平面微波谐振器中几何本征模分裂的分析

Hagen Papenburg、Jason Corn、Romain Speciel 和 Adham Naji

arXiv:2611.29200v1 [physics.app-ph] 22 Nov 2026

摘要——**平面微波谐振器设计中的一个传统挑战，是寻找能够控制单个谐振频率——或调谐特定本征模之间耦合——的几何机制，同时不影响中心频率等其他系统参数。实现这一能力将为微波传感器、滤波器、天线和谐振网络的设计带来变革。从第一性原理出发，我们概述了一种解析方法的开发过程，该方法通过提出特定的扰动形状来指导实际设计，使其能够实现谐振模分裂，同时使中心频率基本保持不变。这种方法为此前难以发现或优化的新型设计打开了大门。对带状线谐振器进行的独立数值模拟和测量结果验证了该方法的有效性。所展示的调谐效果表明，理论提出的一阶估计在实践中于相对宽的分裂带宽内仍然成立（超过中心频率的 54%），从而提高了所提方法的实用价值。**

索引词—**场分析、微波谐振器、平面谐振器、本征模、谱几何、亥姆霍兹算子、几何调谐。**

I. 引言

电磁谐振器是许多微波和射频（RF）传感器、滤波器、天线、带电粒子加速器及导波网络的基本构成单元 [1]–[5]。这些系统工作于微波频段，此时谐振器的特征尺寸与导波波长相当，因此会呈现丰富多样的波动现象；而在低频或高频的渐近极限下（例如集总元件电路理论或几何光学），这些现象会被掩盖或不复存在。然而，对这些系统的分析历来受到谐振器硬件几何形状与其相应频率响应之间复杂关系的阻碍。一个典型例子是尝试使特定本征模失谐，或控制谐振网络中的模间耦合时，扰动可能会无意间使整个频谱中的其他谐振频率发生偏移，并导致整体的中心频率漂移 [1]–[3], [6]–[10]。这种复杂性源于控制亥姆霍兹边值问题的谱几何，这类问题通常难以进行解析处理。因此，许多实际设计依赖数值模拟或传统的反复试错方法。建立系统的理论框架，利用特征谱与几何形状之间的关系，将提供一套强大的工具，助力实际设计。

H. Papenburg 和 J. Corn 任职于美国加利福尼亚州圣克拉拉市圣克拉拉大学电气与计算机工程系，邮编 95053。R. Speciel 任职于美国加利福尼亚州斯坦福市斯坦福大学数学系，邮编 94305。A. Naji 任职于美国加利福尼亚州圣克拉拉市圣克拉拉大学电气与计算机工程系、物理系和应用数学系，邮编 95053（通讯作者：Adham Naji；anaji@scu.edu）。

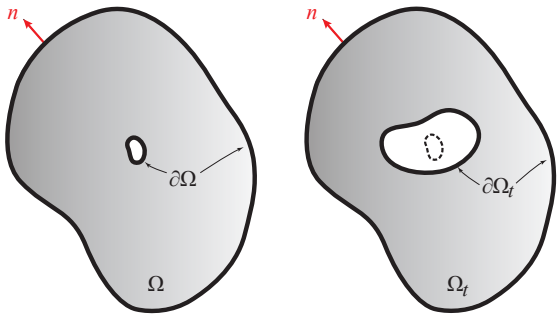

图 1. 任意平面谐振器截面 Ω 在扰动前 (a) 和扰动后 Ω_t (b) 的示意图。

本文提出一种框架，以严谨分析扰动的几何形状如何与谐振器中感兴趣模态的特征频率相关，从而处理平面谐振器中的这一复杂问题。关于形状扰动理论以及应用于电磁建模的谱几何的一般背景，请参阅 [11]–[13]。本文所提供的几何谱控制能力，即使仅达到一阶，也有望开启可能设计方案解空间中全新且此前未曾探索的领域。具体而言，在以下各节中，我们将展示如何解析地找到一族扰动形状，在不改变中心频率一阶值的情况下，调控平面谐振器中简并谐振频率的分裂。这不仅具有理论意义，在传感器、滤波器和天线应用中也具有重要的实际价值。例如，在耦合谐振器网络中，通常需要调节模态耦合值，同时保持共享参考频率不变，以避免内部网络失配导致频率响应恶化 [2], [3], [7]。在可重构双频系统中，人们可能希望在围绕指定载波扫动频带的同时保持中心频率不变 [2],[3]。这一分析方法还可进一步扩展，以便在其他场景中实现不同的谱设计目标。

从基本原理出发，第 II 节总结了特征分析的理论公式。为验证该理论，我们在第 III 节进行了测量，并采用独立的有限元法（FEM）仿真来分析带状线谐振器设计。结果显示，两者吻合良好。

II. 理论公式

我们将微带谐振器建模为腔体 $\Omega\times[0,h]$，其中 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 是 xy 平面上的任意区域，h是沿 z 轴方向的一段小高度（见图 1）。腔体的顶面和底面采用理想电导体（PEC）边界条件（$\hat{n}\times$ **电场** $=0$，$\hat{n}\cdot\mathbf{B}=0$），侧壁采用理想磁导体（PMC）边界条件（$\hat{n}\times\mathbf{B}=0$，$\hat{n}\cdot$ **电场** $=0$）。这里，$\hat{n}$ 表示边界的外指单位法向量，**电场**，**H** 表示场的相量，并假设 $e^{j\omega t}$具有谐波时间依赖性。对于满足上述边界条件、处于无源、均匀各向同性介质中的横磁（TM）波，麦克斯韦旋度方程 $\nabla\times$ **电场** $+j\omega\tilde{\mu}$ **H** $=0$和 $\nabla\times$**H** $-j\omega\varepsilon$**电场** $=0$ 可化简为电场分量 E_z 在二维区域 Ω 上满足的标量亥姆霍兹方程，并具有齐次诺伊曼边界条件：

$$\Delta_\perp E_z+k_c^2E_z=0\ \text{on}\ \Omega,\quad \partial_nE_z=0\ \text{on}\ \partial\Omega. \tag{1}$$

其中，$\Delta_\perp\equiv\nabla_\perp^2$ 表示横向拉普拉斯算子，∂_n 表示边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数，$k_c^2=k^2-k_z^2$表示横向截止波数，$k_z=p\pi/h$ 为纵向波数（p 为整数），而 $k=\omega/c$表示在角频率 ω 和介质中光速 $c=1/\sqrt{\tilde{\mu}\varepsilon}$ 下、介电常数为 ε 且磁导率为 $\tilde{\mu}$ 的介质中的波数。对于微带线或带状线腔体结构，当我们取高度 h远小于工作波长（因此有 $k<\pi/h$）时，预计所关注的前几个本征模沿 z方向均匀分布，且满足 $p=0$ 和$k=k_c$。当 $H_z=0$时，可以发现（例如参见 [1]），TM 磁场分量可由 E_z 得到：

$$H_x=\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},\quad H_y=\frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{2}$$

相对于 E_z，其相位相差 90 度。

将 (1) 视为关于负拉普拉斯算子 $-\Delta_\perp$ 的特征值问题，其特征值为 $\mu_j=k_c^2$，特征函数为 $u=E_z$，则任意具有光滑边界的有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上的谱具有如下形式 $0=\mu_0<\mu_1\le\mu_2\le\mu_3\le\cdots$，与特征值 μ_j 对应的最低谐振频率为 $f_j=\frac{c\sqrt{\mu_j}}{2\pi}$。我们感兴趣的是分析 Ω 的形状发生扰动时，简并谐振频率的分裂行为。

对于描述形状变化的光滑向量场 $\mathbf{V}$，我们通过 $\Omega_t=(\mathrm{Id}+t\mathbf{V})(\Omega)$ 表示其在虚拟时间 t 上对应的扰动族，其中 Id 表示恒等变换。哈达玛变分公式 [11],[12] 指出，与单位范数特征函数对应的简单 Neumann 特征值μ 的导数 u，是

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Omega_t)=\int_{\partial\Omega}\left(|\partial_\tau u|^2-\mu u^2\right)\rho\,dS, \tag{3}$$

其中，$\partial_\tau u$ 表示沿边界的 u 切向导数，而 $\rho=\mathbf{V}\cdot\hat{n}$ 在 $\partial\Omega$上的法向位移表示边界的法向位移。具有重数 $m>1$ 的特征值 μ 通常会分裂成若干可微分支。记$\{u_1,\dots,u_m\}$ 为特征空间的一组 $L^2(\Omega)$-标准正交基 E_μ，特征值分支的一阶导数由对称 $m\times m$ 矩阵的特征值给出

$$A_{ij}=\int_{\partial\Omega}\left(\partial_\tau u_i\partial_\tau u_j-\mu u_iu_j\right)\rho\,dS. \tag{4}$$

单特征值公式（3）是 $m=1$ 的特殊情形。

对于环形谐振器的形状，矩阵元素（4）可以显式计算。我们考虑内边界的扰动，其在极坐标中描述为

$$\Omega_t=\{(r,\theta)\mid a+t\cdot h(\theta)\le r\le b\}. \tag{5}$$

环域 $\Omega_0=\{a\le r\le b\}$上亥姆霍兹方程 (1) 的特征值可标记为 $\mu_{m,n}=k_{m,n}^2,m\ge0,n\ge1$，其对应的特征函数为 $u_{0,n}=R_{0,n}(r)$，以及 $u_{m,n}^c=R_{m,n}(r)\cos(m\theta)$、$u_{m,n}^s=R_{m,n}(r)\sin(m\theta)$（其中 $m\ge1$）。径向函数 $R_{m,n}(r)$ $n\ge1$ 是斯图姆-刘维尔问题的解，该问题由 $R''_{m,n}(r)+\frac{1}{r}R'_{m,n}(r)+\left(\mu_{m,n}-\frac{m^2}{r^2}\right)R_{m,n}(r)=0$ 及边界条件 $R'_{m,n}(a)=R'_{m,n}(b)=0$构成。它们可以表示为第一类和第二类贝塞尔函数经过缩放后的特定线性组合：

$$R_{m,n}(r)=Y'_m(k_{m,n}a)J_m(k_{m,n}r)-J'_m(k_{m,n}a)Y_m(k_{m,n}r), \tag{6}$$

其中，允许的缩放因子 $k_{m,n}$（$n\ge1$）是定义方程的正零点

$$J'_m(ka)Y'_m(kb)-J'_m(kb)Y'_m(ka)=0, \tag{7}$$

按 n 递增顺序标记。对于固定的 n，$k_{m,n}$ 的值也随第一指标 $m\ge1$ 递增。利用瑞利商 [1,（第 6 节.2]）对特征值的变分刻画即可证明这一点。（$m=0$ 是这一规则的例外。）

借助对环域上的亥姆霍兹特征函数的这一分析，我们可以计算矩阵元素 A_{ij}。用极坐标θ对式 (4) 中的积分进行参数化，可得 $\rho=-h(\theta)$ 和 $dS=ad\theta$。在内边界$\{r=a\}$上，相对于诱导定向，可分离特征函数的切向导数为 $\partial_\tau u_{m,n}^c=\frac{m}{a}R_{m,n}(a)\sin(m\theta)$ 和 $\partial_\tau u_{m,n}^s=-\frac{m}{a}R_{m,n}(a)\cos(m\theta)$。

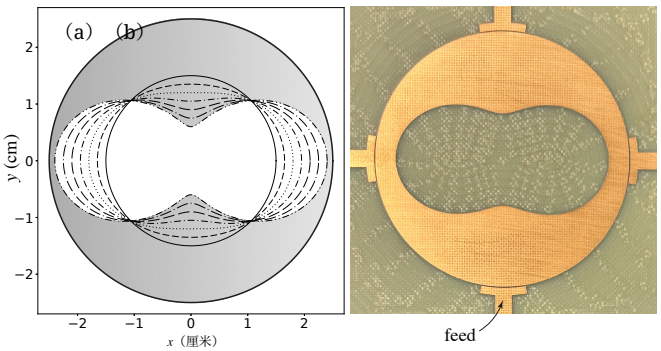

图 2. (a) 内边界扰动 $r=a+t\cos(2\theta)$，初始内半径为 $a=15$ mm，外半径为 $b=25$ mm，t 为扰动深度参数。不同 t 值的情况以虚线/点线表示（未扰动环域以实线表示）。(b) 一个已制造并测量的欠耦合馈电驱动谐振器的布局示例。

因此，记 $u_1 = u^c_{m,\ n}$, $u_2 = u^s_{m,\ n}$，在二维特征空间的情况下，式 (4) 变为

$$A_{12} = A_{21} = \frac{a}{2} R^2_{m,n}(a)\left(\mu_{m,n} + \frac{m^2}{a^2}\right) \cdot h_{s,2m}, \tag{8}$$

其中，我们使用倍角公式将积分化简为傅里叶系数 $h_{s,\ 2m} = \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot \sin(2m\theta)\ d\theta$。类似地，其余矩阵系数也可以表示为傅里叶系数 $h_0 = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta$ 和 $h_{c,\ 2m} = \int_0^{2\pi} h(\theta)\cos(2m\theta) d\theta$。我们得到

$$A_{11} = \frac{a}{2} R^2_{m.n}(a)\left[\left(\mu_{m,n} - \frac{m^2}{a^2}\right) \cdot h_0 + \left(\mu_{m,n} + \frac{m^2}{a^2}\right) \cdot h_{c,2m}\right], \tag{9}$$

$$A_{22} = \frac{a}{2} R^2_{m.n}(a)\left[\left(\mu_{m,n} - \frac{m^2}{a^2}\right) \cdot h_0 - \left(\mu_{m,n} + \frac{m^2}{a^2}\right) \cdot h_{c,2m}\right]. \tag{10}$$

注意第二项的符号不同。在公式 (8)– (10) 中，我们假设 (6) 中的函数 $R_{m,\ n}(r)$ 已适当重新缩放，使相应的特征函数 $u_{m,\ n}$ 为 $L^2(\Omega_0)$-归一化的。明确地说，我们要求

$$\int_a^b r R^2_{m,n}(r)\, dr = 1/\pi. \tag{11}$$

因此，通过规定扰动轮廓 $h(\theta)$ 的某些傅里叶系数，我们可以控制环形平面谐振器发生扰动时若干特征值的一阶变化。

事实上，请回想一下，从 $\mu_{m,n}$ 分裂出来的两个特征值分支的导数，是矩阵 $(A_{ij})_{1\le i,j\le 2}$的特征值。例如，选择扰动$h(\theta)$，使得 $h_0 = 0, h_{s,2m} = 0$ 且 $h_{c,2m} \neq 0$，则上述矩阵变为 $\mathrm{diag}(C, -C)$ 形式的对角矩阵，由此得到 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mu^c_{m,n} = -\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mu^s_{m,n}$。也就是说，特征值$\mu_{m,n}$ 在一阶近似下对称分裂。这是实际谐振器设计中的一个关键参数。选取扰动轮廓 $h(\theta) = \cos(2m\theta)$，则得到

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^c_{m,n} = \frac{\pi a R^2_{m,n}(a)}{2}\left(\mu_{m,n} + \frac{m^2}{a^2}\right). \tag{12}$$

取 $m = 1, n = 1$，即可使最小的非零特征值在一阶近似下对称分裂。

III. 应用实例

采用 Ansys HFSS 中独立的有限元特征值求解器，对受式 (5) 所述一系列形状扰动的环形带状线谐振器进行仿真，其扰动形式为 $h(\theta) = \cos(2\theta)$。随后制造了一组受扰谐振器并测量其频率。所用基板为 FR408HR，$\varepsilon_r \approx 3.69$，损耗角正切为 $\tan\delta \approx 0.0092$；基板上下表面的高度均为 1.5 mm，馈线宽度为 3.3 mm，馈电头扩口角为 20 度，馈电间隙为 0.2 mm，以确保谐振器处于欠耦合状态，从而实现精确测量。我们将纵横比固定为 $b/a = 5/3$，设置 $a = 15$ mm，并将 t 从 0 变化至 6 mm（见图 2）。测量结果、仿真结果以及线性外推结果之间吻合良好，后者基于

理论。

m	0	1	2	3	4
$k_{m,1}$	317.204	50.483	100.638	150.158	198.786
$k_{m,2}$	629.891	321.644	334.683	355.573	383.294
$k_{m,3}$	943.533	632.042	638.459	649.033	663.599

表 I 方程 (7) 的前几个正零点$k_{m,\ n}$ 对应于 $a = 15$ MM 和 $a/b = 3/5$ 的诺伊曼环域。

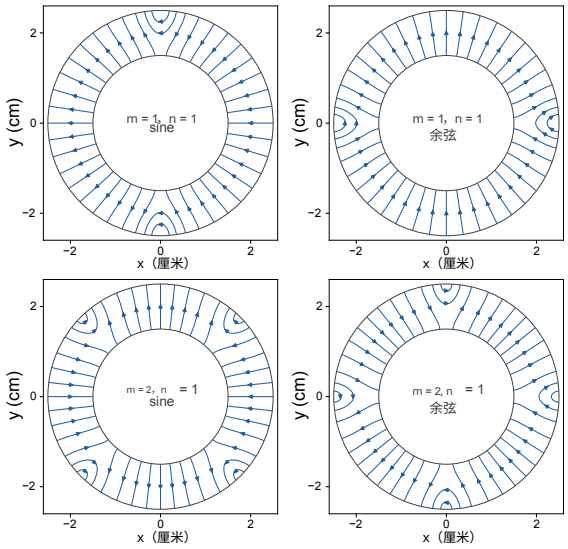

图 3. 未扰动环域前四个 TM^z 本征模的磁场流线图，此处展示的是 $a = 15$ mm 和 $a/b = 3/5$ 的情形。

表 I 列出了定义方程 (7) 的零点值$k_{m,\ n}$ 对于 $0 \le m \le 4$, $1 \le n \le 3$。前几个零点为

$$k_{1,1} < k_{2,1} < k_{3,1} < k_{4,1} < k_{5,1} < k_{6,1} < k_{0,1} < k_{1,2} < k_{2,2} < \cdots,$$

依次如此。使用 $f = kc/(2\pi)$ 和 $\varepsilon_r \approx 3.69$，我们的理论预测未扰动环形谐振器的前几个谐振频率为 $f_{1,\ 1} = 1.254$ GHz$f_{2,\ 1}$ =2.500 GHz$f_{3,\ 1} = 3.730$GHz，它们的重数均为二。本征模解的磁场$\mathbf{H}$ 可由 E_z 通过 (2) 得到，并且在 z中均匀分布。图 3 展示了使用 Wolfram 的 Mathematica 生成的前四个本征模的磁场流线图。观测到了前两个亥姆霍兹特征值 $k^2_{1,\ 1} < k^2_{2,\ 1}$（每个的重数均为二）所对应的预期方位角阶数和径向阶数。

我们的理论通过方程 (12) 和链式法则，预测前两个谐振频率 $f^s_{1,1}, f^c_{1,1}$的变化率

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f^c_{1,1}(t) = \frac{c}{4\pi\sqrt{\mu_{1,1}}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^c_{1,1}(t). \tag{13}$$

为了利用该理论得出正确的数值预测，我们需要对 (6) 给出的径向函数$R_{1,1}(r)$ 进行归一化，使其满足 (11)。为此，我们注意到

$$\int_a^b r R^2_{1,1}(r) dr = \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - 1/k^2_{1,1}\right) R^2_{1,1}(r)\right]_a^b,$$

因为 $R_{1,\ 1}(r)$ 满足一阶贝塞尔方程，且 $R'_{1,\ 1}(a) = R'_{1,\ 1}(b) = 0$。利用贝塞尔函数的数值可知，由 (6) 给出的函数 $R_{1,\ 1}(r)$ 需要按 46.8499893 的因子重新缩放。

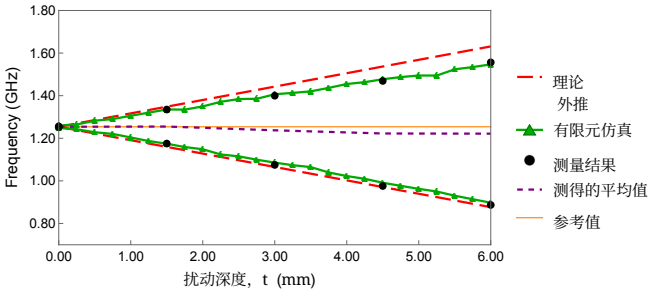

图 4. 频率分裂随扰动深度的变化，t_0。测量结果与有限元仿真及理论外推结果进行了比较。

实际观测到的两个频率 $f^s_{1,\,1}$，$f^c_{1,\,1}$ 表现为相对于未扰动频率值向上和向下的频移。对于所选的特定半径和基板，方程 (12) 和 (13) 预测前两个谐振频率的变化率为 ± 62.9 MHz/mm。图 4 和表 II 显示了第一个本征模 TM^z_{11} 的频率分裂随扰动深度 t 的变化。分裂行为源于我们的理论所提出的扰动形状 $t\cos(2\theta)$。在 $t = 0$ 时，未扰动频率为 $f_0 = 1.254$ GHz。将由 (12) 和 (13) 中一阶形状导数外推的数值，与独立 HFSS 仿真结果及测量结果进行了比较。两者吻合良好；在 $t = 6$ mm 处，测量结果与理论外推之间的最大偏差约为 5%。值得注意的是，在 $t = 6$ mm 处，理论的一阶局部预测实际上在相当宽的调谐范围内仍然成立，即从 0.89 GHz 到 1.56 GHz，对应于 $(f^c_{1,\,1} - f^s_{1,\,1})/f_0 = 54\%$。这提高了所提方法在实际设计中的实用性。

t (mm)	理论外推 $f^s_{1,1}$ $f^c_{1,1}$ (GHz)	有限元仿真 $f^s_{1,1}$ $f^c_{1,1}$ (GHz)	测量结果 $f^s_{1,1}$ $f^c_{1,1}$ (GHz)
0.0	1.25, 1.25	1.25, 1.25	1.25, 1.26
1.5	1.16, 1.35	1.16, 1.34	1.18, 1.33
3.0	1.07, 1.44	1.07, 1.40	1.07, 1.40
4.5	0.97, 1.54	1.00, 1.46	0.98, 1.47
6.0	0.88, 1.63	0.90, 1.53	0.89, 1.56

表 II 扰动深度的函数关系下的分裂频率数据，$f^s_{1,\,1}$ 和 $f^c_{1,\,1}$，t_0。对应图见图 4。

IV. 结论

本文概述了一个数学框架，用于通过预设几何扰动来操控平面谐振器中的本征模频谱。该框架被用于针对特定问题提出一种解决方案：在保持中心频率不变的同时，使简并本征模对称分裂。仿真和测量结果与理论吻合良好，并表明理论给出的局部一阶预测在相对宽的调谐范围内仍然成立。这提升了该方法在实际设计中的价值。

致谢

作者感谢圣克拉拉大学的 Evan Gawlik 和斯坦福大学的 Rafe Mazzeo 就本研究进行的宝贵讨论。本研究由美国国家科学基金会（编号：2501494）资助。

参考文献

[1] R. E. Collin，导波场论，第2版。纽约：IEEE出版社，1991年。[2] J. S. Hong 和 M. J. Lancaster，射频/微波应用微带滤波器，第2版。新泽西州霍博肯：John Wiley & Sons，2011年。[3] R. J. Cameron、C. M. Kudsia 和 R. R. Mansour，通信系统微波滤波器：基础、设计与应用，第2版。新泽西州霍博肯：John Wiley & Sons，2018年。[4] C. A. Balanis，天线理论：分析与设计，第4版。新泽西州霍博肯：John Wiley & Sons，2016年。[5] J. C. Slater，微波电子学，贝尔电话实验室丛书。新泽西州普林斯顿：D. Van Nostrand Company, Inc.，1950年。[6] A. Naji、P. Warr、M. Beach 和 K. Morris，“几何调谐平面谐振器性能的基本极限”，*IEEE*微波理论与技术汇刊，第59卷，第6期，第1491–1499页，2011年。[7] A. Naji 和 M. H. Soliman，“模态分裂控制过程中平面双模谐振器的中心频率稳定”，《科学报告》，第7卷，第1期，第43855页，2017年3月。[8] J. S. Hong 和 S. Li，“双模微带三角贴片谐振器及滤波器的理论与实验”，*IEEE*微波理论与技术汇刊，第52卷，第4期，第1237–1243页，2004年。[9] A. Gorur，“采用新型扰动布置描述双模微带环形谐振器简并模之间的耦合及其在双模带通滤波器中的应用”，*IEEE*微波理论与技术汇刊，第52卷，第2期，第671–677页，2004年。[10] T. W. Lin、J. T. Kuo 和 S. J. Chung，“采用非对称电感耦合的双模环形谐振器带通滤波器及其小型化”，*IEEE*微波理论与技术汇刊，第60卷，第9期，第2808–2814页，2012年。[11] D. Henry，偏微分方程边值问题中的边界扰动，伦敦数学学会讲义系列。英国剑桥：剑桥大学出版社，2005年，第318卷。[12] M. C. Delfour 和 J. P. Zol´esio，形状与几何：度量、分析、微分学与优化，第2版，设计与控制进展丛书。宾夕法尼亚州费城：工业与应用数学学会（SIAM），2011年，第22卷。[13] P. D. Lamberti 和 M. Zaccaron，“电磁腔的形状灵敏度分析”，《应用科学中的数学方法》，第44卷，第13期，第10 477–10 500页，2021年。