arXiv:2611.29185v1 [math.MG] 22 Nov 2026

最大小多边形的面积稳定性

JOSÉ AYALA HOFFMANN 和 JOAQUÍN LÓPEZ GUTIÉRREZ

摘要。我们为直径不超过一的小多边形之间的面积最大化建立了二阶微积分理论，并最终对多边形 Q_n 的驻定性、谱稳定性以及模去保定向欧氏运动后的严格局部极大性给出了严格的计算证明。这些多边形的直径图由一个包含 $n-1$ 个顶点的圈和一条悬挂边组成，对每个偶数 n （满足 $6 \leq n \leq 64$）均成立。

在驻定构形处，正乘子迫使面积沿着至少缩短一个活跃直径的可行方向发生一阶减小。沿着一阶保持所有活跃直径不变的方向，约化 Hessian 控制着模去欧氏运动后的二阶面积变化。正乘子、线性无关的活跃约束梯度以及负的约化谱共同意味着严格局部极大性。向外舍入区间算术确立了严格凸驻定构形 Q_n 的存在性，并证明其全部 $n-3$ 个约化特征值均严格为负。综合这些结果，可为所有足够接近的可行多边形给出明确的邻域半径和严格的面积二次下降界。

约化谱还能检测二阶退化和不稳定性，最优四边形和正六边形便是例证。

1. 前言

凸 n 边形的顶点两两距离至多为 1，其面积最大可能是多少？这类多边形称为小多边形，相应的最大化问题称为最大面积小多边形问题。

Reinhardt 于 1922 年证明，当 n 为奇数时，正小 n 边形是最优的；而当 $n \geq 6$ [19]为偶数时，它并非最优。Graham 确定了最大的小六边形 [10], ，Audet 等人解决了八边形的情形 [1]。随后，Foster 和 Szabó 建立了一个适用于每个偶数 $n \geq 6$的结构性结果。面积最大化多边形的直径图中，边连接距离为 1 的顶点对；该图由一个包含 $n-1$ 个顶点的圈和一条悬挂边 [7]组成。我们称之为 Graham 型直径图。

Mossinghoff 提出了明确的构造并给出了面积界 [14], ，随后 Bingane [4] 以及 Bingane 和 Mossinghoff [6]对其进行了改进。数值优化也找到了候选多边形；Henrion 和 Messine 运用全局多项式优化计算了最大的小十边形和十二边形的候选解，并报告了全局性的数值证据

最优性 [11], 而 Pintér、Kampas 和 Castillo [18]利用非线性规划获得了更多数值候选构形。这些构形显示出很好的前景，但仅凭数值证据并不能保证最优性。一旦找到一个驻点候选构形，我们便可以研究其面积在扰动下如何变化。

当相应的一对顶点之间的距离为一时，直径约束处于活跃状态。在驻定构形处，可行的一阶方向要么使至少一个活跃直径缩短，要么在一阶上保持所有活跃直径不变。如果某个方向使至少一个活跃直径缩短，那么正的活跃乘子意味着面积的一阶变分严格为负。在一阶上保持所有活跃直径不变的方向构成活跃等式空间。在此空间上，一阶变分为零，因此我们考察拉格朗日函数的 Hessian。将该

2020 数学学科分类。主要分类 52A40；次要分类 65G20、65F15。关键词。最大小多边形、直径图、谱稳定性、局部极大性、区间算术、计算机辅助证明。

Hessian 限制在与无穷小欧几里得运动正交的活跃等式空间上，得到约化 Hessian，其特征值构成约化谱。当活跃约束梯度线性无关且所有活跃乘子均为正时，约化 Hessian 负定可为模去保持定向的欧氏运动后的严格局部极大性提供二阶充分条件 [17]。我们研究这一谱，并将该判据转化为面积损失的显式界。

该问题的二次结构使我们能够将这一判据定量化。面积 $\mathcal{A}$ 和约束函数 $g_{ij}(x) = \|x_i - x_j\|^2 - 1$ 都是二次的，因此在驻定构形 c处的拉格朗日函数展开是精确的。在上述秩、乘子和谱条件下，定理 4.8 给出了显式常数 $\rho,\ \kappa > 0$，使得对所有满足以下条件的构形 x：对于所有 $\{i,\ j\} \in E(c)$，均有 $\mathcal{A}(x) \le \mathcal{A}(c) - \kappa \mathrm{dist}(x,\ c)^2$，只要 $\mathrm{dist}(x,\ c) \le \rho$。这里，$E(c)$ 表示 c处的活跃直径对集合，而 $\mathrm{dist}(x,\ c)$ 表示 x到其在保向欧几里得运动下轨道 c 的距离。这些常数显式地取决于活动约束矩阵最小行奇异值、活跃乘子和最大约化特征值的界，以及活跃直径图的最大度。该估计也适用于会缩短活跃直径的构形，且不需要非活跃距离裕度。

我们将这一判据应用于具有 Graham 型直径图的驻定构形。沿用 Mossinghoff [14], 的记号，我们将 Q_n 记作定理 7.1 中定义的构形。对于满足 $6 \le n \le 64$的每个偶数 n，向外舍入区间算术证明了一个精确、严格凸的驻定构形 Q_n的存在性；该构形具有线性无关的活跃约束梯度和严格为正的乘子。Q_n 的整个约化谱被包含在 $n-3$ 个两两不交的负区间中，每个区间包含一个重数为一的特征值。由于最大约化特征值的重数为一，约化切空间中导致二次面积减小最弱的单位方向除符号外是唯一的。该特征值还出现在显式稳定性常数 ρ_n, κ_n中。随后，定量估计证明，模去保定向欧氏运动后，Q_n 是一个严格局部极大值点；对于所有邻近的可行构形，还可得到面积损失的经认证界。计算还将 $\mathcal{A}(Q_n)$包含在一个宽度小于 10^{-11}的区间内。

除了严格稳定的构形 Q_n 外，二阶分析还揭示了退化和不稳定性。四边形 Q_4 属于一个非孤立的面积极大点族。在由其正乘子定义的等式空间中，去除刚体运动后，还剩下两个零特征值，分别对应这一族的参数。其余有效的直径不等式限制了可行方向。对于正六边形，两个正的约化特征值违反了局部极大性的二阶必要条件。

区间计算由我们的 Julia 程序 LSPectra [12] 完成。图1展示了选定的构形 Q_n 及其直径图，并标出了全文采用的顶点标记。图2展示了 Q_{64}的直径图，其中悬挂边以高亮标出。

第2–4节建立了一阶和二阶理论，并推导出定量稳定性界。第5节分析了四边形情形中的退化。第6节阐述了计算验证流程，第 7 节则确立了主要结果，并给出了经认证的谱界和稳定性界。

2. 小多边形与直径图

全文中，$\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的标准欧氏内积，并逐分量扩展至 $(\mathbb{R}^2)^n$。

定义 2.1。 对于 $n \ge 3$，小型 n 边形是一个带标记的循环元组

$$c = (c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$$

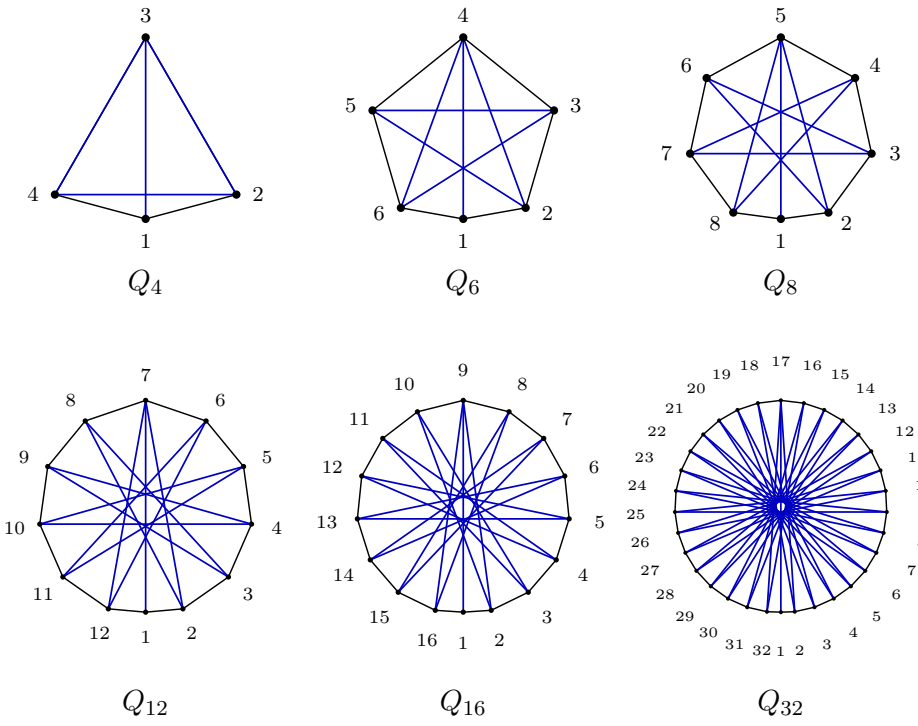


图1. 局部面积最大化小多边形示例。黑色线段表示声明的边集以外的边界边；蓝色线段表示声明的单位距离约束。顶点编号遵循手稿中的索引。 Q_4 的图示采用命题5.1中的构形。其他图示采用 LSPectra 输入中的名义坐标。

满足

$$\|c_i - c_j\| \le 1 \qquad \text{for all } i \ne j.$$

其面积为

$$\mathcal{A}(c) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det(c_i, c_{i+1}), \qquad c_{n+1} = c_1.$$

若 $\mathcal{A}(c) > 0$，则其为正向定向。

注 2.2. 泛函 $\mathcal{A}$ 是有向面积。对于简单的正向定向多边形，它对应于围成的面积。

定义 2.3. 设 c 为一个小 n边形。其活跃直径图为

$$G(c) = (\{1, \dots, n\}, E(c)),$$

其中

$$E(c) = \{\{i, j\} : \|c_i - c_j\| = 1\}.$$

$G(c)$的边称为活跃直径边。

定义 2.4. 设 c为一个小 n边形。在 c处的固定活跃直径类，是$(\mathbb{R}^2)^n$ 中 c 的邻域内由以下条件截出的子集

$$\|x_i - x_j\| = 1 \qquad (\{i, j\} \in E(c)),$$
$$\|x_i - x_j\| < 1 \qquad (\{i, j\} \notin E(c)),$$

其中面积公式的带标号循环次序保持固定。

定义 2.5。 c 处直径不等式的线性化可行锥为

$$\mathcal{K}(c) = \left\{ v \in (\mathbb{R}^2)^n : \langle c_j - c_i, v_j - v_i \rangle \le 0 \text{ for every } \{i, j\} \in E(c) \right\}.$$

定义 2.6。活跃等式空间为

$$\mathcal{I}(c) = \left\{ v \in (\mathbb{R}^2)^n : \langle c_j - c_i, v_j - v_i \rangle = 0 \text{ for every } \{i,j\} \in E(c) \right\}.$$

全文中，欧氏运动均指保定向欧氏运动，作用时不重新标号。反射会反转有向面积。令

$$J(x,y) = (-y, x).$$

c处的无穷小刚性运动空间为

$$R(c) = \{(a + \omega J c_1, \ldots, a + \omega J c_n) : a \in \mathbb{R}^2,\ \omega \in \mathbb{R}\}.$$

其正交补 $R(c)^{\perp}$ 取自 $(\mathbb{R}^2)^n$上的标准欧氏内积。

定义 2.7。 设 c 为一个小 n边形。其非活跃距离裕度为

$$\delta(c) = \min_{\{i,j\} \notin E(c)} \big(1 - \|c_i - c_j\|\big).$$

最小值取遍不同指标的无序对；如果不存在非活跃对，则将其定义为 $+\infty$ 。由于活动图包含所有距离为 1 的点对，因此对于每个小 n边形，该裕度都是正的。

对于每个小型 n 边形 c， $R(c) \subseteq \mathcal{I}(c)$。事实上，如果 $v_i = a + \omega J c_i$，则

$$v_j - v_i = \omega J(c_j - c_i),$$

因此

$$\langle c_j - c_i, v_j - v_i \rangle = \omega \langle c_j - c_i, J(c_j - c_i) \rangle = 0.$$

注 2.8。 对于每条活跃边 $\{i,\ j\} \in E(c)$，令

$$g_{ij}(x) = \|x_i - x_j\|^2 - 1.$$

对活动约束矩阵的各行排序

$$Dg(c) = \big(Dg_{ij}(c)\big)_{\{i,j\} \in E(c)}$$

相同的固定行定义了邻近 x 的 $Dg(x)$，而不论其实际的活动集为何。特别地， $\mathcal{I}(c) = \ker Dg(c)$。如果 $Dg(c)$ 具有满行秩，那么对于邻域 c 中的每个 x ，$Dg(x)$ 也具有满行秩。活动等式集

$$M = \{x : g_{ij}(x) = 0 \text{ for all } \{i,j\} \in E(c)\}$$

因此在 c 附近是一个 C^2 子流形，并且

$$T_c M = \mathcal{I}(c).$$

这是横截切片极大性（命题 4.6）所要求的正则性假设。当满行秩条件成立时，我们记 $\operatorname{rank} Dg(c) = |E(c)|$ 。

注 2.9。 对于活跃边 $\{i,\ j\} \in E(c)$ 和变分 $v \in (\mathbb{R}^2)^n$，

$$Dg_{ij}(c)[v] = 2\langle c_j - c_i, v_j - v_i \rangle.$$

由于 $\|c_j - c_i\| = 1$，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|(c_j + t v_j) - (c_i + t v_i)\| = \langle c_j - c_i, v_j - v_i \rangle = \frac{1}{2} Dg_{ij}(c)[v].$$

我们将这个标量称为有符号直径接触率。负值会使该点对进入直径约束的严格内部，零值表示一阶近似下保持活跃接触，正值则指向可行域之外。因此，

$$\mathcal{K}(c) = \{v : Dg(c)[v] \le 0\}, \qquad \mathcal{I}(c) = \ker Dg(c),$$

其中，向量不等式按逐分量理解。因子 2 由未缩放约定 $g_{ij}(x) = \|x_i - x_j\|^2 - 1$ 确定，并在整个乘子和约束海森矩阵公式中保持不变。

3. First variation and no ascent criteria

定理 3.1。 对于每个 c、$v \in (\mathbb{R}^2)^n$，其循环次序固定，

$$D\mathcal{A}(c)[v] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det(v_i, c_{i+1} - c_{i-1}),$$

其中指标按循环方式读取。等价地，

$$\nabla_{c_i}\mathcal{A}(c) = -\frac{1}{2}J(c_{i+1} - c_{i-1}).$$

证明。 鞋带公式将面积表示为多项式

$$\mathcal{A}(c) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det(c_i, c_{i+1}),$$

沿 $c + tv$ 对其求导可得

$$D\mathcal{A}(c)[v] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left[\det(v_i, c_{i+1}) + \det(c_i, v_{i+1})\right].$$

对第二个求和重新编号，

$$\sum_{i=1}^{n} \det(c_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \det(c_{i-1}, v_i) = -\sum_{i=1}^{n} \det(v_i, c_{i-1}),$$

从而

$$D\mathcal{A}(c)[v] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det(v_i, c_{i+1} - c_{i-1}).$$

梯度公式由恒等式 $\det(a, b) = \langle -Jb, a\rangle$ 得出。 □

命题 3.2。 设 c 是一个正向定向的小型 n 边形，其有效直径边集为 $E(c)$。假设存在乘子

$$\lambda_{ij} \geq 0 \qquad (\{i, j\} \in E(c)),$$

满足 $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$，使得

$$\nabla_{c_i}\mathcal{A}(c) = 2\sum_{j:\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}(c_i - c_j) \qquad \textit{for every } i.$$

那么，对于每个 $v \in \mathcal{K}(c)$，都有 $D\mathcal{A}(c)[v] \leq 0$。因此， c 在线性化可行锥上不存在一阶面积增加方向。特别地，一阶变分在活跃等式空间上为零。

证明。 乘子恒等式给出

$$D\mathcal{A}(c)[v] = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{c_i}\mathcal{A}(c), v_i\rangle = 2\sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j:\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}(c_i - c_j), v_i \right\rangle.$$

将每条无序活跃边的两个顶点贡献相加，得到

$$D\mathcal{A}(c)[v] = 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\left(\langle c_i - c_j, v_i\rangle + \langle c_j - c_i, v_j\rangle\right),$$

也就是说，

$$D\mathcal{A}(c)[v] = 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\langle c_i - c_j, v_i - v_j\rangle.$$

由于

$$\langle c_i - c_j, v_i - v_j\rangle = \langle c_j - c_i, v_j - v_i\rangle$$

且 $v \in \mathcal{K}(c)$ 中每个内积均非正。由于每个 $\lambda_{ij} \geq 0$，每一项也都非正。因此 $D\mathcal{A}(c)[v] \leq 0$。
□

定义 3.3。若某个小 n 边形 c 满足命题 3.2 的乘子恒等式，且其某个 $\lambda \in \mathbb{R}^{E(c)}$ 的各项无需满足符号条件，则称其为驻定的。

引理 3.4。假设命题 *3.2* 中的乘子严格为正，

$$\lambda_{ij} > 0 \qquad (\{i,j\} \in E(c)).$$

若 $v \in \mathcal{K}(c)$ 且 $D\mathcal{A}(c)[v] = 0$，则

$$\langle c_j - c_i, v_j - v_i\rangle = 0 \qquad (\{i,j\} \in E(c)).$$

因此，$\mathcal{K}(c)$ 中的每个一阶中性方向都属于 $\mathcal{I}(c)$。

证明。命题 3.2 的证明给出

$$D\mathcal{A}(c)[v] = 2 \sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\langle c_j - c_i, v_j - v_i\rangle.$$

每个内积都非正，因为 $v \in \mathcal{K}(c)$，且每个乘子都为正。因此，和为零必然意味着每一项都为零，于是

$$\langle c_j - c_i, v_j - v_i\rangle = 0 \qquad (\{i,j\} \in E(c)).$$

□

前一个结果指出了需要进行二阶分析的方向。乘子严格为正时，一阶变分在 $\mathcal{K}(c)$ 上恰好在 $\mathcal{I}(c) = \ker Dg(c)$ 上为零。去除无穷小刚性运动后，我们因此考察 $\mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}$ 上的二阶变分。

4. Second variation and local maximality

定理 4.1。对于每个 $c, v, w \in (\mathbb{R}^2)^n$，其中指标模 n 取值，

$$D^2\mathcal{A}(c)[v,w] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left[\det(v_i, w_{i+1}) + \det(w_i, v_{i+1})\right].$$

特别地，

$$D^2\mathcal{A}(c)[v,v] = \sum_{i=1}^{n} \det(v_i, v_{i+1}).$$

证明。展开

$$\mathcal{A}(c + sv + tw) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det(c_i + sv_i + tw_i, c_{i+1} + sv_{i+1} + tw_{i+1}).$$

st 在第 i 个行列式中的系数为

$$\det(v_i, w_{i+1}) + \det(w_i, v_{i+1}),$$

由此得到双线性公式。令 $w = v$，即可得到纯二阶变分。 □

定义 4.2. 假设 c 满足所选乘子向量 $(\lambda_{ij})_{\{i,j\}\in E(c)}$ 对应的一阶乘子方程。相应的约束二阶变分为

$$Q_c(v) = D^2\mathcal{A}(c)[v,v] - 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\|v_i - v_j\|^2, \qquad v \in (\mathbb{R}^2)^n,$$

并将其极化双线性形式记为 B_c。对于非负乘子，由正乘子边确定的等式空间可能大于 $\mathcal{I}(c)$。Q_c 的环境定义允许这两种限制。

定理 4.3。 假设 c 满足命题 *3.2* 中关于固定乘子向量 λ 的乘子恒等式。令 $x(t)$ 为一条满足下列条件的 C^2 曲线

$$g_{ij}(x(t)) = 0 \qquad (\{i,j\} \in E(c),\ \lambda_{ij} \neq 0)$$

对于所有充分小的 t，满足 $x(0) = c$ 且 $x'(0) = v$。于是

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(x(t)) = Q_c(v).$$

证明。 设 $a = x''(0)$，使得

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(x(t)) = D^2\mathcal{A}(c)[v,v] + D\mathcal{A}(c)[a].$$

在 $t = 0$ 处对 $g_{ij}(x(t)) = 0$ 求两次导数可得，对于每条乘子非零的活跃边 $\{i,j\}$ ，

$$D^2 g_{ij}(c)[v,v] + Dg_{ij}(c)[a] = 0,$$

而乘子恒等式给出

$$D\mathcal{A}(c)[a] = \sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij} Dg_{ij}(c)[a].$$

将两式合并，并注意其余乘子均为零，

$$D\mathcal{A}(c)[a] = -\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij} D^2 g_{ij}(c)[v,v].$$

由于 $D^2 g_{ij}(c)[v,v] = 2\|v_i - v_j\|^2$，我们得出

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(x(t)) = D^2\mathcal{A}(c)[v,v] - 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\|v_i - v_j\|^2 = Q_c(v).$$

□

引理 4.4。 假设 c 满足关于乘子向量 λ 的乘子恒等式。则

$$B_c(r,w) = 0$$

对于每个 $r \in R(c)$ 以及每个 $w \in (\mathbb{R}^2)^n$。

证明。 对于平移，该恒等式是显然的；对于旋转，由线性性，只需取

$$r_i = Jc_i.$$

映射 e^{tJ} 逐分量作用于 $(\mathbb{R}^2)^n$ 上，因此由面积的旋转不变性可得

$$\mathcal{A}(e^{tJ}(c + sw)) = \mathcal{A}(c + sw).$$

先对 s 求导，再在 $s = t = 0$ 处对 t 求导，得到

$$D^2\mathcal{A}(c)[r,w] + D\mathcal{A}(c)[Jw] = 0,$$

而乘子恒等式给出

$$D\mathcal{A}(c)[Jw] = 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\langle c_i - c_j, Jw_i - Jw_j\rangle.$$

由于 J 是斜伴随的，且 $r_i - r_j = J(c_i - c_j)$，

$$\langle c_i - c_j, Jw_i - Jw_j\rangle = -\langle J(c_i - c_j), w_i - w_j\rangle = -\langle r_i - r_j, w_i - w_j\rangle,$$

以便

$$D\mathcal{A}(c)[Jw] = -2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\langle r_i - r_j, w_i - w_j\rangle$$

因此

$$D^2\mathcal{A}(c)[r,w] = 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\langle r_i - r_j, w_i - w_j\rangle,$$

这正是断言 $B_c(r,\ w) = 0$。 □

相对于 $(\mathbb{R}^2)^n$ 上的欧几里得内积，Q_c 对 $\mathcal{I}(c) \cap R(c)^\perp$ 的限制，其谱与所选正交归一基无关，并且在保向欧几里得运动下保持不变。对于所选乘子，我们称之为 c 的约化谱。

命题 4.5。设 c 是一个正向定向的小 n 边形。假设存在乘子

$$\lambda_{ij} > 0 \qquad (\{i,j\} \in E(c))$$

使得

$$\nabla_{c_i}\mathcal{A}(c) = 2\sum_{j:\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}(c_i - c_j) \qquad (i = 1,\dots,n),$$

并且假设 Q_c 在 $\mathcal{I}(c)\cap R(c)^\perp$ 上为负定。那么，每条 C^2 可行曲线 $x(t)$，$0 \le t < \varepsilon$，由小 n 边形构成，满足 $x(0) = c$，具有固定的循环标记和初速度

$$x'(0) \notin R(c)$$

满足

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x(t)) - \mathcal{A}(c)}{t^2} < 0.$$

证明。令 $x(t)$、$0 \le t < \varepsilon$ 为一条 C^2 可行曲线，且 $x(0) = c$，并设

$$v = x'(0), \qquad a = x''(0).$$

由可行性可得

$$\|x_i(t) - x_j(t)\| \le 1$$

对每个 $\{i,j\} \in E(c)$ 均成立。由于 $\|c_i - c_j\| = 1$，在 $t = 0$ 处求导可得

$$\langle c_j - c_i, v_j - v_i\rangle \le 0,$$

因此 $v \in \mathcal{K}(c)$，由命题 3.2 得 $D\mathcal{A}(c)[v] \le 0$。若 $D\mathcal{A}(c)[v] < 0$，则

$$\mathcal{A}(x(t)) - \mathcal{A}(c) = tD\mathcal{A}(c)[v] + O(t^2),$$

从而

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x(t)) - \mathcal{A}(c)}{t^2} = -\infty < 0.$$

因此，假设 $D\mathcal{A}(c)[v] = 0$。由于所有活跃乘子均为正，引理 3.4 推出

$$\langle c_j - c_i, v_j - v_i\rangle = 0 \qquad (\{i,j\} \in E(c)),$$

因此 $v \in \mathcal{I}(c)$。记

$$v = r + z, \qquad r \in R(c), \qquad z \in \mathcal{I}(c)\cap R(c)^\perp,$$

并注意到 $z \neq 0$，因为 $v \notin R(c)$。

对于每条活跃边，由关系 $g_{ij}(x(t)) \le 0$, $g_{ij}(c) = 0$ 和 $Dg_{ij}(c)[v] = 0$，通过泰勒展开可得，

$$D^2 g_{ij}(c)[v,v] + Dg_{ij}(c)[a] \le 0.$$

乘子恒等式给出

$$D\mathcal{A}(c)[a] = \sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij} Dg_{ij}(c)[a],$$

因此

$$D\mathcal{A}(c)[a] \le -\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij} D^2 g_{ij}(c)[v,v],$$

并且，由于 $D^2 g_{ij}(c)[v,v] = 2\|v_i - v_j\|^2$,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{A}(x(t)) \le Q_c(v).$$

由引理 4.4,

$$Q_c(v) = Q_c(r+z) = Q_c(z),$$

并且由于负定性， $Q_c(z) < 0$ ，因为 $z \neq 0$。由于 $D\mathcal{A}(c)[v] = 0$，泰勒展开得出

$$\mathcal{A}(x(t)) - \mathcal{A}(c) = \frac{1}{2}t^2 \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{A}(x(t)) + o(t^2),$$

因此

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x(t)) - \mathcal{A}(c)}{t^2} \le \frac{1}{2}Q_c(v) = \frac{1}{2}Q_c(z) < 0. \qquad \square$$

命题 4.6。 设 c 为一个正向定向的小 n边形，并假设：

(i) 活动等式集

$$M = \{x : g_{ij}(x) = 0 \text{ for all } \{i,j\} \in E(c)\}$$

在 c 附近是一个 C^2 子流形，其切空间为 $T_c M = \mathcal{I}(c)$。

(ii) 存在实乘子 λ_{ij} 满足乘子恒等式

$$\nabla_{c_i}\mathcal{A}(c) = 2 \sum_{j:\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}(c_i - c_j) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

(iii) Q_c 在 $\mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}$上负定。

那么，模去欧氏运动后， c 是 M上 $\mathcal{A}$ 的严格局部极大值点：存在 M 中 c 的一个邻域 U，使得每个 $x \in U$ 都满足

$$\mathcal{A}(x) \le \mathcal{A}(c),$$

等号成立当且仅当 x 位于 c 的欧几里得轨道上。在局部固定活跃直径类中，同样的结论也成立。

证明。 由于 c 是正向定向的，它在保向欧几里得运动下的轨道是一个三维嵌入子流形，其切空间为 $R(c)$。包含关系 $R(c) \subseteq T_c M = \mathcal{I}(c)$ 表明，仿射空间 $c + R(c)^{\perp}$ 与 M 在 c 处横截相交。因此，根据隐函数定理， $\mathcal{S} = M \cap (c + R(c)^{\perp})$ 在 c 附近局部是一个 C^2 子流形，且

$$T_c\mathcal{S} = \mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}.$$

通过其在c处的作用，将运动群在单位元处的切空间识别为 $R(c)$。切片上的运动作用在单位元处的微分为（r， z） $\mapsto r + z$ 以及 c。这是从 $R(c) \times T_c\mathcal{S}$ 到 $T_c M$的同构。反函数定理给出了 M 在 c附近的局部 C^2参数化。

乘子恒等式使 $D\mathcal{A}(c)$在 $T_c M$上为零。根据定理 4.3， $\mathcal{A}|_{\mathcal{S}}$ 在c 处的海森矩阵是 Q_c 在 $T_c\mathcal{S}$ 上的限制，由 (iii) 可知该限制为负定。当切片具有正维数时，二阶导数检验给出一个严格的局部最大值。零维切片在局部仅由 c组成，结论相同。

面积在运动作用下保持不变，因此该不等式及其等号条件可推广到 M。由于按定义 $\delta(c) > 0$ ，在充分小的邻域内，所有非活跃距离仍小于 1。在该处， M 与固定活跃直径类重合。$\square$

定义 4.7。对于 x， $c \in (\mathbb{R}^2)^n$，定义

$$\operatorname{dist}(x,c) = \min_{\theta\in[0,2\pi],\ a\in\mathbb{R}^2} \left\| \left(e^{\theta J}x_i + a - c_i\right)_{i=1}^{n} \right\|.$$

最小值可以取得。对于固定的 θ，最优平移为 $a = \bar{c} - e^{\theta J}\bar{x}$，其中上方横线表示质心；关于 θ 的其余函数在 $[0, 2\pi]$ 上连续。

对于一个 $m \times N$矩阵 B，其中 $1 \le m \le N$，令 $s_{\min}(B)$ 表示其最小奇异值，即 $BB^{\top}$ 的最小特征值的平方根。

定理 4.8. 设 c 是一个小 n 边形，且 $1 \le |E(c)| \le 2n$，并令 Δ 为 $G(c)$ 的最大度。假设：

（i） $s_{\min}(Dg(c)) \ge s_L > 0$。（ii）存在满足命题 *3.2* 的乘子恒等式的乘子，使得对每个 $\{i,j\} \in E(c)$，都有 $0 < \lambda_L \le \lambda_{ij} \le \lambda_U$。（iii） $Q_c(v) \le -\mu\|v\|^2$ 对每个 $v \in \mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}$ 均成立，其中 $\mu > 0$。

Set

$$q = 1 + 4\Delta\lambda_U, \qquad K = \frac{q}{2} + \frac{q^2}{\mu} + \frac{\mu}{4},$$

and

$$\rho = \frac{s_L}{K}\min\Big\{\lambda_L, \frac{\mu}{16\Delta}\Big\}, \qquad \kappa = \frac{\mu}{8}.$$

那么，每个满足条件的 $x \in (\mathbb{R}^2)^n$

$$g_{ij}(x) \le 0 \quad (\{i,j\} \in E(c)), \qquad \operatorname{dist}(x,c) \le \rho$$

满足

$$\mathcal{A}(x) \le \mathcal{A}(c) - \kappa \operatorname{dist}(x,c)^2.$$

特别地，这对距离 ρ 以内、且位于 c附近的每个小 n 边形都成立。等式 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(c)$迫使这样的 x 位于 c 的欧几里得轨道上。

证明。选取一个使 $\operatorname{dist}(x,c)$ 达到最小值的保向欧几里得运动，并令 y 为 x 在该运动下的像。设 $h = y - c$，且 $r = \|h\| = \operatorname{dist}(x,c)$。由平移和旋转下的极小性可得，对于 $b \in \mathbb{R}^2$ 和 $\omega \in \mathbb{R}$,

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sum_{i=1}^{n} \|e^{s\omega J}y_i + sb - c_i\|^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\langle \omega J y_i + b, h_i\rangle.$$

取 $\omega = 0$ 得到 $\sum_i h_i = 0$。取 $b = 0$ 和 $\omega = 1$，再利用 $y_i = c_i + h_i$ 和 $\langle Jh_i, h_i\rangle = 0$，得到 $\sum_i \langle Jc_i, h_i\rangle = 0$。因此 $h \in R(c)^{\perp}$。该刚体运动保持面积和两两距离不变，因此只需考虑满足 $r \le \rho$ 的 $c + h$，并且 $g_{ij}(c+h) \le 0$ 位于 $E(c)$ 的每条边上。

考虑二次拉格朗日函数

$$L(u) = \mathcal{A}(u) - \sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij} g_{ij}(u).$$

乘子恒等式给出 $DL(c) = 0$；此外，$L(c) = \mathcal{A}(c)$，且 $D^2L(c)[h,h] = Q_c(h)$。由于 L 是二次的，其展开是精确的：

$$\mathcal{A}(c+h) - \mathcal{A}(c) = \sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij} g_{ij}(c+h) + \frac{1}{2}Q_c(h).$$

对于每条活跃边，约束展开同样是精确的：

$$g_{ij}(c+h) = Dg_{ij}(c)[h] + \|h_i - h_j\|^2.$$

将活跃约束松弛量及其总和写作

$$\sigma_{ij} = -g_{ij}(c+h) \ge 0, \qquad S = \sum_{\{i,j\}\in E(c)} \sigma_{ij}.$$

(ii) 中的乘子界给出

$$\mathcal{A}(c+h) - \mathcal{A}(c) \le -\lambda_L S + \frac{1}{2}Q_c(h).$$

对每个 $u \in (\mathbb{R}^2)^n$ 都成立的图度数界为

$$\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \|u_i - u_j\|^2 \le 2\sum_{i=1}^{n} \deg_{G(c)}(i)\|u_i\|^2 \le 2\Delta\|u\|^2.$$

将 $h = t + z$ 正交分解，其中 $t \in \ker Dg(c)$ 且 $z \in (\ker Dg(c))^{\perp}$。由于 $R(c) \subseteq \ker Dg(c)$ 且 $h \in R(c)^{\perp}$，我们有 $t \in \mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}$。假设 (i) 给出

$$\|Dg(c)z\| \ge s_L\|z\|, \qquad \|t\|^2 + \|z\|^2 = r^2.$$

约束展开给出，在每条活跃边上，

$$Dg_{ij}(c)[z] = -\sigma_{ij} - \|h_i - h_j\|^2.$$

取范数并将度数界应用于 h，得到

$$\|Dg(c)z\| \le \sum_{\{i,j\}\in E(c)} (\sigma_{ij} + \|h_i - h_j\|^2) \le S + 2\Delta r^2,$$

$$\|z\| \le \frac{S + 2\Delta r^2}{s_L}.$$

对于每个 $v \in (\mathbb{R}^2)^n$，定理 4.1 和度数界给出

$$|D^2\mathcal{A}(c)[v,v]| \le \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|\,\|v_{i+1}\| \le \|v\|^2,$$

$$0 \le 2\sum_{\{i,j\}\in E(c)} \lambda_{ij}\|v_i - v_j\|^2 \le 4\Delta\lambda_U\|v\|^2.$$

因此 $|Q_c(v)| \le q\|v\|^2$。与 B_c 相关联的对称算子的范数至多为 q，所以 $|B_c(u,\ v)| \le q\|u\|\|v\|$。由 (iii) 和杨氏不等式，

$$Q_c(h) = Q_c(t) + 2B_c(t,z) + Q_c(z),$$

$$Q_c(h) \le -\mu\|t\|^2 + 2q\|t\|\|z\| + q\|z\|^2,$$

$$Q_c(h) \le -\frac{\mu}{2}\|t\|^2 + \Big(q + \frac{2q^2}{\mu}\Big)\|z\|^2.$$

由于 $\|t\|^2 = r^2 - \|z\|^2$，根据 K 的定义可得

$$\frac{1}{2}Q_c(h) \le -\frac{\mu}{4}r^2 + K\|z\|^2.$$

$\|z\|$ 的估计与 $\|z\| \le r$ 结合，可得

$$\|z\|^2 \le \frac{r}{s_L}(S + 2\Delta r^2).$$

代入面积估计可得

$$\mathcal{A}(c+h) - \mathcal{A}(c) \le -\Big(\lambda_L - \frac{Kr}{s_L}\Big)S - r^2\Big(\frac{\mu}{4} - \frac{2\Delta K r}{s_L}\Big).$$

若 $r \le \rho$，则 $Kr/s_L \le \lambda_L$ 且 $2\Delta Kr/s_L \le \mu/8$。由于 $S \ge 0$，可得

$$\mathcal{A}(c+h) - \mathcal{A}(c) \le -\frac{\mu}{8}r^2 = -\kappa r^2.$$

等式 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(c)$ 推出 $r = 0$，因此 x 属于 c 的欧几里得轨道。 $\square$

定理 4.9。 设 c 是一个正向定向的小 n 边形，满足 $E(c) \neq \emptyset$。假设：

(i) 活动约束矩阵 $Dg(c)$ 具有满行秩。(ii) 存在满足

以下条件的乘子 $\lambda_{ij} > 0$

$$\nabla_{c_i} \mathcal{A}(c) = 2 \sum_{j:\{i,j\} \in E(c)} \lambda_{ij}(c_i - c_j) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

(iii) Q_c 在以下空间上负定

$$\mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}.$$

那么，在所有小型 n 边形中，模去保向欧几里得运动后， c 是 $\mathcal{A}$ 的严格局部极大值点。因此，存在 U 邻域，使得对其中每个小型 n 边形$x \in U$ ，都有

$$\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(c),$$

等号成立当且仅当 x 属于 c 的欧几里得轨道。还可以选取该邻域，使得对所有此类 x， $E(x) \subseteq E(c)$ 。

证明。 由 (i)， $s_{\min}(Dg(c)) > 0$。(ii) 中有限个乘子都属于区间 $[\lambda_L, \lambda_U]$，且 $\lambda_L > 0$。令 $V = \mathcal{I}(c) \cap R(c)^{\perp}$。若 $V = \{0\}$，任取一个 $\mu > 0$。否则，由 (iii) 以及 V 的单位球面的紧致性可得 $\mu > 0$。无论哪种情况，对所有 $v \in V$，都有 $Q_c(v) \leq -\mu \|v\|^2$ 。

每个小 n-边形 x 都满足 $\|x_i - x_j\| \leq 1$ 在 $E(c)$上。因此，定理 4.8 给出 $\rho > 0$ 使得

$$\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(c) - \frac{\mu}{8} \operatorname{dist}(x, c)^2 \qquad \text{if } \operatorname{dist}(x, c) \leq \rho.$$

令 $U = \{x : \|x - c\| < \rho\}$。对于每个小 n-边形 $x \in U$，都有 $\operatorname{dist}(x, c) \leq \|x - c\| < \rho$。因此 $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(c)$，且等号仅当 x 属于 c的欧几里得轨道时成立。

根据定义，非活动裕度 $\delta(c)$ 为正。缩小 U，使得 $\max_i \|x_i - c_i\| < \delta(c)/2$，从而所有非活动距离都严格小于 1，因此对于每个小 n-边形$x \in U$， $E(x) \subseteq E(c)$。□

注 4.10。 对于 Graham 型直径图，定理 4.8 中的 $\Delta = 3$ ： 与悬挂边相 incident 的环顶点度数为 3，悬挂顶点的度数为 1，其他每个顶点的度数均为 2。

5. 四边形情形

四边形 Q_4 展示了局部极大性如何能够与有效乘子为零及二阶变分退化并存。其明确的描述还表明，剩余的直径不等式如何限制约化核中的方向。

命题5.1。令 $a = 1 - \sqrt{3}/2$ 并定义 $Q_4 = c = (c_1, \ c_2, \ c_3, \ c_4)$ 如下

$$c_1 = (0, 0), \qquad c_2 = \left(\frac{1}{2}, a\right), \qquad c_3 = (0, 1), \qquad c_4 = \left(-\frac{1}{2}, a\right).$$

则 $\mathcal{A}(c) = 1/2$。活跃直径边为

$$E(c) = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

一阶乘子方程由以下各项满足

$$\lambda_{13} = \frac{1}{4}, \qquad \lambda_{24} = \frac{1}{4}, \qquad \lambda_{23} = 0, \qquad \lambda_{34} = 0.$$

因此， Q_4 满足一阶无上升判据。令

$$\mathcal{I}^+(c) = \left\{ v \in (\mathbb{R}^2)^4 : \langle c_3 - c_1, v_3 - v_1 \rangle = 0, \ \langle c_4 - c_2, v_4 - v_2 \rangle = 0 \right\}.$$

只有正乘子边会进入这个等式空间。在该空间上的约束二阶变分为

$$Q_c(v) = D^2\mathcal{A}(c)[v,v] - \frac{1}{2}\|v_1 - v_3\|^2 - \frac{1}{2}\|v_2 - v_4\|^2.$$

此外，

$$\dim \mathfrak{I}^+(c) = 6, \qquad \dim R(c) = 3, \qquad \dim(\mathfrak{I}^+(c) \cap R(c)^\perp) = 3.$$

在 $\mathfrak{I}^+(c) \cap R(c)^\perp$ 约化特征值为

$$\{-2,\ 0,\ 0\}.$$

在零特征空间内，完整直径不等式将可行方向限制在一个真锥中。

证明。 由鞋带公式得出 $\mathcal{A}(c) = 1/2$。对于任意小四边形，其有向面积的绝对值至多为其对角线长度乘积的一半，而每条对角线长度都至多为 1。因此，其面积不可能超过 $1/2$。有效直径等式由下式得出

$$\|c_1 - c_3\| = 1, \qquad \|c_2 - c_3\| = 1, \qquad \|c_2 - c_4\| = 1, \qquad \|c_3 - c_4\| = 1.$$

剩余的两个距离为

$$\|c_1 - c_2\| = \|c_1 - c_4\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} < 1.$$

根据定理 3.1，梯度为

$$\nabla_{c_1}\mathcal{A} = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad \nabla_{c_2}\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \nabla_{c_3}\mathcal{A} = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \nabla_{c_4}\mathcal{A} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

代入后得到乘子方程，其中乘子如上所示。定义 $\mathfrak{I}^+(c)$的两个方程为

$$(v_3 - v_1)_2 = 0, \qquad (v_4 - v_2)_1 = 0.$$

因此，$\dim\ \mathfrak{I}^+(c)\ = 8 - 2 = 6$。由于 $R(c)$的维数为 3，且包含于 $\mathfrak{I}^+(c)$中，约化空间 $\mathfrak{I}^+(c)\ \cap R(c)^\perp$ 的维数为 3。 $\mathfrak{I}^+(c)\ \cap R(c)^\perp$ 的一组基为

$$u_1 = (1, 1, 0, -2, -1, 1, 0, 0),$$
$$u_2 = (-\sqrt{3}, 0, 1, 0, -2 + \sqrt{3}, 0, 1, 0),$$
$$u_3 = (1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 1),$$

其中坐标按以下顺序排列

$$(v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}, v_{3x}, v_{3y}, v_{4x}, v_{4y}).$$

相对于这组基， Q_c 的矩阵和欧几里得 Gram 矩阵分别为

$$Q = \begin{pmatrix} -8 & -4 + 4\sqrt{3} & -8 \\ -4 + 4\sqrt{3} & -8 + 4\sqrt{3} & -4 + 4\sqrt{3} \\ -8 & -4 + 4\sqrt{3} & -8 \end{pmatrix},$$

and

$$G = \begin{pmatrix} 8 & 2 - 2\sqrt{3} & 4 \\ 2 - 2\sqrt{3} & 12 - 4\sqrt{3} & 2 - 2\sqrt{3} \\ 4 & 2 - 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

约化特征值是广义特征方程的根

$$\det(Q - \nu G) = 0.$$

直接计算可得

$$\det(Q - \nu G) = 32\nu^2(\sqrt{3} - 4)(\nu + 2).$$

由于 $\sqrt{3}-4\neq 0$，约化谱恰好为

$$\{-2,\ 0,\ 0\}.$$

为确定核，固定 $c_1=(0,\ 0)$、$c_3=(0,\ 1)$，并令 $c_2=(t+1/2,\ b)$、$c_4=(t-1/2,\ b)$。两条对角线仍保持正交且长度为单位长度，因此面积保持为 $1/2$。沿此族，面积和两个正乘子约束均为常数，因此 Q_c 在其切向速度上为零。这些速度模去刚体运动后彼此独立，并且经正交投影到 $R(c)^{\perp}$ 后，张成二维约化核。在 $(t,\ b)=(0,\ a)$ 附近，其余活跃不等式为

$$(t+1/2)^2+(b-1)^2\le 1,\qquad (t-1/2)^2+(b-1)^2\le 1.$$

它们在 $(0,\ a)$ 处的一阶不等式为

$$\dot t-\sqrt{3}\,\dot b\le 0,\qquad -\dot t-\sqrt{3}\,\dot b\le 0.$$

因此，可行速度满足 $\dot b\ge|\dot t|/\sqrt{3}$，而 Q_4^{-} 是这个最优族的可行部分中的一个角点。□

6. 谱验证

LSPectra [12] 包围约化谱，并验证每个满足 $6\le n\le 64$ 的偶数 n 均符合定理 4.8 和定理 4.9 的假设。该程序使用向外舍入区间算术包围一个驻定构形，并界定稳定性估计中涉及的量。这些界在精确的驻定构形处成立，列于表2。利用这些界和 $\Delta=3$，通过精确有理数算术计算定理 4.8 中的常数 ρ_n 和 κ_n，随后向下舍入。所得的 ρ_n 和 κ_n 值见第 7 节。

对于每个满足 $6\le n\le 64$ 的偶数 n，令 $h=n/2$。$\mathcal{E}$ 中的 $m=n$ 对按下述顺序列出。输入中声明了 $2\le k\le h$ 的悬挂顶点对 $\{1,h+1\}$ 以及环边 $\{k,k+h-1\}$,$\{k,k+h\}$，以及 $\{h+1,n\}$。我们用 $\mathcal{E}$ 表示这个列表，也表示其对应的对的集合。

注 6.1。对于环加悬挂顶点直径图的严格凸实现，活跃约束梯度线性无关。事实上，在这些梯度的任意线性关系中，与悬挂顶点对应的分块会迫使其唯一关联边的系数为零。在每个环顶点处，剩余的两项分别是两个相邻环弦向量的标量倍数。根据严格凸性，这两个向量不平行，因此两个系数均为零。

定义

$$g(z)=\big(\|z_i-z_j\|^2-1\big)_{\{i,j\}\in\mathcal{E}}\qquad (z\in(\mathbb{R}^2)^n).$$

同样的点对在整个验证盒中定义 g 及其雅可比矩阵 Dg。$n=6$、8、10 的输入坐标来自 Mossinghoff [14, 表 4]；对于 $n\ge 12$，则由 OPTIGON 角 [5]生成。这些文件随 LSPectra 一并提供，并为验证提供起始点。

为求解平稳性方程，我们固定一个规范，以消除欧氏运动带来的自由度。设 $\Sigma(c)=[\,\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_y\ Jc\,]$，其列向量张成 $R(c)$，并施加由下式给出的规范$\Gamma c=b$

$$c_1=(0,0),\qquad (c_k)_1=0,\qquad k=\lfloor n/2\rfloor+1.$$

这里， $\mathbf{1}_x = ((1,\ 0).....,\ (1,\ 0))$ 和 $\mathbf{1}_y = ((0,\ 1).....,\ (0,\ 1))$ 是平移生成元， $\Gamma c = ((c_1)_1, (c_1)_2, (c_k)_1)^\top$，且 $b = 0 \in \mathbb{R}^3$。增广系统 [9] 为

$$\widehat{F}(c, \lambda, \xi) = \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{A}(c) - Dg(c)^\top \lambda + \Sigma(c)\xi \\ g(c) \\ \Gamma c - b \end{pmatrix},$$

其中 $(c,\ \lambda,\ \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^3$ 且 $\widehat{F}\ (c,\ \lambda,\ \xi) \in \mathbb{R}^{2n+m+3}$。每个满足规范的驻点对都会给出一个具有 $\xi = 0$ 的零点。以下引理给出面积为正时的逆命题。

引理6.2。设 (c, λ, ξ) 是 F 的一个具有 $\mathcal{A}(c) > 0$ 的精确零点。则 $\xi = 0$，且 (c, λ) 满足乘子恒等式

$$\nabla \mathcal{A}(c) = Dg(c)^\top \lambda$$

对于 $\mathcal{E}$ 的点对，且不对 λ 施加符号限制。一旦证明了 $\mathcal{E} = E(c)$，这就是命题 *3.2* 的乘子恒等式。

证明。面积和约束 g 在保向欧几里得运动下保持不变，因此

$$\Sigma(c)^\top \nabla \mathcal{A}(c) = 0, \qquad \Sigma(c)^\top Dg(c)^\top = 0.$$

将 $\Sigma(c)^\top$ 应用于 $F = 0$ 的第一个块，得到

$$\Sigma(c)^\top \Sigma(c)\, \xi = 0.$$

由于 $\mathcal{A}(c) > 0$，这些点 c_i 并不全都相同，因此 $\Sigma(c)$ 的列向量线性无关，且 Gram 矩阵 $\Sigma(c)^\top \Sigma(c)$ 非奇异。因此， $\xi = 0$，第一块即为驻定性单位元。□

6.1. **验证**。我们首先在 256 位精度下，使用牛顿法细化增广系统的近似解。随后将结果舍入为 binary64，并将其用作区间盒的中心。Krawczyk 包含证明了增广系统在该区间盒中存在唯一零点，正如 H1 所要求的那样。表1中的其余检查均在包含该零点的收缩包围集 Z_n 上进行。对 Z_n 的区间检查给出了第 7 节中的界。这些界包括非活动裕度和 $s_{\min}(Dg)$ 的下界，以及活跃乘子的下界和上界。其中还包括谱界 μ_n 以及包含面积的一个区间。由于 Z_n 包含精确零点，这些界在精确的驻定构形处仍然成立。H3–H6 和 H8 的阈值为 $\tau = 2^{-13}$。未达到该阈值本身并不能否证相关的严格不等式。

对于谱检验，定义

$$H(\lambda) = D^2\mathcal{A} - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \lambda_{ij} D^2 g_{ij}, \qquad A(z) = \begin{pmatrix} Dg(z) \\ \Sigma(z)^\top \end{pmatrix}.$$

海森矩阵以标准欧氏坐标表示。检验针对将 $H(\lambda)$ 正交压缩到 $\ker A(z) = \ker Dg(z) \cap R(z)^\perp$。在满足 $E(z) = \mathcal{E}$ 的精确驻点对处，这种压缩表示了将 Q_z 限制到 $\mathcal{I}(z) \cap R(z)^\perp$。

在 H8 中，从 z_j 到有向边 $z_i z_{i+1}$ 的有向距离为

$$\frac{\det(z_{i+1} - z_i,\, z_j - z_i)}{\|z_{i+1} - z_i\|}.$$

LSPectra 还记录了行列式 $\det(z_{i+1} - z_i,\ z_j - z_i)$ 在 Z_n 上的下界 D_n，该下界用于注 7.2。[1] 有向边界边左侧的有向距离为正，因此仅 H8 就能推出正向性和严格凸性。H7 被单独列出，因为引理6.2 使用了它。在 H1 给出的精确零点处， $g(c) = 0$ 和 H5 给出 $\mathcal{E} = E(c)$。因此

[1] 边界 D_n 可在 JSON 记录的以下位置找到：*evidence.convexity.det_lower_bound*，位于 *data/records_series/* 对于 $n = 6, 8, \ldots, 14$ 和 *data/records_series/* 对于 $n = 16,\ 18,\ \ldots,\ 64$。

表1. 在初始盒 Z上检验 H1。在收缩盒 Z_n上检验其余条件。

检验	条件
H1	盒内恰有一个增广系统的零点
H2	$A(z)$ 满行秩，因此 $Dg(z)$ 也满行秩
H3	$\lvert\det(\Gamma\Sigma(z))\rvert \geq \tau$
H4	$\lambda_{ij} \geq \tau$ 对于每个 $\{i,j\} \in \mathcal{E}$
H5	$1 - \lVert z_i - z_j\rVert \geq \tau$ 对于每个 $\{i,j\} \notin \mathcal{E}$
H6	$H(\lambda)$ 到 $\ker Dg(z) \cap R(z)^{\perp}$ 的正交压缩的最大特征值为在 $-\tau$ 下方
H7	$\mathcal{A}(z) > 0$
H8	每个非关联顶点到每条有向多边形边的有向距离为 $\geq \tau$

c 是一个小的 n 边形，并且 $\ker Dg(c) = \mathfrak{I}(c)$，如第 2 节所述。结合乘子恒等式、H2、H4 和 H6，便可得到定理 4.9 的秩、正性和二阶变分假设；再结合第 7 节报告的界，还可得到定理 4.8 的相应假设。

为检验 H6 并包络约化谱，程序统计移位边框矩阵的负特征值个数

$$\mathcal{B}(s,z,\lambda) = \begin{pmatrix} H(\lambda) - sI & A(z)^{\top} \\ A(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $A(z)$ 满行秩时，用该矩阵的行数从此计数中减去，所得结果即为小于 s [8] 的约化特征值个数。近似特征值可指导移位量的选择，包括 $-\tau$ 和 0。对于每个移位量，区间求值都会在整个盒域上包络 $\mathcal{B}$ 。借助 P 近似逆，界

$$\lVert I - P\mathcal{B}(s,z,\lambda)\rVert_{\infty} < 1$$

在整个区间矩阵包络内成立，从而确立其非奇异性。因此，其对称矩阵的惯性保持不变，并可由一个代表矩阵确定。

程序构造一个对称区间包络，并取其各元素下端点，以得到对称代表矩阵 M。随后，它使用一个由 M 的近似特征向量组成的矩阵 V 来包络 $V^{\top}MV$。

如果所有 Gershgorin圆盘都不包含零，那么完全位于开左半平面的圆盘个数就是 $V^{\top}MV$ 的负特征值个数。其非奇异性意味着 V 可逆，因此根据 Sylvester 定律， M 具有相同的惯性。如果此检验无法得出结论，程序就用精确有理数算术，通过对称消元计算 M 的惯性。只有通过这些检验的移位量才会纳入谱界。相邻移位量对应的计数之差给出了所包络的特征值重数。当极端移位量处的计数分别为 0 和 $\dim\ker A(z)$ 时，这些包络就覆盖整个约化谱。对于定理 7.1所覆盖的每个 Q_n ，移位计数在每个包含于 $(-\infty,\ -\tau)$ 的 $n-3$ 个两两不相交区间上都增加一。因此，每个区间恰好包含一个约化特征值，这证明整个约化谱是单重且严格为负的。

以下结果已在 Lean 4 [15]中形式化，作为 LSPectra [12]的一部分：引理6.2、Neumann非奇异性界、区间族上的常值惯性、增广惯性恒等式、移位之间的特征值定位，以及 Gershgorin判据。区间算术和定理 4.8未在 Lean 中形式化。将验证检查组合成最终判定的逻辑已经过测试，但尚未进行形式化验证。

6.2. 实现细节。 设 $u_0 = (c_0,\ \lambda_0,\ \xi_0)$ 为精化中心，$Z \subset \mathbb{R}^{2n+m+3}$ 其周围的$\widehat{\ }$盒，且 Y 为 $DF(u_0)$ 的近似逆。程序计算

$$\mathcal{T}(Z) = u_0 - Y\,\widehat{F}(u_0) + \big(I - Y\,D\widehat{F}(Z)\big)(Z - u_0)$$

采用区间算术。严格包含 $\mathcal{T}(Z) \subset \operatorname{int} Z$ 意味着在Z 中存在唯一零点，且包围雅可比矩阵 [13], [16, Ch. 5]非奇异。后续检查使用收缩包围集 $Z \cap \mathcal{T}(Z)\widehat{\ }$。$F$ 在 Z 中的每个零点都位于 $\mathcal{T}(Z)$内，因此，对每个 n，记录为 Z_n的这个包围集都包含该零点，且其中的零点唯一。

Z_n 的每个端点都以十进制数写入 JSON 记录，读取为 binary64 时可还原原始 binary64 值。定义 Z_n 的端点，是这些还原后的 binary64 数所表示的精确二进有理数值。

在精化中心处，列主元 QR 分解选取一个方形列块（$A(z)$）$_B$。在收缩包围集上，使用近似逆 Y_B 来验证

$$\|I - Y_B(A(z))_B\|_\infty < 1.$$

这证明了满行秩[2]。随后利用区间界求解基变量，从而包围 $\ker\ Dg(z) \cap R(z)^\perp$ 的一个基。对于 H3，区间求值在整个盒内确立了 $|\det(\Gamma\Sigma(z))| \geq \tau$，确保规范与欧氏运动轨道横截。LSPectra 给出稳定 判定需要此项检查，但定理7.1的证明无需单独进行此检查。

对于稳定性估计，程序对 $Dg(z)Dg(z)^\top - s^2_{n,\ L} I$ 在 Z_n上的包络执行不带主元的区间高斯消去。如果每个对角主元的下端点都严格为正，则接受候选值 $s_{n,\ L}$。这证明了在整个 Z_n上均为正定，因此 $s_{\min}(Dg(z)) > s_{n,\ L}$。

该实现使用 Julia [3] 和 IntervalArithmetic.jl [2]。验证脚本会在计算前检查向外舍入。软件包含输入文件、记录和复现脚本，以及回归测试和变异测试。回归测试会重新计算各个案例，并与存储的记录进行比较；扩展序列则单独启用。

7. 主定理与已验证谱

定理7.1。 对于满足 $6 \leq n \leq 64$ 的每个偶数 n，令 Q_n 由 *LSPectra* 记录的盒 Z_n 内 F 的唯一零点的前 $2n$ 个分量组成。则：

(i) Q_n 是一个严格凸、正向定向的小 n边形。其活跃直径图的边集为 $\mathcal{E}$，定义见第*6*节。图*1*展示了 $n = 6$、8、12、16、32这些情况；图*2*展示了带有悬挂边 *{*1,33*}* 的 Q_{64}。此外，

$$\delta(Q_n) \geq \delta_n, \qquad \mathcal{A}(Q_n) \in [A_n^-, A_n^+], \qquad A_n^+ - A_n^- < 10^{-11}.$$

(ii) 线性无关性：$Dg(Q_n)$ 具有满行秩，秩 $Dg(Q_n) = |E(Q_n)| = n$，其中

$$s_{\min}(Dg(Q_n)) \geq s_{n,L},$$

且 $\mathcal{I}(Q_n) \cap R(Q_n)^\perp$ 的维数为 $d = n - 3$。

(iii) 严格互补性：乘子恒等式的乘子唯一，且满足

$$\lambda_{n,L} \leq \lambda_{ij} \leq \lambda_{n,U} \qquad (\{i,j\} \in E(Q_n)).$$

（iv）约化谱：对于（iii）中的乘子，令

$$L_n = \mathcal{A} - \sum_{\{i,j\} \in E(Q_n)} \lambda_{ij} g_{ij}.$$

[2]残差范数的上界存储在每条记录的 *evidence.rank.kappa* 中。

D^2L_n 到 $\mathcal{I}(Q_n) \cap R(Q_n)^\perp$ 的限制具有 d 个简单特征值 $\nu_1 < \cdots < \nu_d$，它们包含在两两不相交区间中，且 $\nu_d \le -\mu_n$。特别地，

$$D^2L_n[v,v] \le -\mu_n \|v\|^2 \qquad (v \in \mathcal{I}(Q_n) \cap R(Q_n)^\perp).$$

(v) 定量稳定性：每个 $x \in (\mathbb{R}^2)^n$ 满足

$$\|x_i - x_j\| \le 1 \quad (\{i,j\} \in E(Q_n)), \qquad \operatorname{dist}(x, Q_n) \le \rho_n$$

还满足

$$\mathcal{A}(x) \le \mathcal{A}(Q_n) - \kappa_n \operatorname{dist}(x, Q_n)^2.$$

特别地，这对距离 ρ_n Q_n小于 n的每个小型多边形都成立。

特别地，在所有小型 n边形中，模去保向欧几里得运动后， Q_n 是 $\mathcal{A}$的严格局部极大值点，并且在线性化可行锥 $\mathcal{K}(Q_n)$ 上不存在一阶面积增加方向。常数取自表*2*和表*3*。

^定理*7.1*的证明。 设 n 为偶数，且满足 $6 \le n \le 64$。由 H1， F在 Z_n中有唯一零点 $(Q_n,\ \lambda,\ \xi)$。由于 H7 给出 $\mathcal{A}(Q_n) > 0$，引理6.2给出 $\mathcal{E}$各对的 $\xi = 0$ 及乘子恒等式。与第6节相同， $g(Q_n) = 0$ 及 H5 给出 $\mathcal{E} = E(Q_n)$，因此 Q_n 很小，而 H8 使其严格凸且正向定向。对 Z_n 进行区间求值，得到 (i) 中的界以及 (iii) 中的乘子界。

第6节中对 $s_{n,L}$ 的认证给出了 (ii)。由于秩 $Dg(Q_n) = n$，空间 $\ker Dg(Q_n)$ 的维数为 $2n - n = n$ ，且包含 $R(Q_n)$；后者的维数为 3，因为 $\mathcal{A}(Q_n) > 0$；因此约化空间的维数为 $n-3$。此外， $Dg(Q_n)^\top$ 是单射，因此乘子唯一，由此完成 (iii)。

由于 L_n 是二次的，其海森矩阵为常数，而 $D^2L_n[v,v]$ 是定理 4.3 在 Q_n处的约束二阶变分。第6.1节中经验证的惯性计数从 0 增至 d，且每个记录区间内均增加 1；每个约化特征值都低于最后一个区间的上端点，而该端点至多为 $-\mu_n$；这将每个约化特征值都限制在各自的区间内，且重数为 1，从而得到 (iv)。因此，(ii)–(iv) 使我们可以应用定理 4.8，其中

$$s_L = s_{n,L}, \qquad \lambda_L = \lambda_{n,L}, \qquad \lambda_U = \lambda_{n,U}, \qquad \mu = \mu_n,$$

并且，根据注 4.10， $\Delta = 3$。第6节的精确有理数求值给出了表3中的常数$\rho_n \le \rho$ 和 $\kappa_n \le \kappa$ ，因此所得估计证明了 (v)。

每个满足 $\|x - Q_n\| \le \rho_n$ 的较小 n边形 x 都满足 $\operatorname{dist}(x,\ Q_n) \le \rho_n$，因此由 (v) 可得 $\mathcal{A}(x) \le \mathcal{A}(Q_n)$，且等号仅在 Q_n的欧几里得轨道上成立。最后，(iii) 中的正乘子使命题 3.2 能够排除 $\mathcal{K}(Q_n)$上的一阶面积增加方向。□

这些记录使用 LSPectra [12]版本 0.24.5、Julia 1.12.6 和 IntervalAr- ithmetic.jl 1.0.12 生成。对于满足 $6 \le n \le 64$的每个偶数 n ，初始盒 Z均满足 Krawczyk 包含；该初始盒在 $u_0 = (c_0,\ \lambda_0,\ \xi_0)$ 的每个分量中采用相同的标称半径 10^{-13} 构造，并且 H1–H8 均满足表2中的界。在这些构形中， Q_{64} 的约化特征值最接近零；但仍低于零超过 9τ 。

三个控制例分别展示了重数、消失的乘子和正二阶变分。正五边形作为重数的计算控制例，通过了全部八项验证检查 H1–H8。其约化空间的维数为 2，谱验证将两个约化特征值都包含在一个区间内，总重数为二。

对于 Q_4，两个乘子消失，因此 H4 不成立，正如命题5.1所预言的那样。将全部四条直径都保留为等式时，约化维数为 $d = 1$。该命题中的谱 $\{-2,\ 0,\ 0\}$ 指的则是由正乘子定义的更大等式空间。

对于正六边形，H1–H5、H7 和 H8 均成立。其约化谱中有两个正特征值（按重数计），位于包含 $\sqrt{3}/2$ 的区间内；其余约化

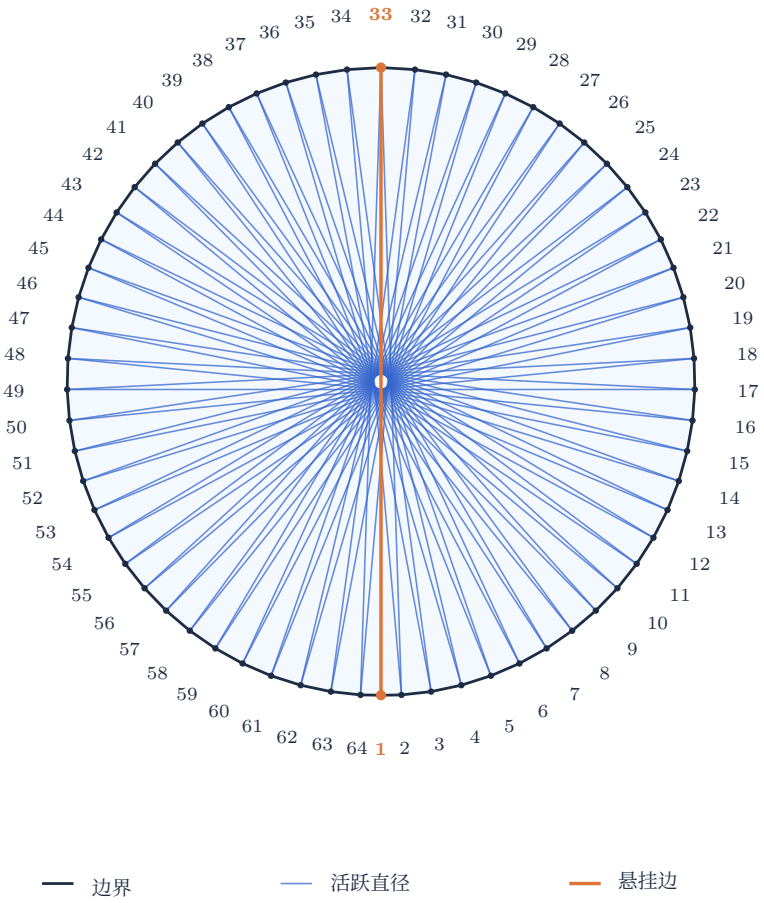


图2。多边形 Q_{64} 及其直径图。蓝色边表示活跃单位距离约束；橙色边 {1,33} 是其 Graham 型直径图中的悬挂边。深色边界遵循多边形的循环次序，顶点标签与 LSPectra 输入一致。

特征值均为负。因此， $-\mathcal{A}$ [17, Thm. 12.5] 的二阶必要条件不成立，该六边形不是局部极大值构形。

表2给出了稳定性估计所用的界。这里， δ_n 给出了非活跃距离裕度的下界，$s_{n,\,L}$ 给出了 $s_{\min}(Dg(Q_n))$的下界，而 $[\lambda_{n,L}, \lambda_{n,U}]$ 包含所有活跃乘子。量 μ_n 是 D^2L_n 在 $\mathfrak{I}(Q_n) \cap R(Q_n)^{\perp}$上相对于其欧几里得内积的最大约化特征值相反数的下界。下界向下截断，上界则按最后显示的位数向上取整。

对于 Q_4，命题5.1中的零特征值反映了该命题所述的松弛最优族；完整直径不等式将其可行切向方向限制在一个真锥内。对于$n = 6$，8，……，64，该定理证明了 Q_n 在所有邻近的小型 n边形中的局部极大性。 Q_6 的面积与Graham 的数值 $0.674981\ldots$ [10]精确到小数点后六位一致，但该定理并未认定这些构形为全局极大值构形。

7.1. 谱行为与稳定性界。 表4报告了定理7.1(iv)中的最小约化特征值 ν_1 以及两个最大的特征值 $\nu_{d-1} < \nu_d$。对于每个偶数 n，完整的区间列表及其重数记录在相应 LSPectra 记录 [12] 的 *evidence.reduced_spectrum.eigenvalues* 下，而端点处的计数则记录在*evidence.reduced_spectrum.shifts* 下。特征值包围区间给出偶数 n 且 $16 \le n \le 64$ 时的情况，

$$10.05 < n|\nu_1| < 10.68, \qquad 1.13 < \frac{n(\nu_d - \nu_{d-1})}{|\nu_d|} < 2.14.$$

相对间隔（$\nu_d-\nu_{d-1}$）/$|\nu_d|$ 从 $n=6$ 时的 1.214 降至 $n=64$时的 0.0178。

谱也决定了定理 7.1(v) 的稳定性常数：κ_n 由 $\mu_n/8$ 向下取整得到。由于对于表2中的每个 n，$\mu_n/(16\Delta)<\lambda_{n,\,L}$，定理4.8中的最小值由谱项取得，因此 ρ_n 是 $s_{n,\,L}\mu_n/(48K)$向下取整的结果，其中 K 在表2的界处取值。

认证半径 ρ_n 远小于非活跃距离裕度的下界 δ_n：比值 ρ_n/δ_n 从 $n=6$ 时约为 2.8×10^{-3} 降至 $n=64$时低于 2×10^{-6}。由于$K\geq q^2/\mu_n$，ρ_n 的公式给出

$$\rho_n\leq\frac{s_{n,L}\mu_n^2}{48q^2}.$$

较小的认证半径反映了估计对约化谱隙的依赖。它们是足够大的半径；其尖锐性尚未得到确立。

注 7.2。根据注 2.2，$\mathcal{A}$ 是有向面积。设 $D_n>0$ 为 LSPectra 对进入 H8 的行列式 det($z_{i+1}-z_i,\ z_j-z_i$)、$j\notin\{i,\ i+1\}$在 Z_n上的下界记录。若 dist($x,\ Q_n$) $\leq r\leq\frac{1}{4}$，则选取一个达到此距离的刚体运动，并令 y为其对 x的像。于是，对每个 i，都有$\|y_i-(Q_n)_i\|\leq r$；由于 Q_n 的每条边和每条弦的长度都不超过 1，因此这些行列式从 Q_n 到 y的变化量均不超过 $4r+4r^2\leq5r$。对每个 n，$\rho_n<\frac{1}{4}$且记录给出 $5\rho_n<D_n$；取 $r=\rho_n$，则 y 严格凸且正向定向，x也如此，因为保向刚体运动保持这两种性质和面积。因此，定理 7.1(v) 中的每个竞争者都严格凸且正向定向，而 $\mathcal{A}(x)$是其围成的面积。

表2. 精确构形 Q_n, $n = 6$，8，……，64 处的界，来自 LSPectra [12] 记录。

多边形	δ_n	$s_{n,L}$	$\lambda_{n,L}$	$\lambda_{n,U}$	μ_n
Q_{6}	0.2207794341	1.398	0.0415920318	0.1718857266	0.4628678899
Q_{8}	0.1225787912	1.094	0.0380689324	0.1310708600	0.3064916518
Q_{10}	0.0774263054	0.8883	0.0323841888	0.1055060193	0.2093529327
Q_{12}	0.0532020485	0.7443	0.0277289987	0.0880806838	0.1436760844
Q_{14}	0.0387602898	0.6394	0.0241082934	0.0755014536	0.09922242721
Q_{16}	0.0294761687	0.5600	0.0212683681	0.0660206880	0.06986884663
Q_{18}	0.0231616045	0.4979	0.0190000448	0.0586314357	0.05049135040
Q_{20}	0.0186750376	0.4480	0.0171543828	0.0527163102	0.03745497467
Q_{22}	0.0153743418	0.4072	0.0156270883	0.0478772927	0.02845825337
Q_{24}	0.0128761290	0.3732	0.0143443148	0.0438469261	0.02208638069
Q_{26}	0.0109401426	0.3444	0.0132528154	0.0404391427	0.01746316000
Q_{28}	0.0094096665	0.3197	0.0123134460	0.0375206406	0.01403466754
Q_{30}	0.0081789713	0.2983	0.0114968900	0.0349934931	0.01144208835
Q_{32}	0.0071746436	0.2795	0.0107808091	0.0327841850	0.009447244997
Q_{34}	0.0063444260	0.2630	0.0101479125	0.0308364748	0.007888337378
Q_{36}	0.0056503058	0.2483	0.0095846235	0.0291066168	0.006653073725
Q_{38}	0.0050640998	0.2352	0.0090801431	0.0275600811	0.005661980738
Q_{40}	0.0045645559	0.2234	0.0086257799	0.0261692538	0.004857798607
Q_{42}	0.0041354049	0.2127	0.0082144637	0.0249117912	0.004198595142
Q_{44}	0.0037640221	0.2030	0.0078403868	0.0237694220	0.003653203273
Q_{46}	0.0034404901	0.1941	0.0074987356	0.0227270613	0.003198140564
Q_{48}	0.0031569311	0.1860	0.0071854881	0.0217721464	0.002815492821
Q_{50}	0.0029070236	0.1785	0.0068972581	0.0208941311	0.002491436456
Q_{52}	0.0026856477	0.1716	0.0066311750	0.0200840975	0.002215191340
Q_{54}	0.0024886212	0.1652	0.0063847896	0.0193344537	0.001978268439
Q_{56}	0.0023125008	0.1593	0.0061559997	0.0186386964	0.001773922275
Q_{58}	0.0021544308	0.1538	0.0059429911	0.0179912228	0.001596747701
Q_{60}	0.0020120270	0.1487	0.0057441901	0.0173871801	0.001442379648
Q_{62}	0.0018832859	0.1438	0.0055582247	0.0168223442	0.001307267233
Q_{64}	0.0017665144	0.1393	0.0053838937	0.0162930209	0.001188502161

表3. n =6、8、.....、64 的面积界 $\mathcal{A}(Q_n) \in [A_n^-, A_n^+]$ 和稳定性常数。 ρ_n 和 κ_n 的常数根据表2和 $\Delta = 3$（第6节）中的界，通过定理 4.8 的精确有理数求值向下取整。

多边形	A_n^-	A_n^+	ρ_n	κ_n
Q_6	0.674981442930	0.674981442931	6.152×10^{-4}	0.05785848623
Q_8	0.726868482751	0.726868482752	3.042×10^{-4}	0.03831145647
Q_{10}	0.749137345877	0.749137345878	1.506×10^{-4}	0.02616911658
Q_{12}	0.760729873448	0.760729873449	7.301×10^{-5}	0.01795951055
Q_{14}	0.767531011120	0.767531011121	3.516×10^{-5}	0.01240280340
Q_{16}	0.771861321980	0.771861321981	1.738×10^{-5}	0.008733605828
Q_{18}	0.774788165074	0.774788165075	8.976×10^{-6}	0.006311418800
Q_{20}	0.776858756001	0.776858756002	4.856×10^{-6}	0.004681871833
Q_{22}	0.778377330126	0.778377330127	2.746×10^{-6}	0.003557281671
Q_{24}	0.779524045160	0.779524045161	1.616×10^{-6}	0.002760797586
Q_{26}	0.780411119922	0.780411119923	9.860×10^{-7}	0.002182895000
Q_{28}	0.781111419017	0.781111419019	6.207×10^{-7}	0.001754333442
Q_{30}	0.781673926721	0.781673926722	4.019×10^{-7}	0.001430261043
Q_{32}	0.782132559738	0.782132559739	2.667×10^{-7}	0.001180905624
Q_{34}	0.782511405883	0.782511405884	1.811×10^{-7}	0.0009860421722
Q_{36}	0.782827954425	0.782827954426	1.254×10^{-7}	0.0008316342156
Q_{38}	0.783095152247	0.783095152249	8.851×10^{-8}	0.0007077475922
Q_{40}	0.783322749493	0.783322749494	6.349×10^{-8}	0.0006072248258
Q_{42}	0.783518202055	0.783518202056	4.622×10^{-8}	0.0005248243927
Q_{44}	0.783687290205	0.783687290206	3.412×10^{-8}	0.0004566504091
Q_{46}	0.783834551000	0.783834551002	2.550×10^{-8}	0.0003997675705
Q_{48}	0.783963585884	0.783963585885	1.928×10^{-8}	0.0003519366026
Q_{50}	0.784077283019	0.784077283020	1.474×10^{-8}	0.0003114295570
Q_{52}	0.784177980335	0.784177980337	1.138×10^{-8}	0.0002768989175
Q_{54}	0.784267586693	0.784267586695	8.866×10^{-9}	0.0002472835548
Q_{56}	0.784347673027	0.784347673029	6.969×10^{-9}	0.0002217402843
Q_{58}	0.784419541669	0.784419541671	5.522×10^{-9}	0.0001995934626
Q_{60}	0.784484279635	0.784484279637	4.409×10^{-9}	0.0001802974560
Q_{62}	0.784542799975	0.784542799977	3.542×10^{-9}	0.0001634084041
Q_{64}	0.784595874141	0.784595874144	2.866×10^{-9}	0.0001485627701

表4。 D^2L_n, $n = 6$、8、.....、64 在 $\mathcal{I}(Q_n) \cap R(Q_n)^{\perp}$ 上的极端约化特征值：最小的 ν_1 个和最大的两个 $\nu_{d-1} < \nu_d$，其中 $\nu_d \le -\mu_n$。这三个特征值四舍五入到小数点后八位，且与其精确值的误差小于 10^{-8}。其记录包围区间的宽度至多为 2.6×10^{-9}。最后一列给出 $(\nu_d - \nu_{d-1})/|\nu_d|$，四舍五入到小数点后三位。

多边形	ν_1	ν_{d-1}	ν_d	$(\nu_d - \nu_{d-1})/\lvert\nu_d\rvert$
Q_6	-1.14208698	-1.02499156	-0.46286789	1.214
Q_8	-1.09984120	-0.55866420	-0.30649165	0.823
Q_{10}	-0.87475315	-0.30978807	-0.20935293	0.480
Q_{12}	-0.81528786	-0.18464983	-0.14367609	0.285
Q_{14}	-0.70226285	-0.11767682	-0.09922243	0.186
Q_{16}	-0.62849940	-0.07920446	-0.06986885	0.134
Q_{18}	-0.56585620	-0.05570488	-0.05049135	0.103
Q_{20}	-0.51236906	-0.04060044	-0.03745498	0.084
Q_{22}	-0.46970141	-0.03047353	-0.02845825	0.071
Q_{24}	-0.43243247	-0.02344035	-0.02208638	0.061
Q_{26}	-0.40095542	-0.01840835	-0.01746316	0.054
Q_{28}	-0.37357115	-0.01471560	-0.01403467	0.049
Q_{30}	-0.34965106	-0.01194572	-0.01144209	0.044
Q_{32}	-0.32859420	-0.00982815	-0.00944725	0.040
Q_{34}	-0.30989184	-0.00818200	-0.00788834	0.037
Q_{36}	-0.29319377	-0.00688328	-0.00665307	0.035
Q_{38}	-0.27818660	-0.00584509	-0.00566198	0.032
Q_{40}	-0.26463156	-0.00500534	-0.00485780	0.030
Q_{42}	-0.25232789	-0.00431886	-0.00419860	0.029
Q_{44}	-0.24111100	-0.00375224	-0.00365320	0.027
Q_{46}	-0.23084391	-0.00328046	-0.00319814	0.026
Q_{48}	-0.22141133	-0.00288450	-0.00281549	0.025
Q_{50}	-0.21271601	-0.00254973	-0.00249144	0.023
Q_{52}	-0.20467508	-0.00226478	-0.00221519	0.022
Q_{54}	-0.19721766	-0.00202072	-0.00197827	0.021
Q_{56}	-0.19028265	-0.00181049	-0.00177392	0.021
Q_{58}	-0.18381722	-0.00162841	-0.00159675	0.020
Q_{60}	-0.17777537	-0.00146994	-0.00144238	0.019
Q_{62}	-0.17211692	-0.00133137	-0.00130727	0.018
Q_{64}	-0.16680660	-0.00120968	-0.00118850	0.018

致谢

撰写本文期间，我们在作者指导下使用了 OpenAI 的 ChatGPT 和 Anthropic 的 Claude 来探讨数学论证，并以它们提出的问题和猜想为起点。这些交流帮助我们探究和完善初步论证与证明策略、考察潜在的异议，并改进结果的阐述。它们还协助开发和记录 LSPectra，以及修订稿件。具体工作包括：

- 提出了寻找最优平移的方法：在定理 4.8 前的讨论中使顶点质心对齐；并推导定理中二次面积下降估计的显式常数 ρ 和 κ。
- 考察能否从活跃等式流形上的局部极大性判据（命题 4.6）中去除乘子的正性假设。
- 改进计算框架，根据作者的具体指示生成代码，并考察性能和数学实现方面的瓶颈及可能的改进。这包括基于 OPTIGON 角度数据的输入生成器，以及利用 Gershgorin 界验证近似对角化。
- 生成软件测试，实现所选线性代数结果的 Lean 4 形式化，并根据现有代码编写文档，包括 README 文件、注释和文档字符串。
- 审阅并改进第5节中四边形分析、第6节中的计算过程以及第 7 节中的结果的呈现方式。四边形分析由作者撰写，随后在 AI 协助下进行了修订。
- 协助进行文献检索、绘图、LaTeX 准备工作以及编辑修订。

作者对数学论证、计算结果和最终稿件，以及随附的软件、测试、形式化和文档承担全部责任。

参考文献

[1] C. Audet、P. Hansen、F. Messine 和 J. Xiong，《最大的最小八边形》，组合理论杂志 *A*辑 **98** (2002)，第 1 期，46–59。[2] L. Benet、O. Hénot、B. Richard 和 D. P. Sanders，*IntervalArithmetic.jl*，1.0.12 版，软件，2026 https://doi.org/10.5281/zenodo.3336308 1 0 12 https://github.com/JuliaIntervals/ 。. IntervalArithmetic.jl/releases/tag/v1.0.12 版本 . .: .[3] J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski 和 V. B. Shah，《Julia：数值计算的新方法》，*SIAM*评论 **59** (2017)，第 1 期，65–98。[4] C. Bingane，《小多边形最大面积的紧界：改进的 Mossinghoff 多边形》，离散与计算几何 **70** (2023)，第 1 期，236–248。 https://doi.org/10.1007/s00454-022-00374-z。[5] C. Bingane，*OPTIGON*：极值小多边形，软件仓库。可在 https://github.com/cbingane/optigon 获取。

[6] C. Bingane 和 M. J. Mossinghoff，《大面积小多边形》，全球优化杂志 **88** (2024)，第 4 期，1035–1050。 https://doi.org/10.1007/s10898-023-01329-1。[7] J. Foster 和 T. Szabó，《多边形的直径图与Graham猜想的证明》，组合理论杂志 *A*辑 **114** (2007)，第 8 期，1515–1525。[8] N. I. M. Gould，《关于一般等式二次规划问题解存在性与唯一性的实用条件》，数学规划 **32** (1985)，90–99。[9] W. Govaerts，《动力学平衡点分岔的数值方法》，SIAM，2000。[10] R. L. Graham，《最大的最小六边形》，组合理论杂志 *A*辑 **18** (1975)，165–170。[11] D. Henrion 和 F. Messine，《使用GloptiPoly寻找最大的小多边形》，全球优化杂志 **56** (2013)，第 3 期，1017–1028。[12] J. López Gutiérrez 和 J. Ayala Hoffmann，*LSPectra*：最大最小多边形的谱稳定性，0.24.5 版，计算机软件，可按需提供。[13] R. E. Moore，《非线性系统解存在性的检验》，*SIAM J. Numer. Anal.* **14** (1977)，611–615。

[14] M. J. Mossinghoff, 《多边形的等直径问题》, 离散与计算几何 **36** (2006), 第 2 期, 363–379。[15] L. de Moura 和 S. Ullrich, 《Lean 4 定理证明器与编程语言》, 载于自动演绎 – *CADE 28*, 计算机科学讲义**12699**, Springer, 2021, 625–635。[16] A. Neumaier, 《方程组的区间方法》, 剑桥大学出版社, 1990。[17] J. Nocedal 和 S. J. Wright, 《数值优化》, 第 2 版, Springer, 2006。[18] J. D. Pintér、F. J. Kampas 和 I. Castillo, 通过数值优化寻找猜想中的最大小 n多边形序列, 数学与计算应用 **27** (2022), 42。[19] K. Reinhardt, 《给定直径的极值多边形》, 德国数学家联合会年报 **31** (1922), 251–270。

塔拉帕卡大学, 伊基克, 智利电子邮箱地址:
jayalhoff@gmail.com

塔拉帕卡大学, 伊基克, 智利电子邮箱地址:
juakinigna@gmail.com