arXiv:2611.29182v1 [math.LO] 22 Nov 2026

强偶然性逻辑

范杰
中国科学院哲学研究所；中国科学院大学人文学院
jiefan@ucas.ac.cn

摘要

本文受偶然性和强可能性概念的启发，提出一种可称为“强偶然性”的概念。这一概念可视为偶然性与强可能性的结合。我们研究以强偶然性为唯一原始模态的逻辑，包括其双模拟概念、表达力、框架可定义性和公理化。结果表明，即使在 S5 模型类上，该逻辑与标准模态逻辑及偶然性逻辑的表达力也不可比较；而在 S5 模型类上，其表达力弱于强可能性逻辑和弱必然性逻辑。此外，由于在语义中引入不等式使完备性证明变得困难得多，我们没有通过典范模型构造来证明完备性，而是将相关证明系统的可靠性与强完备性归约为文献中现有证明系统的可靠性与强完备性。

关键词：强偶然性、偶然性、强可能性、双模拟、公理化

1 引言

众所周知，标准模态逻辑涉及必然性和可能性的概念。在语义上，如果一个公式在所有可达（可能）世界中都为真，则该公式是必然的；如果一个公式在某些可达世界中为真，则该公式是可能的。关于标准模态逻辑，可参阅任一本模态逻辑教科书（例如 [1]）。遵循标准模态逻辑的传统，我们使用 $\Box$ 和 $\Diamond$ 分别表示必然性和可能性的算子。

一方面，可能性的概念涉及单向可能性，即可能为真。相比之下，如果考虑双向可能性，也就是可能为真且可能为假，那么我们就得到偶然性的概念 [2, 15]。从语义上说，如果一个公式在某些可达世界中为真，在另一些可达世界中为假，那么它就是偶然的；否则，它就是非偶然的，也就是说，所有可达世界对该公式的真值都一致。关于偶然性与非偶然性的逻辑研究已有不少，例如参见 [16, 4, 12,

14, 22, 20, 10, 11, 6]。遵循（非）偶然性逻辑的传统，我们分别用Δ 和 ∇ 表示非偶然性与偶然性算子。

另一方面，必然性与可能性的关系语义不仅涉及非现实世界（即其他世界），也涉及现实世界，也就是被评价世界。非现实世界的概念与现实主义和可能主义之争、反事实推理及想象有关，参见 [8]及其中的参考文献。若只考虑非现实世界，我们便得到弱必然性和强可能性的概念。从语义上说，如果一个公式在所有可达的非现实世界中都为真，那么它就是弱必然的；如果一个公式在某些可达的非现实世界中为真，那么它就是强可能的。关于强可能性与弱必然性的逻辑研究，请参见 [3, 8]。遵循 [3], 中强可能性与弱必然性逻辑（亦即 [8], 中的非现实可能世界逻辑）的传统，我们分别用 $\boxdot$和 $\diamondsuit$ 表示弱必然性与强可能性算子。

受偶然性和强可能性概念的启发，我们提出一个可称为“强偶然性”的概念。在语义上，如果一个公式在某些可及的其他世界中为真，同时在另一些可及的其他世界中为假，则该公式是强偶然的；否则，它就是弱非偶然的。强偶然性的概念可以看作偶然性与强可能性的混合：如同偶然性，它考察双向可能性；如同强可能性，它只涉及非现实世界。在下文中，我们将分别使用和来表示强偶然性与弱非偶然性的算子。

弱必然性的概念与其他位置或其他时间的概念相关，因为后者是前者在可及关系为全关系时的一个特殊实例（见注 1），在这种情况下，$\boxdot\varphi$ 表示“φ 在其他所有位置（或其他所有时间）都为真” [18, 21, 19, 5, 13]。类似地，如果可及关系是全关系，φ表示“除这个世界之外的任意两个世界在 φ的真值上都一致”。这暗示着弱必然性与弱非偶然性的概念之间存在某些关系。事实上，正如我们将要看到的，这两个概念之间的关系类似于必然性与非偶然性概念之间的关系。

这使我们能够提出这样的问题：当两个世界（或许位于同一框架上的不同模型中）验证相同的公式时，它们是否必然验证相同的 $\Box$-公式？对于任何具有 T公理的模态逻辑而言，这个问题对于 Δ-公式和 $\Box$-公式都显而易见，因为在这种情况下，我们可以用 Δ （以及合取）显式定义 $\Box$，即 $\Box\varphi =_{df} \Delta\varphi \wedge \varphi$，正如 20 世纪 60 年代鲁特利 - 蒙哥马利以非偶然性为基础的模态逻辑 [16, 17] 中那样。但在这里，我们并没有 $\Box\varphi$ （或 $\boxdot\varphi$）与 $\varphi \wedge \varphi$之间的自动等价。事实上，正如我们将在下文证明的那样，即使是在 S5 模型类上，$\Box$ 和 $\boxdot$ 都无法用.....定义。这是和 Δ之间的一个重要区别。

本文研究强偶然性逻辑。其余内容安排如下。第2 节介绍强偶然性逻辑 $\mathcal{L}(\ )$ 及相关逻辑的语言和语义。随后，我们在第 $\mathcal{L}(\ )$ 节中定义适用于 3的双模拟概念，然后研究 4.1的表达力（第 4.2节）和框架可定义性（第$\mathcal{L}(\ )$节）。为

通过归约方法在各种框架类上对 $\mathcal{L}(\ )$ 进行完全公理化（第7节），我们在第 5 节引入非自反约化的概念，并在第 $\mathcal{L}(\Delta)$ 节回顾 6在各种框架类上的公理化。最后，我们在第 8节总结未来的研究工作。

2 句法与语义

在本文中，我们始终令$\mathbf{P}$ 为一个非空的命题变元集合。接下来，我们将介绍本文涉及的逻辑的语言，但主要关注强偶然性逻辑。

定义 1. 语言 L 递归定义如下:

$$\varphi \quad := \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \Box\varphi \mid \Delta\varphi \mid \boxdot\varphi \mid \blacktriangle\varphi,$$

其中 $p \in \mathbf{P}$。仅使用构造 $\Box\varphi$ ，即可得到标准模态逻辑的语言 $\mathcal{L}(\Box)$ （参见例如 [1]）；仅使用构造 $\Delta\varphi$ ，即可得到偶然性逻辑的语言$\mathcal{L}(\Delta)$ （参见例如 [16, 12]）；仅使用构造 $\boxdot\varphi$，即可得到 $\mathcal{L}(\boxdot)$ 所指的非现实可能世界逻辑的语言；在 [8], 中，该逻辑被称为“强可能性与弱必然性逻辑” [3]；仅使用构造 $\blacktriangle\varphi$ ，即可得到强偶然性逻辑的语言 $\mathcal{L}(\ )$ 。

直观地说， $\Box\varphi$ 读作“必然 φ”， $\Delta\varphi$ 读作“ φ是非偶然的”， $\boxdot\varphi$ 读作“弱必然 φ”，而$\blacktriangle\varphi$ 读作“ φ是弱非偶然的”。其他联结词按通常方式定义。特别地，我们将 $\Diamond\varphi$ （读作“可能 φ”）、 $\nabla\varphi$ （读作“ φ是偶然的”）、 $\diamondsuit\varphi$（读作“强可能 φ”）和 $\blacktriangledown\varphi$ （读作“ φ是强偶然的”）分别作为 $\neg\Box\neg\varphi$、 $\neg\Delta\varphi$、$\neg\boxdot\neg\varphi$ 和 $\neg \bullet \varphi$ 的缩写。

语言 L 在（Kripke）模型上得到解释。模型是一个三元组 $\mathbf{M} = W, R, V$，其中 W是一个非空的可能世界集合， R是定义在 W上的二元关系，称为“可及关系”， V 是一个赋值。框架是不带赋值的模型。指点模型是由一个模型及其中的一个世界组成的有序对。我们用 S5 模型表示自反且欧几里得的模型。我们分别用 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{S}5$表示所有模型的类以及自反且欧几里得模型的类。此外，我们分别用 K、 T、 B和TB表示所有框架的类、自反框架的类、对称框架的类以及自反对称框架的类。

定义 2. 给定一个指点模型（$\mathbf{M}\ w$），L 的语义递归定义如下

。[1]

M $w \vDash p$	$\Longleftrightarrow$	$w \in V(p)$
M $w \vDash \neg\varphi$	$\Longleftrightarrow$	M $w \nvDash \varphi$
M $w \vDash \varphi \wedge \psi$	$\Longleftrightarrow$	M $w \vDash \varphi$ 和 M $w \vDash \psi$
M $w \vDash \Box\varphi$	$\Longleftrightarrow$	对每个 $u \in W$，如果 wRu，那么 M $u \vDash \varphi$
M $w \vDash \Delta\varphi$	$\Longleftrightarrow$	对每个 u，$v \in W$，如果 wRu 且 wRv， 那么 (M $u \vDash \varphi \Longleftrightarrow$ M $v \vDash \varphi$)
M $w \vDash \boxdot\varphi$	$\Longleftrightarrow$	对于每个 $u \in W$，如果 wRu 且 $w \neq u$，那么 M $u \vDash \varphi$
M $w \vDash \triangle\!\!\!\!\cdot\,\varphi$	$\Longleftrightarrow$	对于每个 u，$v \in W$，如果 wRu 且 $w \neq u$ 且 wRv 且 $w \neq v$， 那么 (M $u \vDash \varphi \Longleftrightarrow$ M $v \vDash \varphi$)

我们称 φ 在 M 中的 w 处是真的，如果 M $w \vDash \varphi$；称 φ 在模型 M 上有效，记为 M $\vDash \varphi$，如果对于 M 中的所有 w，M $w \vDash \varphi$；称 φ 在模型类 $\mathbb{M}$ 上有效，记为 $\mathbb{M} \vDash \varphi$，如果对于 $\mathbb{M}$中的所有 M，M $\vDash \varphi$；称 φ 在框架 F 上有效，记为 F $\vDash \varphi$，如果对于基于 F 的所有模型 M，M $\vDash \varphi$；称 φ 在框架类F上有效，记为 $F \vDash \varphi$，如果对于 F中的所有框架 F，F $\vDash \varphi$；当 F 是所有框架的类时，我们还称 φ 是有效的。

其他算子的语义也很容易计算。

M $w \vDash \Diamond\varphi \Longleftrightarrow$ 对于某个 $u \in W$，wRu 且 M $u \vDash \varphi$M $w \vDash \nabla\varphi \Longleftrightarrow$ 对于某个 u，$v \in W$，wRu 且 wRv 且 M $u \vDash \varphi$ 且 M $v \nvDash \varphi$M $w \vDash \diamond\!\!\!\!\cdot\,\varphi \Longleftrightarrow$ 对于某个 $u \in W$，wRu 且 $w \neq u$ 且 M $u \vDash \varphi$M $w \vDash \triangledown\!\!\!\!\cdot\,\varphi \Longleftrightarrow$ 对于某个 $u \in W$，wRu 且 $w \neq u$ 且 M $u \vDash \varphi$ 且对于某个 $v \in W$，wRv 且 $w \neq v$ 且 M $v \nvDash \varphi$

可以验证，$\vDash \diamond\!\!\!\!\cdot\,\varphi \to \Diamond\varphi$ 但 $\nvDash \Diamond\varphi \to \diamond\!\!\!\!\cdot\,\varphi$，且 $\vDash \Box\varphi \to \boxdot\varphi$ 但 $\nvDash \boxdot\varphi \to \Box\varphi$。因此，$\diamond\!\!\!\!\cdot$ 在演绎上强于$\Diamond$，而 $\boxdot$ 在演绎上弱于 $\Box$。这就是为什么分别用“强可能性”和“弱必然性”来称呼 $\diamond\!\!\!\!\cdot$ 和 $\boxdot$。类似地，由于 $\vDash \triangledown\!\!\!\!\cdot\,\varphi \to \nabla\varphi$ 但 $\nvDash \nabla\varphi \to \triangledown\!\!\!\!\cdot\,\varphi$，且$\vDash \Delta\varphi \to \triangle\!\!\!\!\cdot\,\varphi$ 但 $\nvDash \triangle\!\!\!\!\cdot\,\varphi \to \Delta\varphi$，我们分别用“强偶然性”和“弱非偶然性”来称呼和。$\triangledown\!\!\!\!\cdot$ $\triangle\!\!\!\!\cdot$

我们还可以采用以下关于 $\Delta$and 的等价语义：$\triangle\!\!\!\!\cdot$

M $w \vDash \Delta\varphi \Longleftrightarrow$ 或者 对于每个 $u \in W$，如果 wRu，那么 M $u \vDash \varphi$或者 对于每个 $u \in W$，如果 wRu，那么 M $u \nvDash \varphi$.M $w \vDash \triangle\!\!\!\!\cdot\,\varphi \Longleftrightarrow$ 或者 对于每个 $u \in W$，如果 wRu and $w \neq u$，那么 M $u \vDash \varphi$或者 对于每个 $u \in W$，如果 wRu and $w \neq u$，那么 M $u \nvDash \varphi$.

容易看出，尽管 和 Δ 的语义一般而言不同，但在非自反模型上二者相同，也就是说，在满足以下条件的模型 W，R，V 上相同：

$$\text{for all } x, y \in W, \text{ if } xRy, \text{ then } x \neq y.$$

[1]请注意，在子句 $\boxdot\varphi$中，如果 R是全域关系（即，wRu对于所有 w，$u \in W$），那么我们就得到了文献中“其他位置”或“其他时间”的概念，参见 [18, 21, 19, 5, 13]。

回顾一下， Δ 一般而言可用 $\Box$ 定义，因为 $\models \Delta\varphi \leftrightarrow \Box\varphi \vee \Box\neg\varphi$；但反过来并不成立，尽管在自反模型上， $\Box$ 确实可用 Δ 定义，因为 $\Box\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi \wedge \varphi$ 在自反模型类上有效。尽管如此，$\Box$ 几乎可以用 Δ 来定义，这意味着在给定某个前置条件时， $\Box$ 可用 Δ 定义；更具体地说， $\neg\Delta\psi \rightarrow (\Box\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi \wedge \Delta(\psi \rightarrow \varphi))$ 是一个有效式。所有这些也适用于 和 的情形。事实上，根据语义，很容易验证 $\models \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \varphi$，因此 一般而言可用 定义。此外， φ 一般而言不能用 来定义——事实上，正如我们将要证明的，这一不可定义性结果甚至适用于 S5 模型。尽管如此， 几乎可以用 来定义，如下所示。

命题 3。 $\models \neg\varphi\psi \rightarrow (\varphi\varphi \leftrightarrow \varphi\varphi \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$。

证明。 设 $\mathbf{M} = W, R, V$ 是一个模型，并且 $w \in W$。假设 $\mathbf{M}, w \models \neg\varphi\psi$，需要证明 $\mathbf{M}, w \models \varphi\varphi \leftrightarrow \varphi\varphi \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$。

假设 $\mathbf{M}, w \models \varphi\varphi$。由 $\varphi\varphi$ 在 w 处为真，直接可推出的不仅是 φ 为真，而且 $(\psi \rightarrow \varphi)$ 在 w 处也为真（由于 的所有非实际可达世界都满足 φ，它们也满足较弱的 $\psi \rightarrow \varphi$）。

反过来，采用归谬法，假设 $\mathbf{M}, w \models \varphi\varphi \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$，但 $\mathbf{M}, w \not\models \varphi\varphi$。那么存在 $u \in W$，使得 wRu 且 $w \neq u$ 且 $\mathbf{M}, u \not\models \varphi$。根据假设，存在 v_1， v_2，使得 wRv_1 且 wRv_2 且 $w \neq v_1$ 且 $w \neq v_2$且 $\mathbf{M}, v_1 \models \psi$且 $\mathbf{M}, v_2 \not\models \psi$，从而 $\mathbf{M}, v_2 \models \psi \rightarrow \varphi$。然后利用 $\mathbf{M}, w \models(\psi \rightarrow \varphi)$，我们可以得到 $\mathbf{M}, v_1 \models \psi \rightarrow \varphi$，从而 $\mathbf{M}, v_1 \models \varphi$。于是 $\mathbf{M}, w \not\models \varphi\varphi$：矛盾。 □

3 双模拟

回想一下，针对 $\mathcal{L}(\Box)$、$\mathcal{L}(\Delta)$和$\mathcal{L}(\varphi)$ 的双模拟概念已在文献中提出，分别参见 [1], [10], 和 [3], 。然而，正如我们将在第 4.1 节看到的，这些概念都不适用于 $\mathcal{L}(\ )$。本节将为 $\mathcal{L}(\ )$ 给出一种合适的双模拟概念。

定义4。 设 $\mathbf{M} = W, R, V$ 是一个模型。非空二元关系 Z是 $\mathbf{M}$ 上的-双模拟，若 wZv 蕴含以下条件成立：

(Var) 对所有 $p \in \mathbf{P}$， $w \in V(p)$ 当且仅当 $w' \in V(p)$;

(Zig) 若 wRx 和 $w \neq x$，则如果存在 u, v 使得 wRu 和 wRv 和 $w \neq u$和 $w \neq v$ 且 $(u, v) \notin Z$，则存在 x' 使得 $w'Rx'$ 和 $w' \neq x'$和 xZx';

(Zag) 若 $w'Rx'$ 且 $w' \neq x'$，那么如果存在 u'， v' 使得 $w'Ru'$ 且 $w'Rv'$且 $w' \neq u'$ 且 $w' \neq v'$ 且（u'， v'） $\notin Z$，那么就存在 x 使得 wRx且 $w \neq x$ 且 xZx'。

我们称 $(\mathbf{M}, w)$ 与 $(\mathbf{M}', w')$ 是 -双相似的，记作 $(\mathbf{M}, w) \leftrightarrow (\mathbf{M}', w')$，当且仅当在 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{M}'$ 的不交并上存在一个 - 双模拟 Z，使得 wZw'。

这个定义的灵感来自 $\boxdot$ 关于（命题 3）中的近似可定义性图式。回顾一下，该图式表明，给定条件 $\boxdot$，可以定义，其中条件 $\neg\Diamond\psi$ 对某个 ψ 成立。该条件对应于一个前置条件，即当前世界可以看到两个彼此不$\mathcal{L}(\ )$-等价且不同于当前世界的后继世界。因此，我们可以修改 $\boxdot$-Zig 和 $\boxdot$-Zag 条件的定义$\diamond$-双模拟[2] 中的 [3]，以适应该语义条件，从而得到 -Zig 和 -Zag 条件。请注意，出于技术上的便利，我们在单个模型内定义 -双模拟，因为新的 Zig 和 Zag 条件要求一个关于不同于当前世界的“兄弟”世界的前置条件，即非- -等价性的结构对应物。基于 -双模拟，我们定义不同模型之间的 -双相似。这类似于 Δ-双模拟与 Δ-双相似的情形 [10，定义 3。3]。

我们不加证明地声称，-双相似是一种等价关系。下述结果表明，L( )-公式在-双相似下是不变的；换言之，-双相似蕴含-等价。

命题5. 设 $\mathrm{M}=W,R,V$ 和 $\mathrm{M}'=W',R',V'$，且 $w\in W$和$w'\in W'$。若 $(\mathrm{M},w)\leftrightarrow(\mathrm{M}',w')$，则 $(\mathrm{M},w)\equiv(\mathrm{M}',w')$。

证明. 假设 $(\mathrm{M},w)\leftrightarrow(\mathrm{M}',w')$。那么，在 M 与 M′ 的不交并上存在一个-bisimulation$Z$，使得 wZw'。我们对 φ 进行归纳，其中非平凡的情形是 φ。

假设 $\mathrm{M},w\not\models\Diamond\varphi$。那么存在 u,v，使得 wRu 且 wRv且 $w\neq u$ 且 $w\neq v$ 且 $\mathrm{M},u\models\varphi$ 且 $\mathrm{M},v\not\models\varphi$。根据归纳假设，$(u,v)\notin Z$。然后利用 (-Zig) 以及 wRu 和 $w\neq u$，我们推得存在 u'，使得 $w'R'u'$ 且 $w'\neq u'$ 且 uZu'，从而 $\mathrm{M}',u'\models\varphi$。类似地，由 wRv 和 $w\neq v$，我们可以推得存在 v'，使得 $w'R'v'$ 且$w'\neq v'$ 且 vZv'，从而 $\mathrm{M}',v'\not\models\varphi$。因此，$\mathrm{M}',w'\not\models\Diamond\varphi$。反向情形类似。□

反之，在像有限模型上，-等价蕴含双相似。若模型 $\mathrm{M}=W,\ R,\ V$ 满足对所有 $w\in W$，$R(w),\ =\{u\in W\mid wRu\}$ 都是有限的，则称其为像有限模型。

定理 6（L( ) 的 Hennessy-Milner 定理）。设 $\mathrm{M}=W,\ R,\ V$ 和 $\mathrm{M}'=W',\ R',\ V'$ 是像有限模型，$w\in W$且 $w'\in W'$。那么

$$(\mathcal{M},w)\equiv_{\Diamond}(\mathcal{M}',w')\text{ iff }(\mathcal{M},w)\leftrightarrows_{\Diamond}(\mathcal{M}',w').$$

[2]L($\boxdot$) 的双模拟（在 [3, 定义 1], 中称为‘$\diamond$-双模拟’）定义如下（我们对定义稍作修改，以便更清楚地进行比较）。设 $\mathrm{M}=W,R,V$ 和 $\mathrm{M}'=W'R',V'$ 为模型。若二元关系 $Z\subseteq W\times W'$ 满足 wZw' 蕴含以下条件，则称其为 M 与 M′ 之间的 $\diamond$-*bisimulation*，记作 $Z:\mathrm{M}\leftrightarrow_{\diamond}\mathrm{M}'$：(Var) 对所有 $p\in\mathrm{P}$，$w\in V(p)$ 当且仅当 $w'\in V'(p)$；($\boxdot$-Zig) 若 wRx 且 $w\neq x$，则存在 x' 使得 $w'R'x'$、$w'\neq x'$ 且 xZx'；($\boxdot$-Zag) 若 $w'R'x'$ 且 $w'\neq x'$，则存在 x 使得 wRx、$w\neq x$ 且 xZx'。若存在 M 与 M′ 之间的 $\diamond$-双模拟 Z，使得 $(w,w')\in Z$，则称 (M,w) 与 (M',w') $\diamond$-*bisimilar*，记作 $(\mathrm{M},w)\leftrightarrow_{\diamond}(\mathrm{M}',w')$。

证明。 根据命题 5，只需证明“仅当”部分。为此，我们需要证明 $\equiv$ 是 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$的不交并上的一个 双模拟。条件 (Var) 显然成立。接下来，我们只证明 $\equiv$ 满足 (-Zig)，因为 (-Zag) 的证明类似。

假设 $w \equiv w'$, $wR_{\mathcal{M}}$ and wRv and $w \neq u$ and $w \neq v$ and $u \not\equiv v$and $wR_{\mathcal{M}}x$ and $w \neq x$，求一个 x'，使得 $w'R'x'$ and $w' \neq x'$ and $x \equiv x'$。令 $S' = \{u' \mid w'R'u'$ and $w' \neq u'\}$。根据 $u \not\equiv v$，存在 $\varphi \in$ L( )，使得 M $u \vDash \varphi$ and M $v \nvDash \varphi$。于是 M $w \nvDash \Delta\varphi$。因此 M′, $w' \nvDash \Delta\varphi$，故 S' 必非空。此外，由于 M′ 是像有限的， S' 必为有限集，设为$S' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$。若对每个 $x'_i \in S'$，都存在$\psi_i \in$L( )，使得 M $x \vDash \psi_i$ and M′,$x'_i \nvDash \psi_i$，那么 M $x \vDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$and M′, $x'_i \nvDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$，从而 M′, $x'_i \vDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$。因此 M′, $w' \vDash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ 且 M′, $w' \vDash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi)$。再次利用假设，我们推得 M $w \vDash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ 且 M$w \vDash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi)$。由 M $w \vDash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ 和 M $x \vDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$,$w \neq x$and $wRu$and $wRv$and $w \neq u$and $w \neq v$，可得 M $u \vDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$and M $v \vDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$。于是 M $u \vDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$但 M $v \nvDash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$，这与 M $w \vDash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi)$ 矛盾。这表明存在$\chi' \in S'$ 使得 $x \equiv x'$，因此存在 χ' 使得 $w'R'x'$ and$w' \neq x'$and $x \equiv x'$。

□

4 表达力与框架可定义性

本节将比较语言 L( ) 与语言 L(Δ)、L(□) 和 L(⊡) 的相对表达力，并探讨 L( ) 的框架可定义性。

4.1 表达力

我们先讨论表达力。事实证明，在 S5 模型类上，L( ) 与 L(Δ)（以及 L(□)）的表达力不可比；而在 S5 模型类上，L( ) 的表达力弱于 L(⊡)。首先，我们介绍相关概念。

定义7。 设语言 L_1 和 L_2 在同一个模型类 $\mathbb{M}$ 上得到解释。

- L_2 在 $\mathbb{M}$ 上至少同样具有表达力 L_1，记作：$L_2 \geq L_1[\mathbb{M}]$，当且仅当对于任意$\varphi \in L_1$，都存在 $\psi \in L_2$，使得对于 $\mathbb{M}$ 中的任意 M 以及 M 中的任意 w，都有 M $w \vDash \varphi$ 当且仅当 M $w \vDash \psi$。
- L_2 在 $\mathbb{M}$上的表达力强于L_1，记作：$L_2 > L_1[\mathbb{M}]$，若 $L_2 \geq L_1[\mathbb{M}]$ 且 $L_1 \not\geq L_2[\mathbb{M}]$。在这种情况下，我们也称 L_1 在 $\mathbb{M}$上的表达力弱于L_2。
- L_1 和 L_2 在 $\mathbb{M}$ 上的表达力不可比，记作：$L_1 \asymp L_2[\mathbb{M}]$，若 $L_1 \not\geq L_2[\mathbb{M}]$ 且 $L_2 \not\geq L_1[\mathbb{M}]$。

4.1.1 $\mathcal{L}(\ )$与$\mathcal{L}(\Delta)$

首先，在S5 模型类上，L( ) 和 L(Δ) 的表达力不可比。这意味着在 S5模型类上， Δ和彼此都无法定义。

命题8. L( )≱L(Δ)[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$-模型类上，L( ) 的表达力并不至少同样具有 L(Δ) 的表达力。

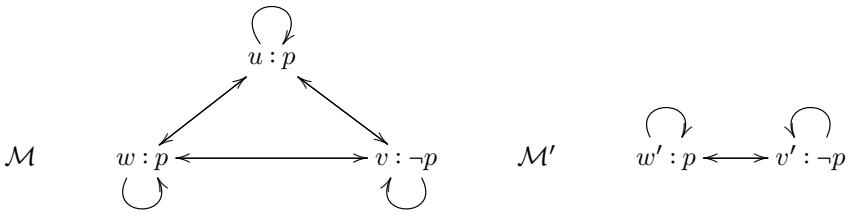
证明。 考虑以下 $S5$-模型:



定义 $Z=\{(w,w')\}$。显然，(M w) $\leftrightarrow$ (M′,w')。根据命题 5，L( ) 无法区分 (M w) 和 (M′,w')。然而，这两个带指定世界的模型可以由 Δp 区分，因为 M $w\vDash\Delta p$和 M′,$w'\nvDash\Delta p$。因此，L( )≱L(Δ)[$\mathbb{S}5$]。 □

命题9. L(Δ)≱L( )[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$-模型类上，L(Δ) 的表达力并不至少同样具有 L( ) 的表达力。

证明。 考虑以下 $S5$模型:



定义 $Z=\{(w,w'),(u,w'),(v,v')\}$。显然，(M w) $\leftrightarrow_{\Delta}$ (M′,w')。根据 [10,命题 3，5], L(Δ)无法区分(M w)和(M′,w')。然而，p可以区分这两个带指定世界的模型，因为M $w\nvDash\Diamond p$ 和M′,$w'\vDash\Diamond p$。 □

推论10。 L( ) ≂L(Δ)[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$模型类上，L( )和L(Δ)的表达力不可比。

4.1.2 $\mathcal{L}(\ )$与 $\mathcal{L}(\Box)$

其次，在S5模型类上，L( )和L(□)的表达力不可比。这意味着在S5模型类上，既不能用彼此来定义 □ ，也不能用彼此来定义。

命题 11. L( )≱L(□)[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$-模型类上，L( ) 并非至少同样具有表达力的程度，无法达到 L(□)。

证明。 使用命题 8 证明中的模型。注意，$\mathcal{M}$ $w\vDash\Box p$ 和$\mathcal{M}'$， $w'\nvDash\Box p$。 □

因此，即使在 $S5$模型类上，当两个带指定世界的模型验证相同的 -公式时，它们也不一定验证相同的 □公式。这意味着，即使在 S5 模型类上， □ 也不可用定义。正如引言中所述，这不同于Δ的情形，在后者中， □ 可用 Δ 在自反模型类上定义。

命题12。 L(□)⪰L( )[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$ 模型类上，L(□) 的表达力不至少与 L( ) 相同。

证明。 使用命题 9 的证明中的模型。注意 $(\mathcal{M}\ w) \leftrightarrow_{\Box} (\mathcal{M}', w')$。 □

推论13。 L( ) ≍L(□)[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$ 模型类上，L( ) 与 L(□) 的表达力不可比。

4.1.3 $\mathcal{L}(\ )$与$\mathcal{L}(\boxdot)$

第三，在所有模型类上，L(⊡) 至少与 L( ) 同样具有表达力；在 S5 模型类上，L( )的表达力弱于 L(⊡)。这意味着，在 S5 模型类上， ⊡ 不能用 来定义；这与在自反模型类上， □ 可以用 Δ 定义的事实相矛盾。

命题14。 L(⊡) ≥ L( )[$\mathbb{K}$]。也就是说，在所有模型构成的类上，L(⊡)至少与L( )同样具有表达力。

证明。 </style}这是因为可以用 ⊡定义，如 $\vDash \Diamond\varphi \leftrightarrow (\boxdot\varphi \vee \boxdot\neg\varphi)$。 □

命题15。 L(⊡) >L( )[$\mathbb{S}5$]。也就是说，在 $S5$-模型构成的类上，L(⊡)比L( )更具表达力。

证明。根据命题 14，只需证明L( )⪱L(⊡)[$\mathbb{S}5$]。使用命题 8 的证明中提到的模型M和M′ 。我们已经证明，L( )无法区分(M w)和(M′, w')。然而，这两个带指定世界的模型可以通过 $\boxdot p$区分，因为M $w \vDash \boxdot p$ 和M′, $w' \nvDash \boxdot p$。 □

4.2 框架可定义性

现在我们考察 L( ) 的框架可定义性。结果表明，最常见的五种框架性质在 L( ) 中都不可定义。这与 L(Δ) 中的情形类似。

根据语义，以下结果显然成立。

事实 16。 设 F $= W$， R 是一个框架。若对所有 $w \in W$, $|\{u \in W \mid wRu$ 和 $w \neq u\}| < 2$ 都成立，则对所有 $\varphi \in \mathcal{L}(\ )$，都有 F $\vDash \Diamond\varphi$。

命题 17。 串行性、自反性、传递性、对称性和欧几里得性这些框架性质无法在 L( ) 中定义。

证明。 考虑以下框架：



根据事实 16，我们可以证明 (∗)：对于所有 $\varphi \in \mathcal{L}(\ )$，$\mathbf{F} \vDash \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{F}' \vDash \varphi$。

注意，F 是串行的（分别为自反的、传递的、对称的和欧几里得的），但 F 不是。若串行性（分别为自反性、传递性、对称性和欧几里得性）由一组 L( )-公式定义，记作 Γ，那么，由于 F′ 是串行的（分别为自反的、传递的、对称的和欧几里得的），我们有 $\mathbf{F}' \vDash \Gamma$。根据（∗），我们也应有 $\mathbf{F} \vDash \Gamma$，因此 F 也是串行的（分别为自反的、传递的、对称的和欧几里得的）：矛盾。 □

5 非自反约化

为了证明特殊框架上的证明系统的完备性，我们需要使用 [8, 定义 2]中提出的自反约简概念。直观来说，框架的非自反约化是通过省略原框架中的所有自反箭头得到的。更形式化地说，

定义18。 [非自反约化] 设 $\mathbf{F} = W, R$ 是一个框架。它的非自反约化是 $\mathbf{F}^{-T} = W, R^{-T}$，其中

$$R^{-T} = R \backslash \{(w, w) \mid w \in W\}.$$

此外，如果 $\mathbf{F}^{-T}$ 是 F 的非自反约化，则称 $\mathbf{M}^{-T} = \mathbf{F}^{-T}, V$ 是 $\mathbf{M} = \mathbf{F}\ V$ 的非自反约化。如果 $\mathbf{F} \in \mathfrak{C}$ 蕴含 $\mathbf{F}^{-T} \in \mathfrak{C}$，则称框架类 $\mathfrak{C}$ 在去自反化下封闭。

容易看出，每个框架/模型都有唯一的非自反约化。

L( )-公式的可满足性和框架有效性在非自反约化的概念下是不变的。

命题 19。 设 $\mathbf{F}^{-T} = W, R^{-T}$ 是 $\mathbf{F} = W, R$ 的非自反约化，并设 $\mathbf{M} = \mathbf{F}\ V$ 和 $\mathbf{M}^{-T} = \mathbf{F}^{-T}, V$。则对所有 $w \in W$，对所有 $\varphi \in \mathrm{L}(\ )$，我们有

$$\mathcal{M}, w \vDash \varphi \iff \mathcal{M}^{-T}, w \vDash \varphi.$$

因此，对所有 $\varphi \in \mathrm{L}(\ )$，我们有 $\mathbf{F} \vDash \varphi \Longleftrightarrow \mathbf{F}^{-T} \vDash \varphi$.

证明。 证明对 φ 进行归纳，其中非平凡情形是 φ。

假设 $\mathbf{M}\ w \nVdash \varphi$。则存在 $u,\ v \in W$ 使得 wRu 且 $w \neq u$ 且 wRv 且 $w \neq v$ 且 $\mathbf{M}\ u \vDash \varphi$ 且 $\mathbf{M}\ v \nVdash \varphi$。显然，$wR^{-T}u$ 且 $wR^{-T}v$。根据归纳假设，我们有 $\mathbf{M}^{-T},\ u \vDash \varphi$ 且 $\mathbf{M}^{-T},\ v \nVdash \varphi$。因此，$\mathbf{M}^{-T},\ w \nVdash \varphi$。

反过来，假设 $\mathbf{M}^{-T}, w \nVdash \varphi$。那么存在 $u, v \in W$ 使得 $wR^{-T}u$ 且 $w \neq u$ 且 $wR^{-T}v$ 且 $w \neq v$ 且 $\mathbf{M}^{-T}, u \vDash \varphi$ 且 $\mathbf{M}^{-T}, v \nVdash \varphi$。由于 $R^{-T} \subseteq R$，可得 wRu 且 wRv。根据归纳假设，我们有 $\mathbf{M}\ u \vDash \varphi$ 且 $\mathbf{M}\ v \nVdash \varphi$。因此，$\mathbf{M}\ w \nVdash \varphi$。 □

给定一个框架类 $\mathfrak{C}$，定义 $\mathfrak{C}^{-T} = \{\mathbf{F}^{-T} \mid \mathbf{F} \in \mathfrak{C}\}$，其中 $\mathbf{F}^{-T}$ 是 $\mathbf{F}$ 的无自反约化。换言之，$\mathfrak{C}^{-T}$ 是 $\mathfrak{C}$ 中每个框架的无自反约化所组成的集合。

引理 20。设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{C}'$ 为两个框架类。若 $\mathfrak{C}^{-T} = \mathfrak{C}'^{-T}$，则对于所有$\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{L}(\ )$，我们有

$$\Gamma \models_{\mathfrak{C}} \varphi \text{ iff } \Gamma \models_{\mathfrak{C}'} \varphi.$$

证明。根据命题 19，我们可以证明 $\Gamma \models_{\mathfrak{C}} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_{\mathfrak{C}^{-T}} \varphi$，并且 $\Gamma \models_{\mathfrak{C}'} \varphi$ 当且仅当$\Gamma \models_{\mathfrak{C}'^{-T}} \varphi$。由于 $\mathfrak{C}^{-T} = \mathfrak{C}'^{-T}$，因此 $\Gamma \models_{\mathfrak{C}} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_{\mathfrak{C}'} \varphi$. □

设 X 为一个框架类。容易验证，若 $T \subseteq X$，则 $X^{-T} = T^{-T}$；若 $TB \subseteq X \subseteq B$，则 $TB^{-T} = X^{-T} = B^{-T}$。于是根据引理 20，我们得到 $\mathcal{L}(\ )$的以下语义性质。

命题 21。设 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}(\ )$。那么

(1) 当 $T \subseteq X$, $\Gamma \models_X \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_T \varphi$;

(2) 当 $TB \subseteq X \subseteq B$, $\Gamma \models_{TB} \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_X \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \models_B \varphi$。

我们以以下结果结束本节，该结果表明 $\mathrm{L}(\ )$ 对自反性不敏感；也就是说，在给定框架中，添加或删除自反箭头不会改变 $\mathrm{L}(\ )$ 公式的有效性/可满足性。

命题 22. 设 $\mathbf{M} = W$, R, V 和 $\mathbf{M}' = W$, R', V 是满足 R 且 R' 仅在自反箭头对上不同的模型。那么，对于所有 $\varphi \in \mathrm{L}(\ )$ 以及所有$w \in W$，我们有

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ iff } \mathcal{M}', w \models \varphi.$$

证明. 注意，$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 必须具有相同的非自反约化。然后使用命题 19。

□

接下来，我们将对$\mathcal{L}(\ )$ 在各种框架类上进行完全公理化。正如 [19, 5, 13, 3], 所示，将不等式引入语义使完备性证明变得困难得多。接下来，我们不通过典范模型构造来证明完备性，而是将$\mathcal{L}(\ )$ 的最小系统和对称系统的可靠性与完备性，归约为$\mathcal{L}(\Delta)$的最小系统和对称系统的可靠性与完备性。因此，我们首先回顾$\mathcal{L}(\Delta)$的最小系统和对称系统的可靠性与完备性。

6 $\mathcal{L}(\Delta)$的公理化

定义 23。证明系统 $\mathbf{K}^{\Delta}$ 由以下公理和推理规则组成。

TAUT	all instances of propositional tautologies
ΔCon	$\Delta(\chi \to \varphi) \wedge \Delta(\neg\chi \to \varphi) \to \Delta\varphi$
ΔDis	$\Delta\varphi \to \Delta(\varphi \to \psi) \vee \Delta(\neg\varphi \to \chi)$
$\Delta\leftrightarrow$	$\Delta\varphi \leftrightarrow \Delta\neg\varphi$
MP	From φ and $\varphi \to \psi$ infer ψ
NECΔ	From φ infer $\Delta\varphi$
REΔ	From $\varphi \leftrightarrow \psi$ infer $\Delta\varphi \leftrightarrow \Delta\psi$

证明系统 $\mathbf{KB}^{\Delta}$ 是通过加入公理 ΔB 对$\mathbf{K}^{\Delta}$ 进行的扩展:

$$\varphi \to \Delta((\Delta\varphi \wedge \Delta(\varphi \to \psi) \wedge \neg\Delta\psi) \to \chi).$$

推导和定理的概念按通常方式定义。特别地，我们用 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}^{\Delta}} \varphi$ （分别用 $\Gamma \vdash_{\mathbf{KB}^{\Delta}} \varphi$）表示 φ 可由 Γ 在$\mathbf{K}^{\Delta}$（分别在$\mathbf{KB}^{\Delta}$）中推导出。

定理 24。 [11] $\mathbf{K}^{\Delta}$ <style id='7'}对于所有框架的类是可靠且强完备的。

定理 25。 [10, 11, 6] $\mathbf{KB}^{\Delta}$ 对于对称框架的类是可靠且强完备的。

我们以一个重要结果结束本节，该结果将在引理 31 中使用。

定理26. $\mathbf{K}^{\Delta}$ 相对于所有无自反的框架类是可靠且强完备的。

证明。 根据定理24，只需证明

($\star$) 每个模型都有一个逐点等价的无自反模型。

给定任意模型 $\mathbf{M} = W$， R， V，按如下方式构造模型 $\mathbf{M}' = W'$， R'， V'。

- $W' = W \times \{+, -\}$, where we write w^+ for $(w, +)$ and w^- for $(w, -)$,

- 对于每个 x， $y \in S'$， $xR'y$ 当且仅当以下任一情况成立：(i) $x = w^+$、$y = w^-$ 且 wRw，或(ii) $x = w^-$、 $y = w^+$ 且 wRw，或(iii) $x = w^+$ 或 $x = w^-$，且 $y = u^+$ 或 $y = u^-$，且 $w \neq u$，且 wRu。

- 对任意 $p \in \mathbf{P}$ 以及任意 $x \in W'$，如果 $x = w^+$ 或 $x = w^-$，那么 $V'(p) = \{x \mid w \in V(p)\}$。

显然，$\mathbf{M}'$ 是无自反的。接下来，我们证明对于所有 $\varphi \in \mathbf{L}(\Delta)$，对于所有 $w \in W$，

$$(\heartsuit) \qquad \mathcal{M}, w \vDash \varphi \text{ iff } \mathcal{M}', w^+ \vDash \varphi \text{ iff } \mathcal{M}', w^- \vDash \varphi.$$

我们对 φ 使用归纳法。布尔情形显然成立。对于情形 $\Delta\varphi$，假设 $\mathbf{M}$ $w \nvDash \Delta\varphi$，那么存在 u，v，使得 wRu 且 wRv，并且 $\mathbf{M}$ $u \vDash \varphi$ 且 $\mathbf{M}$ $v \nvDash \varphi$（因此 $u \neq v$）。我们分三种情形讨论。

- $w = u$，从而得到 $w \neq v$。因此 $\mathbf{M}$ $w \vDash \varphi$。根据归纳假设，$\mathbf{M}'$ $w^+ \vDash \varphi$ 且 $\mathbf{M}'$ $w^- \vDash \varphi$。由于 wRu，我们有 wRw；根据 R' 的定义，这意味着 $w^+R'w^-$ 且 $w^-R'w^+$。由于 wRv 且 $w \neq v$，因此 $w^+R'v^+$（以及 $w^+R'v^-$）和 $w^-R'v^+$（以及 $w^-R'v^-$）。根据 $\mathbf{M}$ $v \nvDash \varphi$ 和归纳假设，$\mathbf{M}'$ $v^+ \nvDash \varphi$（以及 $\mathbf{M}'$ $v^- \nvDash \varphi$）。因此，$\mathbf{M}'$ $w^+ \nvDash \Delta\varphi$ 且 $\mathbf{M}'$ $w^- \nvDash \Delta\varphi$。
- $w = v$，从而得到 $w \neq u$。与第一种情况类似，我们可以证明 $\mathbf{M}\prime$ $w^+ \nvDash \Delta\varphi$ 且 $\mathbf{M}\prime$ $w^- \nvDash \Delta\varphi$。
- $w \neq u$ 和 $w \neq v$。因此，根据 $R\prime$ 的定义，$w^+R\prime u^+$ 和 $w^+R\prime v^+$ 以及$w^-R\prime u^+$ 和 $w^-R\prime v^+$。根据归纳假设，$\mathbf{M}\prime$ $u^+ \vDash \varphi$ 和 $\mathbf{M}\prime$ $v^+ \nvDash\varphi$。因此，$\mathbf{M}\prime$ $w^+ \nvDash \Delta\varphi$ 和 $\mathbf{M}\prime$ $w^- \nvDash \Delta\varphi$。

反过来，假设 $\mathbf{M}', w^+ \nvDash \Delta\varphi$ (分别为 $\mathbf{M}', w^- \nvDash \Delta\varphi$)。那么存在$y, z \in W'$，使得 $w^+R'y$ ($w^-R'y$，分别如此)，且 $w^+R'z$($w^-R'z$，分别如此)，并且 $\mathbf{M}', y \vDash \varphi$ 和 $\mathbf{M}', z \nvDash \varphi$（因此 $y \neq z$）。我们分三种情况讨论。

- $y = w^-$ ($y = w^+$，分别如此)。那么 $z \neq w^-$ ($z \neq w^+$，分别如此)。由于 $\mathbf{M}\prime$ 是无自反的，$z \neq w^-$ 和 $z \neq w^+$。由于 $w^+R\prime y$ ($w^-R\prime y$，分别如此)，我们有 wRw；由于 $w^+R\prime z$ ($w^-R\prime z$，分别如此)，根据 $R\prime$ 的定义，必定存在 u，使得 $w \neq u$ 且 wRu，并且（$z = u^+$ 或 $z = u^-$）。根据归纳假设，$\mathbf{M}$ $u \nvDash \varphi$。由 $\mathbf{M}\prime$ $y \vDash \varphi$、$y = w^-$($y = w^+$，分别如此)以及归纳假设，可得 $\mathbf{M}$ $w \vDash \varphi$。因此 $\mathbf{M}$ $w \nvDash \Delta\varphi$。
- $z = w^-$ ($z = w^+$，分别地)。与第一种情况类似，我们可以证明 $\mathbf{M}$ $w \nvDash\Delta\varphi$。
- $y \neq w^-$ 以及 $z \neq w^-$ ($y \neq w^+$ 以及 $z \neq w^+$，分别地)。由于 $\mathbf{M}\prime$ 是无自反的，我们也有 $y \neq w^+$ 以及 $z \neq w^+$ ($y \neq w^-$ 以及 $z \neq w^-$，分别地)。然后根据 $R\prime$ 的定义，必然存在 u，使得 wRu 以及 $w \neq u$ 以及 ($y = u^+$ 或 $y = u^-$)；并且存在 v，使得 wRv 以及 $w \neq v$ 以及 ($z = v^+$ 或 $z = v^-$)。根据归纳假设，$\mathbf{M}$ $u \vDash \varphi$ 以及 $\mathbf{M}$ $v \nvDash \varphi$。因此，$\mathbf{M}$ $w \nvDash \Delta\varphi$。

这就完成了对 ($\heartsuit$) 的证明，从而我们证明了 ($\star$)，如所要求。 □

与($\star$) 定理26的证明类似，我们也可以证明，每个对称模型都可以转换为一个逐点等价的无自反对称模型。

7 L( ) 的公理化

定义27 (K 和 KB)。 证明系统 **K** 由以下公理和推理规则组成。

TAUT	all instances of propositional tautologies
Con	$\Box(\chi \to \varphi) \wedge \Box(\neg\chi \to \varphi) \to \Box\varphi$
Dis	$\Box\varphi \to \Box(\varphi \to \psi) \vee \Box(\neg\varphi \to \chi)$
$\Box\leftrightarrow$	$\Box\varphi \leftrightarrow \Box\neg\varphi$
MP	From φ and $\varphi \to \psi$ infer ψ
NEC$\Box$	From φ infer $\Box\varphi$
RE$\Box$	From $\varphi \leftrightarrow \psi$ infer $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$

证明系统 **KB** 是 **K** 添加公理 B 后的扩展:

$$\varphi \to \Box((\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi) \wedge \neg\Box\psi) \to \chi).$$

我们可以看到，定义 23 和 27相同，只是将 Δ处处替换为。

推导和定理的概念按通常方式定义。特别地，我们使用 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ （分别为 $\Gamma \vdash_{\mathbf{KB}} \varphi$）表示 φ 可从 Γ 在 **K**（分别为**KB** ）中推导出。

在下文中，我们通过一对翻译函数，即 -翻译（·）和Δ-翻译（·）$^{\Delta}$ （定义如下），将**K** 的可靠性和强完备性归约为 $\mathbf{K}^{\Delta}$的可靠性和强完备性。其策略可概括如下。对于所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ L( ),

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \overset{(1)}{\iff} \Gamma^{\Delta} \vdash_{\mathbf{K}^{\Delta}} \varphi^{\Delta} \overset{(2)}{\iff} \Gamma^{\Delta} \vDash_{K} \varphi^{\Delta} \overset{(3)}{\iff} \Gamma \vDash_{K} \varphi,$$

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{KB}} \varphi \iff \Gamma^{\Delta} \vdash_{\mathbf{KB}^{\Delta}} \varphi^{\Delta} \iff \Gamma^{\Delta} \vDash_{B} \varphi^{\Delta} \iff \Gamma \vDash_{B} \varphi.$$

在下文中，我们将详细展示**K** 的情形。关于**KB**的证明是类似的。

现在我们定义两种翻译，即 -翻译和 Δ-翻译。-翻译记作 (·) ，它将每个 L(Δ)-公式中每次出现的 Δ 替换为 ； Δ-翻译记作 $(\cdot)^{\Delta}$，它将每个 L( )-公式中每次出现的 替换为 Δ。通过归纳法很容易证明，对于所有 $\varphi \in$ L(Δ)，都有 $(\varphi)^{\Delta} = \varphi$；对于所有 $\psi \in$ L( )，都有 $(\psi^{\Delta}) = \psi$。一般而言，对于所有 $\Gamma \subseteq$L(Δ)，都有 $(\Gamma)^{\Delta} = \Gamma$； 对于所有 $\Sigma \subseteq$ L( )，都有 $(\Sigma^{\Delta}) = \Sigma$。

由于证明系统**K** 与$\mathbf{K}^{\Delta}$之间纯粹是记号上的差异，我们有如下结论。

引理 28。对于所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}(\Delta)$,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \iff \Gamma^{\Delta} \vdash_{\mathbf{K}^{\Delta}} \varphi^{\Delta}.$$

这就完成了上述策略中的步骤（1）。步骤（2）直接由定理 24得出。因此，现在只需证明步骤（3）。为此，我们需要进行一些准备。

回想一下，我们曾指出，在非自反模型上，和 Δ的语义相同。下面给出这一结果的精确表述，它可以通过对 L( )-公式作归纳法证明。

命题29。 对于所有非自反模型 M、所有世界 w inM 以及所有$\varphi \in$L( )，我们有

$$\mathcal{M}, w \vDash \varphi \iff \mathcal{M}, w \vDash \varphi^{\Delta}.$$

因此，对于所有 $\Gamma \subseteq$L( )，M $w \vDash \Gamma \Leftrightarrow$M $w \vDash \Gamma^{\Delta}$。

回顾定义 18， $\mathcal{M}^{-T}$ 是 $\mathcal{M}$的非自反约化，因此 $\mathcal{M}^{-T}$ 是非自反的。由命题 19 和命题 29，可直接得到以下结果。

推论30。 对于所有模型 M、所有 $w \in W$以及所有 $\varphi \in$ L( )，我们有

$$\mathcal{M}, w \vDash \varphi \iff \mathcal{M}^{-T}, w \vDash \varphi^{\Delta}.$$

因此，对于所有 $\Gamma \subseteq$L( )，M $w \vDash \Gamma \Leftrightarrow$M^{-T}， $w \vDash \Gamma^{\Delta}$。

引理31。 对于所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$L( )，我们有

$$\Gamma \vDash_K \varphi \iff \Gamma^{\Delta} \vDash_K \varphi^{\Delta}.$$

证明。 假设 $\Gamma \nvDash_K \varphi$。那么存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和一个世界 w属于 $\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{M}$ $w \vDash \Gamma$ 且 $\mathcal{M}$ $w \nvDash \varphi$。根据推论 30， $\mathcal{M}^{-T}$， $w \vDash \Gamma^{\Delta}$ 且$\mathcal{M}^{-T}$， $w \nvDash \varphi^{\Delta}$。因此 $\Gamma^{\Delta} \nvDash_K \varphi^{\Delta}$。

反之，假设 $\Gamma^{\Delta} \nvDash_K \varphi^{\Delta}$。那么存在一个模型 M 和一个世界 w属于 M，使得 M $w \vDash \Gamma^{\Delta}$ 且 M $w \nvDash \varphi^{\Delta}$。由于定理26的证明中有（$*$），存在一个无自反的模型 M′ 以及 w' 属于 M′，使得 M′、$w' \vDash \Gamma^{\Delta}$ 且 M′、$w' \nvDash \varphi^{\Delta}$。现在利用命题29，我们推得 M′、$w' \vDash \Gamma$且 M′、$w' \nvDash \varphi$。因此， $\Gamma \nvDash_K \varphi$。 □

至此便完成了上述策略中的步骤（3）。根据前面的分析，我们得到了**K** 的可靠性和强完备性。事实上，我们可以证明以下一般性结果。

定理32. 设 $T \subseteq X$。那么**K** 相对于 X 是可靠且强完备的。也就是说，对于所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$L( )，我们有：

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \iff \Gamma \vDash_X \varphi.$$

证明. 设 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$L( )。我们有以下等价关系。

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \iff \Gamma^{\Delta} \vdash_{\mathbf{K}} \varphi^{\Delta} \iff \Gamma^{\Delta} \vDash_K \varphi^{\Delta} \iff \Gamma \vDash_K \varphi \iff \Gamma \vDash_X \varphi,$$

其中，第一个等价关系由引理 28得出，第二个由定理 24得出，第三个由引理 31得出。对于最后一个等价关系，注意 $T \subseteq K$ 且 $T \subseteq X$。由命题 21(1)， $\Gamma \vDash_K \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vDash_T \varphi$，且 $\Gamma \vDash_X \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vDash_T \varphi$，因此 $\Gamma \vDash_K \varphi$ 当且仅当$\Gamma \vDash_X \varphi$。 □

推论33。**K** 相对于由所有框架组成的类K 、由串行框架组成的类 D 以及由自反框架组成的类 T，是可靠且强完备的。

与将 **K** 的可靠性和强完备性归约为$\mathbf{K}^{\Delta}$的可靠性和强完备性一样，我们也可以将**KB** 的可靠性和强完备性归约为$\mathbf{KB}^{\Delta}$的可靠性和强完备性。请注意，每个对称模型都可以转化为一个逐点等价的无自反对称模型（参见定理26之后的注释），因此我们可以证明一个类似于引理 31的结果。然后，根据前面的分析，我们可以从**KB** 在$\mathbf{KB}^{\Delta}$ 中给出的 [10]可靠性和强完备性，得出KB的可靠性和强完备性。事实上，我们再次得到如下的一般性结果。

定理34。 设 $TB \subseteq X \subseteq B$。那么 **KB** 相对于 X 是可靠且强完备的。也就是说，对于所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{L}(\ )$，我们有：

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{KB}} \varphi \iff \Gamma \vDash_X \varphi.$$

推论35。**KB** 相对于对称框架类B 、串行对称框架类 DB ，以及自反对称框架类 TB ，都是可靠且强完备的。

我们已经看到，**K** 的所有公理和公理 B 在形式上分别类似于它们在 L(Δ) 中的对应项。自然会有人问，我们是否可以通过 -翻译，将 L(Δ) 中相应的公理进行翻译，从而得到其他特殊框架类上的公理。正如我们将要看到的，答案是否定的。

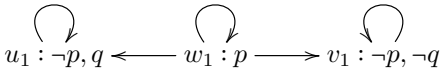
命题36。

(1) 在自反框架类上， $\Delta\varphi \wedge \Delta(\varphi \to \psi) \wedge \varphi \to \Delta\psi$ 有效，但$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \wedge \varphi \to \Delta\psi$无效。(2) 在传递框架类上， $\Delta\varphi \to \Delta(\Delta\varphi \vee \psi)$ 有效，但 $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ 无效。(3) 在欧几里得框架类上， $\neg\Delta\varphi \to \Delta(\neg\Delta\varphi \vee \psi)$ 有效，但 $\neg \bullet \varphi \to (\neg\Delta\varphi \vee \psi)$ 无效。

△ △

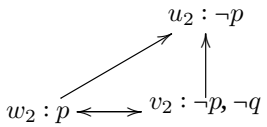
证明。 框架有效性见 [11, 命题 5.2]。我们只需考虑框架无效性。

(1) 考虑以下自反模型 M_1 （其他赋值均无关紧要）：



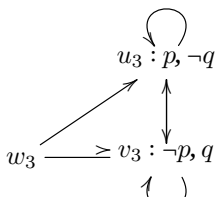
那么 M_1， $w_1 \vDash \Delta p$ 且 M_1， $w_1 \vDash (p \wedge \Delta q)$ 和 M_1， $w_1 \vDash p$ 但是 M_1， $w_1 \nvDash q$。因此， M_1， $w_1 \nvDash \Delta p \wedge (p \to q) \wedge p \to \Delta q$。

(2) 考虑以下传递模型 M_2 （其中其他赋值无关紧要）：



那么，$\mathrm{M}_2, w_2 \vDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p$ 和 $\mathrm{M}_2, w_2 \nvDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot}(p \vee q)$（因为 $u_2 \vDash \Box^{\cdot} p$，所以有 $\mathrm{M}_2, u_2 \vDash \Box^{\cdot} p \vee q$；然而，$\mathrm{M}_2, v_2 \nvDash \Box^{\cdot} p \vee q$）。因此，$\mathrm{M}_2, w_2 \nvDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p \rightarrow \Box^{\cdot}\Box^{\cdot}(p \vee q)$。

(3) 考虑以下欧几里得模型 M_3 （其他赋值并不重要）：



那么 $\mathrm{M}_3, w_3 \vDash \neg\Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p$ 和 $\mathrm{M}_3, w_3 \nvDash (\neg\Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p \vee q)$。要看出后者，请注意 $\mathrm{M}_3, u_3 \nvDash \neg\Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p \vee q$ 和 $\mathrm{M}_3, v_3 \vDash \neg\Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p \vee q$。因此，$\mathrm{M}_3, w_3 \nvDash \neg\Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p \rightarrow (\neg\Box^{\cdot}\Box^{\cdot} p \vee q)$。

□

推论37。设 $\mathfrak{C}$ 为自反框架、传递框架或欧几里得框架的类。则存在一个 $\varphi \in \mathrm{L}(\Delta)$，使得 $\mathfrak{C} \vDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot}\varphi$ 但 $\mathfrak{C} \nvDash \varphi$。

因此，K 的所有公理在所有框架的类上都是有效的，而公理 B 在对称框架的类上是有效的；然而，其他特殊公理并非如此。人们可能会疑惑为什么会这样。下面我们将解释这一现象。

命题38。设 $\mathfrak{C}$ 为一个框架类。如果 (a) $\mathfrak{C}$ 在去自反化下封闭，那么 (b) 对所有 $\varphi \in \mathrm{L}(\Delta)$，若 $\mathfrak{C} \vDash \varphi$，则 $\mathfrak{C} \vDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot}\varphi$。

证明。假设 (a) 成立，以证明 (b) 成立。为此，设 $\varphi \in \mathrm{L}(\Delta)$ 并假设 $\mathfrak{C} \nvDash \varphi$，只需证明 $\mathfrak{C} \nvDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot}\varphi$。

根据假设，存在一个 $\mathfrak{C}$-模型 M 和一个世界 w 属于 M，使得 $\mathrm{M}\ w \nvDash \varphi$。由于 $\varphi \in \mathrm{L}(\Box^{\cdot}\Box^{\cdot})$，由推论 30 可得 $\mathrm{M}^{-T}, w \nvDash (\varphi)^{\Delta}$，也就是说，$\mathrm{M}^{-T}, w \nvDash \varphi$。由于 M 是一个 $\mathfrak{C}$-模型，根据 (a)，M^{-T} 也是一个 $\mathfrak{C}$-模型。因此，$\mathfrak{C} \nvDash \Box^{\cdot}\Box^{\cdot}\varphi$。

□

由于 $\mathbf{K}^{\Delta}$ 的所有公理以及 Δ公理 B 分别在所有框架的类和对称框架的类上有效 [11], ，且这两个框架类在去自反化下都封闭，根据命题38，$\mathbf{K}$ 的所有公理以及公理 B 在相应的框架类上都有效。

由命题38可知，(a) 是 (b) 的充分条件。一个自然的问题是，(a) 是否也是 (b) 的必要条件。若 $\mathfrak{C}$是自反框架类、传递框架类或欧几里得框架类，答案是肯定的；这可由推论37 以及这些框架类都不在去自反化下封闭这一事实推出（对于自反框架类，考虑一个单点自反框架；对于传递框架类或欧几里得框架类，考虑一个双点全域关系框架）。然而，一般而言，答案是否定的。

命题 39。设 $\mathfrak{C}$ 是所有框架的类，其中每个框架至少有一个自反点。那么，命题38 的 (a) 不成立，但命题38 的 (b) 成立。

证明。可以验证， $\mathfrak{C}$ 在去自反化下不封闭，因此命题38 的 (a) 不成立。为证明命题38的 (b)，我们将证明对所有 $\varphi \in \mathcal{L}(\Delta)$，(1)$\mathfrak{C} \vDash \varphi$ 蕴含 $\vDash \varphi$，(2) $\vDash \varphi$ 蕴含 $\vDash \varphi$，以及 (3) $\vDash \varphi$ 蕴含 $\mathfrak{C} \vDash \varphi$。由于 (3) 显然成立，因此只需证明 (1) 和 (2)。

对于（1），假设 $\nvDash \varphi$，则 $\neg\varphi$ 是可满足的。因此，存在一个模型 M 及其中的一个世界 w，使得 M $w \vDash \neg\varphi$。令 $w' \notin$ M。[3] 定义 M′ =W'、R'、V'，其中 $W' = \{w'\}$ 且 $R' = \{(w', w')\}$。现在考虑 M 与 M′ 的不交并，将其记为 M″。由于 M″ 包含一个自反点，其底层框架属于 $\mathfrak{C}$。此外，由于 L(Δ) 是 L(□) 的一个片段，并且 L(□)- 公式的满足关系在不交并下保持不变（例如 [1]），因此 L(Δ)-公式的满足关系也保持不变。这说明 M″、$w \vDash \neg\varphi$，从而$\mathfrak{C} \nvDash \varphi$。

对于（2），假设$\nvDash \varphi$，那么存在一个模型$\mathcal{N}$ 和一个世界 w属于$\mathcal{N}$，使得 $\mathcal{N}$ $w \nvDash \varphi$。由于 $\varphi \in \mathcal{L}(\Delta)$，根据推论39 我们可以推断$\mathcal{N}^{-T}$，$w \nvDash (\varphi)^{\Delta}$，也就是说，$\mathcal{N}^{-T}$，$w \nvDash \varphi$。因此，$\nvDash \varphi$。 □

8 结论与未来工作

本文受偶然性和强可能性这两个概念的启发，提出了一个称为“强偶然性”的概念，可将其视为前两个概念的结合。我们为以这一概念作为唯一原始模态的逻辑 L( ) 提出了双模拟。我们考察了 L( ) 的表达力和框架可定义性。结果表明，即使是在 S5 模型类上，L( ) 与偶然性逻辑 L(Δ)（以及标准模态逻辑 L(□)）的表达力也不可比；而在 S5 模型类上，L( ) 的表达力弱于 L(⊡)。最后但同样重要的是，我们为 L( ) 建立了完整的公理化

[3]如果 M 是有限的，那么这样的 w' 必然存在。即使 M 是无限的，我们也可以添加更多成员——记住希尔伯特旅馆!

，适用于各种框架类；这些公理化的可靠性和强完备性可归约为相应的 L(Δ) 公理化的可靠性和强完备性。

未来仍有若干问题有待研究。例如，可以在其他特殊框架类上将$\mathcal{L}(\ )$公理化，例如传递框架类和欧几里得框架类。正如命题 3 所示，$\boxdot$ 几乎可以用 来定义，这表明我们可以采用 [9]提出的基于几乎可定义性模式的方法。再如，可以研究含有 和 Δ的双模态逻辑，以及含有 和□的双模态逻辑。此外，还可以运用分岔方法探究该算子的各种变体，并像 [7]中研究非偶然性算子的情形那样，在各种框架类上将它们公理化。

致谢 本文得到国家社会科学基金重点项目（项目编号：24AZX019）资助。作者感谢 Lloyd Humberstone 使其关注到这一课题。作者感谢一位匿名审稿人提出的富有见地的意见。

参考文献

[1] P. Blackburn、M. de Rijke 和 Y. Venema。《模态逻辑》。剑桥大学出版社，剑桥，2001。剑桥理论计算机科学丛书第 53 卷。[2]A. Brogan。亚里士多德的关于偶然性命题的逻辑。《Mind》，76(301):49–61，1967。[3] J. Chen。强可能性与弱必然性的逻辑。《逻辑研究》，13(1):53–74，2020。（中文）。[4] M. Cresswell。必然性与偶然性。Studia Logica，47:145–149，1988。[5] M. de Rijke。不等式模态逻辑。《哲学符号逻辑杂志》，57:566–584，1992。[6] J. Fan。具有无限多个模态的对称偶然性逻辑。《哲学逻辑杂志》，48(5):851–866，2019。[7] J. Fan。非偶然性算子的两种变体。《圣母大学形式逻辑杂志》，62(3):491–525，2021。[8] J. Fan。非现实可能世界的逻辑。《逻辑研究》，16(6):17–38，2023。[9]J. Fan。公理化捆绑算子的统一方法。《符号逻辑评论》，18(4):1121–1167，2025。https://doi.org/10.1017/S1755020325100981.

[10] J. Fan、Y. Wang 和 H. van Ditmarsch。几乎必然。载于《模态逻辑进展》，第 10 卷，第 178–196 页，2014。[11] J. Fan、Y. Wang 和 H. van Ditmarsch。偶然性与是否知晓。《符号逻辑评论》，8(1):75–107，2015。[12] L. Humberstone。非偶然性逻辑。《圣母大学形式逻辑杂志》，36(2):214–229，1995。[13] L. Humberstone。面向他世界不可知论者的模态逻辑：中立性与 Hall´en 不完备性。《哲学逻辑杂志》，36(1):1–32，2007。[14] S. Kuhn。极小非偶然性逻辑。《圣母大学形式逻辑杂志》，36(2):230–234，1995。[15] M. Malink。亚里士多德论单向可能性。载于 Rini M. Cresswell、A 和 E. Mares 编，《从亚里士多德到卡尔纳普的逻辑模态：必然性的故事》，第 29–49 页。剑桥大学出版社，2016。[16] H. Montgomery 和 R. Routley。正规模态逻辑的偶然性与非偶然性基础。Logique et Analyse，9:318–328，1966。[17] H. Montgomery 和 R. Routley。S4 和 S5 的非偶然性公理。Logique et Analyse，11(43):422–424，1968。[18] K. Segerberg。“别处”与“另一个时间”。载于《正确与错误：为 George Henrik von Wright 六十寿辰而作的迷你论文集》，第 61–64 页。芬兰皇家逻辑与方法论小组出版物，第 3 卷，°奥博学术大学，1976。[19] K. Segerberg。关于别处逻辑的一则注记。Theoria，46:183–187，1980。[20] W. van der Hoek 和 A. Lomuscio。无知逻辑。《理论计算机科学电子笔记》，85(2):117–133，2004。[21] G. H. von Wright。位置模态逻辑。载于 E. Sosa 编，《Nicholas Rescher 的哲学：讨论与答复》，第 65–73 页。Reidel，Dordrecht，1979。[22] E. Zolin。非偶然性逻辑中的完备性与可定义性。《圣母大学形式逻辑杂志》，40(4):533–547，1999。