独立同分布非高斯噪声下的广秩矩阵去噪

Zhuohang He、Qun Chen、Junjie Ma、Haochuan Zhang 和 Xiaojun Yuan

arXiv:2611.29179v1 [cs.IT] 22 Nov 2026

摘要——**我们研究受独立同分布非高斯噪声污染的旋转不变信号的广秩矩阵去噪。为同时利用信号谱和逐元素噪声先验，我们考虑一种正交近似消息传递（OAMP）算法，该算法在旋转不变谱估计器与逐元素去噪器之间交替运行。在每次 OAMP 迭代中，我们猜想存在一种高维高斯等价性质：逐元素模块可由一个有效加性标量高斯信道描述，而谱模块的行为则如同受到方差匹配的独立同分布高斯噪声污染。在此猜想基础上，我们为两个模块的有效噪声方差构建状态演化（SE）递推关系。数值模拟证实，状态演化预测与经验均方误差高度吻合。对于鲁棒主成分分析（PCA），我们应用该 OAMP 算法，并通过状态演化刻画其恢复相图。数值结果表明，与若干现有方法相比，OAMP 可实现更大的恢复区域。**

索引词——**近似消息传递、广秩矩阵去噪、高斯等价、稳健主成分分析、状态演化。**

I. 引言

THE 矩阵去噪的目标是从受噪声污染的观测中恢复结构化低秩矩阵。经典尖峰矩阵模型通常关注秩一或固定秩的信号分量，这一领域已在谱相变方面取得奠基性成果 [1, 2]。当信号的先验信息已知时，后续研究开发了近似消息传递（AMP）算法，并确立了贝叶斯估计的信息论极限 [3–10]。广秩状态下，矩阵的秩随其维度成比例增长，这一情形也受到了广泛关注，尤其是在矩阵分解和字典学习方面 [11–14]。在这一背景下，研究人员刻画了高斯噪声下、由非高斯独立同分布因子构成的 Gram 矩阵的信息论极限和相变 [15]。

矩阵分解旨在恢复潜在因子，而矩阵去噪则着重于估计这些因子的乘积。对于广泛秩去噪，旋转不变估计器（RIE）会对观测到的特征值或奇异值进行非线性收缩，同时保持特征向量或奇异向量不变。Bun 等人 [16]针对加性和乘性旋转不变（RI）扰动下的对称矩阵，提出了 RIE。对于高斯噪声下的矩形 RI 信号，Troiani 等人 [17] 推导出渐近最优旋转不变估计器，并刻画了其渐近均方误差。 [18, 19]针对一般双旋转不变加性噪声，提出了相关的矩形 RIE。然而，这种针对高斯噪声的最优性通常并不适用于独立同分布非高斯噪声。事实上，尽管存在谱普适性，最优去噪仍可能取决于噪声分布的具体细节 [20, 第 V-B 节]。这促使我们开发能够利用噪声先验而不仅限于谱估计的高效算法，并对其性能进行可处理的刻画。相关的消息传递算法已将 RIE 应用于矩阵感知 [21, 22]。与本文最为相关的工作 [23] 将基于次优收缩的谱去噪器与逐元素去噪器相结合，用于压缩鲁棒主成分分析。本文研究这种方法在不使用感知算子的情况下直接进行广泛秩矩阵去噪，并寻求对所得迭代进行精确的渐近刻画。

贡献。 我们将正交近似消息传递（OAMP）框架 [23–26] 应用于采用最优高斯信道 RIE 和逐元素后验均值去噪器的广义秩矩阵去噪。我们针对每个固定迭代提出高斯等价猜想：逐元素模块对应一个标量高斯信道，而谱模块则与一个具有相同

输入谱中的噪声方差和 RIE 均方误差。在这一猜想下，我们推导出状态演化（SE），并建立了其收敛至零误差的充要条件。数值结果支持这些预测，并表明其恢复区域大于若干现有的鲁棒主成分分析方法。

详细证明、实现细节及更多数值结果见附录。

II. 模型与假设

我们考虑如下矩形矩阵去噪模型

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}$。不失一般性，我们取 $m \le n$，并假设 $m/n \to \beta \in (0, 1]$ 当 m，$n \to \infty$。矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 相互独立。矩阵 $\boldsymbol{L}$ 是双旋转不变（RI）的，这意味着其分布在任意确定性正交矩阵进行左乘和右乘后保持不变

Zhuohang He 和 Xiaojun Yuan 任职于中国科学院电子科技大学无线通信全国重点实验室，中国成都 610056（电子邮箱：201911220520@std.uestc.edu.cn；xjyuan@uestc.edu.cn）。Qun Chen 和 Haochuan Zhang 任职于广东工业大学自动化学院，中国广州 510006（电子邮箱：c.prey.q@gmail.com；haochuan.zhang@gdut.edu.cn）。Junjie Ma 任职于中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学/工程计算研究所，中国北京 100864（电子邮箱：majun-jie@lsec.cc.ac.cn）。通讯作者：Qun Chen、Junjie Ma 和 Xiaojun Yuan。

。 $\boldsymbol{S}$ 的元素独立同分布，服从某个（通常为非高斯的）分布 P_{s} ，其均值为零，方差为 $p_{\mathsf{s}} := \mathbb{E}[S_{ij}^2] \in (0, \infty)$。

对于具有 $O(1)$ 个元素的 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$ ，其奇异值的量级为 $\sqrt{n}$。定义 $\nu_{L,\,n} := m^{-1}\sum_{i=1}^{m} \delta_{\lambda_i(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top/n)}$。我们假设 $_n$ 的 $\nu_{L,}$ 几乎必然弱收敛到定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的确定性概率测度 ν_L ，并且 $\limsup_{n\to\infty} \|\boldsymbol{L}\|_{\mathrm{op}}/\sqrt{n} < \infty$ 几乎必然成立。后者给出了支撑集的一致有界性，这意味着

$$\frac{1}{mn}\|\boldsymbol{L}\|_{\mathsf{F}}^2 = \int x\, \nu_{L,n}(\mathrm{d}x) \xrightarrow{\text{a.s.}} \int x\, \nu_L(\mathrm{d}x) =: p_{\mathsf{L}}.$$

我们的目标是利用逐元素先验 P_{s} 和极限谱分布 ν_L，根据 $\boldsymbol{Y}$ 估计 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$。

III. OAMP算法与状态演化

我们考虑一种双模块OAMP迭代，该迭代遵循正交化原则 [24–27]，并采用 [23] 中的外信息构造。它交替对 $\boldsymbol{S}$ 进行逐元素去噪，并直接根据 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ 对 $\boldsymbol{L}$ 进行谱去噪，无需感知矩阵。在下文的高斯等价猜想成立的条件下，我们通过状态演化（SE）递归刻画其渐近均方误差。

A. 双模块*OAMP*迭代

从 $\boldsymbol{L}^1 := \boldsymbol{0}$ 开始，OAMP迭代依次更新逐元素模块和谱模块，得到 $t \in \{1, \dots, T\}$:

$$\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{L}^t, \quad \boldsymbol{S}^t = \frac{\hat{F}_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t) - a_{\mathsf{s}}^t \boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t}{1 - a_{\mathsf{s}}^t}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}^t,\, \boldsymbol{L}^{t+1} = \frac{\hat{F}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t) - a_{\mathsf{L}}^t \boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t}{1 - a_{\mathsf{L}}^t}. \tag{3}$$

ˆˆ这里， $F_{\mathsf{s}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 逐元素作用，而 $F_{\mathsf{L}}: \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ 则将标量收缩函数 f_{L} 应用于 $\boldsymbol{R}$ 的奇异值；给定薄奇异值分解 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)\boldsymbol{V}^\top$,

$$\hat{F}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{U}\,\mathrm{diag}\big(f_{\mathsf{L}}(\sigma_1), \dots, f_{\mathsf{L}}(\sigma_m)\big)\boldsymbol{V}^\top.$$

经过 T 次迭代后，算法输出去噪估计 $\hat{}\boldsymbol{S}^T := \hat{}F_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^T)$ 和 $\hat{}\boldsymbol{L}^{T+1} := \hat{}F_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^T)$。

接下来，我们通过辅助高斯噪声模型定义 $\hat{}F_{\mathsf{s}}$, $\hat{}F_{\mathsf{L}}$ 和 a_{s}^t, a_{L}^t ，其中对 P_{s} 选用标量最小均方误差估计器，对 ν_L 选用最优旋转不变估计器 [17] 。正如第 III-C 节所形式化描述的，这些辅助模型刻画了模块输入 $\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t$ 和 $\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t$ 的猜想渐近行为。

1）逐元素均方误差估计器：对于 $\tau > 0$，定义辅助高斯观测量 $\mathsf{R}_\tau := \mathsf{S} + \sqrt{\tau}\mathsf{Z}$，其中 $\mathsf{S} \sim P_{\mathsf{s}}$ 和 $\mathsf{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 相互独立。标量最小均方误差估计器及其均方误差为

$$\hat{F}_{\mathsf{s}}(r, \tau) := \mathbb{E}[\mathsf{S} \mid \mathsf{R}_\tau = r], \tag{4}$$

$$\mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau) := \mathbb{E}\Big[\big(\mathsf{S} - \hat{F}_{\mathsf{s}}(\mathsf{R}_\tau, \tau)\big)^2\Big]. \tag{5}$$

定义 $a_{\mathsf{s}}(\tau) := \mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau)/\tau$。在第 t 次迭代中，给定第 III-C 节所定义的 τ_{L}^t，我们记 $\hat{}F_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t) := \hat{}F_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t, \tau_{\mathsf{L}}^t)$（逐元素应用），并设 $a_{\mathsf{s}}^t := a_{\mathsf{s}}(\tau_{\mathsf{L}}^t)$。

2）谱*RIE*：对于 $\tau > 0$，定义辅助高斯观测 $\mathbf{R}_\tau := \boldsymbol{L} + \sqrt{\tau}\mathbf{G}$，其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的元素独立同分布，服从 $(0, 1)$，且与 $\boldsymbol{L}$ 独立。令 μ_τ 表示归一化奇异值 $\sigma_i(\mathbf{R}_\tau)/\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$, $i \in [m]$的极限经验分布。假设 μ_τ 在 $\mathbb{R}_+$ 上存在密度 ρ_τ，其对称化 $\widehat{\mu}_\tau$ 的密度为 $\widehat{\rho}_\tau(x) := \frac{1}{2}\rho_\tau(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$，其未归一化希尔伯特变换为

$$\mathcal{H}_\tau(s) := \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\rho}_\tau(x)}{s - x}\,\mathrm{d}x, \qquad s > 0,$$

其中 p.v. 表示柯西主值。在我们的记号中， [17, Result 1] 的最优收缩函数为

$$\hat{f}_{\beta,\tau}(s) := s - \frac{\tau(1-\beta)}{p_{\mathsf{L}} s} - \frac{2\beta\tau}{p_{\mathsf{L}}}\,\mathcal{H}_\tau(s). \tag{6}$$

给定 $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其薄奇异值分解为 $\boldsymbol{U}\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)\boldsymbol{V}^\top$，且归一化奇异值为 $s_i := \sigma_i/\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$，定义

$$\begin{aligned}&\mathrm{RIE}_{\beta,\tau}(\boldsymbol{R})\\ &:= \sqrt{np_{\mathsf{L}}}\,\boldsymbol{U}\,\mathrm{diag}\big(\hat{f}_{\beta,\tau}(s_1), \dots, \hat{f}_{\beta,\tau}(s_m)\big)\boldsymbol{V}^\top.\end{aligned} \tag{7}$$

对于此高斯信道，RIE 渐近达到 MMSE 最优，其均方误差由 [17,Results 1 和 2] 给出

$$\begin{aligned}\mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau) &:= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{mn}\mathbb{E}\,\|\boldsymbol{L} - \mathrm{RIE}_{\beta,\tau}(\mathbf{R}_\tau)\|_{\mathsf{F}}^2\\ &= \tau - \frac{\tau^2}{p_{\mathsf{L}}}\int_{\mathbb{R}_+}\left[\frac{(1-\beta)^2}{s^2} + \frac{\pi^2\beta^2\rho_\tau(s)^2}{3}\right]\mu_\tau(\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{8}$$

对于 $\tau > 0$，定义谱均方误差比 $a_{\mathsf{L}}(\tau) := \mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau)/\tau$，其解析性质总结如下。

引理1（谱均方误差比）。函数 a_{L} 在$(0,\infty)$上连续且严格递减，且 $0 < a_{\mathsf{L}}(\tau) \le p_{\mathsf{L}}/(p_{\mathsf{L}}+\tau) < 1$，并且 $\lim_{\tau\to\infty} a_{\mathsf{L}}(\tau) = 0$。此外，$d_{\mathsf{L}} := \lim_{\tau\downarrow 0} a_{\mathsf{L}}(\tau)$ 在 $0, 1]$ 中存在；令 $a_{\mathsf{L}}(0) := d_{\mathsf{L}}$，则 a_{L} 可扩展为定义在 $[0,\infty)$ 上的连续且严格递减函数。

引理 1 的证明见附录 B。在第 t 次迭代中，按照第 III-C 节指定的 τ_{s}^t，我们设 $\hat{}F_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t) := \mathrm{RIE}_{\beta,\,\tau_{\mathsf{s}}^t}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t)$，并令 $a_{\mathsf{L}}^t := a_{\mathsf{L}}(\tau_{\mathsf{s}}^t)$。

B. 正交性性质

式 (2)–(3) 中的更新遵循 [23, 25], 的构造，通过减去按比例缩放的输入，使更新无散度（或为外信息）。对于逐元素后验均值去噪器，校正输出误差与其辅助高斯信道上的输入噪声正交，这与标准 OAMP [25, 26] 中的情况相同。

对于谱模块，设在高斯信道 $\mathbf{R}_\tau = \boldsymbol{L} + \sqrt{\tau}\mathbf{G}$ 上，并定义

$$\mathbf{L}_\tau := \frac{\hat{F}_{\mathsf{L}}(\mathbf{R}_\tau) - a_{\mathsf{L}}(\tau)\mathbf{R}_\tau}{1 - a_{\mathsf{L}}(\tau)}.$$

那么（见附录 A），

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{mn}\,\mathbb{E}\langle \mathbf{L}_\tau, \mathbf{G}\rangle_{\mathsf{F}} = 0, \tag{9}$$

其中 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle_{\mathsf{F}} := \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B})$。由于 $\boldsymbol{L}$ 与$\mathbf{G}$相互独立，因此输出误差 $\mathbf{L}_\tau - \boldsymbol{L}$ 与输入噪声 $\mathbf{R}_\tau - \boldsymbol{L} = \sqrt{\tau}\,\mathbf{G}$同样渐近正交。

C. 状态演化与高斯等价猜想

从 $\tau_{\mathsf{L}}^1 := p_{\mathsf{L}}$ 开始，将状态演化序列定义为 (SE)

$$\tau_{\mathsf{s}}^t = \Phi_{\mathsf{s}}(\tau_{\mathsf{L}}^t), \qquad \tau_{\mathsf{L}}^{t+1} = \Phi_{\mathsf{L}}(\tau_{\mathsf{s}}^t), \tag{10}$$

其中，对于 $\bullet \in \{\mathsf{s}, \mathsf{L}\}$，$\Phi_\bullet(v) := v\mathsf{m}_\bullet(v)/(v - \mathsf{m}_\bullet(v))$，且 m_s 和 m_L 由式（5）和式（8）给出。

猜想1 (高斯等价)。设 $(\tau^t{}_\mathsf{s}\ \tau^{t+1}{}_\mathsf{L})_{t\ge1}$ 由式 (10) 给出，并用 W_2 表示 2-*Wasserstein*距离。对于任意固定的 $t \ge 1$，若 $\tau^t{}_\mathsf{L}\ \tau_{\mathsf{s}}^t > 0$，且信号模型满足适当的正则性条件，则当 $m, n \to \infty$ 满足 $m/n \to \beta$ 时，以下结论依概率成立：

(i) 设 S 和 R_τ 如第 *III-A* 节所定义，令 $\mathsf{R}_{\mathsf{s}}^t := \mathsf{R}_{\tau^t}$，且 $\mathsf{S}^t := (1 - a_{\mathsf{s}}^t)^{-1}\big(\hat{}F_{\mathsf{s}}(\mathsf{R}_{\mathsf{s}}^t) - a_{\mathsf{s}}^t\mathsf{R}_{\mathsf{s}}^t\big)$，并用 $\mathcal{L}$ 表示它们与 S 的联合分布$(\mathsf{S}, \mathsf{R}_{\mathsf{s}}^t, \mathsf{S}^t)$。则

$$W_2\left(\frac{1}{mn}\sum_{i,j}\delta_{(S_{ij}, R_{\mathsf{s},ij}^t, S_{ij}^t)},\ \mathcal{L}(\mathsf{S}, \mathsf{R}_{\mathsf{s}}^t, \mathsf{S}^t)\right) \to 0. \tag{11}$$

(ii) 对于 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，令 $\mu_n(\boldsymbol{M}) := m^{-1}\sum_{i=1}^m \delta_{\sigma_i(\boldsymbol{M})/\sqrt{n}}$ 表示其归一化奇异值的经验分布，其中 $\sigma_1(\boldsymbol{M}) \ge \cdots \ge \sigma_m(\boldsymbol{M})$（假设 $m \le n$）。利用第三节 *A-2* 中定义的$\mathbf{R}_\tau$，

$$W_2\big(\mu_n(\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t),\ \mu_n(\mathbf{R}_{\tau_{\mathsf{s}}^t})\big) \to 0, \tag{12}$$

且去噪器均方误差满足

$$\frac{1}{mn}\big\|\boldsymbol{L} - \hat{F}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t)\big\|_{\mathsf{F}}^2 \to \mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau_{\mathsf{s}}^t). \tag{13}$$

备注 1。*(i)* 用于建立 *AMP*状态演化的高斯条件化论证 *[28]* 在此处并不直接适用。*(ii)* 我们仅针对逐元素去噪器和谱去噪器的贝叶斯最优选择陈述状态演化，因为这类选择可以实现简化（例如，谱去噪器的输入中不含常数矩阵）。数值结果表明，类似的状态演化更普遍地成立，但本文不予讨论。

IV. 通过状态演化的恢复条件

在猜想1成立的条件下，$\boldsymbol{L}$ 和$\boldsymbol{S}$的精确渐近恢复对应于：当 $t \to \infty$满足式 (10) 时，$\tau^t{}_{\mathsf{s}}\ \tau_{\mathsf{L}}^t \to 0$。这是否成立取决于极限谱分布 ν_L 和逐元素先验 P_{s}。令第二节中定义的 $p_{\mathsf{L}} > 0$ 和 $p_{\mathsf{s}} > 0$，我们通过写成 $\widetilde{\boldsymbol{L}} = \sqrt{p_{\mathsf{L}}}\,\boldsymbol{L}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \sqrt{p_{\mathsf{s}}}\,\boldsymbol{S}$来提出功率尺度，从而 $\boldsymbol{S}$ 的各个元素服从零均值单位方差先验 $\widetilde{P}_{\mathsf{s}}$，且 $\widetilde{\boldsymbol{L}}\widetilde{\boldsymbol{L}}^\top/n$ 具有满足 $\int x\,\widetilde{\nu}_L(\mathrm{d}x) = 1$的极限谱分布 $\widetilde{\nu}_L$。将状态演化变量按 p_{L}归一化后，精确恢复通过功率比 $\zeta := p_{\mathsf{s}}/p_{\mathsf{L}} > 0$取决于 $(p_{\mathsf{L}}, p_{\mathsf{s}})$，同时还取决于编码在 $\widetilde{}$中的结构参数（例如秩和稀疏度）以及 $\widetilde{\nu}_L$ 和 P_{s}。

我们假设有着都在这个分量。具体而言，我们将逐元素先验分解为单位方差的

$$\widetilde{P}_{\mathsf{s}} = (1 - \rho_{\mathsf{s}})P_{\mathsf{s,d}} + \rho_{\mathsf{s}}P_{\mathsf{s,c}}, \tag{14}$$

其中 $P_{\mathsf{s,\,d}}$ 和 $P_{\mathsf{s,\,c}}$ 分别是离散概率测度和绝对连续概率测度，且 $\rho_{\mathsf{s}} \in [0, 1]$。类似地，我们将 $\mathbb{R}_+$ 上的归一化极限谱分布律分解为

$$\widetilde{\nu}_L = w_0\delta_0 + \sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi\delta_\xi + \nu_{L,\mathrm{c}}, \tag{15}$$

其中 $w_0 := \widetilde{\nu}_L(\{0\})$，$\mathcal{A} := \{\xi > 0 : \widetilde{\nu}_L(\{\xi\}) > 0\}$ 是权重为 $w_\xi := \widetilde{\nu}_L(\{\xi\})$ 的正原子集合，而 $\nu_{L,\mathrm{c}}$是 $\widetilde{\nu}_L$ 的绝对连续部分。

对于 $\bullet \in \{\mathrm{s},\mathrm{L}\}$ 和 $x > 0$，定义

$$\begin{aligned} \bar{\mathsf{m}}_\bullet(x) &:= \frac{\mathsf{m}_\bullet(xp_\bullet)}{p_\bullet}, \quad \bar{a}_\bullet(x) := \frac{\bar{\mathsf{m}}_\bullet(x)}{x}, \\ \bar{\Psi}_\bullet(x) &:= \frac{x\bar{a}_\bullet(x)}{1 - \bar{a}_\bullet(x)} = \frac{\Phi_\bullet(p_\bullet x)}{p_\bullet}. \end{aligned} \tag{16}$$

$\bar{}$等价地，$\bar{}\mathsf{m}_\bullet(x)$、$\bar{a}_\bullet(x)$ 和 $\Psi_\bullet(x)$分别是单位功率模型（P_{s} 或 $\widetilde{\nu}_L$）在输入噪声方差 x 下对应于 $\widetilde{}\mathsf{m}_\bullet$、$a_\bullet$ 和 $\Phi_\bullet$ 的量。

引理 *2*（归一化均方误差函数的性质）。对于$\bar{}$每个 $\bullet \in \{L, s\}$，函数 $\Psi_\bullet$ 在 $(0, \infty)$ 上连续且单调不减，并且当 $x > 0$ 时 $0 < \Psi_\bullet(x) \le 1$。此外，$\bar{a}_\bullet$ 在 $(0, \infty)$ 上连续，满足当 $x > 0$ 时 $0 < \bar{a}_\bullet(x) \le (1 + x)^{-1}$，并且当 $x \to \infty$ 时趋于零。如果 $d_\bullet := \lim_{x\downarrow0}\bar{a}_\bullet(x)$ 存在且满足 $d_\bullet < 1$，那么当 $x \downarrow 0$ 时，$\bar{\Psi}_\bullet(x) = \frac{d_\bullet}{1-d_\bullet}x + o(x)$。在此情况下，$\Psi_\bullet$ 可连续延拓到$\bar{}$原点，并且 $\Psi_\bullet(0) = 0$。

$\widetilde{}$ d_{s} 是 P_{s} [29]的最小均方误差维数，d_{L} 则是其谱对应量，我们称之为 $\widetilde{\nu}_L$的谱 *MMSE* 维数。定义 $D := d_{\mathsf{L}} + d_{\mathsf{s}}$，以及 $\Delta_{\mathsf{s}} := \sup_{x>0}\bar{a}_{\mathsf{s}}(x) - d_{\mathsf{s}}$。

定理 1 (状态演化恢复区间)。固定 $\beta \in (0, 1]$，，并设$\widetilde{\nu}_L$ 和 P_{s} 满足引理 *1* 和引理 *2* 的假设，其中当 $\Delta_{\mathsf{s}} > 0$时，$0 < d_{\mathsf{L}} < 1$、$0 \le d_{\mathsf{s}} < 1$和 $D \ne 1$成立。对于以 $\tau_{\mathsf{L}}^1 = p_{\mathsf{L}}$为初值的 *SE* 递推(10)，当 $t \to \infty$时，我们有$(\tau^t{}_{\mathsf{s}}\ \tau_{\mathsf{L}}^t) \to (0,\ 0)$，当且仅当 $\zeta > \zeta_{\mathsf{c}}$，其中

$$\zeta_{\mathsf{c}} := \sup_{x>0}\frac{\bar{a}_{\mathsf{L}}^{-1}\big(1 - \bar{a}_{\mathsf{s}}(x)\big)}{\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x)} \in [0, \infty], \tag{17}$$

其中 $\bar{a}^{-1}{}_{\mathsf{L}}$：$[0, 1] \to [0, \infty]$通过 $\bar{a}^{-1}{}_{\mathsf{L}}(y) := 0$将 $\bar{a}_{\mathsf{L}}$在$(0,\ d_{\mathsf{L}})$上的逆函数延拓，其中 $y \in [d_{\mathsf{L}}, 1]$ 时 $\bar{a}^{-1}$，且$_{\mathsf{L}}(0) := \infty$。此外，还会出现三种情形：

1) 无恢复（$D > 1$）：$\zeta_{\mathsf{c}} = \infty$，因此对于任意 $\zeta > 0$，*$(\tau^t{}_{\mathsf{s}}\ \tau_{\mathsf{L}}^t)$* 都不会收敛到 *(0, 0)*；此外，*(0, 0)* 局部不稳定。

2) 依赖功率的恢复（$D < 1 < D + \Delta_{\mathsf{s}}$）：$\zeta_{\mathsf{c}} \in (0, \infty)$，且上确界在 *(17)* 中取到。此时，对于任意 $\zeta > 0$，*(0, 0)* 都是局部稳定的；而只要满足 $0 < \zeta \le \zeta_{\mathsf{c}}$，*$(\tau^t{}_{\mathsf{s}}\ \tau_{\mathsf{L}}^t)$* 就会收敛到一个非零不动点。*3)* 全功率恢复（$D + \Delta_{\mathsf{s}} \le 1$）：$\zeta_{\mathsf{c}} = 0$，因此对于任意 $\zeta > 0$，*$(\tau^t{}_{\mathsf{s}}\ \tau_{\mathsf{L}}^t) \to (0, 0)$*。

引理 2 和定理 1 的证明分别见附录 B-D 和 D-B。

注 2. 在依赖功率的情形下，$\zeta = p_{\mathsf{s}}/p_{\mathsf{L}} > \zeta_{\mathsf{c}}$表明，提高非高斯

噪声的相对功率 $\boldsymbol{S}$ 可以实现精确恢复。这看似有些违背直觉，但在标量非高斯信道中也观察到了类似现象：较高的噪声功率可以降低均方误差 *[29]*。

V. 数值结果

我们在鲁棒主成分分析问题上评估所提出的算法，其中 $\boldsymbol{L}$ 是低秩的，$\boldsymbol{S}$ 是稀疏的。我们生成 $\boldsymbol{L}=\sqrt{p_{\mathsf{L}}/r}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 和 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 的条目均为独立同分布的标准高斯分布，且 $\gamma:=r/m$ 表示归一化秩。$\boldsymbol{S}$ 的条目独立地取自伯努利–高斯先验 $S_{ij}\sim(1-\rho)\delta_0+\rho\mathcal{N}(0,\ p_{\mathsf{s}}/\rho)$，其中 $\rho\in(0,\ 1)$表示稀疏率。在实验中，逐元素去噪器均方误差通过对各坐标的后验方差取平均来估计，而谱去噪器均方误差则使用Stein无偏风险估计（SURE） [23]进行估计。

猜想的数值验证。在图1中，我们绘制归一化均方误差 $e_{\mathsf{s}}^t:=\|\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}^t\|_{\mathsf{F}}^2/(mnp_{\mathsf{s}})$和$e^{t+1}{}_{\mathsf{L}}:=\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{t+1}\|_{\mathsf{F}}^2/(mnp_{\mathsf{L}})$，并展示其状态演化（SE）预测。我们设置 $m=n=2000$ ($\beta=1$)、 $r=600$ (γ =0.3)、 $\rho=0.15$和 $p_{\mathsf{L}}=p_{\mathsf{s}}=1$，将算法初始化为 $\boldsymbol{L}^1=\boldsymbol{0}$ 和 $\widehat{\tau}_{\mathsf{L}}^1=p_{\mathsf{L}}$，并对10次独立试验的经验均方误差取平均。如图所示，状态演化预测在各次迭代中都与经验均方误差高度吻合。其他数值测试也证实，经验有效噪声分布与其高斯参考分布高度一致，进一步支持猜想1。

恢复相图。 图2绘制了（ρ，γ）平面中的经验恢复相图。在该实验中，我们设定 $m=n=2000$ 以及 $p_{\mathsf{L}}=p_{\mathsf{s}}=1$（$\zeta=1$、 $\beta=1$）。对于本实验所使用的信号先验， $d_{\mathsf{s}}=\rho$ 以及$d_{\mathsf{L}}=\gamma(1+\beta-\beta\gamma)$。请注意，对于固定的归一化先验，定理 1通过 $\zeta>\zeta_{\mathsf{c}}$ 刻画恢复。对于固定的$\zeta=1$，根据 $\zeta_{\mathsf{c}}=\zeta_{\mathsf{c}}$（$\rho$，$\gamma$）的依赖关系，该条件可以转换为（$\rho$，$\gamma$）中的区域。具体而言，虚线曲线（$2\gamma-\gamma^2+\rho+\Delta_{\mathsf{s}}=1$）标示了全功率恢复边界，在该边界以下 $\zeta_{\mathsf{c}}(\rho,\ \gamma)\ =0$；点线曲线（$2\gamma-\gamma^2+\rho=1$）标示了局部稳定性边界，在该边界以上 ζ_{c}（ρ，γ）$=\infty$。在这两条曲线之间，恢复取决于功率，而条件 $\zeta_{\mathsf{c}}(\rho,\ \gamma)\ =1$ 定义了在 $\zeta=1$处分隔成功与失败的实线曲线。

在图2中，我们还将 OAMP 与采用非精确增广拉格朗日乘子法的主成分追踪（PCP/IALM） [30, 31],加速交替投影（Ac-cAltProj） [32], 以及 BiG-AMP [33]进行了比较。与这三种基线方法相比，OAMP 实现了更大的恢复区域。

在图3中，我们绘制了四种（ρ，γ）配置下重构均方误差随ζ 变化的曲线（这些配置在图2中标记为 A、B、C 和 D）。对于 A，OAMP 在所有测试的 ζ 下都能恢复信号；对于 B 和 C，在 ζ 足够大时能够恢复信号；对于 D，在所有测试的 ζ 下均无法恢复信号，这与定理 1一致。

VI. 结论

我们研究了一个用于在独立同分布非高斯噪声下直接进行高秩矩阵去噪的 OAMP 迭代，并针对其渐近行为提出了高斯等价猜想。相应的状态演化给出了收敛条件和恢复条件

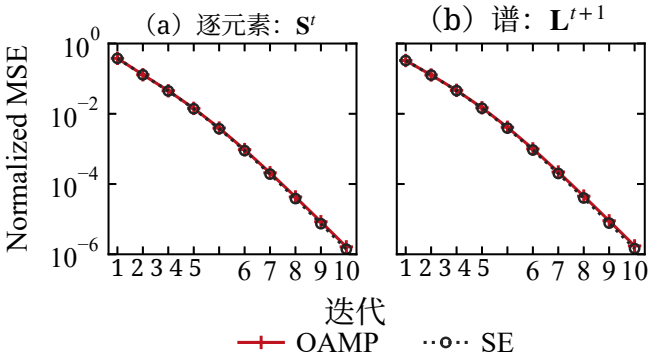

图1. OAMP 的经验归一化均方误差与状态演化预测值的对比。

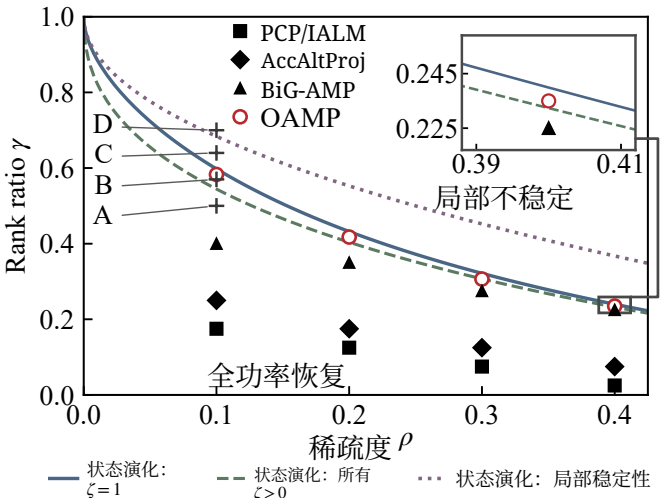

图2. 恢复相图（$\zeta=1$，$\beta=1$）。

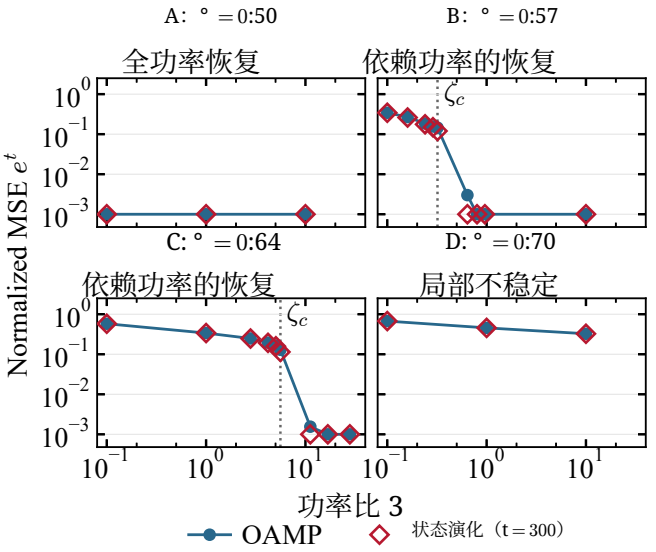

图3. 点 A–D 处两个归一化外信息均方误差的最大值 e^t 随 ζ 的变化（$\rho=0.1$；低于 10^{-3} 的值截断为 10^{-3}）。

数值结果为这一猜想提供了支持。证明该猜想，并确定在原始非高斯去噪模型中，迭代是否以及在哪些条件下能够达到贝叶斯最优性能，仍是尚待解决的问题。

附录 A 去噪器与均方误差的推导

本附录汇总了两种去噪器的推导及由此得到的均方误差传递函数。此外，本附录还介绍了第 V 节图 1 和图 2 的实现，并展示了图 4–6 中有效噪声与输入频谱的比较。

A. 谱记号与扩展

ˆ我们使用第 III 节中的 μ_τ、 $\widehat{\mu}_\tau$、 ρ_τ、 $\mathcal{H}_\tau$ 和 $f_{\beta,\,\tau}$。令 ν为当 $x \sim \widetilde{\nu}_L$时 $\sqrt{x}$ 的分布律，并令 $\widehat{\nu}$ 为其对称化。因此， ν的支集包含于某个 $M < \infty$和$\int s^2\nu(\mathrm{d}s) = 1$所确定的 $[0, M]$上。在 $\operatorname{supp}\mu_\tau \cap (0,\ \infty)$ 上，(6) 表示为

$$\hat{f}_{\beta,\tau}(s) = s - \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}}\left[\frac{1-\beta}{s} + 2\beta\mathcal{H}_\tau(s)\right]. \tag{18}$$

对于每个 $\tau > 0$， [34,Thm. 2.1], [35, Prop. 2.3], 和 [36, Cor. 1] 中的边界值结果给出了正谱支集上的连续性；当支集延伸至零时，取值为 $f_{\beta,\,\tau}(0) = 0$ 。结合引理 3，它们给出了在 $[0,\infty)$ 上有界、连续、非递减的扩展。

B. 校正与缩放系数

1）一般去噪器：对于辅助信道 $\mathbf{R}_\tau = \boldsymbol{L} + \sqrt{\tau}\,\mathbf{G}$上的去噪器 F ，我们构造无散估计[23]

$$\widetilde{F}(\mathbf{R}_\tau) = c_F\big[F(\mathbf{R}_\tau) - a_F\mathbf{R}_\tau\big].$$

我们选择 a_F，使得 $\mathbb{E}\langle F(\mathbf{R}_\tau) - a_F\mathbf{R}_\tau,\ \mathbf{G}\rangle_{\mathsf{F}} = 0$。由于$\mathbb{E}\langle \mathbf{R}_\tau,\ \mathbf{G}\rangle_{\mathsf{F}} = mn\sqrt{\tau}$，可得

$$a_F = \frac{\mathbb{E}\langle F(\mathbf{R}_\tau), \mathbf{G}\rangle_{\mathsf{F}}}{mn\sqrt{\tau}}. \tag{19}$$

固定 a_F，我们最小化二次均方误差 $\mathbb{E}\|\widetilde{F}(\mathbf{R}_\tau) - \boldsymbol{L}\|_{\mathsf{F}}^2$，关于 c_F 求得

$$c_F^\star = \frac{\mathbb{E}\langle F(\mathbf{R}_\tau) - a_F\mathbf{R}_\tau, \mathbf{R}_\tau\rangle_{\mathsf{F}}}{\mathbb{E}\|F(\mathbf{R}_\tau) - a_F\mathbf{R}_\tau\|_{\mathsf{F}}^2}. \tag{20}$$

2）后验均值去噪器：假设 $F(\mathbf{R}_\tau) = \mathbb{E}[\boldsymbol{L} \mid \mathbf{R}_\tau]$，并令

$$\varepsilon := \frac{1}{mn}\mathbb{E}\|F(\mathbf{R}_\tau) - \boldsymbol{L}\|_{\mathsf{F}}^2.$$

后验均值估计器的正交性给出

$$\mathbb{E}\langle F(\mathbf{R}_\tau), \sqrt{\tau}\,\mathbf{G}\rangle_{\mathsf{F}} = mn\varepsilon.$$

因此 $a_F = \varepsilon/\tau$。后验正交性和施加的噪声正交性还给出

$$\mathbb{E}\|F(\mathbf{R}_\tau) - a_F\mathbf{R}_\tau\|_{\mathsf{F}}^2 = (1 - a_F)\mathbb{E}\langle F(\mathbf{R}_\tau) - a_F\mathbf{R}_\tau, \mathbf{R}_\tau\rangle_{\mathsf{F}}.$$

一个最优缩放及其得到的每个条目的均方误差为

$$c_F = \frac{1}{1-a_F}, \qquad \Phi_F(\tau) = \frac{\varepsilon}{1-a_F} = \frac{\tau\varepsilon}{\tau-\varepsilon}. \tag{21}$$

3）应用于 *RIE*：参考文献 [17,结果 2] 表明，RIE 渐近地达到均方误差：

$$\mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau) = p_{\mathsf{L}}\left(1 - \int \hat{f}_{\beta,\tau}(s)^2\,\mu_\tau(\mathrm{d}s)\right). \tag{22}$$

此外， $\int s^2\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = 1 + \tau/p_{\mathsf{L}}$和 $\int s\mathcal{H}_\tau(s)\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = 1/2$。因此，由 (18) 得到

$$\int s\hat{f}_{\beta,\tau}(s)\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = 1. \tag{23}$$

此外，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}\langle \mathrm{RIE}_{\beta,\tau}(\mathbf{R}_\tau), \mathbf{R}_\tau\rangle_{\mathsf{F}}}{mn} &\longrightarrow p_{\mathsf{L}},\\
\frac{\mathbb{E}\langle \mathrm{RIE}_{\beta,\tau}(\mathbf{R}_\tau), \boldsymbol{L}\rangle_{\mathsf{F}}}{mn} &\longrightarrow p_{\mathsf{L}} - \mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau),\\
\frac{\mathbb{E}\|\,\mathrm{RIE}_{\beta,\tau}(\mathbf{R}_\tau)\|_{\mathsf{F}}^2}{mn} &\longrightarrow p_{\mathsf{L}} - \mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau).
\end{aligned} \tag{24}$$

这些极限满足与后验均值相同的矩恒等式。因此，(21) 中的上述计算给出了极限均方误差的校正系数和最优缩放：

$$a_{\mathsf{L}}(\tau) = \frac{\mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau)}{\tau}, \tag{25}$$

$$c_{\mathsf{L}}(\tau) = \frac{1}{1 - a_{\mathsf{L}}(\tau)}, \qquad \Phi_{\mathsf{L}}(\tau) = \frac{\tau\mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau)}{\tau - \mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau)}. \tag{26}$$

引理1保证 $a_{\mathsf{L}} < 1$。 (19) 中定义的正交性也给出 (9)。

C. 数值实现

1) 谱去噪：我们使用第五节中已知的高斯乘积谱。其含噪变换满足一个代数方程 [17, 第 3.3 节和附录 F]。对于 $\tau > 0$，定义

$$g_\tau(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\mu}_\tau(\mathrm{d}x)}{z - x}.$$

记 $d := 1 - \beta + \beta z g_\tau(z)$。在我们的归一化下， g_τ满足

$$\begin{aligned}
0 = d\left(z^2 - \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}}d\right)g_\tau(z)^2 + \gamma z^2\\
- z\left[\gamma z^2 + \left(1 - \gamma - \frac{\gamma\tau}{p_{\mathsf{L}}}\right)d\right]g_\tau(z).
\end{aligned} \tag{27}$$

我们取在无穷远处满足 $z g_\tau(z) \to 1$ 且当 $\operatorname{Im} z > 0$时 $\operatorname{Im} g_\tau(z) < 0$ 的解析分支。此外， $\mathcal{H}_\tau(s) = \operatorname{Re} g_\tau(s + \mathrm{i}0)$，且 $\rho_\tau(s) = -(2/\pi)\operatorname{Im} g_\tau(s + \mathrm{i}0)$。

在我们的实现中，我们使用 $\eta = 10^{-8}\sqrt{\widehat{\tau}}/p_{\mathsf{L}}$ ，并将最优收缩函数估计为

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{\beta,\widehat{\tau},\eta}(s) = \Bigg[s - \frac{\widehat{\tau}}{p_{\mathsf{L}}}\Bigg\{(1-\beta)\frac{s}{s^2+\eta^2}\\
+ 2\beta\operatorname{Re} g_{\widehat{\tau}}(s + \mathrm{i}\eta)\Bigg\}\Bigg]_+.
\end{aligned} \tag{28}$$

ˆ此处 $[x]_+ =$ 最大值为$\{x, 0\}$。将 $f_{\beta,\widehat{\tau},\ }^{\ \eta}$ 应用于归一化的ˆ奇异值，并通过 $\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$ 重新缩放，定义 $F_{\mathsf{L},\eta}$。

ˆ 对于 $f = f_{\beta,\hat{\tau},\eta}$ 和 $s_i = \sigma_i(\boldsymbol{R})/\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$, RIE 的散度为 [37]

$$\operatorname{div} \hat{F}_{\mathsf{L},\eta}(\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{m} \left[f'(s_i) + (n-m)\frac{f(s_i)}{s_i} \right] + 2\sum_{i<j} \frac{s_i f(s_i) - s_j f(s_j)}{s_i^2 - s_j^2}. \tag{29}$$

经验散度和通过 SURE 得到的均方误差估计为[37]

$$\widehat{a}_{\mathrm{div},\eta} = \frac{\operatorname{div} \hat{F}_{\mathsf{L},\eta}(\boldsymbol{R})}{mn},$$
$$\widehat{\mathsf{m}}_{\mathsf{L},\eta} = \frac{\|\hat{F}_{\mathsf{L},\eta}(\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R}\|_{\mathsf{F}}^2}{mn} + 2\widehat{\tau}\widehat{a}_{\mathrm{div},\eta} - \widehat{\tau}. \tag{30}$$

2) 系数和方差更新：每个模块接收来自前一个模块的$\widehat{\tau}$。利用其均方误差估计 ˆm，我们设定

$$a_{\mathrm{used}} = \frac{\widehat{\mathsf{m}}}{\widehat{\tau}}, \qquad c_{\mathrm{used}} = \frac{1}{1-a_{\mathrm{used}}}, \qquad \widehat{\tau}_{\mathrm{out}} = \frac{\widehat{\mathsf{m}}}{1-a_{\mathrm{used}}}.$$

这些量用于 OAMP 更新。

3) 相图实验的细节：对于图2，我们使用第五节中指定的维度和功率。PCP/IALM 使用 $\lambda = 1/\sqrt{n}$。AccAltProj 使用真实秩，并采用 0.7 的阈值衰减。BiG-AMP 使用匹配的高斯因子和伯努利–高斯分布先验，阻尼参数为 0.25。

对于比较的三种方法中的每一种以及每个 $\rho \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$，我们报告所测试的最大 γ，在该值下，10 个独立实例中的中位数$_{1\le j\le 10}(\min_{1\le t\le 300} e_j^t) < 10^{-3}$，其中 e_j^t 表示实例 j在第 t次迭代时两个归一化均方误差的最大值。

在 $\rho = 0.4$处，BiG-AMP 在 γ =0.225 时恢复了全部 10 个实例。我们还测试了 $\gamma = 0.235$ （$r = 470$），该值略低于等功率状态演化边界 $\gamma \approx 0.2399$。对于相同的 10 对矩阵，OAMP 在每次试验中均能在 64 次迭代内恢复两个分量；而 BiG-AMP 在 300 次迭代内的任何一次试验中都未能同时恢复。

4）高斯等价猜想：对于图 1 的设置和初始化，定义

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathsf{s}}^t := \frac{\boldsymbol{R}_{\mathsf{s}}^t - \boldsymbol{S}}{\sqrt{\widehat{\tau}_{\mathsf{L}}^t}}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathsf{L}}^t := \frac{\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t - \boldsymbol{L}}{\sqrt{\widehat{\tau}_{\mathsf{s}}^t}}.$$

在 $t = 10$ 中，逐元素噪声分位数与 $\mathcal{N}(0,1)$ 的分位数高度吻合，但极端尾部除外（图 4）。 $\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t/\sqrt{n}$ 的奇异值分布也与$\mathbf{G}/\sqrt{n}$ 的奇异值分布高度吻合（图 5）。最后，图 6 将 $\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t/\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$的输入谱与 $\rho_{\widehat{\tau}_{\mathsf{s}}^t}$ 进行了比较。在图 5 和图 6 中，经验谱都与预测结果高度吻合，从而支持猜想 1(ii) 中的高斯等价现象。

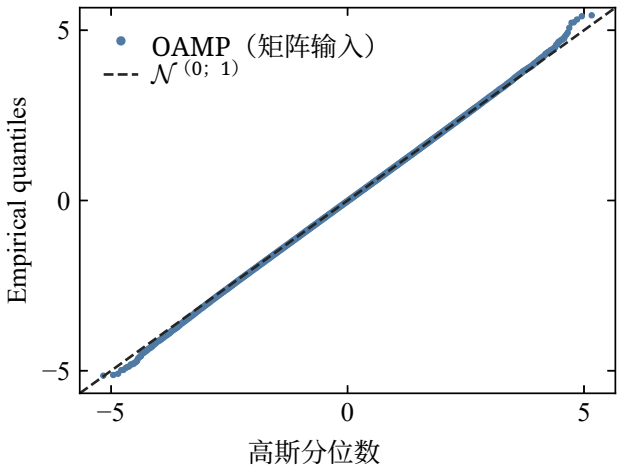

图 4. 在 $t = 10$ 处的归一化逐元素有效噪声与 $\mathcal{N}(0,1)$ 的 Q–Q图，使用全部 $mn = 4 \times 10^6$ 个元素。

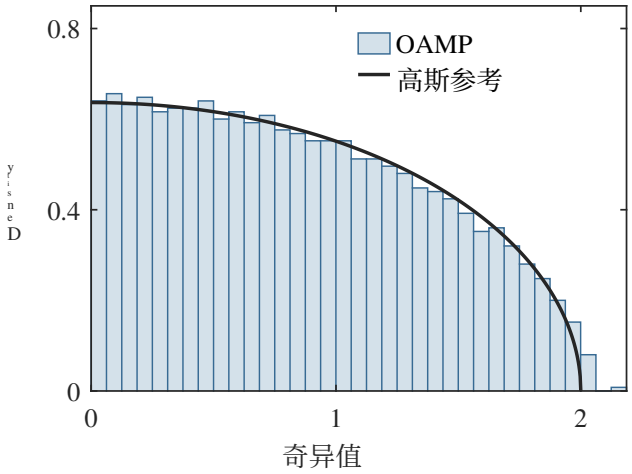

图 5. $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\mathsf{L}}^t/\sqrt{n}$ 和高斯参考 $\mathbf{G}/\sqrt{n}$ 在 $t = 10$处的奇异值分布。

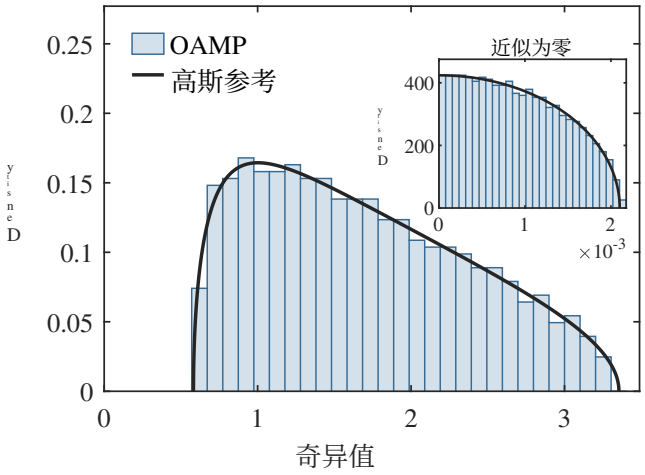

图 6. 对于 $t = 10$， $\boldsymbol{R}_{\mathsf{L}}^t/\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$ 的奇异值分布以及高斯参考密度 $\rho_{\widehat{\tau}_{\mathsf{s}}^t}$。插图显示了近零谱带。

附录 B
均方误差传递函数的性质

在本附录中，我们证明引理 1 和引理 2。

A. RIE 收缩

对于高斯信道 $\mathbf{R}_\tau = \boldsymbol{L} + \sqrt{\tau}\mathbf{G}$，令 μ_τ 表示归一化奇异值$\sigma_i(\mathbf{R}_\tau)/\sqrt{np_{\mathsf{L}}}$、 $i = 1$、.....、m的极限经验分布。我们将其密度记为 ρ_τ，其对称化记为 $\widehat{\mu}_\tau$，并将$\widehat{\mu}_\tau$的希尔伯特变换记为 $\mathcal{H}_\tau$。根据（6）回顾，对于 $s > 0 \in \operatorname{supp} \mu_\tau$，

$$\hat{f}_{\beta,\tau}(s) = s - \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}}\left[\frac{1-\beta}{s} + 2\beta\mathcal{H}_\tau(s)\right].$$

令 ν 表示附录 A-A 中归一化信号奇异值的极限分布律，并设 $M := \operatorname{maxsupp} \nu < \infty$。

引理 3（RIE 收缩器的界与单调性）。ˆ对于每个 $\tau > 0$, 函数 $f_{\beta,\,\tau}$ 非负、有上界 M，并且在 $\operatorname{supp} \mu_\tau$ 上单调不减。

证明。固定 $\tau > 0$。我们首先考虑正奇异值处的情形，其中 $\rho_\tau(s) > 0$。回顾柯西变换

$$g_\tau(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\mu}_\tau(\mathrm{d}x)}{z - x}.$$

我们将其在 $z = s + \mathrm{i}\eta$ with $\eta \downarrow 0$ 时的极限记作 $g_\tau(s + \mathrm{i}0^+)$。在此类 s 处，边界值公式 [34,定理 2.1] 给出

$$g_\tau(s + \mathrm{i}0^+) = \mathcal{H}_\tau(s) - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\rho_\tau(s).$$

记

$$q_s := s - \frac{\beta\tau}{p_{\mathsf{L}}} g_\tau(s + \mathrm{i}0^+),$$
$$D_s(\xi) := q_s\left(q_s - \frac{(1-\beta)\tau}{p_{\mathsf{L}} s}\right) - \xi^2.$$

那么 q_s 满足以下自洽方程 [35,式 (1.2)]:

$$\frac{p_{\mathsf{L}}}{\beta\tau}(s - q_s) = \int \frac{q_s}{D_s(\xi)}\,\nu(\mathrm{d}\xi). \tag{31}$$

结合 q_s 的定义、收缩公式 (6) 以及 $\operatorname{Re} g_\tau(s + \mathrm{i}0^+) = \mathcal{H}_\tau(s)$, 我们得到

$$2\operatorname{Re} q_s = s + \hat{f}_{\beta,\tau}(s) + \frac{(1-\beta)\tau}{p_{\mathsf{L}} s}.$$

ˆ非负性与有界性 $f_{\beta,\,\tau}$。我们从 (31) 中提取信号奇异值平方的一个正加权平均。先直接取虚部，再将两边除以 q_s 后取虚部，得到

$$\frac{p_{\mathsf{L}}}{\beta\tau} = \int \frac{|q_s|^2 + \xi^2}{|D_s(\xi)|^2}\,\nu(\mathrm{d}\xi), \tag{32}$$
$$\frac{p_{\mathsf{L}} s}{\beta\tau|q_s|^2} = \big(s + \hat{f}_{\beta,\tau}(s)\big)\int \frac{\nu(\mathrm{d}\xi)}{|D_s(\xi)|^2}.$$

结合这些恒等式可得

$$\frac{\hat{f}_{\beta,\tau}(s)|q_s|^2}{s} = \frac{\displaystyle\int \xi^2 |D_s(\xi)|^{-2}\,\nu(\mathrm{d}\xi)}{\displaystyle\int |D_s(\xi)|^{-2}\,\nu(\mathrm{d}\xi)} \in [0, M^2].$$

该比值是 ξ^2的加权平均，权重为正，分别是ˆ和 $\xi \in [0, M]$。由此可得$f_{\beta,\,\tau}(s) \geq 0$。由于 $\beta \leq 1$,

$$|q_s|^2 \geq \frac{1}{4}\left(s + \hat{f}_{\beta,\tau}(s) + \frac{(1-\beta)\tau}{p_{\mathsf{L}} s}\right)^2 \geq s\hat{f}_{\beta,\tau}(s).$$

因此 ˆ$f_{\beta,\,\tau}(s)^2 \leq M^2$，从而证明了上界。

单调性。固定满足 $\rho_\tau(s) > 0$ 和 $\rho_\tau(t) > 0$ 的 $0 < s < t$，并令

$$\Delta := q_t - q_s, \qquad d := \frac{(1-\beta)\tau}{p_{\mathsf{L}}}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) \geq 0.$$

将 (31) 在 s 和 t 处相减，得到

$$\Delta - (t - s) = \frac{\beta\tau}{p_{\mathsf{L}}}\int \frac{q_t q_s(\Delta + d) + \xi^2\Delta}{D_t(\xi)D_s(\xi)}\,\nu(\mathrm{d}\xi).$$

由柯西–施瓦茨不等式和 (32) 可得

$$\frac{\beta\tau}{p_{\mathsf{L}}}\int \frac{|q_t q_s| + \xi^2}{|D_t(\xi)D_s(\xi)|}\,\nu(\mathrm{d}\xi) \leq 1.$$

因此，由三角不等式可得

$$|\Delta - (t - s)| \leq \max\{|\Delta + d|, |\Delta|\}.$$

将此不等式两边平方，当最大值为 $|\Delta|$ 时得到 $2\operatorname{Re}\Delta \geq t - s$，否则得到 $2\operatorname{Re}\Delta \geq t - s - d$。无论哪种情况,

$$\hat{f}_{\beta,\tau}(t) - \hat{f}_{\beta,\tau}(s) = 2\operatorname{Re}\Delta - (t - s) + d \geq 0.$$

当 s 和 t 位于谱支撑的不同分支中时，该比较同样适用。

对于 $\tau > 0$，噪声概率律 μ_τ 在 $(0,\ \infty)$ 上具有密度，并且在零点 [34, 35] 没有零点原子。因此，满足 $\rho_\tau(s) > 0$ 的正点在其支集内稠密。根据附录 A-A 中所述的边界连续性以及零点处的取值，$f_{\beta,\,\tau}$ 的界和单调性可延拓至整个支集。□

我们使用以下界来控制下面的谱积分以及附录 C 中的小噪声极限。将变量从奇异值平方改为奇异值后， [34, 定理 2.1 和引理 2.1(b)]，中的边界值公式和 Stieltjes 变换估计给出

$$\|\rho_\tau\|_\infty \leq \frac{2\sqrt{p_{\mathsf{L}}}}{\pi\sqrt{\beta\tau}}.$$

奇异值扰动不等式和几乎处处极限 $\|\mathbf{G}/\sqrt{n}\|_{\mathrm{op}} \to 1 + \sqrt{\beta}$ 给出

$$\operatorname{supp}\mu_\tau \subset [0, M_\tau], \qquad M_\tau := M + (1 + \sqrt{\beta})\sqrt{\tau/p_{\mathsf{L}}}.$$

B. 均方误差恒等式

为方便起见，记

$$b_\tau(s) := \frac{p_{\mathsf{L}}}{\tau}\big[s - \hat{f}_{\beta,\tau}(s)\big] = \frac{1-\beta}{s} + 2\beta\mathcal{H}_\tau(s), \tag{33}$$

它衡量 RIE 下归一化奇异值随归一化噪声方差每单位变化所产生的变化 τ/p_{L}。

同一函数决定了噪声方差变化时含噪奇异值分布的运动，如式（40）所示。我们将其均方记为

$$J_\beta(\tau) := \int b_\tau(s)^2\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = \int \left(\frac{1-\beta}{s}\right)^2 \mu_\tau(\mathrm{d}s) + \frac{\pi^2\beta^2}{3}\int \rho_\tau(s)^3\,\mathrm{d}s, \quad (34)$$

其中，第二个等式由 [19,引理5.3]中的恒等式得出：

$$\int \mathcal{H}_\tau(s)^2\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = \frac{\pi^2}{12}\int \rho_\tau(s)^3\,\mathrm{d}s,$$
$$\int \frac{\mathcal{H}_\tau(s)}{s}\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = 0, \qquad \beta < 1.$$

二阶矩 $\int s^2\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = 1 + \tau/p_{\mathsf{L}}$ 和 (23) 给出

$$\int s b_\tau(s)\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = \frac{p_{\mathsf{L}}}{\tau}\left(1 + \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}} - 1\right) = 1. \quad (35)$$

ˆ展开$f_{\beta,\tau}(s) = s - (\tau/p_{\mathsf{L}})b_\tau(s)$，因此得到

$$\int \hat{f}_{\beta,\tau}(s)^2\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) = 1 - \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}} + \frac{\tau^2}{p_{\mathsf{L}}^2}J_\beta(\tau).$$

利用 (22) 和 (25)–(26)，我们得到以下恒等式：

$$\mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{p_{\mathsf{L}}}J_\beta(\tau),$$
$$a_{\mathsf{L}}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}}J_\beta(\tau), \quad (36)$$
$$\Phi_{\mathsf{L}}(\tau) = \frac{p_{\mathsf{L}}}{J_\beta(\tau)} - \tau. \quad (37)$$

最后，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$1 = \left(\int s b_\tau(s)\,\mu_\tau(\mathrm{d}s)\right)^2 \le \left(1 + \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}}\right)J_\beta(\tau).$$

因此 $J_\beta(\tau) \ge p_{\mathsf{L}}/(p_{\mathsf{L}} + \tau) > 0$。结合 $\mathsf{m}_{\mathsf{L}}(\tau) \ge 0$，可得

$$0 \le a_{\mathsf{L}}(\tau) \le \frac{p_{\mathsf{L}}}{p_{\mathsf{L}} + \tau} < 1. \quad (38)$$

下面的引理 4 记录了一个关于$J_\beta(\tau)$的有用微分恒等式。

引理 4. 函数 J_β 在$(0,\infty)$上局部绝对连续，并且对几乎处处的 $\tau > 0$,

$$J_\beta(\tau) + \tau J'_\beta(\tau) = \int \frac{(1-\beta)^2\hat{f}_{\beta,\tau}(s)}{s^3}\,\mu_\tau(\mathrm{d}s) + \frac{\pi^2\beta^2}{3}\int \rho_\tau(s)^3\,\mathrm{d}\hat{f}_{\beta,\tau}(s). \quad (39)$$

证明. 在每个方差 τ下，观测量的分布与$\mathbf{R}_\tau = \boldsymbol{L} + \sqrt{\tau}\mathbf{G}$相同。奇异值动力学 [38]的大系统极限给出守恒方程

$$\partial_\tau \rho_\tau = -\frac{1}{2p_{\mathsf{L}}}\partial_s(\rho_\tau b_\tau). \quad (40)$$

这里，$b_\tau(s)/(2p_{\mathsf{L}})$是随着 τ 增加而输运归一化奇异值密度的速度。

对于 $\beta < 1$，根据命题 2.3]，μ_τ 的支集对于每个 $\tau > 0$ [35,都与零保持有界距离。因此，我们可以将 (40) 乘以 s^{-2} 并通过分部积分来求平方逆矩的导数。对于三次密度积分，我们将同一个方程乘以 $3\rho_\tau^2$ 并通过分部积分。这给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int \frac{\mu_\tau(\mathrm{d}s)}{s^2} = -\frac{1}{p_{\mathsf{L}}}\int \frac{b_\tau(s)}{s^3}\,\mu_\tau(\mathrm{d}s),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int \rho_\tau(s)^3\,\mathrm{d}s = -\frac{3}{2p_{\mathsf{L}}}\int \rho_\tau(s)^2\partial_s\big(\rho_\tau(s)b_\tau(s)\big)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{p_{\mathsf{L}}}\int \rho_\tau(s)^3\partial_s b_\tau(s)\,\mathrm{d}s. \quad (41)$$

分部积分会产生端点项：对于平方逆矩（$\beta < 1$），端点项涉及$s^{-2}\rho_\tau(s)b_\tau(s)$；对于三次密度积分，端点项涉及$\rho_\tau(s)^3 b_\tau(s)$。这些表达式在正谱端点处趋于零，因为 ρ_τ 趋于零；在无穷远处也趋于零，因为密度具有紧支撑。在$s = 0$处，当 $\beta < 1$时，谱隙使 ρ_τ 在零的某个邻域内恒等于零。对于 $\beta = 1$，只有三次密度项存在；由于 ρ_τ有界，且当 $s \downarrow 0$时 $b_\tau(s) \to 0$，该项趋于零。前述谱正则性和界使得这些计算可通过在端点处截断来严格化，并保证 J_β 对 $\tau > 0$局部绝对连续。

最后，利用 (34) 和 (41) 对 $\tau J_\beta(\tau)$ 求导。代入 $f_{\beta,\,\tau}(s) = s - (\tau/p_{\mathsf{L}})b_\tau(s)$ 以及 $\partial_s f_{\beta,\,\tau}(s) = 1 - (\tau/p_{\mathsf{L}})\partial_s b_\tau(s)$，即可得到 (39)。 □

C. 关于 J_β的微分不等式

我们的目标是证明谱均方误差传递函数Φ_{L} 单调不减。由于 J_β 为正且局部绝对连续，Φ_{L} 也局部绝对连续。对 (37) 求导可得

$$\Phi'_{\mathsf{L}}(\tau) = -\frac{p_{\mathsf{L}}J'_\beta(\tau)}{J_\beta(\tau)^2} - 1 \quad \text{for a.e. } \tau > 0.$$

因此，下面引理中的微分不等式意味着，对于几乎所有 $\tau > 0$，$\Phi'_{\mathsf{L}}(\tau) \ge 0$，从而证明所需的单调性。

引理5（谱积分不等式）。对于几乎所有 τ >0,

$$J'_\beta(\tau) + \frac{J_\beta(\tau)^2}{p_{\mathsf{L}}} \le 0.$$

证明。将 (33) 写成

$$b_\tau(s) = \frac{1-\beta}{s} + \beta\ \mathrm{p.v.}\int \left(\frac{1}{s-t} + \frac{1}{s+t}\right)\mu_\tau(\mathrm{d}t).$$

对于固定的概率水平 $u \in (0,\ 1)$，定义

$$F_\tau(s) := \int_0^s \rho_\tau(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$s_u(\tau) := \inf\{s \ge 0 : F_\tau(s) \ge u\}.$$

因此，低于 $s_u(\tau)$ 的概率质量为 u。当 τ 变化时，我们保持 u 不变，并跟踪相应的奇异值位置 $s_u(\tau)$。对 $F_\tau(s_u(\tau)) = u$ 求导，并结合（40）以及零点处消失的边界贡献，可得

$$\frac{\mathrm{d}s_u(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{b_\tau(s_u(\tau))}{2p_{\mathsf{L}}}$$

在 $\rho_\tau(s_u(\tau)) > 0$的点处。对于两个固定的概率水平$u,\ v \in (0,\ 1)$，记 $s = s_u(\tau)$ 和 $t = s_v(\tau)$。于是

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\tau}\frac{1}{s \pm t} = -\frac{b_\tau(s) \pm b_\tau(t)}{2p_{\mathsf{L}}(s \pm t)^2}.$$

这种参数化还给出

$$J_\beta(\tau) = \int_0^1 b_\tau(s_u(\tau))^2\, \mathsf{d}u.$$

我们对 τ 求导，同时保持概率水平不变。然后，将所得的每个二重积分与交换 u 和 v后得到的表达式取平均。用 s 和 t 表示结果可得

$$\begin{aligned}
&-p_{\mathsf{L}} J'_\beta(\tau) \\
&\quad = \int (1-\beta)\left(\frac{b_\tau(s)}{s}\right)^2 \mu_\tau(\mathsf{d}s) \\
&\qquad + \frac{\beta}{2}\iint \left(\frac{b_\tau(s) - b_\tau(t)}{s-t}\right)^2 \mu_\tau(\mathsf{d}s)\mu_\tau(\mathsf{d}t) \\
&\qquad + \frac{\beta}{2}\iint \left(\frac{b_\tau(s) + b_\tau(t)}{s+t}\right)^2 \mu_\tau(\mathsf{d}s)\mu_\tau(\mathsf{d}t).
\end{aligned}$$

另一方面，将 b_τ 的表达式乘以 $b_\tau(s)$，再对称化，可得不带平方项的相同加权积分：

$$\begin{aligned}
J_\beta(\tau) = &\int (1-\beta)\frac{b_\tau(s)}{s}\,\mu_\tau(\mathsf{d}s) \\
&+ \frac{\beta}{2}\iint \frac{b_\tau(s) - b_\tau(t)}{s-t}\,\mu_\tau(\mathsf{d}s)\mu_\tau(\mathsf{d}t) \\
&+ \frac{\beta}{2}\iint \frac{b_\tau(s) + b_\tau(t)}{s+t}\,\mu_\tau(\mathsf{d}s)\mu_\tau(\mathsf{d}t).
\end{aligned}$$

权重 $1-\beta, \beta/2, \beta/2$之和为一，并且 μ_τ是一个概率测度。因此，由柯西–施瓦茨不等式可得 $J_\beta(\tau)^2 \le -p_{\mathsf{L}} J'_\beta(\tau)$。$b_\tau$表达式中的奇异核 $1/(s-t)$按柯西主值意义解释。对于对称化积分中的差商，$t = s$处的值由下式给出

$$\lim_{t\to s}\frac{b_\tau(s) - b_\tau(t)}{s-t} = \partial_s b_\tau(s),$$

在该导数存在的地方。前述谱正则性保证了求导和极限运算的合理性，所得导数恒等式对几乎处处的$\tau > 0$成立。

□

D. 均方误差性质的证明

引理 1 的证明。 由公式 (36) 和 (39) 可得

$$-a'_{\mathsf{L}}(\tau) = \frac{J_\beta(\tau) + \tau J'_\beta(\tau)}{p_{\mathsf{L}}} \ge 0 \quad \text{for a.e. } \tau > 0,$$

ˆˆ 因为 $f_{\beta,\,\tau} \ge 0$ 和 $\partial_s f_{\beta,\,\tau} \ge 0$ 其中 $\rho_\tau > 0$。为了得到严格减小，我们证明 (39) 中至少有一项为正。

ˆ 对于 $\beta < 1$，第一项为正，因为 $f_{\beta,\,\tau} \ge 0$且 $\int s\hat{}f_{\beta,\,\tau}(s)\,\mu_\tau(\mathsf{d}s) = 1$由式 (23) 可知。对于 $\beta = 1$，只剩下第二项，因此我们证明收缩函数严格递增，其中 $\rho_\tau > 0$。回顾引理 3 的证明中的 $q_s = s - (\tau/p_{\mathsf{L}})g_\tau(s + \mathrm{i}0^+)$。对式 (31) 求导得

$$q'_s - 1 = \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}} q'_s \int \frac{q_s^2 + \xi^2}{(q_s^2 - \xi^2)^2}\,\nu(\mathsf{d}\xi).$$

由于 $\operatorname{Im} q_s > 0$，对于 $\xi > 0$，有 $|q_s^2 + \xi^2| < |q_s|^2 + \xi^2$。固定 τ，定义 $q(z) := z - (\tau/p_{\mathsf{L}})g_\tau(z)$，其中 $\operatorname{Im} z > 0$。因此$q_s = q(s + \mathrm{i}0^+)$。 $q'(z)$ 中的撇号表示对 z 求导，而 $s + \mathrm{i}0^+$ 表示极限 $z = s + \mathrm{i}\eta$，当 $\eta \downarrow 0$ 时。若 $\rho_\tau(s) > 0$，则边界正则性给出 $q'(s + \mathrm{i}0^+) = \partial_s q(s + \mathrm{i}0^+)$ [36]。ν 的单位二阶矩以及式 (32) 因此给出

$$\begin{aligned}
&\left|q'(s+\mathrm{i}0^+) - 1\right| \\
&\quad < \frac{\tau}{p_{\mathsf{L}}}\left|q'(s+\mathrm{i}0^+)\right| \\
&\qquad \times \int \frac{|q(s+\mathrm{i}0^+)|^2 + \xi^2}{|q(s+\mathrm{i}0^+)^2 - \xi^2|^2}\,\nu(\mathsf{d}\xi) \\
&\quad = \left|q'(s+\mathrm{i}0^+)\right|.
\end{aligned}$$

两边平方得到 $2\operatorname{Re} q'(s + \mathrm{i}0^+) > 1$。由于 $\hat{f}_{1,\,\tau}(s) = 2\operatorname{Re} q(s + \mathrm{i}0^+) - s$，我们得到

$$\partial_s \hat{f}_{1,\tau}(s) = 2\operatorname{Re} q'(s+\mathrm{i}0^+) - 1 > 0.$$

因此，式 (39) 中的剩余项为正。

对 $-a'_{\mathsf{L}}(\tau) > 0$ 积分可知，a_{L} 严格递减。结合式 (38)，可得 $0 < a_{\mathsf{L}}(\tau) \le p_{\mathsf{L}}/(p_{\mathsf{L}} + \tau)$ 且$a_{\mathsf{L}}(\tau) \to 0$ （当 $\tau \to \infty$ 时）。因此，其极限 $d_{\mathsf{L}} = a_{\mathsf{L}}(0+)$ 存在于 $(0, 1]$。令 $a_{\mathsf{L}}(0) = d_{\mathsf{L}}$，即可得到所声称的连续且严格递减的扩展。 □

引理 2 的证明。对于谱模块，式 (37) 和引理5给出

$$\Phi'_{\mathsf{L}}(\tau) = -\frac{p_{\mathsf{L}} J'_\beta(\tau)}{J_\beta(\tau)^2} - 1 \ge 0 \quad \text{for a.e. } \tau > 0.$$

对该不等式积分可知，Φ_{L} 单调不减。

对于逐元素信道 $\mathsf{R}_\tau = \mathsf{S} + \sqrt{\tau}\,\mathsf{Z}$，令 $V_\tau(r) \bar{}= \mathrm{Var}(\mathsf{S} \mid \mathsf{R}_\tau = r)$ 表示后验方差。高斯 MMSE 恒等式 [39,Props. 7 和 9] 给出

$$\mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau) = \mathbb{E}[V_\tau(\mathsf{R}_\tau)], \qquad \mathsf{m}'_{\mathsf{s}}(\tau) = \frac{\mathbb{E}[V_\tau(\mathsf{R}_\tau)^2]}{\tau^2}.$$

对 $\Phi_{\mathsf{s}}(\tau) = \tau\mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau)/(\tau - \mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau))$ 求导，得到

$$\begin{aligned}
\Phi'_{\mathsf{s}}(\tau) &= \frac{\tau^2 \mathsf{m}'_{\mathsf{s}}(\tau) - \mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau)^2}{(\tau - \mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau))^2} \\
&= \frac{\mathrm{Var}(V_\tau(\mathsf{R}_\tau))}{(\tau - \mathsf{m}_{\mathsf{s}}(\tau))^2} \ge 0.
\end{aligned}$$

因此，后验方差随观测量的变化决定了 Φ_{s} 增长的速度。

对于两个模块，均方误差关于$\tau > 0$为正且连续，线性估计界给出

$$0 < \mathsf{m}_\bullet(\tau) \le \frac{p_\bullet \tau}{p_\bullet + \tau} < \tau, \qquad \bullet \in \{\mathsf{L}, \mathsf{s}\}.$$

回顾归一化函数

$$\begin{aligned}
\bar{a}_\bullet(x) &= a_\bullet(p_\bullet x), \\
\bar{\Psi}_\bullet(x) &= \frac{\Phi_\bullet(p_\bullet x)}{p_\bullet} = \frac{x\bar{a}_\bullet(x)}{1 - \bar{a}_\bullet(x)}.
\end{aligned}$$

这些公式保持了传递函数的连续性和单调性。它们还给出 $0 < \bar{a}_\bullet(x) \le (1+x)^{-1}$，$0 < \Psi_\bullet(x) \le 1$，以及 $\bar{a}_\bullet(x) \to 0$，其中 $x \to \infty$。

最后，如果 $\bar{a}_\bullet(x) \to d_\bullet < 1$ 趋于 $x \downarrow 0$，那么

$$\bar{\Psi}_\bullet(x) = \frac{x\bar{a}_\bullet(x)}{1-\bar{a}_\bullet(x)} = \frac{d_\bullet}{1-d_\bullet}x + o(x). \tag{42}$$

因此，$\Psi_\bullet$ 连续延拓至 $\Psi_\bullet(0) = 0$。 □

附录 C 均方误差维数的推导

我们计算定理 1 中的 d_{s} 和 d_{L}。前者是标量 MMSE 维数 [29]；我们将后者称为谱 *MMSE* 维数。

A. 标量 *MMSE* 维数

对于式 (14) 中的单位功率先验，有限二阶矩以及[29, 定理 15] 给出以下结果。此处，σ^2 表示归一化噪声方差。

引理 6（标量 MMSE 维数）。对于 (14) 中的先验，

$$d_{\mathsf{s}} = \lim_{\sigma\downarrow 0} \frac{\bar{\mathsf{m}}_{\mathsf{s}}(\sigma^2)}{\sigma^2} = \rho_{\mathsf{s}}.$$

B. 谱 *MMSE* 维数

对于谱信道，记 $\boldsymbol{L}^\circ := \boldsymbol{L}/\sqrt{n} = \boldsymbol{L}/\sqrt{n\bar{p}_{\mathsf{L}}}$；其极限奇异值分布为 ν，定义见附录 A-A。由于 $\bar{\mathsf{m}}_{\mathsf{L}}$ 具有尺度不变性，我们不失一般性地设定 $p_{\mathsf{L}} = 1$。在本小节中，σ 表示噪声标准差，σ^2 表示其方差。因此，按照附录 B 的记号，$\tau = \sigma^2$，且 $a_{\mathsf{L}}(\sigma^2) = \bar{a}_{\mathsf{L}}(\sigma^2)$。对于 $\sigma > 0$，令

$$\boldsymbol{Y}_\sigma = \boldsymbol{L}^\circ + \sigma\widetilde{\boldsymbol{G}}, \qquad \widetilde{G}_{ij} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1/n),$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 与信号相互独立。因此，$\boldsymbol{Y}_\sigma$ 的极限奇异值分布为 μ_{σ^2}，其对称化为 $\widehat{\mu}_{\sigma^2}$。我们使用第四节中的原子质量 w_0，w_ξ 以及集合 $\mathcal{A}$，并定义非零谱质量 $\gamma_\nu := 1 - w_0$。

定理 2（谱 MMSE 维数）。该极限

$$d_{\mathsf{L}} = \lim_{\sigma\downarrow 0} \frac{\bar{\mathsf{m}}_{\mathsf{L}}(\sigma^2)}{\sigma^2}$$

存在且满足

$$\begin{aligned} d_{\mathsf{L}} &= 1 - (1-\beta)w_0 - \beta w_0^2 - \frac{\beta}{2}\sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi^2 \\ &= \gamma_\nu(1 + \beta - \beta\gamma_\nu) - \frac{\beta}{2}\sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi^2. \end{aligned} \tag{43}$$

我们通过将谱MMSE与信号加噪声矩阵的奇异值分布的对数能量联系起来，并根据 ν的原子计算该能量在小噪声下的首项，从而确定 d_{L}。在证明定理之前，我们先给出能量导数恒等式和下文的引理7。

使用对称化奇异值分布定义对数能量 [17,结果 2]:

$$\begin{aligned} E_\beta(\sigma^2) &:= (1-\beta)\int \log s \, \mu_{\sigma^2}(\mathrm{d}s) \\ &\quad + \beta \iint \log|x-y| \, \widehat{\mu}_{\sigma^2}(\mathrm{d}x)\widehat{\mu}_{\sigma^2}(\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{44}$$

对 $\widehat{\mu}_{\sigma^2}$ 中的符号取平均，将相互作用核 $\log|x-y|$ 转换为非负奇异值的 $\tau_2 \log|s^2 - t^2|\, s,\ t$。对于每个 $\sigma > 0$，根据附录B-A，μ_{σ^2} 和 $\widehat{\mu}_{\sigma^2}$ 都具有有界密度和紧支撑。由于对数奇异性是局部可积的，式 (44) 中的两个积分均为有限值。

如引理5的证明中所述，按照固定的累积概率跟踪奇异值位置。关于 σ，这些位置以 σb_{σ^2} 的速度移动。同样的正则性论证表明，$\sigma \mapsto E_\beta(\sigma^2)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上局部绝对连续。沿着这一运动对能量求导，并使用 (36)，可得对于几乎处处的 $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}E_\beta(\sigma^2) &= \sigma\int b_{\sigma^2}(s)^2 \, \mu_{\sigma^2}(\mathrm{d}s) \\ &= \sigma J_\beta(\sigma^2) = \frac{1-\bar{a}_{\mathsf{L}}(\sigma^2)}{\sigma}. \end{aligned} \tag{45}$$

根据引理1，$\bar{a}_{\mathsf{L}}(0+) = d_{\mathsf{L}}$。下面的引理将此极限与对数能量联系起来。

引理7（对数能量恒等式）。对于 $0 < \sigma < \sigma_0$,

$$E_\beta(\sigma_0^2) - E_\beta(\sigma^2) = \int_\sigma^{\sigma_0} \frac{1-\bar{a}_{\mathsf{L}}(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{46}$$

此外,

$$\lim_{\sigma\downarrow 0}\frac{E_\beta(\sigma^2)}{\log\sigma} = 1 - d_{\mathsf{L}} \tag{47}$$

$$= (1-\beta)w_0 + \beta w_0^2 + \frac{\beta}{2}\sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi^2. \tag{48}$$

证明。将 (45) 从 σ 积分至 σ_0，得到 (46)。随后，极限$\bar{a}_{\mathsf{L}}(0+) = d_{\mathsf{L}}$ 给出 (47)。接下来只需证明 (48)。

为在噪声尺度 $\sigma \in (0,1)$ 下正则化零点处的对数奇异性，定义

$$\ell_\sigma(z) = \min\{\log\max\{|z|, \sigma\}, 0\}, \qquad \chi_\sigma(z) = \frac{\ell_\sigma(z)}{\log\sigma}.$$

对于 $\mathbb{R}_+$ 上任意具有对称化 $\widehat{\mu}$ 的概率测度 μ，定义截断泛函

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\sigma(\mu) &= (1-\beta)\int \chi_\sigma(s)\,\mu(\mathrm{d}s) \\ &\quad + \beta\iint \chi_\sigma(x-y)\,\widehat{\mu}(\mathrm{d}x)\widehat{\mu}(\mathrm{d}y). \end{aligned}$$

由 $\sigma \downarrow 0$ 可知，所声称的极限可通过以下三个步骤得出

$$\begin{aligned} \frac{E_\beta(\sigma^2)}{\log\sigma} &\overset{\text{(a)}}{=} \mathcal{Q}_\sigma(\mu_{\sigma^2}) + o(1) \overset{\text{(b)}}{=} \mathcal{Q}_\sigma(\nu) + o(1) \\ &\xrightarrow{\text{(c)}} (1-\beta)w_0 + \beta w_0^2 + \frac{\beta}{2}\sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi^2. \end{aligned}$$

步骤 *(a)*。根据附录B-A，存在常数 $M_* > 1$和 $C_\rho > 0$，它们与 $\sigma \in (0,\ 1)$ 无关，使得 μ_{σ^2}

的支集为 $[0, M_*]$，且密度上界为 C_ρ/σ。在 $\widehat{\mu}_{\sigma^2} \otimes \widehat{\mu}_{\sigma^2}$ 下，差值 $x - y$ 的支集为$[-2M_*, 2M_*]$，其卷积密度同样有上界C_ρ/σ。在 $[-2M_*, 2M_*] \setminus \{0\}$ 上，

$$|\log|z| - \ell_\sigma(z)| \le \mathbf{1}_{\{|z|<\sigma\}} \log(\sigma/|z|) + \log(2M_*).$$

对密度不超过 C_ρ/σ 的函数进行积分，可将 $E_\beta(\sigma^2)$任一积分中的截断误差限制为

$$\frac{2C_\rho}{\sigma}\int_0^\sigma \log(\sigma/t)\,\mathrm{d}t + \log(2M_*) = 2C_\rho + \log(2M_*).$$

由于该界对 $\sigma \in (0,1)$ 一致成立，除以 $\log\sigma$ 并令 $\sigma \downarrow 0$，即可得到 (a)。

步骤 (b)。矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ 的元素服从独立同分布 $\mathcal{N}(0, 1/n)$，其与 $\widetilde{\boldsymbol{L}}^\circ$ 相互独立。记它们按非增序排列的奇异值为 $s_{\sigma,i} = s_i(\boldsymbol{Y}_\sigma)$ 和 $s_{0,i} = s_i(\boldsymbol{L}^\circ)$，并令 $\mu_{\sigma^2,n}$ 和 ν_n 表示它们的经验分布。根据 Weyl不等式，$|s_{\sigma,i} - s_{0,i}| \le \sigma\|\boldsymbol{G}\|_{\mathrm{op}}$ 对所有 $i \in [m]$ 均成立。由于 ℓ_σ 是 $1/\sigma$-Lipschitz，

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \big[\ell_\sigma(s_{\sigma,i}) - \ell_\sigma(s_{0,i})\big]\right| \le \|\widetilde{\boldsymbol{G}}\|_{\mathrm{op}}.$$

类似地，对每个 $i, j \in [m]$ 和 $\varsigma_1, \varsigma_2 \in \{-1, 1\}$，

$$\begin{aligned}&\big|\ell_\sigma(\varsigma_1 s_{\sigma,i} - \varsigma_2 s_{\sigma,j}) - \ell_\sigma(\varsigma_1 s_{0,i} - \varsigma_2 s_{0,j})\big| \\ &\quad\le \frac{|s_{\sigma,i} - s_{0,i}| + |s_{\sigma,j} - s_{0,j}|}{\sigma} \le 2\|\widetilde{\boldsymbol{G}}\|_{\mathrm{op}}.\end{aligned}$$

对 i、$j \in [m]$ 和 ς_1、$\varsigma_2 \in \{-1, 1\}$ 取平均，将 $\ell_\sigma(x - y)$ 在 $\widehat{\mu}_{\sigma^2,n}$ 下的二重积分与其在 $\widehat{\nu}_n$ 下的二重积分之差界定为 $2\|\boldsymbol{G}\|_{\mathrm{op}}$。对每个固定的 $\sigma \in (0, 1)$，ℓ_σ 有界且连续，因此令 $m, n \to \infty$ 可将这些经验平均收敛到在 μ_{σ^2}、ν 和 $\widehat{\mu}_{\sigma^2}$、$\widehat{\nu}$ 下的极限积分，同时 $\|\boldsymbol{G}\|_{\mathrm{op}} \to 1 + \sqrt{\beta}$ 几乎必然成立。将单重积分和二重积分与 $\chi_\sigma = \ell_\sigma/\log\sigma$ 合并，得到

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{Q}_\sigma(\mu_{\sigma^2}) - \mathcal{Q}_\sigma(\nu)\big| &\le \frac{(1-\beta)(1+\sqrt{\beta}) + 2\beta(1+\sqrt{\beta})}{|\log\sigma|} \\ &= \frac{(1+\beta)(1+\sqrt{\beta})}{|\log\sigma|},\end{aligned}$$

当 $\sigma \downarrow 0$ 时，该式趋于零，从而证明 (b)。

步骤 (c)。当 $\sigma \downarrow 0$ 时，$\chi_\sigma(z) \in [0, 1]$ 逐点收敛至 $\mathbf{1}_{\{z=0\}}$。由有界收敛定理可得

$$\int \chi_\sigma(s)\,\nu(\mathrm{d}s) \to \nu(\{0\}) = w_0$$

并将二重积分集中到 $\widehat{\nu} \otimes \widehat{\nu}$ 的对角线上。由于 $\widehat{\nu}$ 在 0 处赋予质量 w_0，并对每个 $\pm\sqrt{\xi}$（$\xi \in \mathcal{A}$）赋予质量 $w_\xi/2$，

$$\iint \mathbf{1}_{\{x=y\}}\,\widehat{\nu}(\mathrm{d}x)\widehat{\nu}(\mathrm{d}y) = w_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi^2. \tag{49}$$

将这些极限代入 $\mathcal{Q}_\sigma(\nu)$，得到 (c)。 □

定理 2 的证明。 d_{L} 的存在性由引理1得出。令引理7中的极限相等，得到

$$1 - d_{\mathsf{L}} = (1-\beta)w_0 + \beta w_0^2 + \frac{\beta}{2}\sum_{\xi\in\mathcal{A}} w_\xi^2.$$

使用 $w_0 = 1 - \gamma_\nu$ 可得（43）。 □

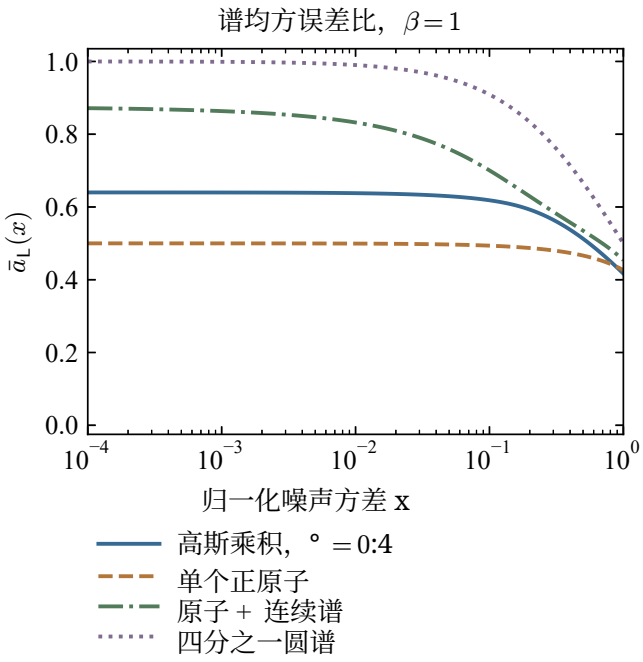

图7. 在 $\beta = 1$ 处，单位功率谱先验对应的去噪误差除以噪声方差，并以 $x = \sigma^2$ 为横轴绘制。示例包括参数为 $\gamma = 0.4$ 的高斯乘积模型；单原子分布律 δ_1；混合分布 $\frac{1}{2}\delta_{\sqrt{11/12}} + \frac{1}{2}\mathrm{Unif}[1/2, 3/2]$；以及在 $[0, 2]$ 上密度为 $\pi^{-1}\sqrt{4 - s^2}$ 的四分之一圆分布。它们的谱 MMSE 维数分别为 0.64、0.5、0.875 和 1。

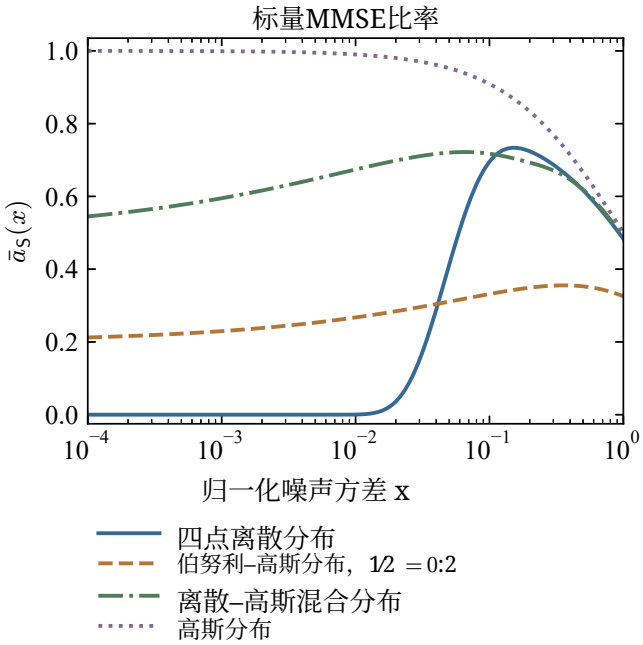

图 8. 单位功率标量先验的去噪误差除以噪声方差后，随 $x = \sigma^2$ 的变化曲线。示例包括定义在 $\{-3, -1, 1, 3\}/\sqrt{5}$ 上的均匀四点离散先验；伯努利–高斯先验 $0.8\delta_0 + 0.2\mathcal{N}(0, 5)$；混合分布 $\frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{2}\mathcal{N}(0, 1)$；以及标准高斯先验 $\mathcal{N}(0, 1)$。它们的标量 MMSE 维数分别为 0、0.2、0.5 和 1。

C. 谱 MMSE 维数的示例

我们比较具有相同极限秩比例的两个矩阵先验的谱 MMSE维数。

高斯乘积先验。令 $\boldsymbol{L}=\sqrt{p_{\mathsf{L}}/r}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 和 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 是具有独立同分布$\mathcal{N}(0,1)$ 元素的独立矩阵。假设 $m/n\to\beta\in(0,1]$ 且 $r/m\to\gamma\in(0,1)$。$\boldsymbol{L}^{\circ}$ 的极限奇异值分布在零处有质量 $1-\gamma$，且没有正原子 [40]。定理 2 得出

$$d_{\mathsf{L}}=\gamma(1+\beta-\beta\gamma)=\lim_{m,n\to\infty}\frac{r(m+n-r)}{mn}. \tag{50}$$

由于实秩-r 矩阵流形的维数为$r(m+n-r)$ [41, 命题 2.1]，d_{L} 等于其每个矩阵元素的渐近维数。在定理的假设下，任何在零处质量为 $1-\gamma$ 且没有正原子的极限分布律都会给出相同的 d_{L}。

相等的非零奇异值。作为对比，考虑 $\boldsymbol{L}^{\circ}$ 的旋转不变先验，其 r 个非零奇异值均固定为 $\sqrt{m/r}$。在 m/n 和 r/m取相同极限的情况下，其极限奇异值分布为 $(1-\gamma)\delta_0+\gamma\delta_{1/\sqrt{\gamma}}$。此时定理 2 得出

$$\begin{aligned}d_{\mathsf{L}}&=\gamma(1+\beta-\beta\gamma)-\frac{\beta\gamma^2}{2}\\&=\lim_{m,n\to\infty}\frac{r(m+n-r)-r(r+1)/2}{mn}.\end{aligned}$$

分子是具有这些固定奇异值的实数 $m\times n$矩阵流形的维数 [42, 第3章，命题21]。因此，相对于（50），$\beta\gamma^2/2$ 中 d_{L} 的下降 r与每个元素的渐近维数下降一致。固定 r个非零奇异值会去除 r 个自由度。由于这些值相等，对 r 左右奇异向量施加相同的正交旋转不会改变 $\boldsymbol{L}^{\circ}$，从而又去除了 $r(r-1)/2$ 个自由度。因此，总的减少量为 $r+r(r-1)/2=r(r+1)/2$。

D. $\bar{a}_{\mathsf{L}}(\sigma^2)$ 和 $\bar{a}_{\mathsf{s}}(\sigma^2)$ 的示例

图 7 和图 8 分别绘出了若干单位功率先验下的 $\bar{a}_{\mathsf{L}}(\sigma^2)$ 和 $\bar{a}_{\mathsf{s}}(\sigma^2)$。当 $\sigma^2\downarrow 0$ 趋于 d_{L}时，它们的极限分别为 d_{s}。在图7中，$\bar{a}_{\mathsf{L}}(\sigma^2)$ 随σ^2严格递减，这一点已由引理1确立。相比之下，对于图8中的三个离散或混合标量先验中的每一个，$\bar{a}_{\mathsf{s}}(\sigma^2)$ 均为非单调函数，并且在某个$\sigma^2>0$处超过其零噪声极限 d_{s}。因此，对于这些先验中的每一个，

$$\Delta_{\mathsf{s}}=\sup_{x>0}\bar{a}_{\mathsf{s}}(x)-d_{\mathsf{s}}>0.$$

附录 D
CON状态演化的收敛与恢复 TION

我们证明，以 $\tau_{\mathsf{L}}^1=p_{\mathsf{L}}$ 为初值的状态演化递推式 (10) 收敛到其最大不动点，并推导出实现完美恢复的充要条件。我们利用该条件证明定理 1，随后将结果专门应用于高斯乘积信号和伯努利–高斯噪声。

在整个过程中，我们固定长宽比 $\beta\in(0,1]$ 以及满足引理 1 和引理 2 中假设的单位功率分量分布律，并令 $0<d_{\mathsf{L}}<1$ 和 $0\le d_{\mathsf{s}}<1$。

A. SE递归的收敛性

我们证明从初始化 $\tau_{\mathsf{L}}^1=p_{\mathsf{L}}$开始的收敛性，并确定何时两个状态演化误差方差都收敛到零。根据第四节中定义的 ζ，令 $x^t=\tau_{\mathsf{L}}^t/p_{\mathsf{s}}$，从而有 $x^1=\zeta^{-1}$。结合式（10）中的两个更新可得

$$x^{t+1}=\frac{1}{\zeta}\,\bar{\Psi}_{\mathsf{L}}\big(\zeta\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x^t)\big)=:\bar{\Psi}(x^t). \tag{51}$$

根据引理 2，Ψ 连续且单调不减，满足 $\bar{\Psi}(0)=0$，并且对 $x>0$有 $0<\bar{\Psi}(x)\le\zeta^{-1}$。特别地，$x^2=\bar{\Psi}(x^1)\le\zeta^{-1}=x^1$。由单调性可得，对每个 $t\ge 1$，都有 $0\le x^{t+1}\le x^t$。因此，x^t 收敛到极限 x_*，由连续性可得 $\Psi(x_*)=x_*$。每个不动点都不大于 x^1，并且根据单调性，它始终不大于每次迭代的结果。因此，x_* 是 Ψ 的最大不动点。

第二个误差方差满足 $\tau_{\mathsf{s}}^t=p_{\mathsf{s}}\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x^t)$。由于 Ψ_{s} 关于 $\Psi_{\mathsf{s}}(0)=0$连续，当且仅当 $x_*=0$时，两个状态演化误差方差都收敛到零。这等价于对每个 $x>0$，$\Psi(x)<x$。事实上，若此不等式不成立，则由连续性以及当 $u>\zeta^{-1}$ 时 $\bar{\Psi}(u)<u$ 可知，存在一个正的不动点。利用 $\Psi_{\bullet}(u)=u\bar{a}_{\bullet}(u)/(1-\bar{a}_{\bullet}(u))$，我们得到

$$\frac{\bar{\Psi}(x)}{x}=\frac{\bar{a}_{\mathsf{s}}(x)}{1-\bar{a}_{\mathsf{s}}(x)}\frac{\bar{a}_{\mathsf{L}}(\zeta\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x))}{1-\bar{a}_{\mathsf{L}}(\zeta\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x))}.$$

由于两个分母均为正，$\Psi(x)<x$ 等价于

$$\bar{a}_{\mathsf{s}}(x)+\bar{a}_{\mathsf{L}}\big(\zeta\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x)\big)<1 \tag{52}$$

对每个 $x>0$均成立。

若先执行谱更新，取 $\tau_{\mathsf{s}}^0=p_{\mathsf{s}}$。序列 $\{\tau_{\mathsf{s}}^t/p_{\mathsf{s}}\}$ 从 1 开始，由一个连续、非递减且上界为 1 的映射生成。因此，该序列收敛到该映射的最大不动点。由于两种更新顺序的不动点方程相同，二者都满足恢复准则（52）。

B. 定理 1 的证明

证明。对每个 $x>0$，定义

$$\zeta_{\mathrm{req}}(x):=\frac{\bar{a}_{\mathsf{L}}^{-1}(1-\bar{a}_{\mathsf{s}}(x))}{\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x)},$$

其中使用定理中的广义逆。$\bar{a}_{\mathsf{L}}$严格递减且 Ψ_{s} 为正，因此 (52) 在 x 处等价于 $\zeta>\zeta_{\mathrm{req}}(x)$。这也涵盖了 $\bar{a}_{\mathsf{s}}(x)\le 1-d_{\mathsf{L}}$：此时分子为零，且 $\bar{a}_{\mathsf{L}}(\zeta\Psi_{\mathsf{s}}(x))<d_{\mathsf{L}}$ 保证对每个 $\zeta>0$，判据都成立。因此，当且仅当对每个$x>0$，$\zeta>\zeta_{\mathrm{req}}(x)$ 时，恢复成立。

对于局部稳定性，小噪声展开 (42) 表明，对每个固定的 $\zeta>0$，

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\bar{\Psi}(x)}{x}=\frac{d_{\mathsf{L}}d_{\mathsf{s}}}{(1-d_{\mathsf{L}})(1-d_{\mathsf{s}})}.$$

当 $D<1$ 时，此极限小于一；当 $D>1$时，此极限大于一。因此，在前一种情况下，零误差不动点是局部吸引的；在后一种情况下，它是不稳定的。

无恢复 ($D>1$)。这里 $0<1-d_{\mathsf{s}}<d_{\mathsf{L}}$。当 $x\downarrow 0$时，$\zeta_{\mathrm{req}}(x)$ 的分子趋于 $\bar{a}^{-1}{}_{\mathsf{L}}(1-d_{\mathsf{s}})>0$，而

$\Psi_{\mathsf{s}}(x) \to 0$。因此 $\zeta_{\mathrm{req}}(x) \to \infty$ 和 $\zeta_{\mathsf{c}} = \infty$，所以对每个 $\zeta > 0$，都无法恢复。

依赖功率的恢复 $(D < 1 < D + \Delta_{\mathsf{s}})$。广义逆在 $(0, 1]$ 上连续。由于 $\bar{a}_{\mathsf{s}}(x) < 1$ 且 $\Psi_{\mathsf{s}}(x) > 0$，函数 ζ_{req} 在 $(0, \infty)$ 上连续。此外，

$$\bar{a}_{\mathsf{s}}(0+) = d_{\mathsf{s}} < 1 - d_{\mathsf{L}}, \qquad \lim_{x \to \infty} \bar{a}_{\mathsf{s}}(x) = 0.$$

因此，对于所有足够小和足够大的 x，都有 $\zeta_{\mathrm{req}}(x) = 0$。条件 $D + \Delta_{\mathsf{s}} > 1$ 还确保存在某个 $x > 0$，使得 $\zeta_{\mathrm{req}}(x) > 0$。因此，它能取得一个有限的正最大值：

$$0 < \zeta_{\mathsf{c}} = \max_{x > 0} \zeta_{\mathrm{req}}(x) = \zeta_{\mathrm{req}}(x_{\mathsf{c}}) < \infty$$

对于某个 $x_{\mathsf{c}} > 0$。

对于 $\zeta > \zeta_{\mathsf{c}}$，恢复准则对每个 $x > 0$ 都成立。当 $\zeta = \zeta_{\mathsf{c}}$ 时，在 x_{c} 处，(52) 式取等号，因此 $\Psi(x_{\mathsf{c}}) = x_{\mathsf{c}} > 0$。对于 $\zeta < \zeta_{\mathsf{c}}$，该准则在同一个 x_{c} 处不成立。因此，前一小节的收敛结果表明，只要 $0 < \zeta \le \zeta_{\mathsf{c}}$，SE 递推就会收敛到一个非零不动点。当且仅当 $\zeta > \zeta_{\mathsf{c}}$ 时，恢复成立。

全功率恢复（$D + \Delta_{\mathsf{s}} \le 1$）。对于每个 $x > 0$,

$$\bar{a}_{\mathsf{s}}(x) \le d_{\mathsf{s}} + \Delta_{\mathsf{s}} \le 1 - d_{\mathsf{L}}.$$

因此，广义逆给出 $\zeta_{\mathrm{req}}(x) = 0$ 对每个$x > 0$均成立，进而得到 $\zeta_{\mathsf{c}} = 0$。对于每个 $\zeta > 0$，恢复准则都成立，包括 $D + \Delta_{\mathsf{s}} = 1$。特别地，这也包括允许的边界情形 $D = 1$ 和 $\Delta_{\mathsf{s}} = 0$。

假设只要 $\Delta_{\mathsf{s}} > 0$，就有 $D \neq 1$，这使得这三种情形构成完备分类。 □

C. 高斯乘积信号的恢复边界

我们将定理 1 特化到以下情形：$\boldsymbol{L}$ 服从高斯乘积分布（见附录C-C），而 $\boldsymbol{S}$服从伯努利–高斯分布。令 r 为 $\boldsymbol{L}$ 的秩，其中 $r/m \to \gamma \in (0, 1)$；令 $\rho \in (0,1)$表示元素先验的活跃概率。根据附录 C,

$$d_{\mathsf{L}} = \gamma(1 + \beta - \beta\gamma), \qquad d_{\mathsf{s}} = \rho. \tag{53}$$

当 $\Delta_{\mathsf{s}}(\rho) = \sup_{x>0} \bar{a}_{\mathsf{s}}(x; \rho) - \rho$时，条件 $D = 1$ 和 $D + \Delta_{\mathsf{s}} = 1$ 给出以下边界：

$$\gamma_{\mathrm{loc}}(\rho; \beta) = \frac{1 + \beta - \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\beta\rho}}{2\beta}, \tag{54}$$

$$\gamma_{\mathrm{all}}(\rho; \beta) = \frac{1 + \beta}{2\beta} - \frac{\sqrt{(1-\beta)^2 + 4\beta[\rho + \Delta_{\mathsf{s}}(\rho)]}}{2\beta}. \tag{55}$$

当 $\gamma < \gamma_{\mathrm{loc}}$ 时，零误差不动点是局部吸引的。当 $\gamma \le \gamma_{\mathrm{all}}$ 时，对于每个固定的 $\zeta = p_{\mathsf{s}}/p_{\mathsf{L}} > 0$ 都可以实现恢复。对于 $\gamma_{\mathrm{all}} < \gamma < \gamma_{\mathrm{loc}}$，恢复则要求 $\zeta > \zeta_{\mathsf{c}}$，其中$\zeta_{\mathsf{c}}$ 由定理 1 给出。

当 $p_{\mathsf{s}} = p_{\mathsf{L}}$（即 $\zeta = 1$）时，恢复准则变为 (52)

$$\bar{a}_{\mathsf{s}}(x; \rho) + \bar{a}_{\mathsf{L}}\big(\bar{\Psi}_{\mathsf{s}}(x; \rho); \beta, \gamma\big) < 1 \tag{56}$$

对所有 $x > 0$。

D. 数值比较与状态演化

我们比较 OAMP算法在图2中标记为 A–D 的四种配置下的经验性能与状态演化预测。固定 $p_{\mathsf{s}} = 1$ 并改变 $\zeta = p_{\mathsf{s}}/p_{\mathsf{L}}$。算法从 $\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{0}$ 和 $\tau_{\mathsf{s}}^0 = p_{\mathsf{s}}$开始，并首先执行谱更新。在此实验中，我们使用状态演化规定的输入方差和校正参数，以避免其估计值在迭代过程中出现有限样本波动。当输入方差低于 $10^{-8} \min(p_{\mathsf{L}}, p_{\mathsf{s}})$，或状态演化数值收敛到一个正的不动点时，我们便固定这些参数并继续进行矩阵迭代。

图3展示了经验误差（记为 e^t），其定义为两个外在均方误差分别除以相应信号功率后取最大值。对于每个 ζ，OAMP 曲线显示了在 300 次迭代预算内观测到的最小 e^t。红色菱形表示第 300 次迭代时的状态演化预测。低于 10^{-3} 的数值绘制在 10^{-3} 处。对于设置 B 和 C，竖线标出了由状态演化预测的临界功率比 ζ_{c}。

参考文献

[1] J. Baik、G. Ben Arous 和 S. P´ech´e，“非零复样本协方差矩阵最大特征值的相变”，《概率年刊》，第 33 卷，第 5 期，第 1643–1697 页，2005 年。[2] F. Benaych-Georges 和 R. R. Nadakuditi，“大型矩形随机矩阵低秩扰动的奇异值和奇异向量”，《多元分析杂志》，第 111 卷，第 120–135 页，2012 年。[3] S. Rangan 和 A. K. Fletcher，“噪声中受约束秩一矩阵的迭代估计”，载于 *IEEE*国际信息论研讨会（*ISIT*）论文集，2012 年，第 1246–1250 页。[4] Y. Deshpande 和 A. Montanari，“信息论最优稀疏主成分分析”，载于 *IEEE*国际信息论研讨会（*ISIT*）论文集，2014 年，第 2197–2201 页。[5] M. Lelarge 和 L. Miolane，“对称低秩矩阵估计的基本极限”，《概率论及其相关领域》，第 173 卷，第 3–4 期，第 859–929 页，2019 年。[6] A. Montanari 和 R. Venkataramanan，“通过近似消息传递估计低秩矩阵”，《统计年刊》，第 49 卷，第 1 期，第 321–345 页，2021 年。[7] J. Barbier、F. Camilli、M. Mondelli 和 M. S´aenz，“结构化主成分分析的信息论极限及其实现方法”，《美国国家科学院院刊》，第 120 卷，第 30 期，文章 e2302028120，2023 年。[8] R. Dudeja、S. Liu 和 J. Ma，“旋转不变噪声下尖峰矩阵模型的近似消息传递最优性”，《统计年刊》，第 54 卷，第 1 期，第 466–489 页，2026 年。[9] H. Chen、S. Liu 和 J. Ma，“具有最优谱初始化的矩形尖峰矩阵模型的正交近似消息传递”，*IEEE* 信息论汇刊，第 72 卷，第 10 期，第 7949–7986 页，2026 年。[10] Q. Chen、R. Skerk、J. Barbier、F. Camilli、J. Ma 和 H. Zhang，“旋转不变噪声下矩形尖峰矩阵模型的信息论极限”，arXiv:2610.16797，2026 年。[11] Y. Kabashima、F. Krzakala、M. M´ezard、A. Sakata 和 L. Zdeborov´a，“贝叶斯最优矩阵分解中的相变与样本复杂度”，*IEEE* 信息论汇刊，第 62 卷，4265，2016 年 7 月，第 4228 号，无页码。[12] A. Maillard、F. Krzakala、M. M´ezard 和 L. Zdeborov´a，“广延秩矩阵分解与去噪中平均场方程的微扰构造”，《统计力学杂志：理论与实验》，第 2022 卷，第 8 期，文章 083301，2022 年。[13] J. Barbier 和 N. Macris，“字典学习的统计极限：随机矩阵理论与谱副本方法”，《物理评论 *E*》，第 106 卷，第 2 期，文章 024136，2022 年。[14] F. Pourkamali 和 N. Macris，“具有旋转不变先验的贝叶斯广延秩矩阵分解”，载于《神经信息处理系统进展》（*NeurIPS*），第 36 卷，2023 年，第 24 025–24 073 页。[15] J. Barbier、F. Camilli、J. Ko 和 K. Okajima，“超越旋转不变性的广延秩对称矩阵去噪相图”，《物理评论 *X*》，第 15 卷，第 2 期，文章 021085，2025 年。

[16] J. Bun、R. Allez、J.-P. Bouchaud 和 M. Potters，“一般含噪矩阵的旋转不变估计器”，IEEE 信息论汇刊，第 62 卷，第 12 期，第 7475–7490 页，2016 年。[17] E. Troiani、V. Erba、F. Krzakala、A. Maillard 和 L. Zdeborov´a，“旋转不变矩形矩阵的最优去噪”，载于《数学科学与机器学习》（MSML）论文集，第 190 卷，2022 年，第 97–112 页。[18] I. D. Landau、G. C. Mel 和 S. Ganguli，“矩形随机矩阵之和的奇异向量与高秩信号的最优估计：广延尖峰模型”，《物理评论 E》，第 108 卷，第 5 期，文章 054129，2023 年。[19] F. Pourkamali 和 N. Macris，“高秩矩阵估计的矩形旋转不变估计器”，《信息与推断》，第 14 卷，015，2025 年，第 3 期，文章 iaaf，无页码。[20] G. Semerjian，“矩阵去噪：通过低阶多项式实现贝叶斯最优估计器”，《统计物理学杂志》，第 191 卷，第 10 期，文章 139，2024 年。[21] A. Maillard 、 E. Troiani 、 S. Martin 、 F. Krzakala 和 L. Zdeborov´a，“从二次数量样本中进行宽度广延神经网络的贝叶斯最优学习”，载于《神经信息处理系统进展》（NeurIPS），第 37 卷，2024 年，第 82 085–82 132 页。[22] V. Erba、E. Troiani、L. Biggio、A. Maillard 和 L. Zdeborov´a，“双线性序列回归：从高维词元的长序列中学习的模型”，《物理评论 X》，第 15 卷，第 2 期，文章 021092，2025 年。[23] Z. He、J. Ma 和 X. Yuan，“用于压缩鲁棒主成分分析的改进涡轮消息传递：算法设计与渐近分析”，IEEE 信息论汇刊，第 71 卷，第 2 期，第 1323–1361 页，2025 年。[24] J. Ma、X. Yuan 和 L. Ping，“具有部分 DFT 感知矩阵的涡轮压缩感知”，IEEE 信号处理快报，第 22 卷，第 2 期，第 158–161 页，2015 年。[25] J. Ma 和 L. Ping，“正交 AMP”，IEEE Access，第 5 卷，第 2020–2033 页，2017 年。[26] K. Takeuchi，“基于期望传播的酉不变测量信号恢复的严格动力学”，IEEE 信息论汇刊，第 66 卷，第 1 期，第 368–386 页，2020 年。[27] S. Rangan、P. Schniter 和 A. K. Fletcher，“向量近似消息传递”，IEEE 信息论汇刊，第 65 卷，第 10 期，第 6664–6684 页，2019 年。[28] M. Bayati 和 A. Montanari，“稠密图上的消息传递动力学及其在压缩感知中的应用”，IEEE 信息论汇刊，第 57 卷，第 2 期，第 764–785 页，2011 年。[29] Y. Wu 和 S. Verd´u，“均方误差维数”，IEEE 信息论汇刊，第 57 卷，第 8 期，第 4857–4879 页，2011 年。[30] E. J. Cand`es、X. Li、Y. Ma 和 J. Wright，“鲁棒主成分分析？”，《ACM 杂志》，第 58 卷，第 3 期，第 11:1–11:37 页，2011 年。[31] Z. Lin、M. Chen 和 Y. Ma，“用于精确恢复受污染低秩矩阵的增广拉格朗日乘子法”，arXiv:1009.5055，2010 年。[32] H. Cai、J.-F. Cai 和 K. Wei，“用于鲁棒主成分分析的加速交替投影”，《机器学习研究杂志》，第 20 卷，第 20 期，第 1–33 页，2019 年。[33] J. T. Parker、P. Schniter 和 V. Cevher，“双线性广义近似消息传递——第二部分：应用”，IEEE 信号处理汇刊，第 62 卷，第 22 期，第 5854–5867 页，2014 年。[34] R. B. Dozier 和 J. W. Silverstein，“大维信息加噪型矩阵极限谱分布的分析”，《多元分析杂志》，第 98 卷，第 6 期，第 1099–1122 页，2007 年。[35] M. Capitaine，“大信息加噪型矩阵特征值的精确分离现象：尖峰模型的应用”，《印第安纳大学数学杂志》，第 63 卷，第 6 期，第 1875–1910 页，2014 年。[36] P. Biane，“关于与半圆分布的自由卷积”，《印第安纳大学数学杂志》，第 46 卷，第 3 期，第 705–718 页，1997 年。[37] E. J. Cand`es、C. A. Sing-Long 和 J. D. Trzasko，“奇异值阈值化与谱估计器的无偏风险估计”，IEEE 信号处理汇刊，第 61 卷，第 19 期，第 4643–4657 页，2013 年。[38] A. Guionnet 和 J. Huang，“矩形球积分的渐近性”，《函数分析杂志》，第 285 卷，第 11 期，文章 110144，2023 年。[39] D. Guo、Y. Wu、S. Shamai 和 S. Verd´u，“高斯噪声中的估计：最小均方误差的性质”，IEEE 信息论汇刊，第 57 卷，第 4 期，第 2371–2385 页，2011 年。[40] T. Dupic 和 I. P´erez Castillo，“Wishart 稀疏随机矩阵乘积的谱密度。第一部分：稠密情形”，arXiv:1401.7802，2014 年。[41] B. Vandereycken，“通过黎曼优化进行低秩矩阵补全”，《SIAM 优化杂志》，第 23 卷，第 2 期，第 1214–1236 页，2013 年。[42] U. Helmke 和 J. B. Moore，《优化与动力系统》，《通信与控制工程》丛书。英国伦敦：Springer-Verlag，1994 年。