满足 (1) 的第一部分。截断只会降低深度。

对于给定的充分大的整数 p，取 $n=\lfloor c'_d p^d/(\log p)^{db_d}\rfloor$，其中 $c'_d>0$ 充分小。于是 $h\le p$ 且 $n\ge p$。固定一个同时满足这两个估计的样本，并令$\mathcal{F}_n=\{F_1,\dots,F_n\}$。它具有 $(p,d+1)$ 性质，且

$$\tau(\mathcal{F}_n)\ge\frac{n}{r_n}=\Omega_d\!\left(\frac{n\log\log n}{\log n}\right).$$

由于 $db_d+1=\max\{3d+1,d^2\}$ 且 $\log n\asymp_d\log p$，这就给出了 定理 1.1 对 $d\ge\quad 3$.

5 HD$\mathrm{HD}_d(p,q)$ 的下界

我们证明定理 1.1 中对每个固定的 $q\ge d+2$ 成立的第二个界。我们使用第 4 节的随机带状区域 S_n，其深度为 $O_d(\log n/\log\log n)$，且根据 (1)，该结论成立的概率趋于 1。常数可以依赖于 d 和 q。与该节中一样，令 $m=d-1$、 $Q=[0,1]^m$、 $\ell=\log(en)$ 和 $w=1/(100n)$，并记作 $s=q-d$。为建立 (p,q) 性质，我们需要对位于管$T_{uv}(w)$ 中的 q-元组进行加权计数。(2) 中的因子 w 变为 w^s，因为 d 个系数点确定一个候选超平面，而 s 个其他点必须位于其管状区域内。

5.1 几何估计

对于 $2\le j<q$，取指数

$$(\nu_j,q_j)=\begin{cases}(s,\ q-j-(j-1)/m), & 2\le j\le d,\\ (q-j,\ q-j-1), & d<j<q.\end{cases}$$

两个指数均为非负数。

命题 5.1。 设 $A\subseteq Q\times[0,1]$ 是一个体积为 $\alpha\ge n^{-m/(q-1)}$的博雷尔集。对于所有充分大的 n，存在一个对称可测函数 $K\colon A^q\to[0,1]$，其支集位于管状区域 $T_{u,\,v}(w)$ 中的元组上，且满足 $\|u\|_\infty\le n^2$，使得

$$\int_{A^q}K\ge c\,w^s\alpha^q/\ell^{q-1},\tag{8}$$

$$\sup_{P_1,\dots,P_j\in A}\int_{A^{q-j}}K(P_1,\dots,P_j,Z_1,\dots,Z_{q-j})\,\mathrm{d}Z_1\cdots\mathrm{d}Z_{q-j}\le Cw^{\nu_j}\alpha^{q_j},\qquad 2\le j<q.\tag{9}$$

我们使用行列式估计，同时选出 s 个额外的点。

引理 5.2。 设 Y_1，……，Y_t 是 $\mathbb{R}^r$中的独立随机向量，其 $t\le r$ 且概率密度有界于 B。对于 $z>0$,

$$\mathbb{P}\big(\|Y_1\wedge\cdots\wedge Y_t\|\le z\big)\le C_{r,t}Bz^{r/t}.$$

证明。 对于 $t=1$，这是球的体积界。对于 $t>1$，通过在每一步选择一个与已选向量张成空间距离最大的向量来排列这些向量。考虑一种可能的排列，并以其前 $t-1$ 个向量为条件。在选择该排列的事件上，

它们的连续距离为 $b_1 \geq \cdots \geq b_{t-1} > 0$，在零测集之外成立。在相应的 Gram–Schmidt方向中，最后一个向量的坐标绝对值至多为 b_i。它到这些向量张成空间的距离至多为

$$u = \min\{b_{t-1},\, z/(b_1 \cdots b_{t-1})\}.$$

允许体积至多为 $C_{r,\,t}(b_1 \cdots b_{t-1})u^{r-t+1}$。由于 $u^t \leq (b_1 \cdots b_{t-1})u \leq z$，因此至多为 $C_{r,\,t} z^{r/t}$。对可能的顺序求和后，由独立性可得所述界。

□

命题 *5.1* 的证明。水平分布集。 首先考虑一个体积为 γ、展开参数为 δ 的集合 E，如第4节所述。使用与式（5）中相同的 U_π，L_π，θ_π，Ω。对于一个 q 元组，令 D_* 为其 d 点面的最大 D_m。要求每个满足 $\kappa = c_{d,\,q,\,r}\delta$ 的投影视面都满足（4），并设

$$W(P_1, \ldots, P_q) = \mathbf{1}_{\text{admissible}} \frac{D_*}{(2w)^d} \int_\Omega \theta_\pi^s \prod_{i=1}^{q} \chi_\pi(P_i)\, \mathrm{d}\pi.$$

取达到 D_* 的面，其高度雅可比再次给出 $0 \leq W \leq 1$。

质量。 首先取一个宽型 d 元组，如引理 4.2 的证明中所述。根据式（6）的论证，限制到 $L_\pi \geq c_d\delta\gamma$ 至少保留宽型元组贡献的一半。对于每根这样的管和每个宽型元组，独立地抽取 s 新的投影，其密度为 U_π/L_π。

考虑一个投影后的 k-面，它具有 $b \geq 1$ 个宽型顶点和 $t = k+1-b \geq 1$ 个新顶点。将从一个宽型顶点出发的新差向量投影到宽型差向量张成空间的正交补上。其维数为 $r' = m - b + 1$。投影密度由 C_d/L_π所界定，因为原始概率密度由 $1/L_\pi$ 所界定，且支集包含于 Q。面行列式等于宽型基底行列式与这些 t 投影差向量的外积之积；前者由一个正的常数从下方界定。根据引理 5.2，在此面上（4）失效的概率至多为

$$C\frac{\kappa^{r'/t}\gamma^{kr'/(mt)}}{L_\pi} \leq C\frac{\kappa}{\delta},$$

其中 $r' \geq t$ 和 $kr' - mt = (b-1)(m-k) \geq 0$。对于仅含新顶点的面，以其第一个顶点为条件，并使用关于 $b = 1$ 和 $t = k$的相同界。仅含宽型顶点的面已经满足截断条件。将$c_{d、q}$和r 取充分小的值，可使所有失败概率之和至多为 $1/2$。

对高度积分后，s 因此新点的贡献至少为一个常数乘以$(w\theta_\pi L_\pi)^s$。对于保留的管状区域 $\theta_\pi L_\pi = \min(\gamma, L_\pi) \geq c_d\delta\gamma$。将其与 (6) 中的宽广贡献相乘，并对宽广面使用 $D_* \geq D_m$，得到 $\int_{E^q} W \geq cw^s\delta^{q-1}\gamma^q$。

补全。对于 $2 \leq j \leq d$，只要权重为正，固定点的投影行列式就是 $D_{j-1} \geq \kappa\gamma^{(j-1)/m}$。如引理 4.2 的证明所示，将定义 D_* 的 d点行列式沿着指向固定面的 $d-j$ 个法向方向展开。由此可将D_* 界定为一个常数乘以法向子式绝对值之和，每一种选择的 $d-j$个自由点对应一个子式。对于子式 H_I 对应的项，相应的 d点行列式为 $D_{j-1}|H_I|$。先对其他 s 个点积分，根据帽 θ_π^s，其贡献至多为 $(2w\gamma)^s$。当 $H_I \neq 0$ 时，d 个点的管参数体积至多为 $(2w)^d/(D_{j-1}|H_I|)$。子式抵消后，对所选的 $d-j$ 个自由点积分，得到上界 $Cw^s\gamma^{q-j}/D_{j-1}$。因此，行积分至多为 $Cw^s\gamma^{q_j}/\delta$。

对于 $d < j < q$，写作 $e = q - j$。先对所有自由点积分，代价至多为 $(2w\gamma)^e$，因为 $e < s$ 而且 $\theta_\pi^s L_\pi^e \leq \gamma^e$。任取固定点中的 d 个，在可容许元组上其行列式至少为 $\kappa\gamma$，因此它们将管参数体积限制为 $(2w)^d/(\kappa\gamma)$。利用 $D_* \leq C_d$，得到 $Cw^e\gamma^{e-1}/\delta$。

仿射归一化。使用命题 4.1 的证明中的水平缩放。按照其中的记号，保留体积为 $\beta \asymp_d \alpha$，逆水平映射的行列式满足 $D \le \zeta^{k_0}$，最终展开参数为 $\delta_{k_0} = (\ell^{-1} + \zeta^{k_0/m})/4$。归一化体积为 $\gamma = \beta/D$。拉回后质量乘以 D^q，从而得到 (8)。一行中含有 j 个点时，会多出一个因子 D^{q-j}。在这两种范围内都有 $q - j - q_j \ge 1/m$，因此 $D^{q-j-q_j}/\delta_{k_0} \le 4$。由于 $q_j \ge 0$且 $\beta \le \alpha$，这就证明了 (9)。斜率界由逆水平映射 B 的 $\|B^{-\mathsf{T}}\|_2 \le C_d \alpha^{-2}$ 得出，与第 4 节中的做法相同，使用 $2m/(q-1) < 2$。 $\square$

5.2 容器与抽样

在边长为 n^{-5q} 的 $V = n^{5dq}$ 单元上，通过将共同管状区域中满足 $\|u\|_\infty \le n^2$ 的所有 q 元单元集作为边，定义 H，其中半宽度为 $1/n$。不同单元上的一个正权元组会产生一条边，因为单元内的剩余变化至多为 $(1 + mn^2)n^{-5q} < 1/n - w$。

记 $L = \ell^{q-1}$。令 J 由 $M = \alpha V$ 个单元组成，其中 $\alpha \ge 2n^{-m/(q-1)}$。将引理 4.3 的取整论证应用于命题 5.1，可得一个简单的 $H_J \subseteq H[J]$，使得

$$e(H_J) \ge c w^s M^q / L, \qquad \Delta_1(H_J) \le C e(H_J)/M,$$
$$\Delta_j(H_J) \le C w^{\nu_j} V^{q-j} \alpha^{q_j}, \qquad 2 \le j < q.$$

事实上，即使在命题 5.1 中最小的密度下，含有重复单元的元组所占权重至多为 $\binom{q}{2}\alpha^{q-1}/V = o(w^s \alpha^q / L)$。对不同单元的乘积积分并乘以$V^q$后，所得权重至多为 1，且行界为 $T_j = C w^{\nu_j} V^{q-j} \alpha^{q_j}$。在贪心选取$t = \lfloor c' w^s M^q / L \rfloor$ 条边时，对顶点使用饱和阈值 $4qt/M$，对 j 元集使用阈值 $2q\binom{q}{j}T_j$。每一步至少有 $3M/4$ 个顶点尚未饱和。重新计算这些顶点上的权重，其密度仍至少为 $n^{-m/(q-1)}$。当 c' 足够小时，它们的总权重至少为 $10t$，且其行界仍为 T_j，因为 $q_j \ge 0$。对 j 度求和可知，饱和的 j 元集至多有 $t/(2qT_j)$ 个。它们在所有 j 上的权重总和至多为 $t/2$，而已选边的权重至多为 t。因此，选取过程可以继续，直到得到 t 条边。由于在此网格上 t/M、T_j 趋于无穷，整数超额可由常数吸收。

令 $\xi = s/(q-1)$。当密度至多为 $\alpha_0 = n^{-m/(q-1)}\ell^3$ 时，停止容器递归。在内部节点处，使用 H_J 和 Saxton–Thomason 参数 $\rho = S/M$，其中对于充分大的常数 K_0，有 $S = K_0 n^\xi \ell$。H_J 的平均度 $\bar d$ 至少为$c w^s M^{q-1}/L$。代入共度上界可得

$$\frac{\Delta_j(H_J)}{\bar d\, \rho^{j-1}} \le \begin{cases} CL/(S\alpha^{1/m})^{j-1}, & 2 \le j \le d, \\ CLn^{j-d}/(\alpha S^{j-1}), & d < j < q, \\ CLn^s/S^{q-1}, & j = q. \end{cases}$$

在第一个范围内，$S\alpha^{1/m}$ 至少按 n 的某个正幂增长，因为 $s \ge 2$。在第二个范围内，代入 α_0 的上界后，该行被 $CK_0^{1-j} n^{-m(q-1-j)/(q-1)} \ell^{q-j-3}$ 控制；当 $j = q-1$ 时，它也趋于零。最后一个比值至多为 C/K_0^{q-1}，且在所选网格上 $\rho = o(1)$。

应用 Saxton–Thomason [18, 定义 3.2 和推论 3。6] 如第 4 节所示。每个子节点都至少省略了 H_J 的四分之三条边，因此 Δ_1 的界使规模按固定因子递减。独立集 H 由终端容器 $\mathcal{C}$ 覆盖。共有 $O(\ell)$ 层，每个节点有 $\exp(O(S \log V))$ 个子节点。因此 $\log|\mathcal{C}| = O(n^\xi \ell^3)$，且每个终端容器的密度至多为 α_0。

对于固定的终端容器，采样标签的占据数服从二项分布，其均值至多为 $n\alpha_0 = n^\xi \ell^3$。二项分布尾界和并集界表明，当常数 B_0足够大时，以趋近于 1 的概率，每个终端容器接收的标签数都少于 $p_n = \lceil B_0 n^\xi \ell^3 \rceil$。即使单元重复，这里也会对标签计数。

截断于 $F_i = S_i \cap ([-n^2, n^2]^m \times \mathbb{R})$，如第 4 节所示。边见证仍然存在，因此任何不含相交 q-元组的子族都占据独立单元，且成员数少于 p_n。不同的体 F_i 根据深度界，至少需要 $c_d n \log\log n / \log n$ 个穿刺点。对于每个足够大的 p，取

$$n = \left\lfloor c'_{d,q} \, \frac{p^{1/\xi}}{(\log p)^{3d}} \right\rfloor$$

当 $c'_{d,q} > 0$ 足够小时。由于 $1/\xi = (q-1)/(q-d) \le d$ 且 $\ell \asymp_{d,q} \log p$，分母中的幂$3d$ 确保了 $p_n \le p$。此外 $1/\xi > 1$，因此对于所有足够大的 p，都有 $p \le n$。因此，截断族满足（p, q）性质，将这一 n 的选择代入穿刺界可得

$$\mathrm{HD}_d(p, q) \ge c_{d,q} \, \frac{p^{(q-1)/(q-d)} \log\log p}{(\log p)^{3d+1}}.$$

这证明了定理1.1中的第二个界。

人工智能披露。 该构造是在 ChatGPT 6.2 Astra、ChatGPT 6.2 Sol 和 ChatGPT 6.1 Sol 的协助下完成的。作者重写了论文的主要部分，并编辑了证明的其余部分。

参考文献

[1] N. Alon 和 D. J. Kleitman，凸集的穿刺与 Hadwiger–Debrunner (p, q)-问题，Adv. Math. 96 (1992), 103–112.[2] J. Balogh、R. Morris 和 W. Samotij，超图中的独立集，J. Amer. Math. Soc. 28 (2015), 669–709.[3] J. Balogh 和 J. Solymosi，平面上一般位置点的数量，Discrete Anal. (2018), DOI:10.19086/da.4438.[4] I. Bárány 和 G. Kalai，Helly 型问题，Bull. Amer. Math. Soc. 59(4) (2022), 471–502.[5] S. Bhore、R. Browne 和 D. W. Zheng，弱 ε-网的强下界，arXiv:2610.40982 (2026).[6] B. Bukh、J. Matoušek 和 G. Nivasch，弱 ε-网和阶梯凸性的下界，Israel J. Math. 182 (2011), 199–228.[7] W. Chen、G. Ge 和 Y. Shu，来自彩虹 Turán 数及其他方法的 Hadwiger–Debrunner 数，arXiv:2611.19281 (2026).[8] H. Hadwiger 和H. Debrunner，Übereine Variantezum Hellyschen Satz，Arch. Math. 8 (1957年), 309–313.[9] D. Haussler 和 E. Welzl，ε-网与单纯形范围查询，Disc. Comput. Geom. 2(2) (1987), 127—151.[10] C. Keller 和 S. Smorodinsky，平面上 Hadwiger–Debrunner 数的新下界，Israel J. Math. 244 (2021), 649–680.[11] C. Keller 和 S. Smorodinsky，凸集并的 (p, q)-定理的新定量界，arXiv:2608.13176 (2026).

[12] C. Keller、S. Smorodinsky 和 G. Tardos，Hadwiger–Debrunner 数的改进界，Israel J. Math. 225 (2018), no. 2, 925–945.[13] D. J. Kleitman、A. Gyárfás 和 G. Tóth，平面上每四个中任意三个相交的凸集，Combinatorica, 21(2) (2001), 221—232.[14] D. McGinnis，满足 (4, 3) 性质的平面凸集族可由九个点穿刺，Disc. Comput. Geom., 68 (2022), 860–880.[15]O. Roche-Newton，平面直线排列的一般位置问题，arXiv:2607.25742v1 (2026).[16] N. Rubin，平面弱 ε-网的改进界，J. ACM, 69(5) (2022), 32:1–35.[17] N. Rubin，高维弱 ε-网的更强界，Discrete Comput. Geom. 76 (2026), 2612–2699. DOI:10.1007/s00454-026-00878-y.[18] D. Saxton 和 A. Thomason，超图容器，Invent. Math. 201 (2015), 925–992. arXiv:1204.6595v3.[19] A. Suk 和 J. Zeng，高维点集的一般位置问题，Combin. Probab. Comput. 35(1) (2026), 134—148.[20] V. N. Vapnik 和 A. Ya. Chervonenkis，事件相对频率一致收敛到其概率，Theory of Probability and its Applications 16(2) (1971), 264—280.