arXiv:2611.29234v1 [math.QA] 22 Nov 2026

莫比乌斯融合代数

IPPO ORII 和 YUJI TACHIKAWA

摘要。给定一个带有反幺半对合 P 的伪酉模张量范畴 $\mathcal{C}$，我们根据这些数据定义一个通常非交换的代数，称为 ($\mathcal{C}$，P) 的莫比乌斯融合代数 $\mathfrak{M}$。其定义借助于绘制在莫比乌斯带上的带状图，其中莫比乌斯带的定向反转通过 P 作用于这些图。我们证明该代数是半单的，并给出其简单模的维数公式。该公式以模 S矩阵 $\mathcal{C}$ 以及从 P 的作用中提取的一组特定量为基础。我们期望，在不可定向流形上的 Reshetikhin–Turaev型拓扑量子场论背景下，这一公式将发挥 Verlinde公式的不可定向类比的作用。

目录

1. 引言 2 2. 设定 9 2.1. 约定 9 2.2. 反幺半对合 12 3. 莫比乌斯融合代数 14 3.1. 定义与基本性质 14 3.2. 半单性 22 3.3. 从普通融合代数得到的代数同态 27 4. 简单模的性质 28 4.1. 模张量范畴概论 28 4.2. 模张量范畴与反幺半对合 31 4.3. $\mathfrak{M}$ 35的结构 5. $\mathfrak{M}$上的双模与扭结 39 5.1. 双模 $\mathfrak{H}_E$ 40 5.2. 管代数与双模的分解 43 5.3. 扭结的恒定性 49 6. 示例 53 6.1. pointed范畴 54 6.2. 形如 $\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$ 56的范畴 6.3. 某些秩为六的非 pointed 范畴 58 附录 A. 在骨架模型中寻找反幺半对合 61 参考文献 63

—

日期：2026年11月。

1. 引言

1.1. **物理学动机**。 我们从物理学动机出发；不相信物理学的读者可以跳过本小节，直接阅读下一节，因为从下一节开始，所有内容都有严格的数学定义。设 $\mathcal{C}$ 是一个模张量范畴。其融合系数 $N_{AB}^C = \dim \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$ 由模 S-矩阵通过 Verlinde公式 [Ver88、MS88和MS89]

$$N_{AB}^C = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \frac{S_{A,X}\, S_{B,X}\, \overline{S_{C,X}}}{S_{\mathbf{1},X}}. \tag{1.1}$$

在 $(2+1)$维 Reshetikhin 和 Turaev 的拓扑量子场论 (TQFT) [RT91,Tur94], 对 [Wit89], Chern–Simons 理论的数学构造中，这个方程将 S^2 有三个点标记的 A, B 和 $C^\vee$的态空间维数表示为仅依赖于 $\mathcal{C}$ 的模数据。若事先一无所知，只看到等式右边，就很难理解它为何总会是一个非负整数。

近来，拓扑量子场论也在凝聚态物理中发挥着重要作用，其中 $\mathcal{C}$描述了一个$(2+1)$维拓扑物态中的任意子 [Kit05]。在这一背景下，拓扑相也可能具有额外的对称性。不作用于时空的内部对称性，在数学上已得到充分理解，可用 G交叉编织扩张[ENO09], 同伦量子场论 [TV13] 以及扭曲 Verlinde 公式 [Des18], 来描述；与之对应的物理解释也已建立, 参见例如 [BBCW14]。

在物理学中，反转时空定向的对称性也得到了广泛研究[BBC+16, WL16, TY16], ，但其数学表述的发展程度要低得多。人们预期，这种反定向对称性通过一个反幺半对合 P 作用于 $\mathcal{C}$ ： P 是一种自等价，它反转张量积的顺序并将编织取逆，且存在自然同构 β: $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathrm{P}^2$。物理学界认为，基于这些关于 $(\mathcal{C}, \mathrm{P})$ 的数据，再加上关于 β 的一个相容性条件，我们便可以构造一种拓扑相，或一种拓扑量子场论（TQFT），使其不仅定义在可定向时空上，也定义在不可定向时空上 [BBC+16]。一般而言，尚未能从 $(\mathcal{C}, \mathrm{P})$ 构造出这样的拓扑量子场论，尽管已有一些部分结果。例如，当 $\mathcal{C}$ 是 Drinfeld 中心 [BBC+16 时，物理学家已在物理学的严谨性标准下提出了态和描述16], ，而无定向扭曲 Dijkgraaf–Witten 理论则已在数学上构造出来 [You18]。

物理学家提出的一个有趣观点是 [BBC+16] 假设存在这样一种定义在不可定向流形上的拓扑量子场论，那么它在实射影平面上的态空间 $\mathbb{RP}^2$ 其中有一个点由 $X \in \mathcal{C}$ 标记，其维数

$$M_X = \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}),\ \mathrm{P}Y \cong Y^\vee} S_{X,Y}\, \eta_Y, \tag{1.2}$$

通过假定的拓扑量子场论中的剪切粘贴论证。这里， η_Y 是一个单位根，其取值由P在一维空间$\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\ Y \otimes \mathrm{P}Y)$上的作用决定。此外，当 β 满足相容性条件时（这通常是物理学文献中的假设）， η_Y 便化为满足 $\eta_{Y^\vee} = \eta_Y$的符号。

它与通常的Verlinde公式（1.1）之间的类比显而易见：这两个公式（1.1）和（1.2）都将相应态空间的维数改写为模 S矩阵的形式，其中 $\mathcal{C}$还提供了来自P的额外信息。

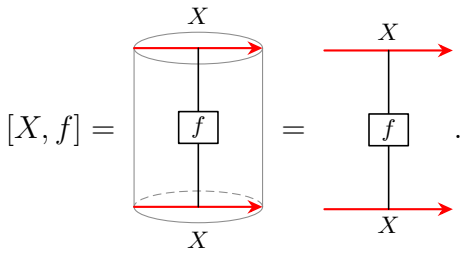
因此，我们将1.2称为不可定向 *Verlinde* 公式，因为 $\mathbb{RP}^2$ 带有一个标记点，是不可定向曲面的基本构件，正如 S^2 带有三个标记点，是可定向曲面的基本构件一样。与（1.1）的右侧类似，（1.2）的右侧完全没有明显呈现为非负整数的形式。尽管如此，如果假定的不可定向拓扑量子场论存在，那么左侧显然应当是一个非负整数，因为它是一个向量空间的维数。事实上，在物理学家进行的许多具体计算中，右侧一直都被证明是一个整数。

这就引出了一个显而易见的问题。让我们通过给定（ M_X ）中的数据1.2来定义这些量，数据为（$\mathcal{C}$，P）。于是，物理学给出了一个猜想，即这个 M_X 总是一个非负整数。[1]

本文证明 M_X 由（1.2）从 $(\mathcal{C},\ \mathsf{P})$ 定义的量总是非负整数，但并未完整构造假定的非定向拓扑量子场论。相反，我们从 $(\mathcal{C},\ \mathsf{P})$构造一个有限维半单代数 $\mathfrak{M}$，称之为莫比乌斯融合代数，并证明 M_X 是其不可约模的维数。这里，向量空间 $\mathfrak{M}$应视为克莱因瓶上的态空间，正如融合代数 $\mathfrak{F}\ \mathcal{C}$ 是环面上的态空间一样。

1.2. 莫比乌斯融合代数及其性质。 设 $\mathcal{C}$ 是一个伪酉模张量范畴，且 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$中简单对象同构类的一组代表元。$\mathcal{C}$ 的融合代数 $\mathfrak{F}$ 是实心环面中的带状图代数；我们构造其在实心克莱因瓶中的对应物。

先回顾一下实心环面与融合代数 $\mathfrak{F}$ 的关系 $\mathcal{C}$。实心环面由圆柱体 $D^2\times[0,1]$ 将其顶盘通过恒等映射与底盘粘合而成。我们按照 [RT90、Tur94]的定义来考虑其中的辫带图。沿核心着色为X 的线闭合后，会与一个着色为某个 $f\in\mathrm{End}(X)$的标记片相连；我们将这个元素记作

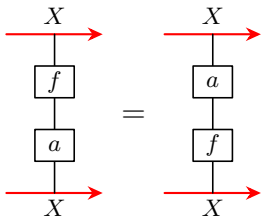


这里，在中间的图中，我们画出了周围的实心环面；而在右侧的图中，为了减少杂乱，我们将它投影到了中心平面上。在引言中，我们会使用这两种类型的图，但在正文中只使用投影后的图。

[1]物理学文献中已有一些朝这一方向发展的部分结果。在 [QJW17], 中，系统沿反射轴折叠成一个双层理论$\mathcal{C}\boxtimes\overline{\mathcal{C}}$，其中反射变为两层的交换，而该轴变为有能隙边界；文中证明了 M_X 是一个凝聚重数 [QJW17，（42）],从而为其整性提供了物理学论证。作为另一种更具数学性的途径，对于 pointed $\mathcal{C}$，M_X 的整性在 [Ori25a]中得到了证明。

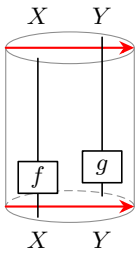
一个标记片列 由 $a \in \mathrm{End}(X)$着色后，沿核心绕行一周，再回来时保持不变，因此 t

$$[X, f \circ a] = \quad = \quad = [X, a \circ f].$$



乘法将两条这样的线并排放置，因此

$$[X, f] \cdot [Y, g] = \quad = [X \otimes Y, f \otimes g].$$



更准确地说，这些元素取值于

$$\mathfrak{F} \cong \Big(\bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{End}(X) \Big) / \mathfrak{R}_0,$$

其中，我们将求和项中由 X 标记的元素 $f \in \mathrm{End}(X)$ 写作有序对 (X, f)，子空间 $\mathfrak{R}_0$ 由以下元素张成

$$(X \oplus Y, f \oplus g) - (X, f) - (Y, g), \qquad \text{and} \qquad (X, a \circ f) - (X, f \circ a) \tag{1.3}$$

对于 $a \in \mathrm{End}(X)$，商空间中 (X, f) 的类为 $[X, f]$。不难验证，如此定义的 $\mathfrak{F}$ 同构于 $\mathcal{C}$ 的融合代数，该融合代数定义为 $K_0(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$；在我们的记号中，$\mathfrak{F}$ 中对于$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$的类 $[X]$ 于是为 $[X] = [X, id_X]$。

接下来研究实心克莱因瓶，它是通过用反射将$D^2 \times [0,1]$ 的两端粘合而得到的。穿过这处粘合的线会受到反射的影响。我们将这种作用记为 P，它作用于 $\mathcal{C}$ 的对象上。由于反射会颠倒切口处点的顺序，自然同构

$$U_{X,Y} \colon \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}X \to \mathsf{P}(X \otimes Y)$$

会颠倒张量积的顺序。结合 $U_0 \colon \mathbf{1} \to \mathsf{P}\mathbf{1}$，这使得 $(\mathsf{P}\ U)$ 成为一个幺半函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$，其中 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$ 是带有反向张量积 $X \otimes^{\mathrm{op}} Y := Y \otimes X$ 的 $\mathcal{C}$。类似地，由于定向反转会将交叉变为其镜像，我们应有

$$\mathsf{P}(c_{X,Y}) \circ U_{X,Y} = U_{Y,X} \circ c^{-1}_{\mathsf{P}X,\mathsf{P}Y},$$

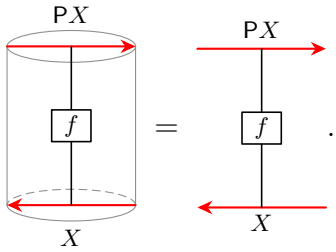
这意味着该函子关于 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$ 的编织 $c^{-1}_{X,Y}$ 是编织函子。由于反射的平方是恒等式，我们还应有一个幺半群自然同构

$$\beta \colon id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathsf{P}^2.$$

我们总结通过称 $(\mathsf{P}\ \beta)$ 是 $\mathcal{C}$ 的一种 反幺半对合，来概括这些条件。

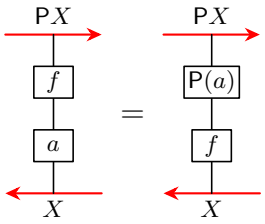
做好这些准备后，让我们考虑放置在实心克莱因瓶中的线。沿核心由 X 着色的线现在只有与某个由 f 着色的标记片闭合时才能闭合： $X \to \mathsf{P}X$；这就是

$$[X, f] = \quad = \quad .$$



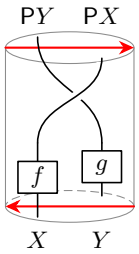
一个标记片 由 $a \in \mathsf{End}(X)$着色，绕核心滑动一周后，变为 $\mathsf{P}(a)$，因此 t

$$[X, f \circ a] = \quad = \quad = [X, \mathsf{P}(a) \circ f].$$



在乘法中，反射会颠倒两条线的顺序，因此它们会交叉：

$$[X, f] \cdot [Y, g] = \quad = \big[X \otimes Y,\ U_{X,Y} \circ c_{\mathsf{P}X,\mathsf{P}Y} \circ (f \otimes g)\big]. \tag{1.4}$$



这里，我们将线 X 放在图中所示的线 Y前面。这就是莫比乌斯融合代数

$$\mathfrak{M} := \Big(\bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(X, \mathsf{P}X) \Big) \Big/ \mathfrak{R},$$

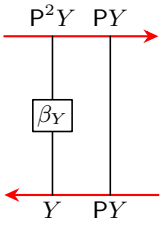
其中， $\mathfrak{R}$ 由与（1.3）中相同的向量张成，只需将 $a \circ f$ 替换为 $\mathsf{P}(a) \circ f$，乘法由（1.4）给出。类 $\mathsf{M}(X) := [X, \xi_X]$，其中 $X \in \mathsf{Fix}(\mathsf{P}) := \{X \in \mathsf{Irr}(\mathcal{C}) \mid X \cong \mathsf{P}X\}$，且$\xi_X \colon X \to \mathsf{P}X$ 是满足 $\mathsf{P}(\xi_X) \circ \xi_X = \beta_X$的同构，最终构成 $\mathfrak{M}$的一组基。我们研究这些辫带图在莫比乌斯带上的投影，并称之为莫比乌斯图。由等式（1.4）可知，乘法通常不具交换性：交换两个因子会改变两条线的交叉方式。这与 $\mathfrak{F}$不同，在那里各条线不会交叉。将切口处的线闭合起来可得到迹 $\varepsilon \colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$，这使得 $\mathfrak{M}$ 成为一个有限维的 C^*-代数。

注 1.1. 如果存在相应的拓扑量子场论， $\mathfrak{M}$ 应当是它在克莱因瓶上的态空间，正如 $\mathfrak{F}$ 是环面上的态空间一样。从此以后，这类物理解释都将放在注释中。

⌟

接下来我们考虑边界环

$$\mathrm{L}(Y) := [Y \otimes \mathsf{P}Y,\, U_{Y,\mathsf{P}Y} \circ (\beta_Y \otimes id_{\mathsf{P}Y})] \;=$$



,

它是一个由 Y 着色的线，沿着莫比乌斯带的边界平行地绕核心两圈。与绕行一圈的线不同，它会自行闭合：绕行一圈后，其颜色为 $\mathsf{P}Y$，绕行两圈后则为 P^2Y，而 β_Y 将其与 Y 等同。这个环的邻域是实心克莱因瓶中的一个实心环面，因此实心环面中的带状图也给出 $\mathfrak{M}$的元素；这说明 L 位于 $\mathfrak{M}$ 的中心，并可延拓为代数同态 $\mathrm{L}\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{M}$。我们记$p_X := \mathrm{L}(e_X)$，表示 $\mathfrak{F}$的本原幂等元 e_X，其标签为 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$。

现在，考虑 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\ Y \otimes \mathsf{P}Y)$ 上的线性映射 R，其定义如下

$$\phi \mapsto (\beta_Y^{-1} \otimes id_{\mathsf{P}Y}) U_{Y,\mathsf{P}Y}^{-1} \mathsf{P}(\phi) U_0.$$

当 Y是简单对象且 $\mathsf{P}Y \cong Y^\vee$时，$\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\ Y \otimes \mathsf{P}Y)$ 是一维空间，而 R 在其上以一个标量作用，我们将其记为 η_Y。当 β是 相干的，即 $\beta_{\mathsf{P}X} = \mathsf{P}(\beta_X)$ 对所有 X都成立时，我们有$\eta_Y = \eta_{Y^\vee} = \pm 1$，且 η_Y 可视为 Frobenius–Schur 指标的一种类比。最后，我们用公式（1.2）定义数值 M_X，为方便起见，在此重述如下：

$$M_X := \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}),\ \mathsf{P}Y \cong Y^\vee} S_{X,Y}\, \eta_Y.$$

我们的第一个主要结果如下定理所述：

定理 1.2。 ***(a)*** $\mathfrak{M}$ 的中心是$\mathrm{L}(\mathfrak{F})$。

(b) 对于每个带有 $p_X \neq 0$ 的 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，代数 $p_X\mathfrak{M}$ 是简单的，

$$p_X\mathfrak{M} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_X),$$

其中 V_X 是一个不可约的 $\mathfrak{M}$-模；当 $p_X = 0$ 时，我们令 $V_X := 0$。此外，每个不可约的 $\mathfrak{M}$-模都以这种方式由唯一的 X 得到。***(c)*** 我们有 维数 $V_X = M_X$，其中 M_X 由上述公式给出。特别地，数M_X 都是非负整数，并且 $\mathfrak{M} \cong \bigoplus_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$ 矩阵代数$M_X(\mathbb{C})$。

注 1.3。 如果拓扑量子场论存在， V_X 应当是其在 $\mathbb{RP}^2$ 上、带有一个由 X着色的标记点的态空间，其维数预计为 M_X，见 [BBC+16]；而 $\mathfrak{M} \cong \bigoplus_X \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_X)$正是将克莱因瓶切成两个莫比乌斯带所得的结果。 ⌟

证明的大致思路如下。与任何半单代数一样， $\mathfrak{M}$ 的中心是平均映射 Ξ的像：$u \mapsto \sum_i b^i u b_i$ 其中 b^i 和 b_i 是相对于迹 ε的 $\mathfrak{M}$ 的对偶基。利用对于 $X \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$，$\mathrm{M}(X)$构成 $\mathfrak{M}$的一组基这一事实，平均映射可写为$\sum_{X \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})} \mathrm{M}(X)^\star u \mathrm{M}(X)$，其中 $\star$ 是 C^*-代数 $\mathfrak{M}$的对合。对莫比乌斯图进行计算可知， $\Xi(u)$是边界环$\mathrm{L}(Y)$的线性组合，这

给出了（a）。于是（b）很容易得出。对于（c），我们使用单位元 $u = \mathrm{M}(\mathbf{1})$的同一公式，得到

$$\sum_{X\in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})} \mathrm{M}(X)^{\star}\mathrm{M}(X) = \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}),\ \mathsf{P}Y\cong Y^{\vee}} \eta_Y \,\mathrm{L}(Y).$$

乘以 p_X并应用 ε，在左侧得到（维数 V_X）^{2}，在右侧得到 M_X^2，因为$\varepsilon(p_X) = S_{\mathbf{1},\,X} M_X$；随后，$\varepsilon(p_X)$ 的正性给出维数 $V_X = M_X$。因此，整性源于以两种方式计算一个块的维数。

我们的第二个主要结果涉及扭结 θ_X；为简洁起见，我们将在此对相干 β 进行说明：

定理 1.4。假设 β 是相干的。对于每个 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 且满足 $M_X \neq 0$ 的对象，其 θ_X 由以下公式给出

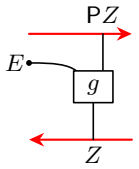
$$\theta_X = \lambda\sigma$$

该公式与 X 无关，其中

$$\lambda = \frac{1}{D}\sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_Y^2\,\theta_Y, \qquad \sigma = \frac{1}{D}\sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}),\ \mathsf{P}Y\cong Y^{\vee}} \eta_Y\, d_Y\,\theta_Y, \qquad D = \Big(\sum_Y d_Y^2\Big)^{1/2}.$$

实际上，我们将证明一个更一般的结果，即定理5.29，该结果同样适用于非相干情形。我们将使用以下中间结果来证明这一结果；该中间结果本身也具有独立意义。

对于 $E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，令 $\mathfrak{H}_E$ 为 $\bigoplus_{Z\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(Z, E\otimes \mathsf{P}Z)$ 关于上述给出的两个张成关系的类似关系所取的商。$g\colon\ Z \to E\otimes \mathsf{P}Z$ 的类 $[Z, g]$ 即为莫比乌斯图



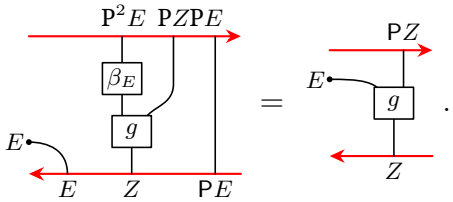
其中，一条由 E 着色的线从莫比乌斯带的边界穿出。我们有 $\mathfrak{H}_{\mathbf{1}} = \mathfrak{M}$，并且 $\mathfrak{H}_E$ 自然地构成一个 $\mathfrak{M}$-双模，其作用方式是从上方和下方叠放莫比乌斯图。于是，我们得到关于 $\mathfrak{H}_E$ 的如下结构定理：

T定理 1.5。对于每个 $E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，我们有一个 $\mathfrak{M}$-双模同构 s

$$\mathfrak{H}_E \cong \bigoplus_{X,X'\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} (V_X \otimes V_{X'}^{*})^{\oplus N_{EX'}^{X}},$$

其中 $N_{EX'}^{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的融合系数。

现在，当 β 相干时，我们可以证明，让线 E 绕带一周会在 $\mathfrak{H}_E$上作用为恒等式，即



注 1.6。 如果所期望的拓扑量子场论存在，那么 $\mathfrak{H}_E$ 应当是其在带有一个由 E着色的标记点的克莱因瓶上的态空间。于是，这便是如下几何事实的推论：沿着将克莱因瓶切成两个莫比乌斯带的双侧曲线移动标记点，与恒等变换同伦。」

现在，在定理 1.5给出的同构下，该运算作用于求和项 $(V_X \otimes V_{X'}^*)^{\oplus N_{EX'}^X}$的方式为 $\theta_X \theta_{X'}^{-1}$。由于对于任意两个 X， X'存在某个 E满足 $N_{EX'}^X \neq 0$， θ_X在 X 上是常数，其中 $M_X \neq 0$。其在定理 $\lambda\sigma$ 1.4中的值随后可通过进一步计算得到。

1.3. 论文结构。本文的组织如下。第 2 节规定约定以及 P 的作用图示。在第 3 节中，我们定义 $\mathfrak{M}$，证明它是一个 C^*-代数，并构造边界环。随后，我们分别在第 4 节和第 5 节中证明第一和第二个主要结果。[2] 最后，在第 6 节中，我们研究三类示例以阐释我们的结果：(i) 尖锐范畴，其中非零 M_X 是 2 的幂；(ii) 范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E}$，其中 P 交换这 − 两个因子，在该范畴中， $\mathfrak{M}$ 的 $\mathcal{C}$ 最终证明是 $\mathcal{E}$的融合代数；以及 (iii) 两个秩 6 的非 pointed 范畴。我们还给出附录 A，说明如何从骨架模型的 F-和 R-符号中找到反幺半对合，或证明不存在这样的对合。

注 1.7。本文还将有两篇后续论文。首先，第一作者与 Sakie Suzuki 正在准备一篇论文，将在本文结果的基础上构造不可定向三维流形的 Reshetikhin–Turaev 型不变量。其次，一篇面向物理学家的配套论文即将发表，其中将讨论若干相关主题，包括物理诠释、克莱因瓶映射类群的作用，以及向费米子情形（即超模范畴）的推广。」

致谢。 IO 感谢 Yasuyuki Kawahigashi、Yuji Terashima 和 Sakie Suzuki 的热心讨论，并感谢 Sakie Suzuki 对稿件草稿提出的意见。IO 获得东京大学推动变革的前沿物理与数学计划（FoPM）、世界领先创新研究生培养（WINGS）计划以及 JSR 奖学金的支持。YT 部分获得日本文部科学省在卡夫利 IPMU、东京大学实施的 WPI 倡议，以及日本学术振兴会科研补助金（基盘 C）（编号：24K06883）的支持。本文的准备过程中使用了基于大语言模型的 AI 助手，用于起草和检查证明、绘制图、进行数值计算以及编辑文本。所有结果均由作者核查，作者对本文内容承担全部责任。

[2]其中两个关键命题，命题 4.23和 5.6 ，是通过一系列图示证明的；这两个证明的动画版本可在以下网址查看：https://ippo0127.github.io/movies/mobius_命题4_23.html和https://ippo0127.github.io/movies/mobius_命题5_6.html。

2. 设定

2.1. **约定**。 下文中， $\mathcal{C}$ 是一个伪酉[3] 融合范畴，其定义在 $\mathbb{C}$ 上；不失一般性，我们可以假设它是小的且严格的。我们用 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 表示简单对象同构类的一组代表， $d_X > 0$表示量子维数，而

$$D := \Big(\sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_X^2 \Big)^{1/2}.$$

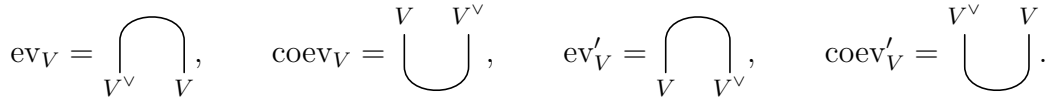
在不带下标时，Hom和End 均取自 $\mathcal{C}$，或当前讨论的范畴；对于向量空间 V， $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 是线性映射代数 $V \to V$。我们用 $g \circ f$，或简写为 gf，表示态射复合。从第4节起，我们还将假设 $\mathcal{C}$ 是模的，届时会明确说明。

我们用 $c_{X,\,Y}\colon\ X \otimes Y \to Y \otimes X$ 表示编织，用 θ_X 表示扭结。因此，平衡公理可写为

$$\theta_{X\otimes Y} = c_{Y,X} \circ c_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes \theta_Y).$$

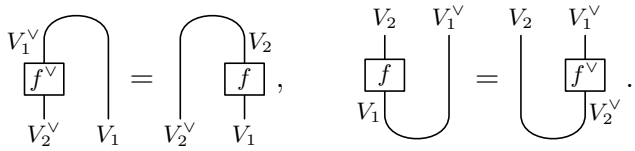
我们使用 $\mathcal{C}$ [Tur94]的图形演算：图从下往上读取，态射 f画成包含 f的标记片，编织$c_{X,\,Y}$画成 X线从 Y线上方穿过。

直和采用规范的分配同构处理，故略去不写。我们使用 $\mathcal{C}$ 的左对偶， $\mathsf{ev}_V\colon\ V^\vee \otimes V \to \mathbf{1}$ 和 $\mathsf{coev}_V\colon\ \mathbf{1} \to V \otimes V^\vee$；并用 $\mathsf{ev}'_V\colon\ V \otimes V^\vee \to \mathbf{1}$和 $\mathsf{coev}'_V\colon\ \mathbf{1} \to V^\vee \otimes V$ 表示球结构的右求值和右余求值。在图中，帽或杯画如下：

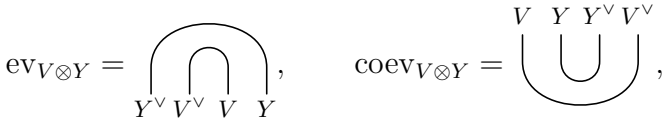


对于 $f\colon\ V_1 \to V_2$ 转置 $f^\vee\colon\ V_2^\vee \to V_1^\vee$满足

(2.1)



对于 $V \otimes Y$，我们使用左对偶 $Y^\vee \otimes V^\vee$，其帽与杯嵌套，

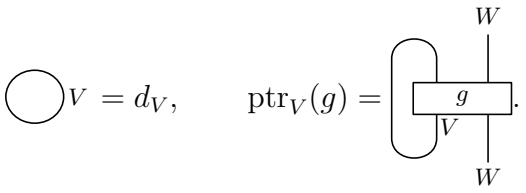


且 $\mathbf{1}^\vee = \mathbf{1}$；然后 $(f \otimes h)^\vee = h^\vee \otimes f^\vee$。一个对象的两个左对偶通过一个与评价和余求值相容的唯一同构 [EGNO15，命题 2.10。5], 且

[3]回忆一下，融合范畴是伪酉的，如果其整体维数等于其 Frobenius–Perron维数；此时它具有唯一的球结构，使得所有简单对象的维数均为正，并且这些维数与 Frobenius–Perron维数相同 [ENO02，命题 8。23]我们始终采用这一球结构，因此我们的假设等价于： $\mathcal{C}$ 是一个球形编织融合范畴，其中量子维数 d_X 对每个简单对象 X 均为正。酉模张量范畴是主要的例子，但我们不会使用 $\mathcal{C}$上的酉结构（注3.35）。

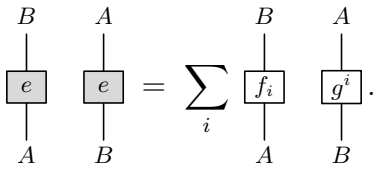
下面的一切都与这些同构相容，因此我们省略它们。特别地，对于$X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$中的对象，我们总是从$\mathcal{C}\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$中选择其对偶 $X^\vee$，即记作 $X^\vee \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$。

标记为 V的闭环是 ev_V余评价$'_V = d_V$，而偏迹 $\mathrm{ptr}_V(g) :=$(ev$_V \otimes$恒等态射$_W$)(恒等态射 $_{V^\vee}\otimes g$)(余评价$'_V \otimes$恒等态射$_W$) over $V$of $g \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ 将左侧的线 V闭合；对于 $W = \mathbf{1}$，它是 $\mathrm{End}(V)$ 上 $g \in$ 的迹 $\mathrm{tr}(g)$ （Tr 表示线性映射的迹）：



为简化记号，我们还采用以下约定：

定义 2.1。 两个携带相同标签 e的着色券片，一个属于 $\mathrm{Hom}(A, B)$，另一个属于 $\mathrm{Hom}(B, A)$，表示 $\mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}(B, A)$ 中的一个元素：包含它们的图表示对 i 求和，即对两个券片中的 f_i 和 g^i 对应的图求和，例如



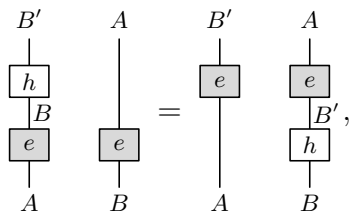
不同标签的着色对分别独立求和。除非另有说明， e是迹配对的典范元

$$e_{A,B} = \sum_i f_i \otimes g^i \in \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}(B, A), \qquad \mathrm{tr}(g^i f_j) = \delta_{ij},$$

$(f, g) \mapsto \mathrm{tr}(g \circ f)$。由于$\mathcal{C}$是半单的且维数非零，该配对是非退化的；$e_{A,B}$ 不依赖于基 f_i 的选取。由于 $\mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(f \circ g)$，元素$e_{B,A}$ 在交换两个因子后保持不变，因此这对中的两个券片扮演对称的角色。」

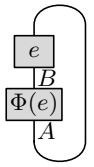
命题 2.2. 带有典范元的着色券片具有以下性质。

(E1) 滑动。 附着于 e 一端的态射可以移到另一端：对于 h： $B \to B'$,

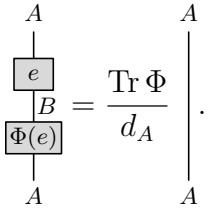


在两端也同样如此 A。

(E2) 闭合。 对于 $\mathrm{Hom}(A, B)$中的线性映射 Φ ， 记 $\Phi(e)$ 为将 Φ 作用于 e 在$\mathrm{Hom}(A, B)$中的末端。然后



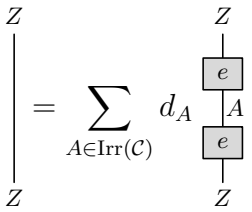
$= \text{迹}\,\Phi,$ 并且，如果 A 是简单对象，



$= \dfrac{\mathrm{Tr}\,\Phi}{d_A}$

.

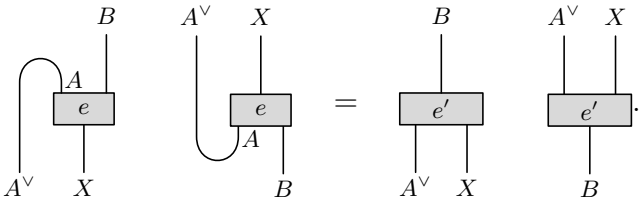
(E3) 恒等算子的分解。我们有



$\sum_{A\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_A$

对每个 $Z \in \mathcal{C}$。

(E4) 弯曲。以相同方式弯曲 e 两端的一条腿，得到相应Hom-空间的典范元。例如，如果 e 是 $\mathrm{Hom}(X, A \otimes B) \otimes \mathrm{Hom}(A \otimes B, X)$ 的典范元，而 e' 是$\mathrm{Hom}(A^\vee \otimes X, B) \otimes \mathrm{Hom}(B, A^\vee \otimes X)$的典范元，那么



.

证明。 将 $e = \sum_i f_i \otimes g^i$ 按定义 2.1中的方式书写。于是 $x = \sum_i \mathrm{tr}(g^i x)\, f_i$ 对于 $x \in \mathrm{Hom}(A, B)$成立，并且 $y = \sum_i \mathrm{tr}(y f_i)\, g^i$ 对于 $y \in \mathrm{Hom}(B, A)$成立。

(E1) $\mathrm{Hom}(A, B') \otimes \mathrm{Hom}(B, A)$ 中的一个元素由它与 $y \otimes x$ for$y \in \mathrm{Hom}(B', A)$ 和 $x \in \mathrm{Hom}(A, B)$ 的配对确定，在 $(f \otimes g, y \otimes x) \mapsto \mathrm{tr}(yf)\,\mathrm{tr}(gx)$ 下。根据上面的展开，两边与 $\mathrm{tr}(yhx)$ 的配对相同。$\mathrm{End}\ A$ 也用同样的方法处理。

(E2) 闭图为 $\sum_i \mathrm{tr}(g^i\, \Phi(f_i))$，它由第一次展开得到 $\mathrm{Tr}\,\Phi$ 。若 A 是简单对象，$\sum_i g^i\, \Phi(f_i) \in \mathrm{End}(A)$ 是 id_A的倍数，而取迹即可确定这个倍数。

(E3) 将 Z 写成一个直和，并令包含映射为 $\iota_i\colon\ A \to Z$ ，投影为 $\pi_i\colon\ Z \to A$ ，其中各求和项同构于 A，使得 $\pi_j \iota_i = \delta_{ij}$恒等态射$_A$。于是 迹$(\pi_j \iota_i) = d_A \delta_{ij}$，因此我们可以取 $f_i = \iota_i$和 $g^i = d_A^{-1} \pi_i$，并且 $\sum_i f_i g^i = d_A^{-1} \sum_i \iota_i \pi_i$。对 $A \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$中的投影求和，得到 恒等态射 $_Z$，因为 $\mathcal{C}$ 是半单的。

(E4) 弯曲一条腿给出Hom空间之间的线性同构；根据球性，以相同方式弯曲两端不会改变它们复合的迹。因此，弯曲后的 f_i 和 g^i 仍然是对偶基。 □

2.2. **反幺半对合。**

定义 2.3。 $\mathcal{C}$ 上的反幺半对合 由一个 $\mathbb{C}$-线性自等价 $\mathbf{P}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$以及自然同构组成

$$U_{X,Y}\colon \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}X \xrightarrow{\cong} \mathsf{P}(X \otimes Y), \qquad U_0\colon \mathbf{1} \xrightarrow{\cong} \mathsf{P}\mathbf{1},$$

满足

(A1) $$U_{X,Y\otimes Z} \circ (U_{Y,Z} \otimes id_{\mathsf{P}X}) = U_{X\otimes Y,Z} \circ (id_{\mathsf{P}Z} \otimes U_{X,Y}),$$

(A2) $$U_{\mathbf{1},X} \circ (id_{\mathsf{P}X} \otimes U_0) = id_{\mathsf{P}X} = U_{X,\mathbf{1}} \circ (U_0 \otimes id_{\mathsf{P}X}),$$

(A3) $$\mathsf{P}(c_{X,Y}) \circ U_{X,Y} = U_{Y,X} \circ c^{-1}_{\mathsf{P}X,\mathsf{P}Y},$$

连同一个幺半群自然同构 β：恒等态射$_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{P}^2$,，即

(A4) $$\beta_{X\otimes Y} = \mathsf{P}(U_{X,Y}) \circ U_{\mathsf{P}Y,\mathsf{P}X} \circ (\beta_X \otimes \beta_Y), \qquad \beta_{\mathbf{1}} = \mathsf{P}(U_0) \circ U_0.$$

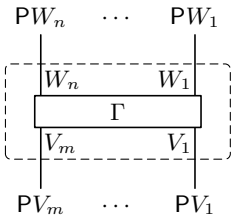
⌟

我们始终假设固定了满足（(P U, β) （A1）–（A4）的一个数据。

定义 2.4。 对于对象 $V_1, \ldots, V_m$ 令$U_{V_1,\ldots,V_m}\colon \mathsf{P}V_m \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}V_1 \to \mathsf{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$ 为迭代反幺半结构；由（A1）可知，它不依赖于括号次序，并且对于 恒等态射$^{\mathsf{P}V_1}$为 $m = 1$，对于 U_0 为 $m = 0$。我们用它来绘制 P 对 $\mathcal{C}$中态射的像。令 Γ为一个 $\mathcal{C}$的图，对应于一个态射 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$。我们将该态射画作

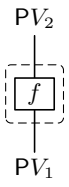
$$\langle\Gamma\rangle_{\mathsf{P}} := U^{-1}_{W_1,\ldots,W_n} \circ \mathsf{P}(\Gamma) \circ U_{V_1,\ldots,V_m}\colon \mathsf{P}V_m \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}V_1 \to \mathsf{P}W_n \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}W_1$$

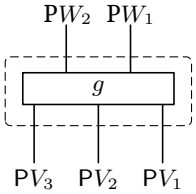
作为虚线框内 Γ 的镜像，$\mathbf{P}$-盒：

$\langle\Gamma\rangle_{\mathsf{P}} =$ 

⌟

盒内的图像是将 Γ 沿竖直一维空间反射后在镜中读取的结果：盒内标记为 g 的标记片，其引脚顺序反转。盒外的线按照相同顺序承载盒内标签在 $\mathbf{P}$ 作用下的像。在具有一条线 U 的端点处，它是恒等态射；在没有线的端点处，它是 U_0。例如，对于态射 f: $V_1 \to V_2$ 以及态射g: $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to W_1 \otimes W_2$,



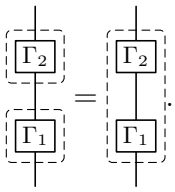
$= \mathsf{P}(f),$ 

$= U^{-1}_{W_1,\ W_2}\ \mathsf{P}(g) U_{V_1,V_2,V_3}.$

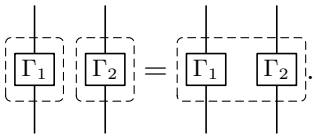
在第一个例子中，两端各有一条线，因此不会出现 U。

命题 n 2.5. 这些盒遵循以下规则，每条规则都是 $\mathcal{C}$ 的态射等式 .

(B1) 复合。 堆叠的盒会合并：

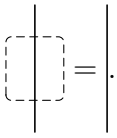


(B2) 张量积。 并排的盒合并为一个：

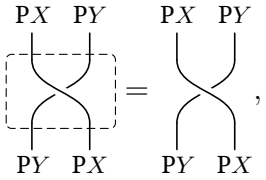


由于盒会反转线的顺序，因此公式写作 $\langle\Gamma_1\rangle_{\mathsf{P}} \otimes \langle\Gamma_2\rangle_{\mathsf{P}} = \langle\Gamma_2 \otimes \Gamma_1\rangle_{\mathsf{P}}$。

(B3) 恒等式。 恒等线周围的盒可以移除：

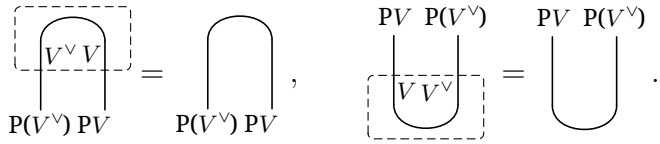


(B4) 交叉。 交叉穿过盒壁时保持不变：

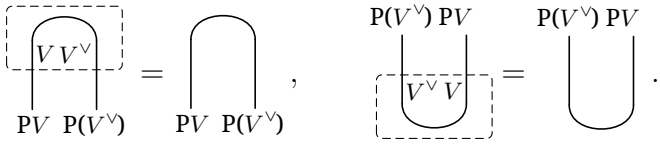


另一个交叉也同样如此。

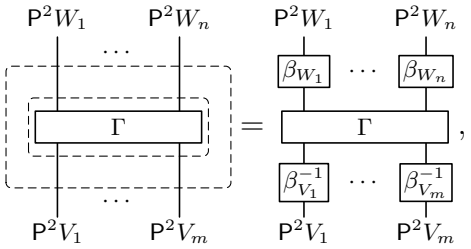
（*B5*）帽与杯 *I*。*P(V^∨)*，配有 $\langle ev'_V\rangle_{\mathsf{P}}$：*P(V^∨)* $\otimes PV \to \mathbf{1}$ 以及 $\langle coev'_V\rangle_{\mathsf{P}}$：$\mathbf{1} \to PV \otimes$*P(V^∨)*，是 PV 的一个左对偶。按照第 *2.1* 节的约定，我们将其记作 *(PV)^∨*，也写作 $PV^\vee$，从而 $\langle ev'_V\rangle_{\mathsf{P}} = ev_{\mathsf{P}V}$ 以及 $\langle coev'_V\rangle_{\mathsf{P}} = coev_{\mathsf{P}V}$，即



(B6) 帽与杯，II. 采用这种识别，$\langle$评价$_V\rangle_{\mathsf{P}} =$ 评价$'_{\mathsf{P}V}$和 $\langle$余评价$_V\rangle_{\mathsf{P}} =$ 余评价$'_{\mathsf{P}V}$，也就是说，



(B7) 双重方框。 一个盒子套在另一个盒子外，会在每条线上放置 β：



也就是说，$\langle\langle\Gamma\rangle_{\mathsf{P}}\rangle_{\mathsf{P}} = (\beta_{W_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{W_n})\circ\Gamma\circ(\beta_{V_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{V_m})^{-1}$，在没有线的端点处没有 β。

证明。 (B1)中间因子 UU^{-1}抵消，且 P是一个函子。

(B2) 这是自然　性 U的自然性以及（A1）。在没有线的端点处，使用单位公理（A2）　.

(B3) 这是因为 P(恒等态射) $=$ 恒等态射。

(B4) .....的镜像$c_{X,\,Y}$在盒内绘制的图形是 $c^{-1}{}_{\mathsf{P}X,\,\mathsf{P}Y}$的图形，其中P 已从标签中删除，而 $U_Y^{-1}{}_{,\,X}\mathsf{P}(c_{X,\,Y})U_{X,\,Y} = c^{-1}{}_{\mathsf{P}X,\,\mathsf{P}Y}$，由（A3）得到。

(B5) 取ev'_V 和coev'_V的之字形恒等式中的盒，根据(B1)–(B3) 即可得到左对偶的之字形恒等式。

（B6）根据（B1）–（B3），$\langle\mathrm{ev}_V\rangle_{\mathsf{P}}$ 和 $\langle\mathrm{coev}_V\rangle_{\mathsf{P}}$ 满足之字形恒等式，因此PV是P($V^\vee$) $=$ (PV)$^\vee$的左对偶，$\mathrm{ev}'_{\mathsf{P}V}$和$\mathrm{coev}'_{\mathsf{P}V}$也满足同样的性质。因此，$\langle\mathrm{ev}_V\rangle_{\mathsf{P}} = \mathrm{ev}'_{\mathsf{P}V}(g_V\otimes\mathrm{id})$和 $\langle\mathrm{coev}_V\rangle_{\mathsf{P}} = (\mathrm{id}\otimes g_V^{-1})\,\mathrm{coev}'_{\mathsf{P}V}$构成P$V$的一个自同构，并且关于 V可加；我们可以假设 V是简单对象。于是 g_V 是一个标量，因为PV 是简单对象。标量的盒仍是同一个标量，因为P是线性的。取闭环$\mathrm{ev}_V\,\mathrm{coev}'_V = d_V$和$\mathrm{ev}'_V\,\mathrm{coev}_V = d_V$的盒，根据（B1）和（B5），得到

$$d_V = \mathrm{ev}'_{\mathsf{P}V}(g_V\otimes id)\,\mathrm{coev}_{\mathsf{P}V} = g_V\,d_{\mathsf{P}V}, \qquad d_V = \mathrm{ev}_{\mathsf{P}V}(id\otimes g_V^{-1})\,\mathrm{coev}'_{\mathsf{P}V} = g_V^{-1}\,d_{\mathsf{P}V}.$$

因此 $g_V^2 = 1$，且 $g_V = 1$，因为 $d_V > 0$ 和 $d_{\mathsf{P}V} > 0$。

(B7) 这是（A4），反复应用后，再利用 β的自然性。 □

由于P是 $\mathbb{C}$-线性的，$\langle\Gamma\rangle_{\mathsf{P}}$ 关于 Γ中的每个标记片都线性依赖；因此，定义2.1 中的约定以及(E1)–(E4)也适用于盒内的着色券片。

推论 2.6。 $d_{\mathsf{P}X} = d_X$ 对于 $X\in\mathcal{C}$。

证明。 取闭环评价$_X$余评价$'_X = d_X$ 所对应的盒，并使用(B1)、(B5) 和(B6)：　$d_X =$⟨评价$_X\rangle_{\mathsf{P}}\langle$余评价$'_X\rangle_{\mathsf{P}} =$评价$'_{\mathsf{P}X}$余评价$_{\mathsf{P}X} = d_{\mathsf{P}X}$。 □

3. 莫比乌斯融合代数

3.1. 定义与基本性质。 我们先回顾 $\mathcal{C}$ 的融合代数。

定义 3.1. 该融合代数 $\mathfrak{F}$ 的 $\mathcal{C}$ 是

$$\mathfrak{F} := K_0(\mathcal{C})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}.$$

我们将对象 X 的类记为 $[X]\in\mathfrak{F}$。 ⌟

以下是标准做法：

命题 3.2。 $\mathfrak{F}$ 是一个交换结合幺代数，其基为 $[X]$，由简单对象 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$标记，乘法为

$$[X][Y] = \sum_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{XY}^{Z}[Z], \quad N_{XY}^{Z} := \dim \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z).$$

$\mathfrak{F}$ 的更明确描述如下，其证明显然，故略去：

命题 3.3。设

$$\mathfrak{V}_0 := \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(X, X),$$

并用 (X, f) 表示求和项中标记为 X 的向量 $f \in \mathrm{Hom}(X, X)$。令 $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{V}_0$ 为由以下向量生成的子空间

$$(X \oplus Y, f \oplus g) - (X, f) - (Y, g)$$

and

$$(X, a \circ f) - (X, f \circ a),$$

其中 $f \in \mathit{Hom}(X, X)$，$g \in \mathit{Hom}(Y, Y)$，且 $a \in \mathit{End}(X)$。那么 $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{V}_0/\mathfrak{R}_0$ 作为代数同构，其中记 $[X, f]$ 为 (X, f) 的类，我们有 $[X] = [X, \mathit{id}_X]$和 $[X, f] \cdot [Y, g] = [X \otimes Y, f \otimes g]$；该同构将 $[X, f]$ 映射为 $\sum_{Z \in \mathit{Irr}(\mathcal{C})} \mathit{Tr}(f_*)\ [Z]$，其中 f_* 是 $\mathit{Hom}(Z, X)$ 的线性映射 $\varphi \mapsto f \circ \varphi$，即 f 在 X中 Z 的重数空间上的作用；对于 $f = \mathit{id}_X$，其迹为重数 $\mathit{dim\ Hom}(Z, X)$。

我们将定义融合代数的莫比乌斯版本，并纳入P 的 $\mathcal{C}$反幺半对合。我们通过推广上文命题 $\mathfrak{F}$ 3.3 中的描述来定义它。

定义 3.4. 令

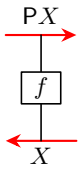
$$\mathfrak{V} := \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(X, \mathsf{P}X),$$

并将位于标记为 X 的求和项中的向量 $f \in \mathrm{Hom}(X, \mathsf{P}X)$ 记作 (X, f)。令 $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{V}$ 为由以下元素张成的子空间

(R1)（直和）$(X \oplus Y,\ f \oplus g) - (X, f) - (Y, g)$，其中 $f \oplus g := \mathsf{P}(\iota_X)\ f\ \pi_X + \mathsf{P}(\iota_Y)\ g\ \pi_Y$是 $X \oplus Y$ 的包含映射 ι 和投影 π；(R2)（余不变性）$(X, \mathsf{P}(a) \circ f) - (X, f \circ a)$，其中 $a \in \mathrm{End}(X)$。

莫比乌斯融合代数是向量空间 $\mathfrak{M} := \mathfrak{V}/\mathfrak{R}$，其乘法将在命题 3.14中定义，通常不具交换性。$(, f)$的类记作 $[X, f]$。 ⌟

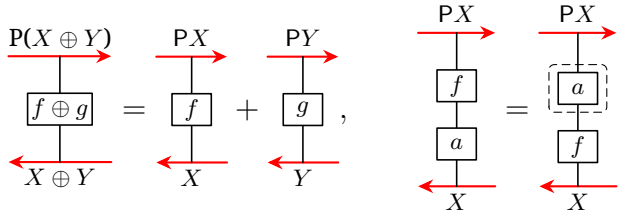
定义 3.5。 我们在以下对象的 $\mathfrak{M}$图形演算中绘制 $\mathcal{C}$ （第2.1节），绘于两个方向相反的水平箭头之间：



$:= [X, f].$

顶部和底部的箭头表示，顶部边界 $\mathsf{P}X$ 通过 P 与底部边界 X 重新粘合，因此该图描绘了一条绕莫比乌斯带核心圆一周的线。我们将刚刚引入的图称为莫比乌斯图，将绕核心圆运行的线称为核心环。」

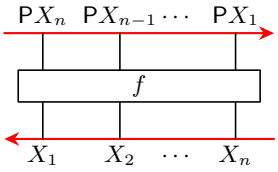
定义3.4中的两个关系



其中 $a \in \mathrm{End}(X)$.

接下来，我们扩展莫比乌斯图，使其顶部和底部箭头可以包含多条线。

定义 3.6. 对于对象 $X_1, \dots, X_n$ 和态射 $f\colon X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \to \mathsf{P}X_n \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}X_1$，我们定义

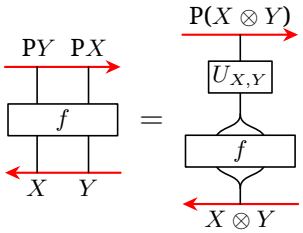


$$:= \left[X_1 \otimes \cdots \otimes X_n,\ U_{X_1,\dots,X_n} \circ f\right],$$

其中 $U_{X_1,\ \dots,\ X_n}\colon\ \mathsf{P}X_n \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}X_1 \to \mathsf{P}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$ 是定义 2.4中的迭代反幺半结构。」

因此，上方箭头的标记就是下方箭头的标记，对其应用 P 并反转顺序。线可以任意组合或拆分，只要相应的 U 被插入或省略即可。例如：

$$\left[X \otimes Y,\ U_{X,Y} \circ f\right] =$$

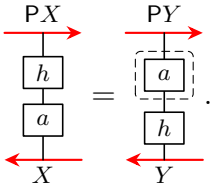


对于 $f\colon\ X \otimes Y \to \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}X$。

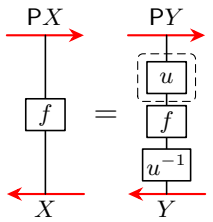
引理 3.7。 对于 $a\colon\ X \to Y$ 和 $h\colon\ Y \to \mathsf{P}X$，有

$$[X,\ h \circ a] = [Y,\ \mathsf{P}(a) \circ h],$$

也就是说，用图形表示，态射 a 绕核心变换一周：

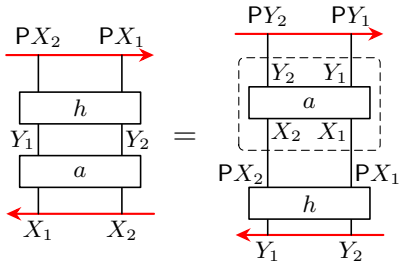


在 *pa* 别是 $[X,f]=[Y,\mathsf{P}(u)\circ f\circ u^{-1}]$ 对于每个同构 $u\colon\ X\to Y$，也就是说，



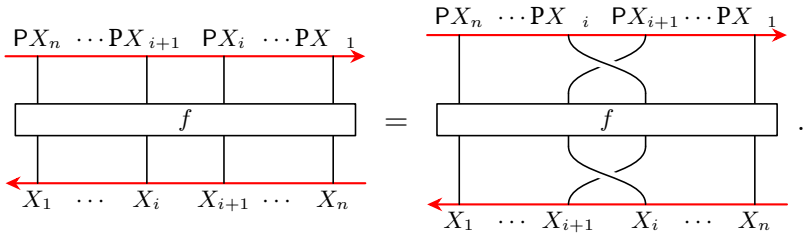
证明。令 $Z=X\oplus Y$，其包含映射为 ι，投影为 π。根据关系 (R1)（第二个求和项为 0），对于每个 φ，都有 $[Z,\mathsf{P}(\iota_X)\varphi\pi_X]=[X,\varphi]\colon\ X\to\mathsf{P}X$，对 Y 也类似。令 $F:=\mathsf{P}(\iota_X)\ h\,\pi_Y\colon Z\to\mathsf{P}Z$，以及 $b:=\iota_Y\,a\,\pi_X\in\mathsf{End}(Z)$。于是 $Fb=\mathsf{P}(\iota_X)(ha)\pi_X$，且 $\mathsf{P}(b)F=\mathsf{P}(\iota_Y)\big(\mathsf{P}(a)h\big)\pi_Y$，因此由关系 (R2) 可得结论。特殊情形为 $(a,\ h)=(u,\ fu^{-1})$。□

注 3.8。当图中有多条线时，上述引理会给出一个更一般的恒等式。例如，对于 $a\colon X_1\otimes X_2\to Y_1\otimes Y_2$ 和 $h\colon Y_1\otimes Y_2\to\mathsf{P}X_2\otimes\mathsf{P}X_1$，我们有

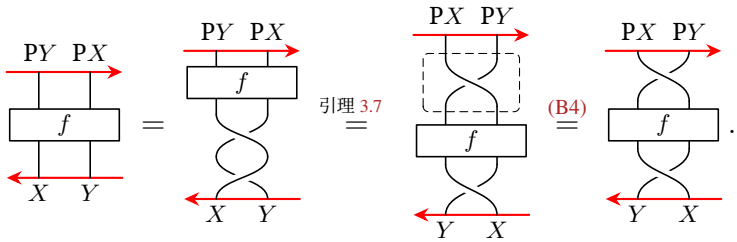


」

引理 3.9. 令 $f\colon X_1\otimes\cdots\otimes X_n\to\mathsf{P}X_n\otimes\cdots\otimes\mathsf{P}X_1$ 和 $1\le i<n$。该 n



证明。我们画出情形 $n=2$；对于 $n>2$，其余的线均为旁观线。



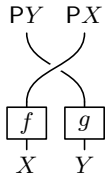
□

注 3.10。在此处及下文中，对于涉及图形演算或莫比乌斯图的等式，我们通常会在等号旁标注为其提供依据的命题、引理或规则。未作标注的等式通常只涉及图形演算的基本性质，这些性质适用于任意辫张量范畴。」

定义 3.11。对于态射 $f\colon X \to \mathsf{P}X$ 和 $g\colon Y \to \mathsf{P}Y$，令

$$f \cdot g := U_{X,Y} \circ c_{\mathsf{P}X,\mathsf{P}Y} \circ (f \otimes g)\colon X \otimes Y \to \mathsf{P}(X \otimes Y).$$

用图表示，这就是

$f \cdot g = U_{X,Y} \circ$ 

.

我们通常会在图中省略$U_{X,\,Y}$。 ⌟

引理 3.12。 $U_0\colon \mathbf{1} \to \mathsf{P}\mathbf{1}$ 是这个乘法的单位元。

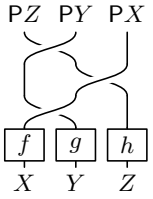
证明。 我们有 $U_0 \cdot f = U_{\mathbf{1},\,X}\,(f \otimes U_0)\,c_{\mathbf{1},\,X} = f$并且 $f \cdot U_0 = U_{X,\,\mathbf{1}}\,(U_0 \otimes f) = f$根据 $c_{\mathbf{1}}$、$c_{\mathbf{1},\,-} = c_{-,\,\mathbf{1}} =$ 恒等态射 和（A2）。 □

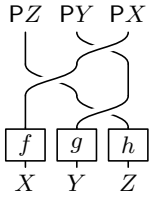
引理 3.13。 对于态射 $f\colon X \to \mathsf{P}X$, $g\colon Y \to \mathsf{P}Y$和 $h\colon Z \to \mathsf{P}Z$,

$$(f \cdot g) \cdot h = U_{X,Y,Z} \circ \tau \circ (f \otimes g \otimes h) = f \cdot (g \cdot h),$$

其中 τ 是$\mathsf{P}X \otimes \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}Z$的正半扭转，其中每条线都从其右侧的线前方经过。

证明。 对于三个因子的乘法，$U_{X,\,Y}$沿着与 $\mathsf{P}Z$ 的交叉向上滑动（编织的自然性），并与 $U_{X\otimes Y,\,Z}$ 合并为定义 2.4中的迭代$U_{X,\,Y,\,Z}$。因此，我们有

$(f \cdot g) \cdot h = U_{X,Y,Z} \circ$ 

$= U_{X,Y,Z} \circ$ 

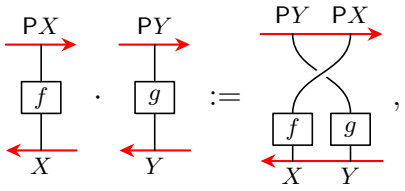
$= f \cdot (g \cdot h).$

□

命题 3.14。规则

$$[X, f] \cdot [Y, g] := \big[X \otimes Y,\ f \cdot g\big],$$

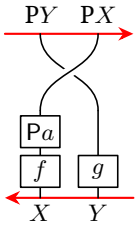
也就是说，

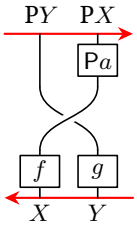


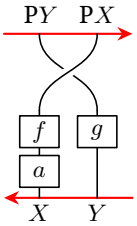
,

在 $\mathfrak{M}$ 上给出一个良定义的结合积，其单位元为 $[\mathbf{1}, U_0]$。

证明。 关系 (R1) 由 U 和 c 关于分配同构的自然性得到保持。关系 (R2) 在第一个因子中得到保持：对于 $a \in \mathrm{End}(X)$,

$[X, \mathsf{P}(a)f] \cdot [Y, g] =$ 

$=$ 

$\overset{\text{引理 3.7}}{=}$ 

$= [X, fa] \cdot [Y, g].$

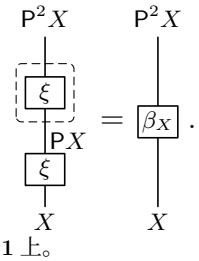
第二个因子的处理方式相同。单位性质和结合律由引理3.12 和引理 3.13。 □

为了描述 $\mathfrak{m}$ 的基，我们引入以下概念。

定义 3.15. $X \in \mathcal{C}$ 上的 P-结构 是一个同构 $\xi\colon X \to \mathsf{P}X$，满足

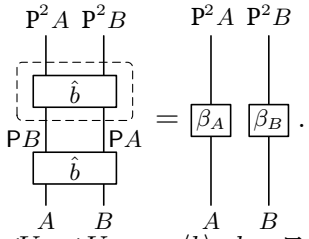
$$\mathsf{P}(\xi) \circ \xi = \beta_X, \tag{3.1}$$

也就是说，



根据（A4），$U_0\colon \mathbf{1} \to \mathsf{P}\mathbf{1}$ 是一个 P-结构，定义在 $\mathbf{1}$ 上。 ⌟

^^注 3.16. 更一般地，对于 $b\colon A \otimes B \to \mathsf{P}B \otimes \mathsf{P}A$，态射 $U_{A,\ B}b$ 是 $A \otimes B$ 上的 P-结构，当且仅当



^^^^ 确实，$\mathsf{P}(U_{A,B})U_{A,B}b = \mathsf{P}(U_{A,B})U_{\mathsf{P}B,\mathsf{P}A}\langle b\rangle_{\mathsf{P}}\, b$，且 $\mathsf{P}(U_{A,B})U_{\mathsf{P}B,\mathsf{P}A}(\beta_A \otimes \beta_B) = \beta_{A\otimes B}$，由 ^^^ (A4) 得出。当 $\langle b\rangle_{\mathsf{P}} b$ 可逆时，b 也可逆，因为 $A \otimes B$ 和 $\mathsf{P}B \otimes \mathsf{P}A$ 长度相同。⌟

注 3.17。当 β 相干时，也就是说满足下文定义 4.11 中的 (Coh)，对象 X 与 P-结构 ξ 组成的对 (X,ξ) 是 $\mathcal{C}$ 关于 $\mathbb{Z}/2$-作用的等变化 $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}/2}$ [EGNO15, §4.15] 的对象；该作用由幺半函子 $(\mathsf{P}\ J)$, $J_{X,Y} := U_{X,Y}\, c_{\mathsf{P}X,\mathsf{P}Y}\colon \mathsf{P}X \otimes \mathsf{P}Y \to \mathsf{P}(X \otimes Y)$ 以及同构 β: 恒等态射 $\Rightarrow \mathsf{P}^2$ 给出。$\mathcal{C}^{\mathbb{Z}/2}$ 中的态射 $(X_1,\xi_1) \to (X_2,\xi_2)$ 是定义 3.29 中 R_{ξ_1,ξ_2} 的不动点集，张量积是引理 3.27 中的乘法，而对偶是引理 3.26 中的自然对偶。本节的许多结论在相干情形下可由等变化的标准性质推出。我们选择直接证明这些结论，以便读者无需了解等变化也能理解本文，并避免相干性假设。

⌟

定义 3.18. 我们设

$$\mathrm{Fix}(\mathsf{P}) := \{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}) \mid X \cong \mathsf{P}X\}.$$ ⌟

引理 3.19. 对于 $X \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$，存在一个P-结构 ξ_X 于 X上，且在符号意义下唯一。若 $\xi\colon Z \to \mathsf{P}Z$是对象 Z上的一个P-结构，且 $u\colon Z \to X$是一个同构，则 $\mathsf{P}(u)\,\xi\,u^{-1} = \pm\xi_X$。

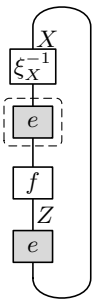
证明。任取一个同构 $\varphi\colon X \to \mathsf{P}X$。由于 X 是简单对象，$\mathsf{P}(\varphi)\varphi = \lambda\beta_X$ 对于某个$\lambda \in \mathbb{C}^\times$成立，并且 $\lambda^{-1/2}\varphi$ 满足 (3.1)。另一个解是 $c\,\xi_X$，其中 $c \in \mathbb{C}^\times$，而 $\mathsf{P}(c\xi_X)\ c\xi_X = c^2\beta_X$迫使 $c = \pm 1$。最后，$\mathsf{P}(u)\xi u^{-1}$: 由 β的自然性，$X \to \mathsf{P}X$ 满足 (3.1)，因此根据上述结果，它是 $\pm\xi_X$。□

定义 3.20。 对于每个 $X \in$ 不动点集(P) 我们固定一个，并始终选定两个 P-结构 ξ_X 引理3.19 中的一个，其满足 $\xi_1 := U_0$，并记作

$$\mathrm{M}(X) := [X, \xi_X] \in \mathfrak{M}.$$ 」

定义 3.21。 令 $X \in$Fix(P)，且令 $f\colon Z \to \mathrm{P}Z$。我们将 $\mathrm{Tr}_X(Z,f) \in \mathbb{C}$定义为

迹$_X$(Z<style 恒等态射='3'>, f) :=

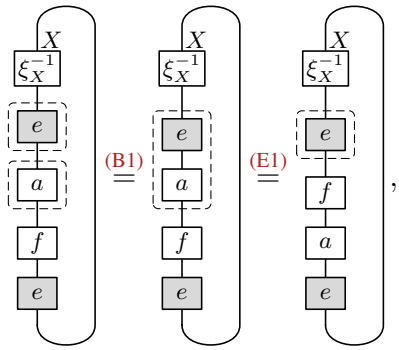


,

其中 e是 $\mathrm{Hom}(X,Z) \otimes \mathrm{Hom}(Z,X)$的典范元（第 2.1 节）。我们称其为 闭合 (Z,f) 在 X处的闭合。」

引理 3.22。 $(Z,f) \mapsto \mathrm{Tr}_X(Z,f)$在 $\mathfrak{N}$ 上为零。因此，它定义了一个线性映射 $\mathrm{Tr}_X\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$。

证明。 闭合在 $\mathfrak{V}$ 上是线性的。对于关系 (R1)，$\mathrm{Hom}(X, Z \oplus W) \otimes \mathrm{Hom}(Z \oplus W, X)$ 的典范元是 Z 和 W 所对应典范元的和，并与包含映射及投影复合；这给出了 (Z,f) 和 (W,g) 的闭合之和。对于关系 (R2)，令 $a \in \mathrm{End}(Z)$。于是

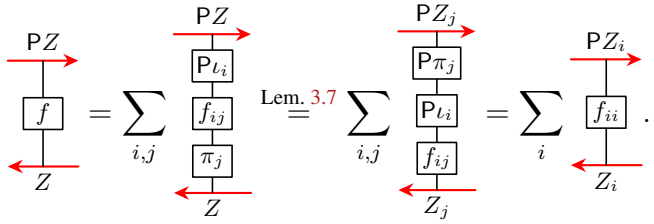


,

且两个端点分别是（Z，$\mathrm{P}(a)f$）和（Z，fa）的闭合。 □

命题 3.23。元素$\mathrm{M}(X)$、 $X \in \mathrm{Fix}(\mathrm{P})$构成 $\mathfrak{M}$的一组基，且$\mathrm{M}(X)$ 在 $u \in \mathfrak{M}$ 中的系数为迹$_X(u)$。特别地，维数 $\mathfrak{M} = |\mathrm{Fix}(\mathrm{P})|$。

证明。张成。令 $(Z,f) \in \mathfrak{V}$。由于 $\mathcal{C}$是半单的，存在 $Z_i \in$Irr($\mathcal{C}$) 以及态射$\iota_i\colon Z_i \to Z$, $\pi_i\colon Z \to Z_i$，满足 $\pi_i\iota_j = \delta_{ij}$恒等态射 $_{Z_i}$和 $\sum_i \iota_i\pi_i =$恒等态射 $_Z$。取 f_{ij}:=P(π_i) f $\iota_j\colon Z_j \to \mathrm{P}Z_i$,

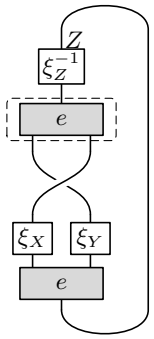


.

最后，$f_{ii} = 0$ 除非 $Z_i \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$，而在这种情况下 $[Z_i, f_{ii}] \in \mathbb{C}\mathrm{M}(Z_i)$，因为 $\mathrm{Hom}(Z_i, \mathsf{P}Z_i) = \mathbb{C}\xi_{Z_i}$。
线性无关性。我们有 $\mathrm{Tr}_X(\mathrm{M}(X')) = \delta_{X,\,X'}$，因为 $\mathrm{Hom}(X,\ X') = 0$ 对于 $X' \neq X$，而 $\mathrm{End}(X) \otimes \mathrm{End}(X)$ 的典范元是 $d_X^{-1}\, id_X \otimes id_X$。因此，$\mathrm{M}(X)$ 线性无关，且 $\mathrm{Tr}_X(u)$ 是 u 中 $\mathrm{M}(X)$ 的系数。□

命题 3.24。对于 $X,\ Y \in$ 不动点集(P),

$$\mathrm{M}(X)\,\mathrm{M}(Y) = \sum_{Z \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})}$$



$$\mathrm{M}(Z),$$

其中阴影部分是 $\mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y) \otimes \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z)$（定义 2.1）。

证明。根据命题 3.23，$Z\mathrm{M}()$ 的系数是定义 $\mathrm{Tr}_Z(X \otimes Y, \xi_X \cdot \xi_Y)$ 3.21中的闭合。在其图示中，$U_{X,Y}$（定义 $\xi_X \cdot \xi_Y$（定义 3.11）的因子和上端的 P 在 e中合并为定义 2.4中的盒。□

在下面的推论中，我们去掉严格性假设，并在 $\mathcal{C}$的骨架模型中工作；这是无害的，因为命题 3.24 不涉及结合律约束。

推论 3.25。假设 $\mathcal{C}$ 是骨架的。于是P 置换简单对象，并且对于满足$\mathsf{P}^2 a = a$的简单 a，有 $\beta_a \in \mathrm{End}(a) = \mathbb{C}$。对于简单的 a、b、c，定义线性映射

$$R_c^{ab}\colon\ \mathrm{Hom}(c, a \otimes b) \to \mathrm{Hom}(c, b \otimes a), \qquad v \mapsto c_{a,b}\, v,$$
$$u_c^{ab}\colon\ \mathrm{Hom}(c, a \otimes b) \to \mathrm{Hom}(\mathsf{P}c, \mathsf{P}b \otimes \mathsf{P}a), \qquad v \mapsto \langle v \rangle_{\mathsf{P}}.$$

那么 $\xi_X \in \mathrm{End}(X) = \mathbb{C}$ 是 β_X 的平方根，对 $X \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$ 成立；并且对 $X, Y \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P}\ \ )$

$$\mathrm{M}(X)\,\mathrm{M}(Y) = \sum_{Z \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})} \frac{\xi_X\, \xi_Y}{\xi_Z}\ \mathrm{Tr}\big((u_Z^{XY})^{-1} R_Z^{XY}\big)\,\mathrm{M}(Z),$$

其中 Tr 是 $\mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y)$上的一个自同态的迹。

证明。对于 $X \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$，我们有 $\mathsf{P}X = X$，并且 $\mathsf{P}(\xi_X) = \xi_X$，因为 P 是线性的，所以 (3.1) 可写为$\xi_X^2 = \beta_X$。对于 $q \in \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z)$ 和 $w \in \mathrm{Hom}(Z, Y \otimes X)$,

$$\langle q \rangle_{\mathsf{P}}\, w = \langle q \rangle_{\mathsf{P}}\, \langle (u_Z^{XY})^{-1} w \rangle_{\mathsf{P}} = \langle q\, (u_Z^{XY})^{-1} w \rangle_{\mathsf{P}} = q\, (u_Z^{XY})^{-1} w$$

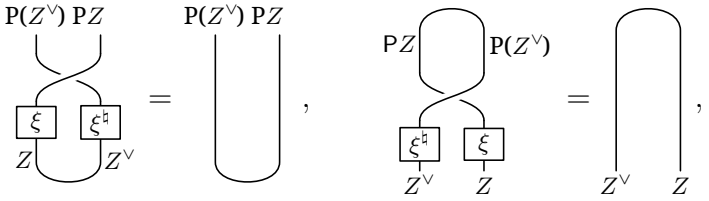
根据 (B1) 和 (B3)，有 $q\,(u_Z^{XY})^{-1} w \in \mathrm{End}(Z) = \mathbb{C}$。因此，取出标量 ξ_X、ξ_Y、ξ_Z^{-1} 后，命题 3.24 的图就是 e 和 $\Phi(e)$ 的闭图，其中 $\Phi = (u_Z^{XY})^{-1} R_Z^{XY}$，根据 (E2) 即为 $\mathrm{Tr}\,\Phi$。□

3.2. **半单性**。这里我们通过赋予 $\mathfrak{m}$ 一个 C^*-代数的结构，证明 $\mathfrak{m}$ 是半单的。我们先从几个引理开始。

引理 3.26. 设 ξ 是 Z 上的一个 P-结构。

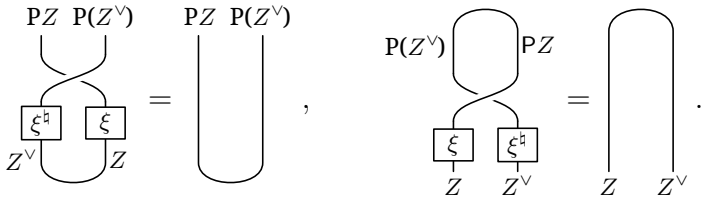
(a) 存在唯一的 P-结构 $\xi^\natural\colon\ Z^\vee \to \mathrm{P}(Z^\vee)$，满足

(3.2)



我们将其称为 ξ 的自然对偶。

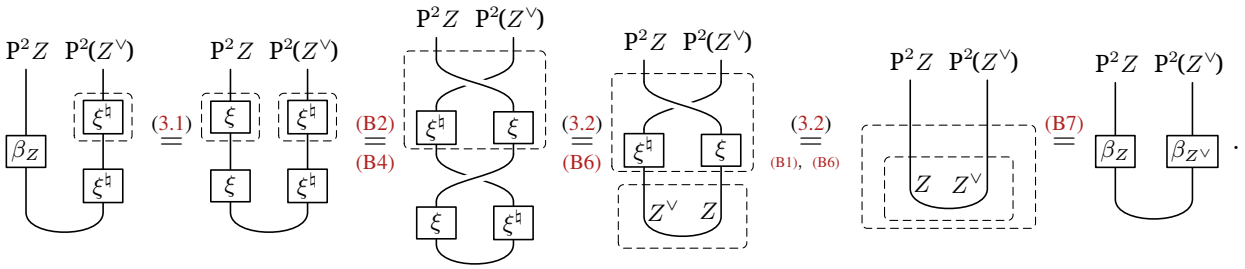
(b) $(\xi^\natural)^\natural = \xi$，其中 $Z^{\vee\vee} = Z$，即：



(c) 对于 $X \in$ 不动点集(P)，我们有 $X^\vee \in$ 不动点集(P)，并且存在一个符号 ν_X，使得 $\xi^\natural_X = \nu_X\, \xi_{X^\vee}$。此外，$\nu_{X^\vee} = \nu_X$。

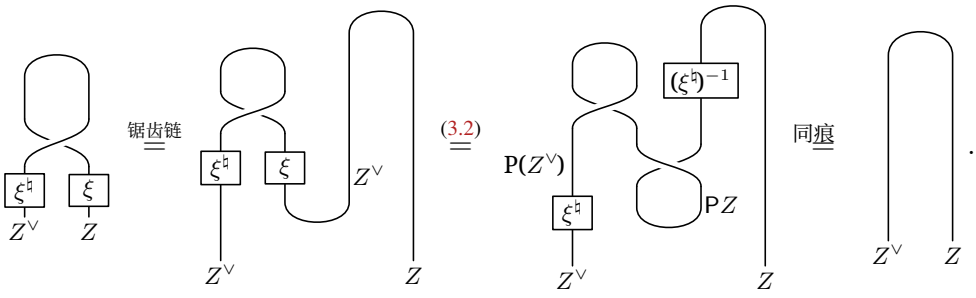
证明。（a）

（3.2）中的第一个恒等式显然唯一确定了 $\xi^\natural$ 作为一个态射。于是我们有

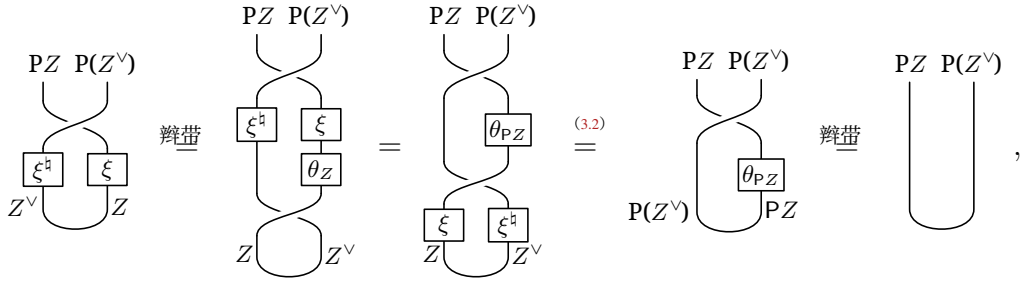


约去 β_Z，我们得到 $\mathrm{P}(\xi^\natural)\xi^\natural = \beta_{Z^\vee}$。特别地，$\xi^\natural$ 有一个左逆，而 $\mathrm{P}(\xi^\natural)$ 有一个右逆，因此 $\xi^\natural$ 是可逆的，因为 P 是一个等价。因此 $\xi^\natural$ 是一个 P-结构。

现在来验证第二个恒等式。在第二个恒等式（Z 左边的腿上插入（3.2）中的之字形恒等式，得到



（b）取 $Z^{\vee\vee}=Z$，杯 余评价$'_Z$ 为 余评价$_{Z^\vee}$，因此第一个恒等式就是（3.2）中针对 $\xi^\natural$且以 ξ 代替（$\xi^\natural$）$^\natural$的第一个恒等式；由（a）中的唯一性可知，它等价于（$\xi^\natural$）$^\natural=\xi$。对于辫带结构，余评价$'_Z=$（恒等态射 $_{Z^\vee}\otimes\theta_Z$）$c_{Z,\,Z^\vee}$余评价$_Z$，所以



其中在第二步中，我们使用了 θ 的自然性。第二个恒等式类似。

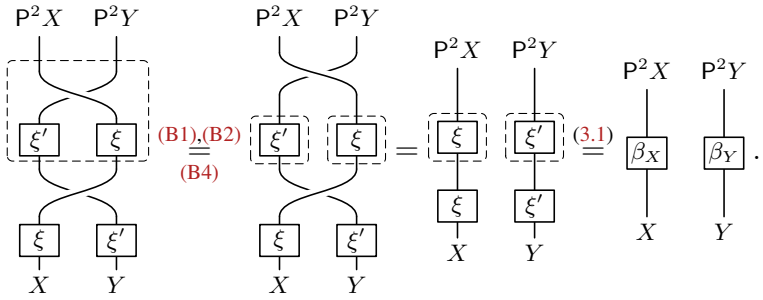
(c) 由 (B5)，$\mathrm{P}(X^\vee)\cong(\mathrm{P}X)^\vee\cong X^\vee$，因此 $X^\vee\in\mathrm{Fix}(\mathrm{P})$。现在，$\xi^\natural_X$ 和 $\xi_{X^\vee}$ 都是 $X^\vee$ 上的 P-结构，所以根据引理 3.19，$\xi^\natural_X=\lambda\,\xi_{X^\vee}$ 且 $\lambda=\pm1$。令 $\nu_X:=\lambda$。由于 $(-\xi)\cdot(-\xi^\natural)=\xi\cdot\xi^\natural$，根据 (a) 中的唯一性，我们有 $(-\xi)^\natural=-\xi^\natural$。因此，由 (b)，

$$\xi_X=(\xi^\natural_X)^\natural=(\nu_X\,\xi_{X^\vee})^\natural=\nu_X\,\xi^\natural_{X^\vee}=\nu_X\nu_{X^\vee}\,\xi_X,$$

即 $\nu_{X^\vee}=\nu_X$。 □

引理 3.27。对于 P-结构 ξ 和 ξ' 在 X 和 Y 上，乘法 $\xi\cdot\xi'$（定义 3.11）是 P-结构，在 $X\otimes Y$ 上。

证明。 根据注 3.16 只需证明 $\xi\cdot\xi'$的图像后接其盒为 $\beta_X\otimes\beta_Y$：



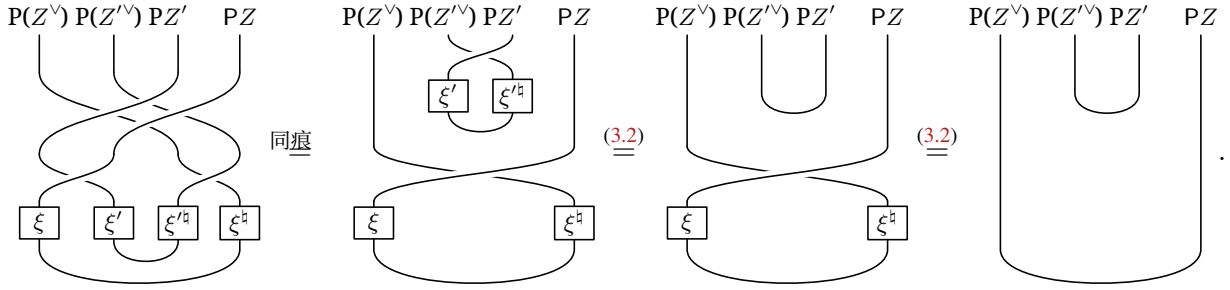
□

引理 3.28。对于 P结构ξ、ξ'在 Z、Z'上，我们有 $(\xi\cdot\xi')^\natural=\xi'^\natural\cdot\xi^\natural$，其中 $(Z\otimes Z')^\vee=Z'^\vee\otimes Z^\vee$。

证明。 下面的第一幅图是

$$\big((\xi\cdot\xi')\cdot(\xi'^\natural\cdot\xi^\natural)\big)\circ\mathrm{coev}_{Z\otimes Z'},\qquad \mathrm{coev}_{Z\otimes Z'}=(id_Z\otimes\mathrm{coev}_{Z'}\otimes id_{Z^\vee})\,\mathrm{coev}_Z,$$

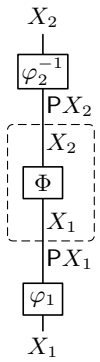
其中P-结构的乘法如定义 3.11之后所示。我们有



最后一幅图是P的杯积$Z \otimes Z'$，因此 $\xi'^{\natural} \cdot \xi^{\natural}$ 满足 $(\xi \cdot \xi')^{\natural}$的定义恒等式，而引理 3.26(a) 中的唯一性即得此结论。□

定义 3.29。对于同构 $\varphi_1\colon X_1 \to \mathrm{P}X_1$ 和 $\varphi_2\colon X_2 \to \mathrm{P}X_2$，以及态射$\Phi\colon X_1 \to X_2$，定义

$$R_{\varphi_1,\varphi_2}(\Phi) := \varphi_2^{-1} \circ \mathrm{P}(\Phi) \circ \varphi_1 =$$



$: X_1 \to X_2.$

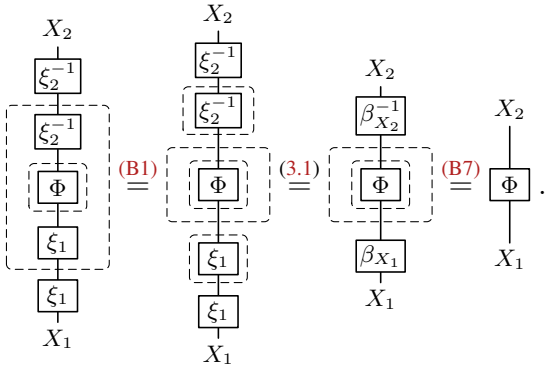
R_{φ_1,φ_2} 的不动点是满足 $\mathrm{P}(\Phi)\,\varphi_1 = \varphi_2\,\Phi$ 的态射 Φ。 ⌟

引理 3.30 .设 ξ_i 是 $X_i\,(i = 1,2,3)$ 上的P-结构，且 ξ_i' 是 $Y_i\,(i = 1,2)$上的P-结构。

(a) R_{ξ_1,ξ_2} 是 *Hom*(X_1, X_2) 上的线性对合，且 R_{ξ_1,ξ_1}(恒等态射) $=$恒等态射。*(b)* 对于 $\Phi\colon X_1 \to X_2$ 和 $\Psi\colon X_2 \to X_3$，$R_{\xi_1,\xi_3}(\Psi\Phi) = R_{\xi_2,\xi_3}(\Psi)\,R_{\xi_1,\xi_2}(\Phi)$。*(c)* 对于 $\Phi\colon X_1 \to X_2$ 和 $\Phi'\colon Y_1 \to Y_2$，$R_{\xi_1\cdot\xi_1',\,\xi_2\cdot\xi_2'}(\Phi \otimes \Phi') = R_{\xi_1,\xi_2}(\Phi) \otimes R_{\xi_1',\xi_2'}(\Phi')$。

证明。 (a) 根据定义3.29，应用两次，

R_{ξ_1}<style 恒等态射='2'>,
$\xi_2(R_{\xi_1}$<style 恒等态射
='5'>,$\xi_2(\Phi)) =$

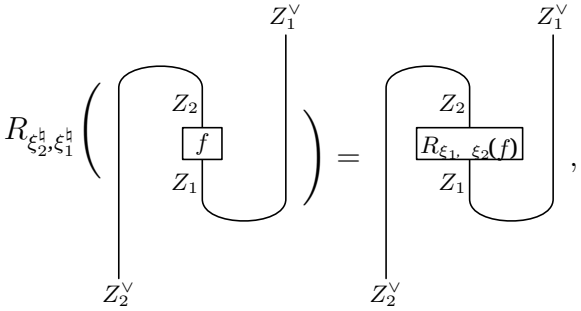


.

(b) 显然，(c) 由 $(\xi_2\cdot\xi_2')^{-1}\mathrm{P}(\Phi\otimes\Phi')(\xi_1\cdot\xi_1') = (\xi_2\otimes\xi_2')^{-1}\,c^{-1}\,U^{-1}\mathrm{P}(\Phi\otimes\Phi')U\,c\,(\xi_1\otimes\xi_1')$ 得出，因为 $U^{-1}\mathrm{P}(\Phi \otimes \Phi')U = \mathrm{P}\Phi' \otimes \mathrm{P}\Phi$(由 U 的自然性) 且 $c^{-1}(\mathrm{P}\Phi' \otimes \mathrm{P}\Phi)c = \mathrm{P}\Phi \otimes \mathrm{P}\Phi'$(由 c 的自然性)。□

引理 3.31。 对于 P结构 ξ_1, ξ_2 在 Z_1, Z_2 和 $f\colon Z_1 \to Z_2$ 上，我们有 $R_{\xi_1,\ \xi_2}(f)^{\vee} = R_{\xi_2^{\natural},\ \xi_1^{\natural}}(f^{\vee})$。

证明。 由引理 3.30(b), (c) 和引理 3.13， R 作用于图的每个部分，其乘法由中间线上P结构的乘法给出。因此



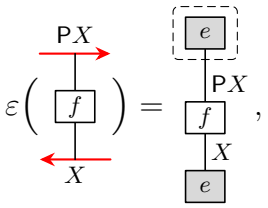
因为 R 根据引理3.30(a)保持线不变，根据（3.2）保持 Z_1 的杯不变，并根据引理3.26(a)保持 Z_2 的帽不变。左图是 $f^\vee$，右图是$R_{\xi_1,\ \xi_2}(f)^\vee$。□

引理 3.32。 对于 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，有$\theta_{\mathsf{P}X} = \theta_X^{-1}$；特别地，对于 $X \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$，有 $\theta_X = \pm 1$。

证明。 扭结 θ_X是卷曲，即 $c_{X,\ X}$的偏迹。它的盒 P(θ_X) 画成卷曲的镜像；根据 (B1)–(B6)，可以移除该盒，交叉穿过墙时保持不变（(B4)），帽和杯变为 PX 的帽和杯（(B5)、(B6)）。剩下的是 PX上的卷曲镜像，也就是交叉方向相反的卷曲， $\theta^{-1}{}_{\mathsf{P}X}$。对于简单对象 X，标量 θ_X 经 P 作用后仍是同一标量，因为 P 是线性的；因此$\theta_{\mathsf{P}X} = \theta_X^{-1}$，而对于 $X \cong \mathsf{P}X$，这写作$\theta_X^2 = 1$。□

我们已经预 备好了所有必要的工具，以证明 $\mathfrak{M}$ 是一个有限维 C^*-代数。

定义 3.33。 令 $\varepsilon := \text{迹}_{\mathbf{1}}\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ 为定义 **1** 的闭合 3.21。图示如下

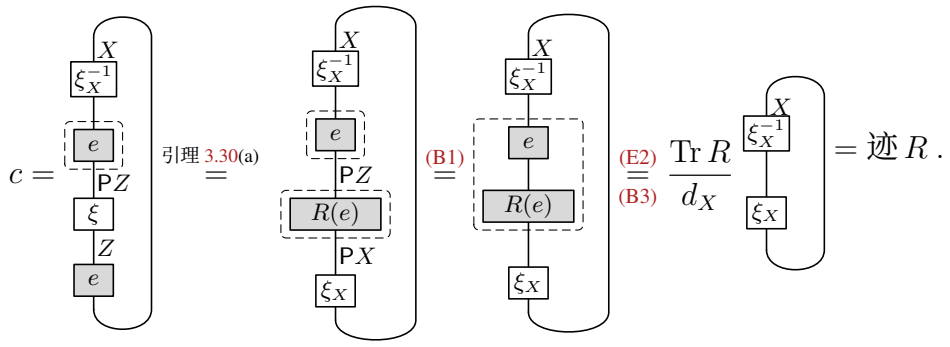


其中 e 是 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, X) \otimes \mathrm{Hom}(X,\mathbf{1})$中的典范元。根据命题 3.23， $\varepsilon(u)$ 是M($\mathbf{1}$)在 u中的系数。

⌟

Pr命题 *3.34*。*(a)* 对于一个 *P*-结构 $(Z,\ \xi)$ 以及 $X \in$ *Fix(P)*，*M(X)* 在 $[Z, \xi]$ 中的系数是定义 *3.29* 中对合 $R_{\xi_X,\ \xi}$ 的迹；特别地，它是一个整数。***(b)*** 对于 $X,\ X' \in$ *Fix(P)*，有 $\varepsilon\big(M(X)M(X')\big) = \nu_X\, \delta_{X',\ X^\vee}$，其中 ν_X 是引理*3.26(c)*中的符号。由于 $\nu_{X^\vee} = \nu_X$（引理*3.26(c)*），这意味着对于一般的 $u,\ v \in \mathfrak{M}$，有 $\varepsilon(uv) = \varepsilon(vu)$。***(c)*** 反线性映射 $u \mapsto u^\star$ 满足 $M(X)^\star = \nu_X M(X^\vee)$，它是 $\mathfrak{M}$ 的反对合，并且对每个 *P*-结构 $(Z,\ \xi)$，都有 $[Z,\xi]^\star = [Z^\vee, \xi^\natural]$。***(d)*** $\langle u,\ v\rangle := \varepsilon(u^\star v)$ 是一个正定厄米型，$\{M(X)\}_{X\in\mathrm{Fix(P)}}$ 是一组标准正交基，并且 $\langle au,\ v\rangle = \langle u,\ a^\star v\rangle$。***(e)*** $(\mathfrak{M},\ \star)$ 是一个有限维 C^*-代数；特别地，$\mathfrak{M}$ 是半单的。对于每个不可约 $\mathfrak{M}$-模 V，存在 $\mu_V > 0$ 使得 $\varepsilon = \sum_V \mu_V\, Tr_V$，其中 Tr_V 表示在 V 上作用的迹。

证明。(a) 根据命题 3.23，M(X) 在 $[Z,\xi]$ 中的系数 c 是定义 3.21 的闭合 $\mathrm{Tr}_X(Z,\ \xi)$。在此证明中记 $R := R_{\xi_X,\ \xi}$，并记 $R(e)$ 为将 R 作用于 Hom(X, Z) 中 e 末端所得的结果，



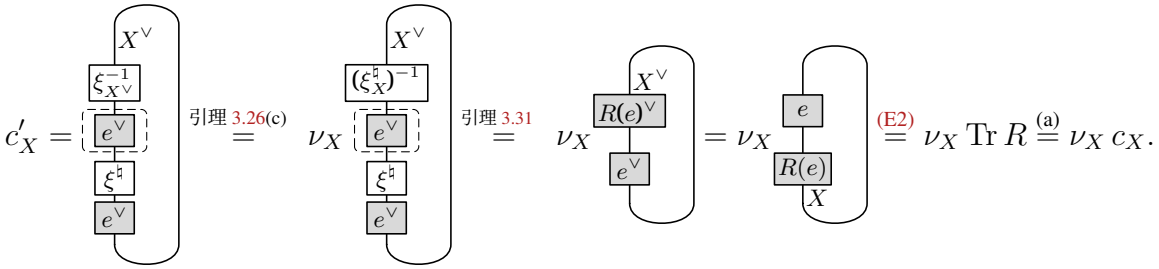
因此，c 是一个对合的迹，它是一个整数。

(b) 根据 (a)，应用于 M(1) 的系数，$\varepsilon(\mathrm{M}(X)\mathrm{M}(X'))$ 是 Hom($\mathbf{1}, X\otimes X'$) 上对合 $R_{U_0,\,\xi_X\cdot\xi_{X'}}$ 的迹；除非 $X'\cong X^\vee$，否则该迹为零。对于 $X'=X^\vee$，该空间由余评价 $_X$ 张成，并且

$$R_{U_0,\xi_X\cdot\xi_{X^\vee}}(\mathrm{coev}_X)=\nu_X\,R_{U_0,\xi_X\cdot\xi_X^\natural}(\mathrm{coev}_X)=\nu_X\,\mathrm{coev}_X$$

根据引理 3.26(c) 和 (3.2); 因此 $\varepsilon(\mathrm{M}(X)\mathrm{M}(X^\vee))=\nu_X$。

(c) 设 (Z,ξ) 是一个 P-结构，并记 $[Z,\xi]=\sum_X c_X\mathrm{M}(X)$ 和 $[Z^\vee,\xi^\natural]=\sum_X c'_X\mathrm{M}(X^\vee)$。我们来证明，对于每个 $X\in$ Fix(P)，都有 $c'_X=\nu_X c_X$。令 e 和 $R=R_{\xi_X,\xi}$ 如 (a) 中所述。将 e 的两端转置，得到 Hom($X^\vee,Z^\vee$) $\otimes$ Hom($Z^\vee,X^\vee$) 的典范元 $e^\vee$，因为转置保持迹。因此，由命题 3.23 应用于 $X^\vee\in$ Fix(P) 处的 $[Z^\vee,\xi^\natural]$，



由于 $X\mapsto X^\vee$ p 置换 不动点集(P) (引理 3.26(c))，恒等式 $c'_X=\nu_X c_X$ 对于每个 X 都说明

$$[Z^\vee,\xi^\natural]=\sum_X \nu_X\,c_X\,\mathrm{M}(X^\vee),\qquad \text{while}\qquad [Z,\xi]^\star=\sum_X \overline{c_X}\,\nu_X\,\mathrm{M}(X^\vee)$$

因为 $\star$ 是反线性的。根据 (a)，c_X 是整数，因此 $c_X=\overline{c_X}$，并且 $[Z^\vee,\xi^\natural]=[Z,\xi]^\star$。对于 $(Z,\xi)=(X\otimes X',\ \xi_X\cdot\xi_{X'})$，由引理 3.28

$$(\mathrm{M}(X)\mathrm{M}(X'))^\star=[X'^\vee,\xi_{X'}^\natural]\,[X^\vee,\xi_X^\natural]=\mathrm{M}(X')^\star\mathrm{M}(X)^\star,$$

因此 $\star$ 是反乘法的。它是对合的，因为 $\nu_X\nu_{X^\vee}=1$。

(d) 由 (b) 和 (c) 可得，

$$\langle \mathrm{M}(X),\mathrm{M}(X')\rangle=\nu_X\,\varepsilon(\mathrm{M}(X^\vee)\mathrm{M}(X'))=\delta_{X,X'},\qquad \langle au,v\rangle=\varepsilon(u^\star a^\star v)=\langle u,a^\star v\rangle.$$

(e) 由 (d) 可知，左乘法将 $\mathfrak{M}$ 实现为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M})$ 的一个 $\star$-封闭子代数，因此也是一个 C^*-代数。由于 ε 是忠实正迹，其在每个简单直和项 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 上的限制为$\mu_V \mathrm{Tr}_V$，其中 $\mu_V = \varepsilon(q) > 0$，对应于一个极小投影 q。□

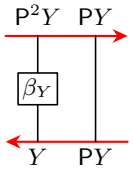
注 3.35。 C^*-结构（命题 3.34 ）并非继承自$\mathcal{C}$上的酉结构，且并未假设存在此类结构：对合 $\star$ 由引理 3.26中的自然对偶定义，而 $\langle , \rangle$的正性来自系数的整性 (a) 以及符号 $\nu_X = \pm 1$。对于 $\mathcal{C}$ 的伪酉性，我们只用到 $d_X > 0$。 ⌟

3.3. 从普通融合代数得到的代数同态。

定义 3.36. 对于 $Y \in \mathcal{C}$，令

$$b_Y := U_{Y,\mathrm{P}Y} \circ (\beta_Y \otimes id_{\mathrm{P}Y}) \colon Y \otimes \mathrm{P}Y \to \mathrm{P}(Y \otimes \mathrm{P}Y),$$

并且 $\mathrm{L}(Y) := [Y \otimes \mathrm{P}Y,\ b_Y] \in \mathfrak{M}$，即

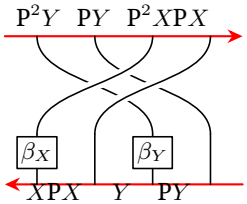
$\mathrm{L}(Y) =$ 

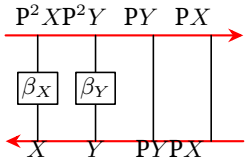
.

我们称 $\mathrm{L}(Y)$ 为一个边界环。将 L 线性扩张到 $\mathcal{C}$ 的融合代数 $\mathfrak{F}$ 上。 ⌟

命题 3.37. (a) $\mathrm{L}(X)\,\mathrm{L}(Y) = \mathrm{L}(X \otimes Y)$. (b) $\mathrm{L}(X \oplus Y) = \mathrm{L}(X) + \mathrm{L}(Y)$, $\mathrm{L}(\mathbf{1}) = M(1)$, and $\mathrm{L}(X) = \mathrm{L}(X')$ if $X \cong X'$. (c) $\mathrm{L}(X)$ commutes with every element of $\mathfrak{M}$. Consequently L: $\mathfrak{F} \to \mathfrak{M}$ is a 含幺代数同态 *with values in the center $Z(\mathfrak{M})$.*

证明。 (a) 我们有

$\mathrm{L}(X)\,\mathrm{L}(Y) \overset{\text{命题。 3.14}}{=}$ 

$\overset{\text{引理 3.9}}{=}$ 

$\overset{\text{引理}\ 3\,7}{=} \big[X \otimes Y \otimes \mathrm{P}(X \otimes Y)\ U_{X\otimes Y,\mathrm{P}(X\otimes Y)}\big(\mathrm{P}(U_{X,Y})\, U_{\mathrm{P}Y,\mathrm{P}X}(\beta_X \otimes \beta_Y) \otimes \text{恒等态射}\ \big)\big]$

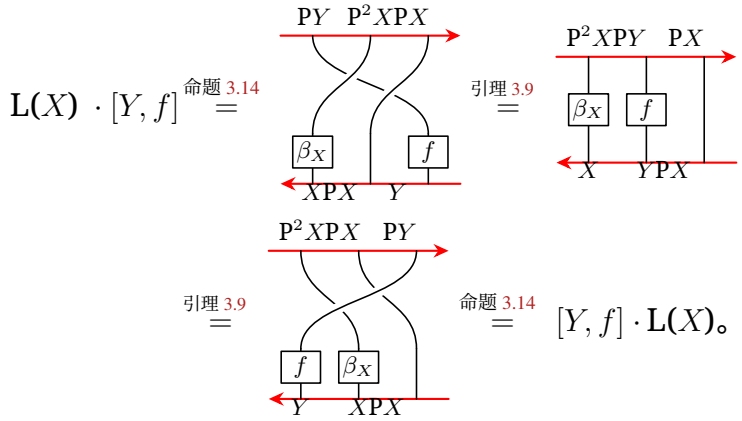
$\overset{(A4)}{=} \mathrm{L}(X \otimes Y)$<style 恒等态射='3'>.

(b) 将 $(X \oplus Y) \otimes \mathrm{P}(X \oplus Y)$ 分解为 $X \otimes \mathrm{P}X$、$Y \otimes \mathrm{P}Y$以及混合部分 $X \otimes \mathrm{P}Y \oplus Y \otimes \mathrm{P}X$。由自然性可知，$b_{X\oplus Y}$在前两个直和项上为 $b_X \oplus b_Y$，并交换两个混合直和项。根据命题 3.23 的张成论证，对于 Z 的任意分解，态射 $Z \to \mathrm{P}Z$ 的类等于其对角块的类之和；此处这些块为 b_X、b_Y 和零。因此 $\mathrm{L}(X \oplus Y) = \mathrm{L}(X) + \mathrm{L}(Y)$。接下来，

$$\mathrm{L}(\mathbf{1}) = [\mathbf{1} \otimes \mathrm{P}\mathbf{1}, b_{\mathbf{1}}] = [\mathbf{1}, \mathrm{P}(U_0)^{-1} b_{\mathbf{1}} U_0]$$

由引理 3.7，针对同构 U_0： $\mathbf{1} \to \mathrm{P}1$，以及 $b_1 U_0 = \beta_1 = \mathrm{P}(U_0)U_0$，后者由 (A2) 和 (A4) 得出；因此 $\mathrm{L}(1) = [\mathbf{1}, U_0] = \mathrm{M}(1)$。最后，对于同构 a： $X \to X'$，我们有 $b_{X'}(a \otimes \mathrm{P}(a)) = \mathrm{P}(a \otimes \mathrm{P}(a))\, b_X$，这是由 β 和 U 的自然性得出的，因此根据引理 3.7，$\mathrm{L}(X) = \mathrm{L}(X')$。

(c) 只需取 $u = [Y, f]$。图示如下：



其推论为：根据 (b)，L 在同构下不变、具有单位元且满足加法保持性；根据 (a)，满足乘法保持性；根据 (c)，是中心的。□

融合代数 $\mathfrak{F}$ 具有反线性对合 $*$，其中 $[Y]^* := [Y^\vee]$。

引理 3.38。同态 $\mathrm{L}\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{M}$ 保持对合：$\mathrm{L}(a^*) = \mathrm{L}(a)^\star$，其中 $a \in \mathfrak{F}$。特别地，$\mathrm{L}(Y)^\star = \mathrm{L}(Y^\vee)$，其中 $Y \in \mathcal{C}$。

证明。$\mathfrak{F}$ 上的厄米形式使得 $[Y]$、$Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 成为标准正交的，并且满足 $(ab, c) = (b, a^* c)$，如 $N_{XY}^Z = N_{X^\vee Z}^Y$ 所示。因此，如命题 3.34(e)的证明中所述，$(\mathfrak{F}, *)$ 是一个交换的有限维 C^*-代数，而 $\mathfrak{F}$ 由幂等元 e 张成，且 $e^* = e$。

根据命题 3.34(e)，$\mathfrak{M} \cong \bigoplus_V \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$；令 1_V 为求和项 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 的单位元。反对合 $\star$ 置换极小中心幂等元 1_V，并且 $1_V^\star 1_V \neq 0$ 由于 $\varepsilon(1_V^\star 1_V) > 0$；所以 $1_V^\star = 1_V$ 对每个 V 均成立。对于 $\mathfrak{F}$ 的幂等元 $e = e^*$，根据命题 3.37，$\mathrm{L}(e)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的中心幂等元，因此是某些 1_V 之和，于是 $\mathrm{L}(e)^\star = \mathrm{L}(e) = \mathrm{L}(e^*)$。由于该命题的两边关于 a 都是反线性的，因此对所有 $a \in \mathfrak{F}$ 均成立。□

4. 简单模的性质

4.1. 模张量范畴概论。从现在起，我们假设 $\mathcal{C}$ 不仅具有编织结构，而且是模的。就编织 $c_{X\text{而言},\,Y}$，未归一化和归一化的 S 矩阵为

$$s_{X,Y} := \mathrm{tr}\big(c_{Y,X} \circ c_{X,Y}\big), \qquad S_{X,Y} := D^{-1} s_{X,Y}.$$

S 是对称且酉的，$S_{\mathbf{1},\,X} = d_X/D$，且 $S_{X^\vee,\,Y} = S_{X,\,Y}$。[4]

[4]这些结论适用于任意实 d_X 的模张量范畴：由 Vafa 定理，扭结是单位根[Vaf88, AM88]（另见 [EGNO15, 推论 8.18.2]），因此 $s_{X,\,Y} = \text{迹}\big((c_{Y,\,X} c_{X,\,Y})^{-1}\big) = s_{X^\vee,\,Y}$，最后一个等式由对偶性得出；并且 S^2 是映射 $X \mapsto X^\vee$，所以 $S\,S =$ 恒等态射。

设 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathcal{C}$的融合代数。根据Verlinde公式，其特征为

$$\chi_Y([X]) := \frac{S_{X,Y}}{S_{\mathbf{1},Y}} \qquad (Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})),$$

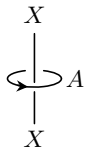
相应的本原幂等元为

$$e_X := S_{\mathbf{1},X} \sum_{A\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \overline{S_{A,X}}\,[A], \qquad \chi_Y(e_X) = \delta_{X,Y}. \tag{4.1}$$

定义 4.1. 令 $p_X = \mathrm{L}(e_X)$，由命题 3.37 和（4.1）可知，它们是 $\mathfrak{M}$ 中的正交中心幂等元，其中 $\sum_X p_X = \mathbf{M(1)}$。于是 $\mathfrak{M} = \bigoplus_{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} p_X\mathfrak{M}$ 作为代数。」

定义 4.2. 对于 $A \in$Irr($\mathcal{C}$)，令 $\ell_A \in$End(恒等态射 $_{\mathcal{C}}$) 为 A-环，$\ell_{A,\,X}$:=ptr$_A$($c_{X,\,A}c_{A,\,X}$)，即对 A 取 $c_{X,\,A}c_{A,\,X} \in$ End($A \otimes X$) 的偏迹。在图中，A- 线从左向右越过 X，再从 X 下方返回，并在左侧闭合：

$\ell_{A,X}$ =



更一般地，对每个 $E \in \mathcal{C}$，我们定义 $\ell_{E,\,X}$:= ptr$_E$($c_{X,\,E}c_{E,\,X}$)。」

环路 $\ell_{E,\,X}$ 关于 X 是自然的，因为编织也是如此。对于简单对象 Y，有 $\ell_{A,\,Y} = \lambda$ 恒等态射$_Y$，其中$\lambda\, d_Y =$ 迹($\ell_{A,\,Y}$) = 迹($c_{Y,\,A}c_{A,\,Y}$) = $s_{A,\,Y}$，而 $S_{\mathbf{1},\,Y} = d_Y/D$ 给出

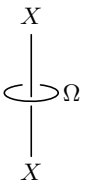
$$\ell_{A,Y} = \chi_Y([A])\, id_Y \qquad (Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})).$$

反转环路的定向会将 A 替换为 $A^\vee$。

定义 4.3. 设 $\Omega := \sum_{V\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_V\,[V] \in \mathfrak{F}$。图中标记为 Ω 的闭合线表示对 $V \in$ Irr($\mathcal{C}$) 求和，并以 d_V 加权；求和中的图是将这条线标记为 V 后得到的。」

注 4.4. Ω-线无需定向，因为反转一条 V-线的定向会将 V替换为 $V^\vee$，并且 $d_{V^\vee} = d_V$。因此 Ω- 环路绘制时不带箭头：

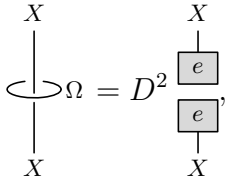
$$\ell_{\Omega,X} = \sum_{V\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_V\,\ell_{V,X} =$$



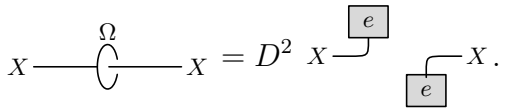
此外，由于 $V \mapsto \mathsf{P}V$对 Irr($\mathcal{C}$) 的作用是置换 $d_{\mathsf{P}V} = d_V$（推论 2.6），因此对 $V \in$ Irr($\mathcal{C}$)求和，d_V加权的、带有标记为 PV的线的图，等于将这条线标记为 Ω的图；特别是，Ω-线穿过 P-盒的壁时保持不变。」

下面是 Ω-环路的一个标准性质，为完整起见，我们给出证明。

引理 4.5. 设 $X \in \mathcal{C}$。一个Ω-环会切断其所环绕的线：



其中 e 是 $\mathrm{Hom}(X, \mathbf{1}) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, X)$ 的典范元。对于水平穿过环的线，结论同样成立：

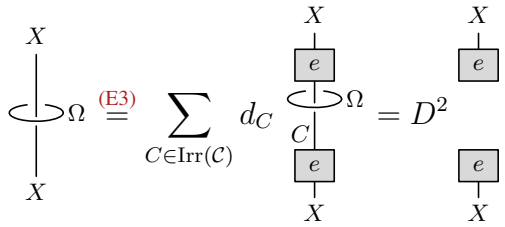


特别地 $\ell_{\Omega,\, C} = D^2\, \delta_{C,\, \mathbf{1}}$ 简单对象 $_C$ 的恒等态射适用于简单对象 C。

证明。 首先设 $X = C$是简单对象。由于 $\ell_{V,\, C} = \chi_C([V])$ 恒等态射 $_C$且 $d_V = D\, S_{\mathbf{1},\, V}$ ，

$$\ell_{\Omega,C} = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_V \, \frac{S_{V,C}}{S_{\mathbf{1},C}} \, id_C = \frac{D^2}{d_C} \sum_{V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} S_{\mathbf{1},V} S_{V,C} \, id_C = D^2 \, \delta_{C,\mathbf{1}} \, id_C,$$

因为 S 是对称的，且 S^2 是映射 $X \mapsto X^\vee$。对于一般的 X，



根据简单情形，因为只有 $C = \mathbf{1}$ 有贡献，且 $d_{\mathbf{1}} = 1$。第二幅图可由第一幅图经平面同痕得到：将环周围的图形部分旋转直角即可；这部分不包含标记片。□

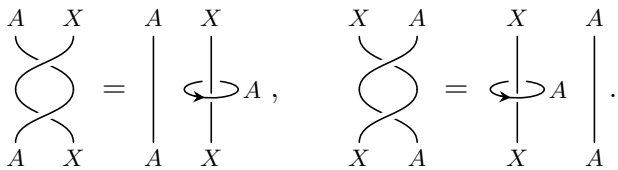
现在我们需要回顾 ℓ_A 对于可逆对象 A的性质。

定义 4.6。 令 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 表示可逆简单对象的集合，即满足 $A \otimes A^\vee \cong \mathbf{1}$ 的那些 A 。可逆对象的张量积是可逆的，因而是简单对象，并且$A \otimes B \cong B \otimes A$ 由编织得到；因此，可逆对象的同构类在张量积下构成一个有限阿贝尔群，其单位元为 $\mathbf{1}$ ，逆元为 $A \mapsto A^\vee$。我们将此群与 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 视为相同，从而 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 中的关系就是 $\mathcal{C}$ 中的同构。我们用 $\mathrm{Aut}_\otimes$(恒等态射$_{\mathcal{C}}$) 表示恒等函子的幺半自同构群，即满足 $\varphi_{X\otimes Y} = \varphi_X \otimes \varphi_Y$ 的 X 的自然自同构 φ_X 。 ⌟

引理 4.7。 令 A 为一个可逆对象，且 $X \in \mathcal{C}$。则 $d_A = 1$，并且 A 与 X 的单值化是 A-环在 X 上的作用：

$$c_{X,A}\, c_{A,X} = id_A \otimes \ell_{A,X}, \qquad c_{A,X}\, c_{X,A} = \ell_{A,X} \otimes id_A,$$

也就是说，



证明。由 $A \otimes A^\vee \cong \mathbf{1}$ 得到 $d_A^2 = 1$，因此 $d_A = 1$。由于 $A \otimes -$ 是一个等价， $f \mapsto \mathrm{id}_A \otimes f$ 是 $\mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(A \otimes X)$ 之间的双射，因此存在唯一的 $\varphi_X \in \mathrm{End}(X)$，使得 $c_{X,A} c_{A,X} = \mathrm{id}_A \otimes \varphi_X$ ；对 A 取偏迹可得 $\ell_{A,X} = d_A \varphi_X = \varphi_X$。用 $c_{X,A}$ 共轭，并利用编织的自然性，得到 $c_{A,X} c_{X,A} = c_X^{-1}$，$_A(\mathrm{id}_A \otimes \ell_{A,X})\, c_{X,A} = \ell_{A,X} \otimes \mathrm{id}_A$。□

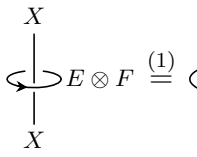
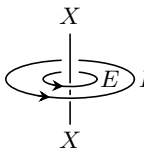
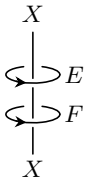
以下结论众所周知（例如参见 [DGNO09]和 [EGNO15，引理 8.22。9]）；为完整起见，我们给出证明。

命题 4.8. 对于 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，环 ℓ_A 是恒等态射 $id_{\mathcal{C}}$ 的幺半自同构，而 $A \mapsto \ell_A$是群同构 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(id_{\mathcal{C}})$。

*Pr*证明。 ℓ_A 是幺半的。设 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$。由六边形公理和引理 4.7，

$c_{X\otimes Y,A}\, c_{A,X\otimes Y} = (c_{X,A}\otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,A} c_{A,Y})(c_{A,X}\otimes \mathrm{id}_Y) = c_{X,A} c_{A,X} \otimes \ell_{A,Y} = \mathrm{id}_A \otimes \ell_{A,X} \otimes \ell_{A,Y}$，因此 $\ell_{A,X\otimes Y} = \ell_{A,X} \otimes \ell_{A,Y}$，由引理 4.7 可知，对 $X \otimes Y$，且 ℓ_A 是幺半的；它是自然的，因为编织具有自然性。

同态。对于 $E, F, X \in \mathcal{C}$,

$$\ell_{E\otimes F,X} =$$  $$\overset{(1)}{=}$$  $$\overset{\text{同痕}}{=}$$  $$= \ell_{E,X}\, \ell_{F,X},$$

其中，(1) 将线 $E \otimes F$ 画成两条平行线 E, F（交叉的六边形公理，以及 $E \otimes F$ 的嵌套帽与杯）。特别地，对于 A，$B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，$\ell_{A\otimes B} = \ell_A \ell_B$。由于环的标签替换为同构对象后不会改变，$A \mapsto \ell_A$ 是从 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 出发的同态。

单射性。若 $\ell_A = \ell_B$，则对所有 $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，$\chi_Y([A]) = \chi_Y([B])$，因为 $\ell_{A,Y} = \chi_Y([A])$ 恒等态射$_Y$。特征 χ_Y将 $\mathfrak{F}$ 的元素区分开来，因此 $[A] = [B]$。

满射性。令 $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\otimes}$(恒等态射$_{\mathcal{C}}$)。对于 $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，$\varphi_Y$是一个非零标量。若对于简单对象 X，Y，Z，则 $Z \subset X \otimes Y$，由 φ 和 $\varphi_{X\otimes Y} = \varphi_X \otimes \varphi_Y$ 的自然性可得。因此$[Y] \mapsto \varphi_Y d_Y$是 $\mathfrak{F}$ 的一个特征，所以存在 $A \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，使得

$$\varphi_Y\, d_Y = \chi_A([Y]) = \frac{s_{Y,A}}{d_A} \qquad (Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})).$$

我们证明 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$。由于 $\mathbf{1} \subset Y \otimes Y^\vee$，我们有 $\varphi_{Y^\vee} = \varphi_Y^{-1}$，而 $s_{Y^\vee,A} = s_{Y,A}$以及 $d_{Y^\vee} = d_Y$。因此 $\varphi_Y^{-1} = \overline{\varphi_Y}$，也就是说，$|\varphi_Y| = 1$，从而$|S_{Y,A}| = d_A d_Y / D$。$S$的酉性给出

$$1 = \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} |S_{Y,A}|^2 = \frac{d_A^2}{D^2} \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_Y^2 = d_A^2,$$

因此 $d_A = 1$。于是 $A \otimes A^\vee$ 包含 $\mathbf{1}$ 且维数为 $\mathbf{1}$；由于所有维数均为正，$A \otimes A^\vee \cong \mathbf{1}$，也就是说 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$。最后 $\varphi_Y = s_{Y,A}/d_Y = \chi_Y([A])$，这是 $\ell_{A,Y}$的标量。由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，$\varphi = \ell_A$。□

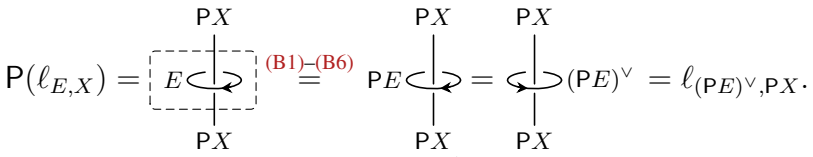
4.2. 模张量范畴与反幺半对合。

引理 4.9。 对于 E、$X \in \mathcal{C}$，X 上 E-环的盒是 $(\mathsf{P}E)^\vee$-环在 $\mathsf{P}X$上的盒：

$$\mathsf{P}(\ell_{E,X}) = \ell_{(\mathsf{P}E)^\vee, \mathsf{P}X}.$$

特别地，$\mathsf{P}(\ell_{A,X}) = \ell_A^{-1}{}_{,\,\mathsf{P}X}$ 对 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 成立，其中 $\mathsf{P}A \cong A$。

证明。

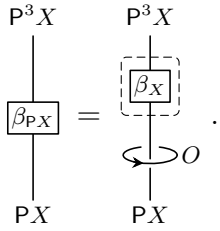


对于 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 满足$\mathsf{P}A \cong A$, $\ell_{(\mathsf{P}A)^\vee} = \ell_{A^\vee} = \ell_A^{-1}$ 由命题 4.8可得。 □

命题 4.10。 存在唯一的 $O \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，即 β 的相干性障碍，满足

$$\beta_{\mathsf{P}X} = \mathsf{P}(\beta_X) \circ \ell_{O,\mathsf{P}X} \qquad (X \in \mathcal{C}), \tag{4.2}$$

也就是说，



证明。由 (A4) 且由于 (P U) 是反幺半的， $\beta_{\mathsf{P}X}$ 和 P(β_X) 是幺半自然同构 P $\Rightarrow \mathsf{P}^3$,，因此，由于 P 是一个等价，$\mathsf{P}(\beta_X)^{-1}\beta_{\mathsf{P}X} = \varphi_{\mathsf{P}X}$ 对于唯一的 $\varphi \in \mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_\mathcal{C})$ 成立；根据命题 4.8，对于唯一的 $O \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，它就是 ℓ_O。□

定义 4.11。 如果反幺半对合 (P U, β) 满足一个进一步的条件，我们就称其为 $\mathcal{C}$ 相干

$$\beta_{\mathsf{P}X} = \mathsf{P}(\beta_X), \tag{Coh}$$

也就是说，其相干性障碍为 $O = \mathbf{1}$。 ⌟

对象 O是 $\mathfrak{O}(\mathbf{g},\mathbf{g},\mathbf{g})$ 中任意子 [BBCW14, (105)] 的对应物，其中 $\mathbb{Z}/2$的生成元为 O，因此得名。

命题 4.12. 设 O 为 β *(命题 4.10)* 的相干性障碍。

(a) $\mathsf{P}O \cong O$。*(b)* 幺半自然同构 $\beta' : id_\mathcal{C} \Rightarrow \mathsf{P}^2$ 是 $B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$中的 $\beta \circ \ell_B$，且 $\beta \circ \ell_B$ 的相干性障碍为 $O \otimes B \otimes \mathsf{P}B$。*(c)* 将 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 视为一个 $\mathbb{Z}/2$-模，生成元通过 $A \mapsto (\mathsf{P}A)^\vee$ 作用。O 在

$$\{A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}) \mid \mathsf{P}A \cong A\} \big/ \{B \otimes \mathsf{P}B \mid B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})\} \cong H^3(\mathbb{Z}/2, \mathrm{Inv}(\mathcal{C}))$$

是 (P U)的障碍类：它仅取决于 (P U)，并且当且仅当β 可以选为相干时，它才消失。

证明。 我们利用 $\mathsf{P}(\ell_{A,\ X}) = \ell_{(\mathsf{P}A)^\vee,\ \mathsf{P}X}$ (引理 4.9)。

(a) β关于态射 $\beta_X\colon\ X \to \mathsf{P}^2X$ 的自然性给出 $\beta_{\mathsf{P}^2X}\beta_X = \mathsf{P}^2(\beta_X)\beta_X$，因此$\beta_{\mathsf{P}^2X} = \mathsf{P}^2(\beta_X)$。将 P 应用于 (4.2)，并对 4.2 使用 (PX,

$$\ell_{(\mathsf{P}O)^\vee,\mathsf{P}^2X} = \mathsf{P}^2(\beta_X)^{-1}\,\mathsf{P}(\beta_{\mathsf{P}X}) = \beta_{\mathsf{P}^2X}^{-1}\,\mathsf{P}(\beta_{\mathsf{P}X}) = \ell_{O,\mathsf{P}^2X}^{-1} = \ell_{O^\vee,\mathsf{P}^2X}.$$

由于P^2 本质满射， $\ell_{(\mathsf{P}O)^\vee} = \ell_{O^\vee}$，并且$\mathsf{P}O \cong O$ 根据命题4.8。

(b) 如果 β' 是一个幺半群自然同构恒等态射 $_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathsf{P}^2$,，那么 $\beta^{-1}\circ\beta' \in \mathrm{Aut}_{\otimes}$(恒等态射$_{\mathcal{C}}$)是 ℓ_B唯一的 $B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，根据命题4.8；反之，每个 $\beta\circ\ell_B$ 都是幺半的。对于 $\beta' = \beta\circ\ell_B$，由于 ℓ_A 彼此交换，

$$\mathsf{P}(\beta'_X)^{-1}\beta'_{\mathsf{P}X} = \mathsf{P}(\ell_{B,X})^{-1}\,\mathsf{P}(\beta_X)^{-1}\beta_{\mathsf{P}X}\,\ell_{B,\mathsf{P}X} = \ell_{\mathsf{P}B,\mathsf{P}X}\,\ell_{O,\mathsf{P}X}\,\ell_{B,\mathsf{P}X} = \ell_{O\otimes B\otimes \mathsf{P}B,\mathsf{P}X}.$$

(c) 对于由 g 生成且范数为 $N = 1+g$ 的循环群， $H^3(\mathbb{Z}/2, \mathrm{Inv}(\mathcal{C})) = \mathrm{Ker}\,N/\,\mathrm{Im}(1-g)$；采用 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 的乘法记号， $N(A) = A\otimes(\mathsf{P}A)^\vee$ 且 $(1-g)(B) = B\otimes \mathsf{P}B$，这给出了所示的同构。由 (a)， O 属于分子；由 (b)，其类不依赖于 β。若该类为零，则对于某个 $B\in\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$，有 $O\cong B\otimes\mathsf{P}B$，于是 $\beta\circ\ell_{B^\vee}$ 的相干性障碍为 $O\otimes B^\vee\otimes\mathsf{P}(B^\vee)\cong \mathbf{1}$，因为根据 (B5)，P 保持对偶；因此，根据定义 4.11， $\beta\circ\ell_{B^\vee}$ 是相干的。反过来，若某个 β' 是相干的，其相干性障碍为 1，故该类为零。□

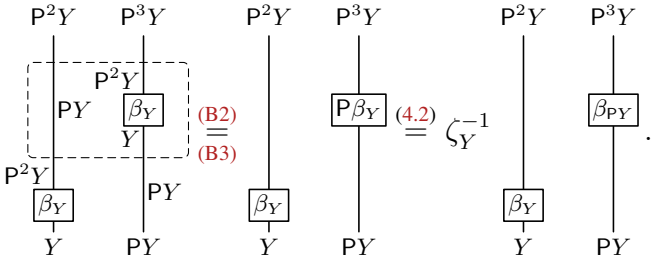
注 4.13。 在附录 A 中，我们给出一种明确的方法，从骨架模型的 $\mathcal{C}$ -符号和 F-符号出发，为给定的、具有无重数融合规则的R构造反幺半对合；如果不存在，也能证明其不存在。该骨架模型属于 $\mathcal{C}$。 」

引理 *4.14*。设 $Y\in$ *Irr(*$\mathcal{C}$*)* 且 $X\in$ *Fix(P)*，令 $Z := Y\otimes PY$，并设 $\zeta_Y := \chi_{\mathsf{P}Y}([O])$，使得 $\ell_{O,\mathsf{P}Y} = \zeta_Y id_{\mathsf{P}Y}$。定义 *3.29* 中引入的 *Hom(X, Z)* 的线性映射 R_{ξ_X,b_Y}: $\Phi\mapsto b_Y^{-1}$ *P(*Φ*)* ξ_X 满足

$$R^2_{\xi_X,b_Y} = \zeta_Y, \qquad \mathrm{Tr}(R_{\xi_X,b_Y}) = \varepsilon\big(\mathrm{M}(X)\,\mathrm{L}(Y^\vee)\big).$$

这里 ζ_Y 是一个单位根。当 β 相干时， $\zeta_Y = 1$，因此 $R_{\xi_X,\ b_Y}$ 是一个对合，其迹为整数。

证明。令 $b := b_Y, \xi := \xi_X$ 且 $R := R_{\xi_X,b_Y}$。 R的平方。我们先证明 $\mathsf{P}(b)\,b = \zeta_Y^{-1}\,\beta_Z$。有 $b_Y = U_{Y,\mathsf{P}Y}\hat{}\,b_Y$，其中 $\hat{}\,b_Y := \beta_Y\otimes\mathrm{id}_{\mathsf{P}Y}$。根据注 3.16 的论证，只需证明 $\hat{}\,b_Y$后接其盒等于 $\zeta_Y^{-1}\,\beta_Y\otimes\beta_{\mathsf{P}Y}$:



因此，根据 3.1) 对于 ξ 以及 β的自然性，

$$R^2(\Phi) = b^{-1}\mathsf{P}(b)^{-1}\mathsf{P}^2(\Phi)\,\mathsf{P}(\xi)\,\xi = (\mathsf{P}(b)\,b)^{-1}\mathsf{P}^2(\Phi)\,\beta_X = (\mathsf{P}(b)\,b)^{-1}\beta_Z\,\Phi = \zeta_Y\,\Phi.$$

由于 O 在 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 中具有有限阶，且 $A\mapsto\ell_A$ 是一个同态（命题 4.8）， ζ_Y是单位根；并且当 β 相干时， $\zeta_Y = 1$ （定义 4.11）。因此， R的特征值的平方为 ζ_Y，故其模为一；并且 $\mathrm{Tr}(R^{-1}) = \mathrm{Tr}(R)$。

R的迹。由命题 3.23， $\mathrm{M}(X)$ 在 $\mathrm{L}(Y) = [Z,b]$ 中的系数是定义 3.21 的闭合 $\mathrm{Tr}_X(Z,b)$。将 $\mathrm{Hom}(X, Z)\otimes\mathrm{Hom}(Z,X)$ 的典范元记为$\sum_i f_i\otimes g^i$。那么 $\mathrm{Tr}_X(Z,b) = \sum_i \mathrm{tr}(\xi^{-1}\mathsf{P}(g^i)\,b\,f_i)$。由于 $b\,f = \mathsf{P}(R^{-1}f)\,\xi$且 $g^iR^{-1}f_i\in$

$\mathrm{End}(X) = \mathbb{C}$恒等态射 $_X$，这是 $\sum_i \mathrm{tr}(g^i R^{-1} f_i) = \mathrm{Tr}(R^{-1})$根据 (E2)。另一方面，这个系数是 $\varepsilon(\mathrm{M}(X)^\star \mathrm{L}(Y))$，并且 $\varepsilon(\cancel{u^\star}) = \varepsilon(u)$ (命题 3.34(d))。所以

$$\mathrm{Tr}(R) = \overline{\varepsilon\big(\mathrm{M}(X)^\star\, \mathrm{L}(Y)\big)} = \varepsilon\big(\mathrm{L}(Y)^\star\, \mathrm{M}(X)\big) = \varepsilon\big(\mathrm{M}(X)\, \mathrm{L}(Y^\vee)\big),$$

作为 $\mathrm{L}(Y)^\star = \mathrm{L}(Y^\vee)$ 是中心的（引理 3.38，命题 3.37）。 □

定义 4.15. 我们定义

$$\mathrm{Fix}(\mathsf{T}) := \{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}) \mid X \cong (\mathsf{P}X)^\vee\}.$$ ⌟

注 4.16。 记号 Fix(T) 的由来是：Fix(T) 是 Irr($\mathcal{C}$) 中在反变幺半函子 $\mathsf{T} := \mathsf{P} \circ (-)^\vee$ 作用下（在同构意义下）保持不变的子集。对于幺正的 $\mathcal{C}$，与伴随复合后，T 成为协变反线性幺半函子，也就是物理学中的时间反演。本文其余部分不需要用到 T，读者可以将 Fix(T) 看作一个单独的符号。 ⌟

定义 4.17. 对于 $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 我们记作 $\eta_Y := \varepsilon(\mathrm{L}(Y^\vee))$。 ⌟

命题 4.18. 设 $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$。

(a) 若 $Y \notin$ 不动点集(T)，则 $\eta_Y = 0$。*(b)* 若 $Y \in$ 不动点集(T)，则 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, Y \otimes \mathsf{P}Y)$ 是一维空间，并且

$$\eta_Y = \mathrm{Tr}(R_{U_0, b_Y})$$

对于引理 *4.14* 中该一维空间上的映射 R_{U_0,b_Y}；它是一个单位根。当 β 相干时，R_{U_0,b_Y} 是一个对合，并且 $\eta_Y = \pm 1$。

(c) 若 $Y \in$ 不动点集(T)，则 $\eta_{Y^\vee} = \overline{\eta_Y} = \eta_Y^{-1}$ 并且

$$\eta_{Y^\vee} = \chi_Y([O])\, \eta_Y.$$

当 β 相干时，$\eta_{Y^\vee} = \eta_Y$。

证明。由于 M(1) 是 $\mathfrak{M}$ 和 $\xi_1 = U_0$的单位元，对于 $X = \mathbf{1}$，引理 4.14 给出 $\eta_Y = \varepsilon(\mathrm{L}(Y^\vee)) = \mathrm{Tr}(R_{U_0,b_Y})$，其中 R_{U_0,b_Y}作用于 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, Y \otimes \mathsf{P}Y) \cong \mathrm{Hom}(Y^\vee, \mathsf{P}Y)$ 上。由于 $\varepsilon(u^\star) = \overline{\varepsilon(u)}$（命题 3.34(d)），引理 3.38 给出 $\eta_{Y^\vee} = \varepsilon(\mathrm{L}(Y^\vee)^\star) = \eta_Y$。

(a) 除非 $\mathsf{P}Y \cong Y^\vee$，也就是说，除非 $Y \in$ Fix(T)，否则该空间为零。

(b) 否则，该空间是一维空间，$R_{U_0,\, b_Y}$在其上以标量 ρ 作用，其中 $\rho^2 = \zeta_Y$是一个单位根（引理 4.14）；因此 $\eta_Y = \rho$ 是一个单位根。当 β 相干时，$\zeta_Y = 1$，因此 $\eta_Y = \rho = \pm 1$。

(c) 我们已经看到$\overline{\eta_{Y^\vee}} = \eta_Y = \eta_Y^{-1}$。因此 $\eta_{Y^\vee}/\overline{\eta_Y} = \eta_Y^{-2} = \zeta_Y = \chi_Y([O])$，后者是因为 $\mathsf{P}Y \cong Y^\vee$。当β 相干时，$\eta_Y = \pm 1$是实数。□

定义 4.19. 我们定义 M_X 对于 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 为

$$M_X := \sum_{Y \in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})} S_{X,Y}\, \eta_Y.$$ ⌟

4.3. **的结构** $\mathfrak{M}$。 本节的目标是证明以下定理，该定理在引言中被表述为定理 1.2：

定理 4.20。 *(a)* $\mathfrak{M}$的中心是$\mathrm{L}(\mathfrak{F})$。

(b) 对于每个 $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 且满足 $p_X \neq 0$，代数 $p_X\mathfrak{M}$ 是简单对象，

$$p_X\mathfrak{M} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_X),$$

其中 V_X 是一个不可约的 $\mathfrak{M}$-模；若 $p_X = 0$，则记作 $V_X := 0$。此外，每个不可约的 $\mathfrak{M}$-模都以这种方式唯一地对应于某个 X。

(c) 我们有

$$\dim V_X = M_X.$$

特别地，定义 *4.19*中的数 M_X 都是非负整数，并且 $\mathfrak{M} \cong \bigoplus_{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$ 矩阵代数$M_X(\mathbb{C})$。

本节其余部分将用于证明这一结论。核心思路是构造一个平均算子 $\Xi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$，其像为中心 $Z(\mathfrak{M})$，并通过对图示进行操作，证明 $\Xi(\mathfrak{M})$ 包含于 $\mathrm{L}(\mathfrak{F})$。由于我们已经知道 $\mathrm{L}(\mathfrak{F}) \subset Z(\mathfrak{M})$，便得到定理 4.20(a)，进而可推出 (b)。对于 $u = \mathrm{M}(1)$，同样的计算给出关系 $\sum_X \mathrm{M}(X)^\star\mathrm{M}(X) = \sum_Y \eta_Y\mathrm{L}(Y)$；由此，通过以两种方式计算 $\mathfrak{M}$ 中各块的维数，即可推出定理 4.20(c)。

令 u s 实现这一思路。我们先在 $\mathfrak{M}$ 上构造一个平均算子 Ξ .

定义 4.21. 令 Ξ: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ 为线性映射

$$\Xi(u) := \sum_{X\in\mathrm{Fix(P)}} \mathrm{M}(X)^\star\, u\, \mathrm{M}(X) \qquad (u \in \mathfrak{M}).$$ ⌟

令 V 遍历至同构为止的不可约 $\mathfrak{M}$-模，令 1_V 为 $\mathfrak{M} \cong \bigoplus_V \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 的求和项 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 的单位元，并令 $\mu_V > 0$ 为满足 $\varepsilon = \sum_V \mu_V \mathrm{Tr}_V$ 的数。于是有：

引理 4.22. $\Xi(u) = \sum_V$迹$_V(u)$ 1_V对所有 $u \in \mathfrak{M}$ 均成立。因此 $\Xi(\mathfrak{M})$ $= Z(\mathfrak{M})$。

证明。 由命题 3.34(d)， $\varepsilon(\mathrm{M}(X)^\star\mathrm{M}(X')) = \delta_{X,\,X'}$；因此，对于 $\mathfrak{M}$ 的任意基 $\{b_i\}$、 $\{b^i\}$，只要满足 $\varepsilon(b^i b_j) = \delta_{ij}$，就有 $\Xi(u) = \sum_i b^i\, u\, b_i$。取 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 的矩阵单位 E^V_{ij}。于是 $\{E^V_{ij}\}$ 和 $\{E^V_{ji}/\mu_V\}$ 是这样的基，因为 $\varepsilon(E^V_{ji}E^W_{kl}) = \delta_{V,\,W}\delta_{ik}\delta_{jl}\mu_V$，并且

$$\Xi(u) = \sum_V \frac{1}{\mu_V} \sum_{i,j} E^V_{ji}\, u\, E^V_{ij} = \sum_V \frac{\mathrm{Tr}_V(u)}{\mu_V}\, 1_V,$$

因为 $E^V_{ji}\, u\, E^V_{ij} = u^V_{ii}E^V_{jj}$，其中 (u^V_{kl}) 是 u 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 中的分量。1_V 构成 $Z(\mathfrak{M})$ 的一组基，并且 $\Xi(1_V) =$(维数 V/μ_V) 1_V，因此 Ξ 的像是 $Z(\mathfrak{M})$。□

我们的中心陈述是以下命题，它将 $\Xi(\mathrm{M}(X))$ 改写为 $\mathrm{L}(Y)$ 的显式线性组合：

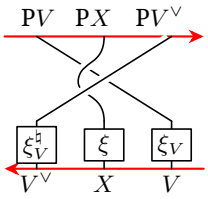
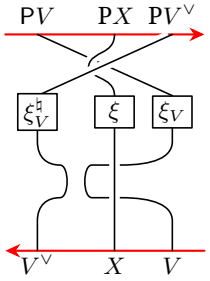
命题 4.23。对于 $X \in$ 不动点集(P),

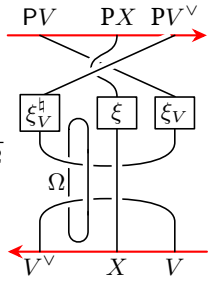
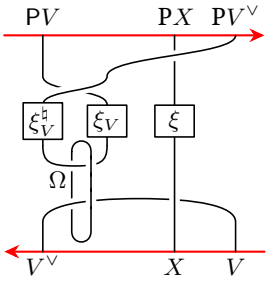
$$\Xi(\mathrm{M}(X)) = \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \varepsilon\big(\mathrm{M}(X)\,\mathrm{L}(Y^\vee)\big)\,\mathrm{L}(Y).$$

注 4.24. 下文的证明是一长串初等的图示变换，但读者或许会想知道，为什么一开始就预期这样的陈述成立。这里我们给出一个简要说明；对于熟悉模张量范畴及其等变化一般理论的读者而言，这种说明更具概念性；觉得图示证明已经足够的读者可以跳过本注。假设 β 是相干的。如注 3.17 所述，我们的莫比乌斯融合代数$\mathfrak{M}$ 可以通过考察 $\mathcal{D}$ 的融合代数得到：$= \mathcal{C}^{\mathbb{Z}/2}$，即由注 3.17 中的 (P J) 给出的 $\mathcal{C}$ 上的幺半（而非反幺半）$\mathbb{Z}/2$-作用所产生的等变化，并限制到等变对象 $(\mathbf{1}, -U_0)$ 以 -1作用的子空间上。一般而言，融合范畴 $\mathcal{D}$ 的融合代数的中心已知由其 Drinfeld 中心 $Z(\mathcal{D})$决定，其中$\mathcal{D}$，而此情形下的平均映射 Ξ 已知由 $F \circ I$给出，其中 F 是从 $Z(\mathcal{D})$到 $\mathcal{D}$ 的遗忘函子，而 I 是它的伴随函子。事实上，$F(I(X)) \simeq \bigoplus_{V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{D})} V^\vee \otimes X \otimes V$。当$\mathcal{D} = \mathcal{C}^{\mathbb{Z}/2}$时，Drinfeld 中心 $Z(\mathcal{D})$可以按照 [GNN09]的思路显式计算。综合以上各点并补全细节，这个论证应当能提供另一种证明，至少在β 相干时如此。本文作者在下文的证明中选择使用图示序列，因为这种方法更初等，而且不需要假设 β 相干。」

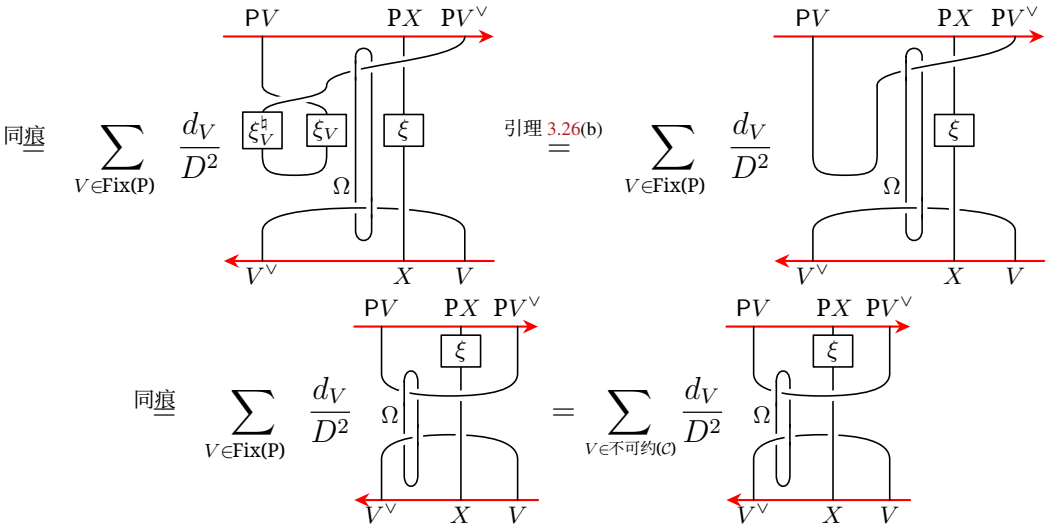
证明 [5] 命题 *4.23*。 设 $\xi := \xi_X$，使得 $\mathrm{M}(X) = [X, \xi]$。

步骤 *1*。 我们首先进行以下变换。

$\Xi([X,\xi])$ $\overset{\text{定义 4.21}}{\underset{\text{命题 3.34(c)}}{=}}$ $\sum_{V \in \mathrm{Fix(P)}}$  $=$ $\sum_{V \in \mathrm{Fix(P)}}$ 

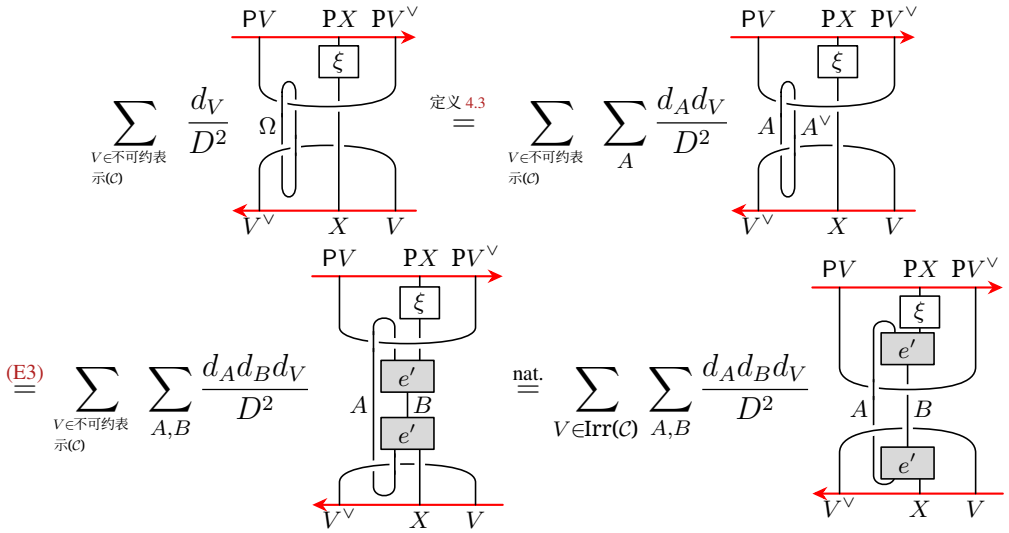
$\overset{\text{引理 4.5}}{=}$ $\sum_{V \in \mathrm{Fix(P)}} \frac{d_V}{D^2}$  $=$ $\sum_{V \in \mathrm{Fix(P)}} \frac{d_V}{D^2}$ 

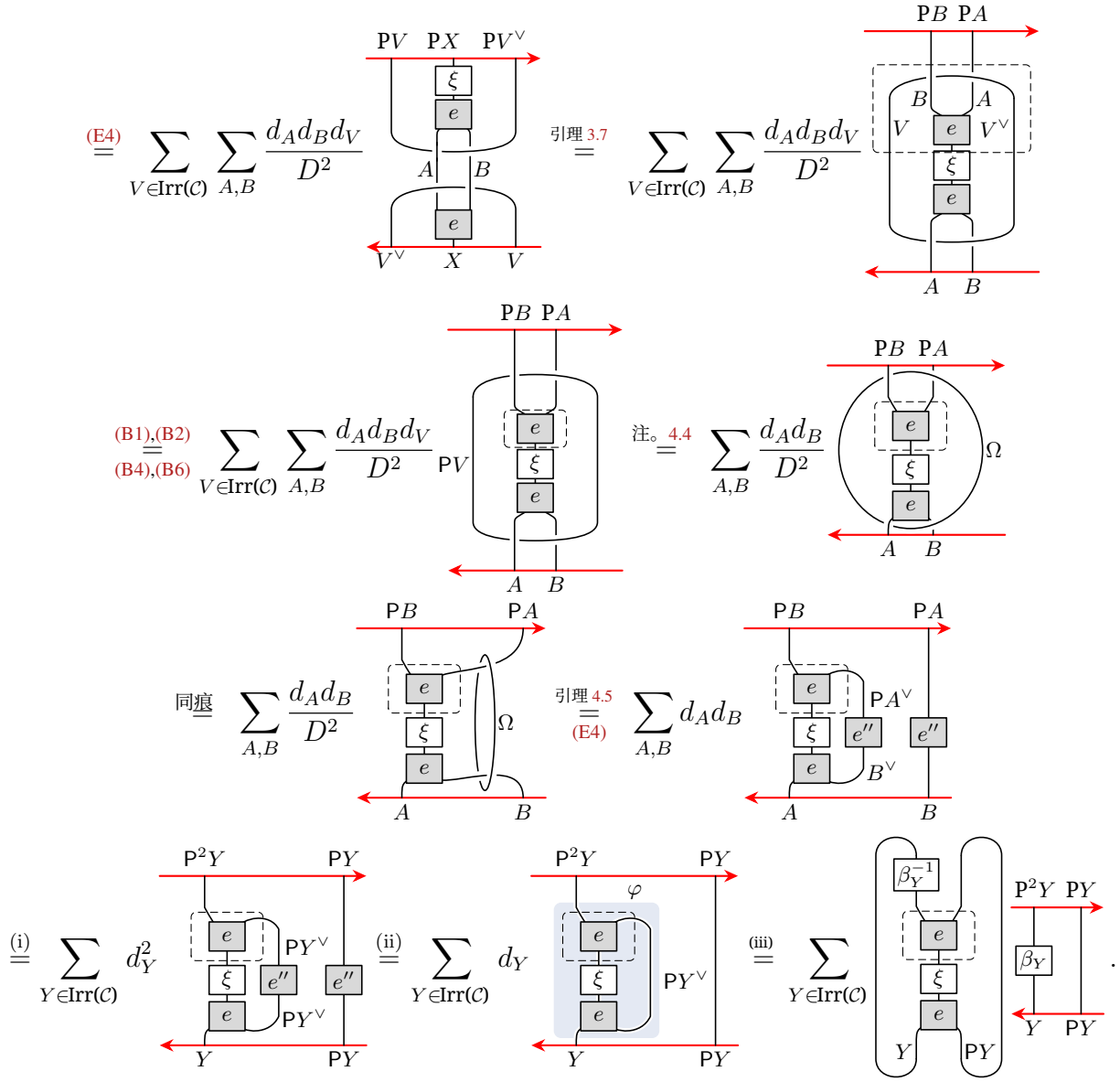
[5]动画版 该证明的动画https://ippo0127.github.io/movies/mobius_prop4_23.htm



最后一步中，求和范围从 不动点集(P) 扩展到 不可约表示集($\mathcal{C}$)，因为对于 $V \notin$ 不动点集(P) 图形会消失：穿过 Ω-环的两条线分别是帽的线 V 和杯的腿$\mathrm{P}V^\vee$，根据引理 4.5，该环会将它们消去为零，因为 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, V^\vee \otimes \mathrm{P}V) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{P}V) = 0$。

步骤 2。下面，我们对着色券片使用以下典范元：对于 $(A, B) \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})^2$，令 e为 Hom$(X, A\otimes B) \otimes$Hom$(A\otimes B, X)$ 中的典范元，e'为 Hom$(A^\vee\otimes X, B)\otimes$Hom$(B, A^\vee \otimes X)$ 中的典范元，以及 e''为 Hom$(B, \mathrm{P}A) \otimes$Hom$(\mathrm{P}A, B)$ 中的典范元。Hom$(\mathrm{P}A, B)$ 中的 e'' 的末端将位于一条向下延伸的线上，在图中将其画为转置 $B^\vee \to \mathrm{P}A^\vee$，见（2.1）。然后





最后三个等式的解释如下：

(i) 左侧 (i) 的右线是一个态射 $B \to \mathrm{P}A$，因此除非 $B \cong \mathrm{P}A$，否则该求和项为零。对于这样的对，令 $Y := A$，并可取 $B = \mathrm{P}Y$；于是 $d_A d_B = d_Y^2$。

(ii) 由于 $\mathrm{End}(\mathrm{P}Y)$ 由 $id_{\mathrm{P}Y}$ 张成，且 $\mathrm{tr}(id_{\mathrm{P}Y}) = d_{\mathrm{P}Y} = d_Y$（推论 2.6），我们有 $e'' = d_Y^{-1} id_{\mathrm{P}Y} \otimes id_{\mathrm{P}Y}$（定义 2.1）。因此，两个券片 e'' 消失，并带有因子 d_Y^{-1}。

(iii) 左侧 (iii) 的阴影部分是一个态射 $\varphi\colon Y \to \mathrm{P}^2 Y$；由于 Y 是简单对象，$\varphi = z\,\beta_Y$ 对于某个标量 z。因此，左侧的图形为 $[Y \otimes \mathrm{P}Y,\ U_Y,\ {}_{\mathrm{P}Y}(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{P}Y})] = z\mathrm{L}(Y)$（定义 3.36），所以该求和项为 $z\,d_Y \mathrm{L}(Y)$。在右侧，$\mathrm{L}(Y)$ 的系数是将 φ 与 β_Y^{-1} 复合并闭合所得的结果，即 $z\,d_Y$。这证明了等式 (iii)。

步骤 3。现在只需计算 $\mathrm{L}(Y)$ 的系数。不动点集 $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$。由于 $b_Y^{-1} = (\beta_Y \otimes$恒等态射$)^{-1} U_Y^{-1}{}_{,\,\mathrm{P}Y}$（定义 3.36），引理 4.14 中的映射 $R_{\xi,\ b_Y}$ 是 $R_{\xi,\ b_Y}(\Phi) = (\beta_Y \otimes$恒等态射$)^{-1} \langle \Phi \rangle_{\mathrm{P}} \xi$

对于 $\Phi \in \mathrm{Hom}(X,\ Y \otimes \mathsf{P}Y)$，因此根据 (E2) 步骤 2 末尾的闭合图为 迹$(R_{\xi,\ b_Y})$。由于迹$(R_{\xi,\ b_Y}) = \varepsilon(\mathrm{M}(X)\mathrm{L}(Y^\vee))$ 根据引理 4.14，这就证明了该命题。□

推论 4.25。

$$\Xi(\mathrm{M}(\mathbf{1})) = \sum_{X\in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})} \mathrm{M}(X)^\star \mathrm{M}(X) = \sum_{Y\in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})} \eta_Y\, \mathrm{L}(Y).$$

证明。 取 $X = \mathbf{1}$ 在命题 4.23中： $\mathrm{M}(\mathbf{1})$ 是单位元，而 $\varepsilon(\mathrm{L}(Y^\vee)) = \eta_Y$(定义 4.17)，对于 0 而言 $Y \notin \mathrm{Fix}(\mathsf{T})$ (命题4.18(a))。□

现在我们可以证明定理 4.20。我们还需要最后一个引理。

引理 4.26。 我们有 $\varepsilon(p_X) = S_{\mathbf{1},X}\, M_X$。

证明。 由于 $p_X = \mathrm{L}(e_X)$ 且 L 是线性的，(4.1) 和命题 4.18 可得

$$\varepsilon(p_X) = S_{\mathbf{1},X} \sum_{A\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \overline{S_{A,X}}\, \varepsilon(\mathrm{L}(A)) = S_{\mathbf{1},X} \sum_{A\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} S_{A^\vee,X}\, \eta_{A^\vee} = S_{\mathbf{1},X}\, M_X,$$

使用$\overline{S_{A,\ X}} = S_{A^\vee,\ X}$ 以及定义 4.17，并在最后一步中使用重新索引 $A \mapsto A^\vee$、S的对称性，以及命题 4.18(a)。□

定理 4.20 的证明。(a) 由命题 3.37，$\mathrm{L}(\mathfrak{F}) \subset Z(\mathfrak{M})$。反过来，由引理 4.22，$Z(\mathfrak{M}) = \Xi(\mathfrak{M})$；并且由命题 4.23，对每个 $X \in \mathsf{Fix}(\mathsf{P})$，$\Xi(\mathrm{M}(X)) \in \mathrm{L}(\mathfrak{F})$；由于 $\mathrm{M}(X)$ 张成 $\mathfrak{M}$，可得 $\Xi(\mathfrak{M}) \subset \mathrm{L}(\mathfrak{F})$。

(b) 由 (a) 和命题 3.37，非零的 p_X张成 $\mathrm{L}(\mathfrak{F})$，构成 $Z(\mathfrak{M}) = \bigoplus_V \mathbb{C}1_V$的一组由正交幂等元组成的基。这样的基是 $\{1_V\}$：每个 p_X 都是若干个1_V之和，这些集合互不相交，并且 p_X的数量与 1_V相同。我们将 V_X 记为满足 V的 $p_X = 1_V$；于是 $p_X\mathfrak{M} = 1_{V_X}\mathfrak{M} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_X)$。

(c) 若 $p_X = 0$，则 $M_X = 0$ 由引理 4.26得出。否则 $p_X = 1_{V_X}$ 由 (b) 得出；令 $\mu := \mu_{V_X}$。将引理 4.22 （针对 $u = \mathrm{M}(\mathbf{1})$）和推论 4.25 乘以 p_X，

$$\frac{\dim V_X}{\mu}\, p_X \overset{(1)}{=} \Xi(\mathrm{M}(\mathbf{1}))\, p_X \overset{(2)}{=} \sum_{Y\in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})} \eta_Y\, \mathrm{L}(Y)\, p_X \overset{(3)}{=} \frac{M_X}{S_{\mathbf{1},X}}\, p_X.$$

(1) 引理4.22 （针对 $u = \mathrm{M}(\mathbf{1})$）。

(2) 推论 4.25。

(3) $\mathrm{L}(Y)\ p_X = \chi_X([Y])\ p_X$其中 $\chi_X([Y]) = S_{Y,\ X}/S_{\mathbf{1},\ X}$，由命题 3.37和 (4.1) 得出；于是 $S_{Y,\ X} = S_{X,\ Y}$以及 M_X 的定义。

此外 $\mu\dim V_X = \varepsilon(p_X) = S_{\mathbf{1},\ X}M_X$由命题 3.34(e) 和引理 4.26。将这两个恒等式相乘，得到 $(\dim V_X)^2 = M_X^2$，而且 $M_X > 0$由第一个式子可得，因此 $\dim V_X = M_X$。□

5. $\mathfrak{M}$ 上的双模与扭结

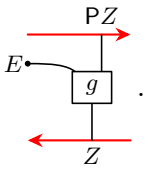
本节为每个对象 E 赋予一个 $\mathfrak{M}$-双模 $\mathfrak{H}_E$。令 $\Sigma := \{X \in \mathsf{Irr}(\mathcal{C}) \mid V_X \neq 0\}$，其中 V_X 是定理 4.20 中的不可约 $\mathfrak{M}$-模。在第 5.1 和 5.2 节中，我们确定它的结构、$\mathfrak{H}_E \cong \bigoplus_{X,\ X'\in\Sigma}(V_X \otimes V_{X'}^*)^{\oplus N_{EX'}^X}$；在第 5.3 节中，我们利用它将所有带有 $V_X \neq 0$ 的 X 上的扭结 θ_X与中心元 $\mathrm{M}(O)$ 联系起来；当 β 相干时，θ_X 是一个与此类 X无关的符号。

5.1. **双模** $\mathfrak{H}_E$。

定义 5.1. 对于 $E \in \mathcal{C}$ 令 $\mathfrak{H}_E$ 为 $\bigoplus_{Z\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(Z, E \otimes \mathsf{P}Z)$ 关于定义 3.4中的关系 **(R1)**（直和）和 **(R2)**（余不变性）取商所得的商空间，其中后者写作

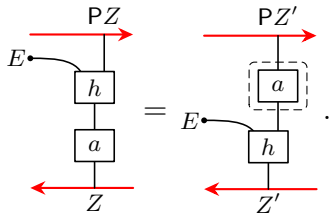
$$[Z, (id_E \otimes \mathsf{P}(a))g] = [Z, g \circ a], \quad a \in \mathrm{End}(Z).$$

因此 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}$。我们将 $[Z, g]$ 画作 g，其中线 E 从莫比乌斯带的左侧伸出：

$[Z,g] =$ 

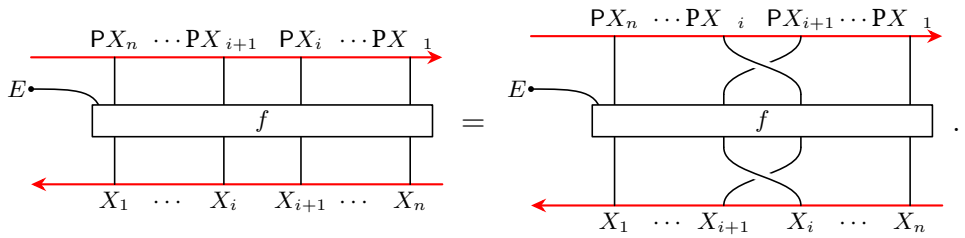
.

引理 5.2. *(a)* 对于 $a\colon \quad Z \to Z'$ 和 $h\colon \quad Z' \to E \otimes \mathsf{P}Z$，我们有



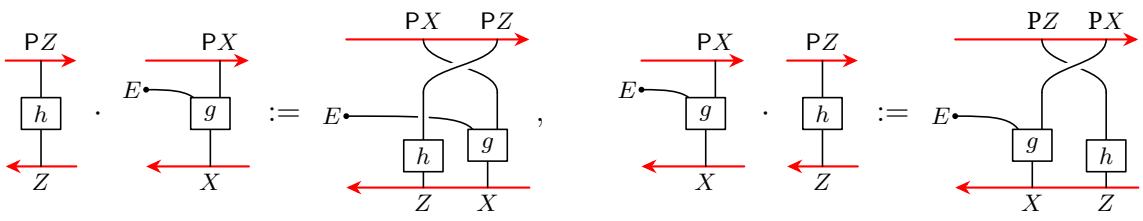
.

(b) 对于 $f\colon \quad X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \to E \otimes \mathsf{P}X_n \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}X_1$ 和 $1 \le i < n$,



.

(c) 这些规则

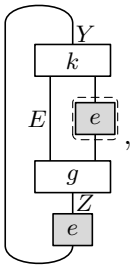


对于 $[Z, h] \in \mathfrak{M}$, $[X, g] \in \mathfrak{H}_E$，构成一个 $\mathfrak{M}$-双模 $\mathfrak{H}_E$。

证明。 这与 $\mathfrak{M}$本身的证明完全类似。 □

为证明下面的命题 5.5，我们需要在 $\mathfrak{H}_E$ 上定义以下线性形式：

定义 5.3。设 $E \in \mathcal{C}$。对于简单对象 Y和 $k \in \mathrm{Hom}(E \otimes \mathrm{P}Y, Y)$，令

$$\text{迹}_{Y,k}([Z,g]) :=$$ 

,

其中，e是 $\mathrm{Hom}(Y,\ Z) \otimes \mathrm{Hom}(Z,\ Y)$ 的典范元。 ⌟

引理 5.4. $\mathrm{Tr}_{Y,\ k}$是定义良好的线性形式，定义在 $\mathfrak{H}_E$ 上；并且对于简单对象 Y'，有 $\mathrm{Tr}_{Y,\ k}([Y',h]) = \delta_{Y,\ Y'}\mathrm{tr}(kh)/d_Y$。

证明。由 (E1) 和 (B1)，$\mathrm{Tr}_{Y,k}$ 在 (R2) 上为零，与引理 3.22 的证明相同；由于 $Z \oplus Z'$ 的典范元是 Z 和 Z' 的典范元之和，它在 (R1) 上也为零。对于简单对象 Y'，除非 $Y' \cong Y$，否则 $\mathrm{Hom}(Y,Y') = 0$；而 $\mathrm{End}(Y) \otimes \mathrm{End}(Y)$ 的典范元是d_Y^{-1}恒等态射$_Y \otimes$恒等态射 $_Y$。□

命题 5.5。设 $E \in \mathcal{C}$。映射

$$\bigoplus_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(Y, E \otimes \mathrm{P}Y) \to \mathfrak{H}_E, \qquad h \mapsto [Y,h],$$

是一个同构。

Proof. 同样，如果我们用 $\mathrm{Tr}_{Y,\ k}$ 代替 Tr_X，那么这与 $\mathfrak{M}$ 本身的证明是平行的 . □

命题 5.6。对于 $u,\ v \in \mathfrak{M}$,

$$\sum_{E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_E \,\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}_E}(w \mapsto u \cdot w \cdot v) = D^2 \varepsilon(u)\,\varepsilon(v).$$

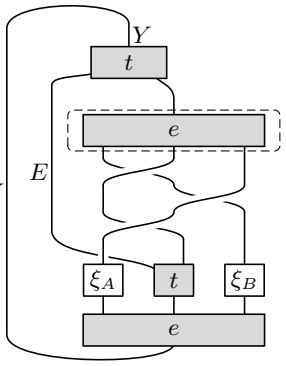
证明[6]。只需取 $u = \mathrm{M}(A) = [A, \xi_A]$ 和 $v = \mathrm{M}(B) = [B, \xi_B]$，其中 $A,\ B \in \mathrm{Fix(P)}$。根据定义 3.33，右边为 $D^2\delta_{A,\ \mathbf{1}}\delta_{B,\ \mathbf{1}}$。接下来只需计算左边。

步骤 *1*。我们在 $\mathfrak{H}_E$ 的基 $[Y,h_i]$ 上计算命题 5.5中的迹，其中对每个$Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，$h_i$ 构成 $\mathrm{Hom}(Y, E \otimes \mathrm{P}Y)$的一组基，因为迹等于对角系数之和，并且

[6]一个动画 此证明的 d 版本可在 https://ippo0127.github.io/movies/mobius_命题5_6.html。

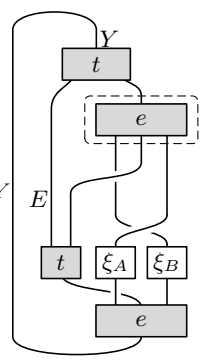
关于 对偶基 d_Y迹$_{Y,\ k_i}$（引理 5.4，其中 $\sum_i h_i \otimes k_i = t$）；因此我们可以写成

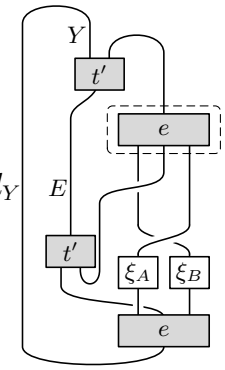
$$\sum_{E\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_E \,\text{迹}_{\mathfrak{H}_E}(w \mapsto u\cdot w\cdot v) \;=\; \sum_{\substack{E<\text{style 恒等态射}\\ ='2'>,Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}} d_E d_Y$$



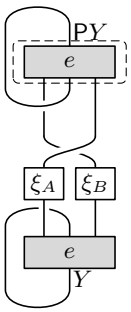
其中，t是 Hom$(Y, E\otimes PY)\otimes$Hom$(E\otimes PY, Y)$ 的典范元，而 e是 Hom$(Y, A\otimes Y\otimes B)\otimes$Hom$(A\otimes Y\otimes B, Y)$ 的典范元。进一步可简化如下，其中 t'是 Hom$(Y\otimes (PY)^\vee, E)\otimes$Hom$(E, Y\otimes (PY)^\vee)$ 的典范元，由 t 对 PY(E4) 进行弯曲得到：

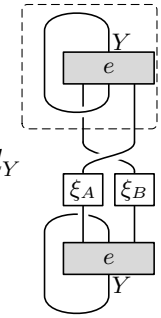
$$= \sum_{\substack{E<\text{style 恒等态射}\\ ='2'>,Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}} d_E d_Y \;\overset{\text{(E4)}}{=}\; \sum_{\substack{E<\text{style 恒等态射}\\ ='2'>,Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}} d_E d_Y$$





$$\overset{\text{(E3)}}{=} \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_Y \qquad \overset{\substack{\text{(B1),(B2)}\\ \text{(B4)–(B6)}}}{=} \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_Y \;.$$



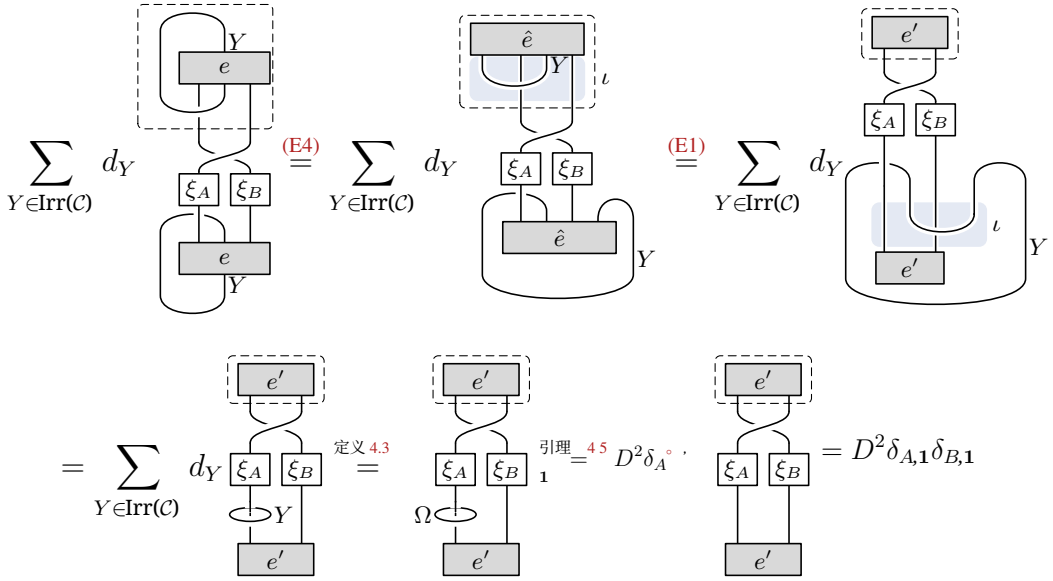


步骤 *2*。 第一幅 下图是步骤 1 的最后一幅图。设 $\hat{}e$ 为 Hom$(\mathbf{1}, A\otimes Y\otimes B\otimes Y^\vee)\otimes$Hom$(A\otimes Y\otimes B\otimes Y^\vee, \mathbf{1})$ 的典范元，以及 Hom$(\mathbf{1}, A\otimes B)\otimes$Hom$(A\otimes B, \mathbf{1})$ 的典范元，并令

$$\iota := (id_A \otimes c^{-1}_{Y,B} \otimes id_{Y^\vee})(id_{A\otimes B}\otimes \mathrm{coev}_Y)\colon A\otimes B \to A\otimes Y\otimes B\otimes Y^\vee,$$

B 右侧的杯，其线 Y从 B 前方经过，延伸至中部。对于 e的上端 q及其弯曲形式 $\hat{}q$:= 评价$'_Y(q\otimes$ 恒等态射$_{Y^\vee})$，态射 $\hat{}q\,\iota$是 q，其输出 Y通过一条从 B前方经过的线与其中部输入相连：这就是 e 的上端及其在盒内的环。因此，一旦根据（E4）将 e 的两端弯曲，盒中就包含 $\hat{}q\,\iota$，而对于 $h := \iota$，应用（E1），

这同样适用于盒内（见命题2.5后的注），将 ι 移至下端，该端变为 e'（部分 ι以阴影表示）：



□

推论 5.7. 对于 $X, X' \in \Sigma$, $\sum_{E\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_E$维数 $p_X\mathfrak{H}_E p_{X'} = d_X d_{X'} M_X M_{X'}$。

证明。 取命题 5.6中的 $u = p_X$和 $v = p_{X'}$。由于左作用与右作用可交换， $w \mapsto p_X w p_{X'}$是 $\mathfrak{H}_E$的一个幂等元，其像为 $p_X\mathfrak{H}_E p_{X'}$，因此左侧为 $\sum_E d_E$维数 $p_X\mathfrak{H}_E p_{X'}$。根据引理 4.26， $\varepsilon(p_X) = S_{\mathbf{1},X}M_X$，因此右侧为 $D^2 S_{\mathbf{1},X}S_{\mathbf{1},X'}M_X M_{X'} = d_X d_{X'} M_X M_{X'}$。□

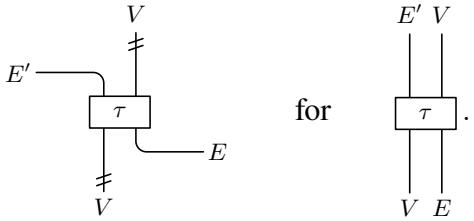
5.2. **管代数与双模的分解。** 现在我们证明 $\bigoplus_{E\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})}\mathfrak{H}_E$是管代数 $\mathcal{T} = \mathrm{Tube}(\mathcal{C})$ 上的一个模， $\mathcal{C}$，且与 $\mathfrak{M}$-双模结构可交换。我们将这一信息与命题 5.6结合起来，推导出双模$\mathfrak{H}_E$分解为简单 $\mathfrak{M}$-双模。

5.2.1. 管代数的一般性质。 这里汇集了我们所需的模张量范畴[Ocn94、Izu00] 的管代数 $\mathcal{C}$ 基本事实。为求完整，我们也给出证明；这些证明都是标准的。

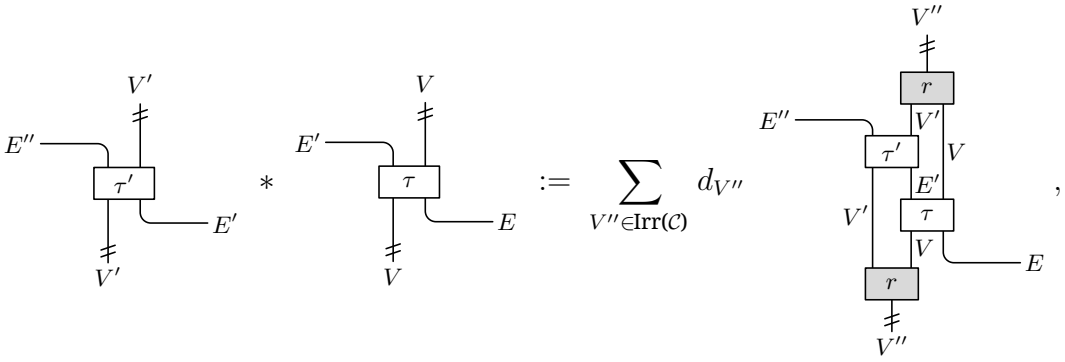
定义 5.8。 令 $\mathcal{T}$为向量空间

$$\mathcal{T} := \bigoplus_{E,E',V\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(V\otimes E,\, E'\otimes V),$$

在这里，我们为 $\mathcal{T}$ 的元素引入一种特殊的图示记号：对于 $\tau \in \mathrm{Hom}(V\otimes E, E'\otimes V)$，我们记作

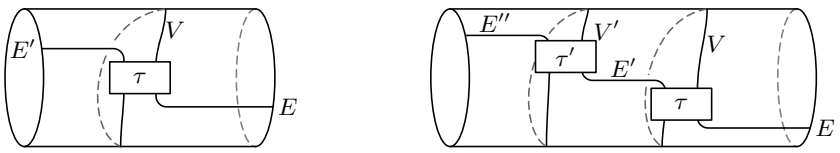


$\mathcal{T}$ 上的乘法定义为



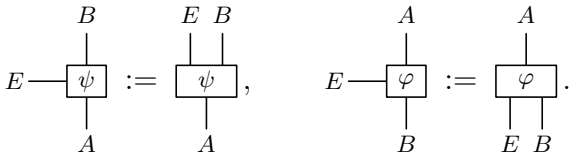
其中，r 是 $\mathrm{Hom}(V'', V' \otimes V) \otimes \mathrm{Hom}(V' \otimes V, V'')$ 的典范元。我们将右侧与 V'' 对应的求和项记为 $(\tau' * \tau)_{V''}$。若中间对象不同，即若 τ 的顶部对象不是 τ' 的底部对象，则规定它们的乘法为零，并将乘法通过线性扩展到所有 $\mathcal{T}$ 上。$\mathcal{T}$ 的单位元是 $\sum_E$ 恒等态射$_E$，其中 $V = \mathbf{1}$。」

注 5.9. 从直观上说，在管代数元素的特殊记号中，由 // 标记的线 V 的两端应被视为绕着一根管子粘合在一起。也就是说，图画在一根水平管子的表面上，E 沿管子从右向左延伸，而线 V 则绕着它转一圈，从 τ 处经过管子前方，再从后方绕回来（左图）：

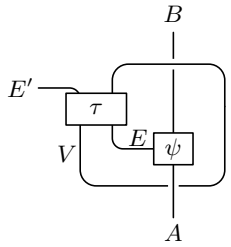


沿着左侧管子的背面一条水平一维空间将其剪开，得到定义 5.8左侧的图。乘法 $\tau' * \tau$是右侧的图，其中 τ'的管子粘接在 τ的管子左侧，因此 V和 V' 都缠绕在管子周围。将 V'和 V通过管子背面的 V'' 融合为 (E3)，再沿此处剪开，便得到定义 $\tau' * \tau$ 中的图 5.8。」

定义 5.10。对于 A, $B \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，令 $W_{A,B} := \bigoplus_{E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(A, E \otimes B)$。在图中，我们将元素 $\psi \in \mathrm{Hom}(A, E \otimes B)$ 画成线 E 向左伸出，而将元素$\varphi \in \mathrm{Hom}(E \otimes B, A)$ 画成线 E 从左侧伸入：



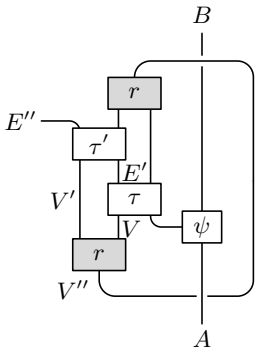
当复合此类图时， E 的末端在最左侧向上（或向下）弯曲，且不与其他线交叉。对于 $\tau \in \mathrm{Hom}(V \otimes E,\ E' \otimes V)$，令 F_τ 作用于 $W_{A,\ B}$，定义为

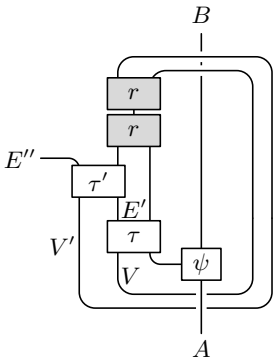
$F_\tau\,\psi :=$ 

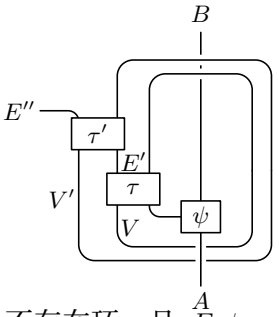
在求和项 E 上取值，在其他直和项上取值为 0。 ⌟

命题 5.11. 对于 $A, B \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}),\ \ \tau \mapsto F_\tau$ 是 $\mathcal{T}$ 在 $W_{A,B}$ 上的一个表示，也就是说，$F_{\tau' * \tau} = F_{\tau'}\,F_\tau$ 且 $F_{\sum_E id_E} =$ 恒等态射。

证明。 根据 F 的定义以及乘法的定义，

$F_{\tau' * \tau}\,\psi = \sum_{V''} d_{V''}$ 

$\overset{\text{nat.}}{=} \sum_{V''} d_{V''}$ 

$\overset{\text{(E3)}}{=}$ 

$= F_{\tau'} F_\tau\,\psi.$

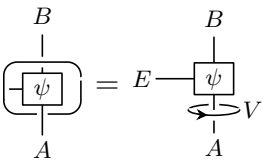
对于 $\tau = \sum_E$恒等态射$_E (V = \mathbf{1})$，不存在环，且 $F_\tau \psi = \psi$。 □

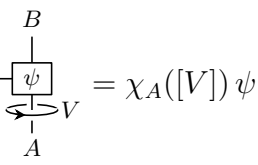
引理 5.12. ***(a)*** 对于 $E, V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，$F_{c_{V,E}}$ 通过 $\chi_A([V])$作用于 $\mathrm{Hom}(A, E \otimes B)$，而 $F_{c_E^{-1},V}$ 通过 $\chi_B([V])$作用。

(b) 对于 $\tau \in \mathrm{Hom}(V \otimes E, E' \otimes V)$</style>,

$$\sum_{A,B \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_A d_B\ \mathrm{Tr}_{W_{A,B}} F_\tau = D^2\,\delta_{V,\mathbf{1}}\,\delta_{E,E'}\,\mathrm{tr}(\tau).$$

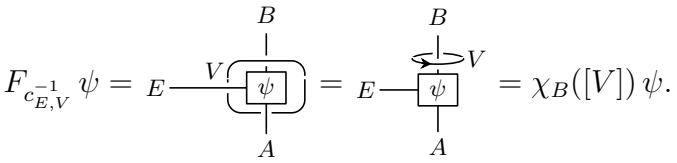
证明。 (a) 环具有自然性，并且可以滑动移出：

$F_{c_{V,E}}\,\psi =$ 

$=$ 

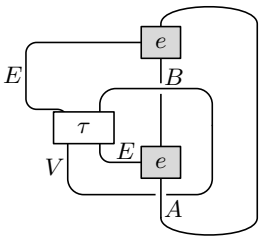
$= \chi_A([V])\,\psi,$

$$F_{c_{E,V}^{-1}}\,\psi = \quad = \quad = \chi_B([V])\,\psi.$$

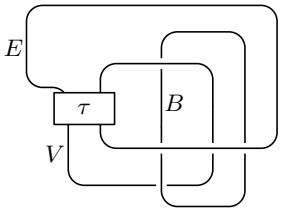


(b) Sinc e F_τ 将 Hom$(A, E\otimes B)$ 映射到 Hom$(A, E'\otimes B)$，只有 $E' = E$ 有贡献，并且

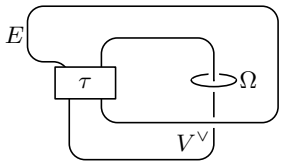
$$\sum_{A,B} d_A d_B \,\text{迹}_{W_{A,\ B}} F_\tau \overset{\text{(E2)}}{=} \delta_{E,\ E'} \sum_{A,B} d_A d_B$$



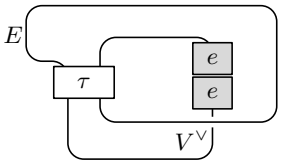
$$\overset{\text{(E3)}}{=} \delta_{E,\ E'} \sum_{B} d_B$$



$$\overset{\text{定义 4.3}}{=} \delta_{E,E'}$$



$$\overset{\text{引理 4.5}}{=} \delta_{E,E'}\, D^2$$



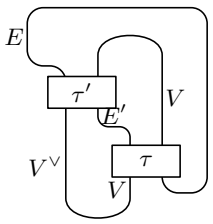
$$= D^2\,\delta_{V,\ \mathbf{1}}\,\delta_{E,\ E'}\,\text{迹}(\tau)。$$

在第二幅图中，e 是 Hom$(A, E\otimes B)\ \otimes$ Hom$(E\otimes B, A)$ 的典范元；在最后一幅图中，e 是 Hom$(V^\vee,\mathbf{1})\ \otimes$ Hom$(\mathbf{1}, V^\vee)$ 的典范元，除非$V = \mathbf{1}$，否则它为零。对于 $V = \mathbf{1}$，对应的图是迹(τ)。□

命题 5.13. </style}映射 ,,$_{B\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})}\,\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_{A,B})$ 是代数同构。特别地，$\mathcal{T}$是半单的，而$W_{A,\ B}$ 是它的简单模。

证明。 *</style}*对于，令 *tr()* 表示其各直和项在 和 下的迹之和。由命题 *5.11* 和引理 5.12(b)，D^2 tr$_0(\tau'*\tau) = \sum_{A,B} d_A d_B$迹$_{W_{A,B}}(F_{\tau'}F_\tau)$。对于$\tau\in$Hom$(V\otimes E, E'\otimes V)$ 和 $\tau'\in$Hom$(V^\vee\otimes E',$ $E\otimes V^\vee)$，只有 $V'' = \mathbf{1}$对 tr$_0(\tau'*\tau)$ 有贡献，其中典范元 r是 d_V^{-1}余评价$'_V\otimes$评价$_V$，因此

$$\text{迹}_0(\tau'*\tau) = \frac{1}{d_V}$$



,

将 V弯曲后，它是 Hom$(V\otimes E\otimes V^\vee,\ E')$ 与 Hom$(E',\ V\otimes E\otimes V^\vee)$ 之间的迹配对；该配对是非退化的。因此，$F_\tau = 0$ 推出 $\tau = 0$，且 $\tau\mapsto F_\tau$ 是单射。它是乘法保持的

by 命题 5.11。最后，设 $N_{EB}^{A} = \dim \mathrm{Hom}(A,\ E \otimes B)$ 且 $N_{VE}^{G} = N_{EV}^{G}$ ，

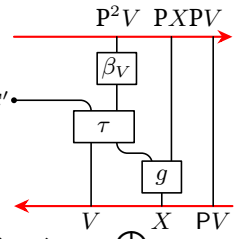
$$\dim \mathcal{T} = \sum_{E,E',V,G} N_{VE}^{G}\, N_{E'V}^{G} = \sum_{A,B} \Big(\sum_{E} N_{EB}^{A} \Big)^2 = \dim \bigoplus_{A,B} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_{A,B}),$$

因此 $\tau \mapsto F_\tau$ 是一个同构。 □

的简单模 $\mathcal{T}$ 因此由 $(A,\ B)$ 中的简单对象对标记， $\mathcal{C}$ 这与通过 Drinfeld 中心对管代数表示的描述 [Izu00] 以及 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ 对于模 $\mathcal{C}$ [Müg01，定理 710], 一致，其中 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 带有逆编织的。

5.2.2. 双模上的管代数作用。

定义 5.14。对于 $\tau \in \mathrm{Hom}(V \otimes E,\ E' \otimes V)$ 和 $w = [X, g] \in \mathfrak{H}_E$ 令

$F_\tau(w) :=$ 

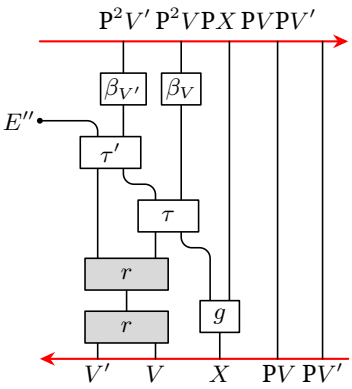
$\in \mathfrak{H}_{E'}$.

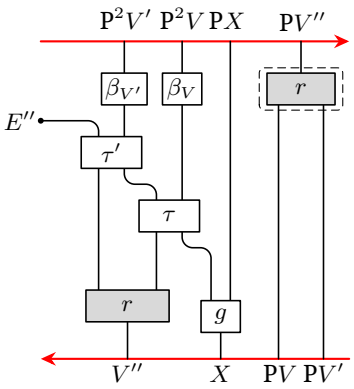
我们将 F_τ 通过 0 扩展到 $\mathfrak{H}$ 的其他直和项：$= \bigoplus_{E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \mathfrak{H}_E$，并线性地扩展到 $\mathcal{T}$。这里我们对 W_A上的作用使用了相同的符号，B （定义 5.10）；所作用的模总能从其自变量中明确看出。 」

引理 5.15。*(a)* F_τ 定义良好，并且 F_{id_E} 是 $\mathfrak{H}_E$的恒等态射。*(b)* $F_{\tau'} \circ F_\tau = F_{\tau' * \tau}$。因此， $\mathfrak{H}$是一个带单位元的 $\mathcal{T}$-模。

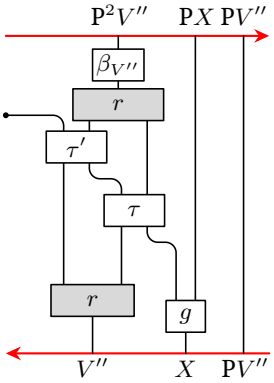
证明。(a) 对于 $a \in \mathrm{End}(X)$， $F_\tau[X, (\mathrm{id}_E \otimes \mathrm{P}(a))g]$ 和 $F_\tau[X, ga]$ 仅相差一次将 $\mathrm{id}_V \otimes a \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{P}V}$ 绕核心移动（ U的自然性），因此根据引理 5.2(a)二者相等；(R1)由自然性保持。对于单位元，取 $V = \mathbf{1}$ 和 $\tau = \mathrm{id}_E$：根据 U_0的迹性质，线 1 和 P1 被消去： $\mathbf{1} \to \mathrm{P1}$、(A2) 以及 $\beta_{\mathbf{1}} = \mathrm{P}(U_0)U_0$，如同 L(1) $=$ M(1) 的证明中那样（命题 3.37(b)）。

(b) 我们有

$F_{\tau'} F_\tau(w) \overset{(E3)}{=} \sum_{V''} d_{V''}$ 

$\overset{\text{引理 5.2(a)}}{=} \sum_{V''} d_{V''}$ 

引理 5.2(a) = (B7) $\sum_{V''} d_{V''}$

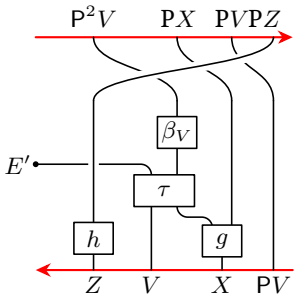


$= \sum_{V''} d_{V''} F_{(\tau'*\tau)V''}(w) = F_{\tau'*\tau}(w).$ □

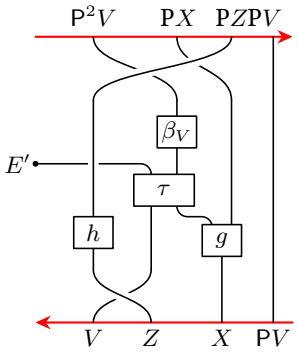
引理 5.16. 对于 $\tau \in \mathrm{Hom}(V \otimes E, E' \otimes V)$，$u$、$v \in \mathfrak{M}$ 和 $w \in \mathfrak{H}_E$，$F_\tau(u \cdot w \cdot v) = u \cdot F_\tau(w) \cdot v$。因此 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathcal{T} \otimes \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}^{\mathrm{op}}$ 上的一个模。

证明。 设 $u = [Z, h]$ 和 $w = [X, g]$。对于左作用，

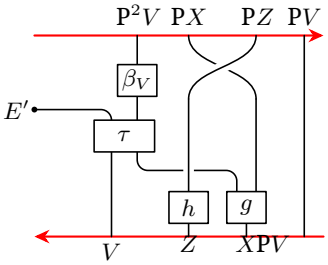
$u \cdot F_\tau(w) =$



引理 5.2(b) =



同痕 =



$= F_\tau(u \cdot w)$。

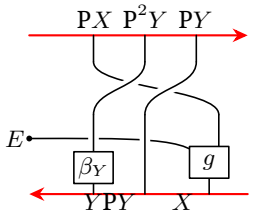
对于右作用，证明基本相同：线 PV 与 Z 的交叉移动会抵消 P²V 与 PZ 的交叉，而 Z 与 PV 的两个剩余交叉会相互抵消。□

引理 5.17。对于 E，Y，$V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 以及 $w \in \mathfrak{H}_E$，

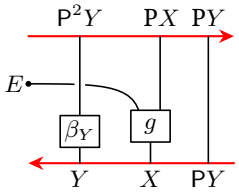
$$F_{c_{Y,E}}(w) = \mathrm{L}(Y) \cdot w, \qquad F_{c^{-1}_{E,V}}(w) = w \cdot \mathrm{L}(V).$$

证明。 这条腿从 Y 和 PY 后方经过，并在交叉移动（引理 5.2（b））后，仅从 Y 后方经过：

$\mathrm{L}(Y) \cdot w =$



$=$



$= F_{c_{Y,E}}(w).$

第二个恒等式完全类似。 □

现在我们可以确定 $\mathfrak{H}$ 的结构：

定理 5.18。 作为 $\mathcal{T}\otimes\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{M}^{\mathrm{op}}$ 上的模，

$$\mathfrak{H}\ \cong\ \bigoplus_{X,X'\in\Sigma} W_{X,X'}\otimes V_X\otimes V_{X'}^*,$$

其中 $\mathcal{T}$ 作用于 上 $W_{X,\ X'}$ (定义 5.10)，且 $\mathfrak{M}$ 作用于 $V_X\otimes V_{X'}^*$，通过 $u(x\otimes\varphi)\ v=ux\otimes\varphi v$。

证明。 由引理 5.15 和 5.16 以及命题5.13，

$$\mathfrak{H}\cong\bigoplus_{A,B\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} W_{A,B}\otimes K_{A,B}$$

作为 $\mathcal{T}\otimes\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{M}^{\mathrm{op}}$ 上的模，其中重数空间 $K_{A、\ B}$ 是 $\mathfrak{M}$-双模。由引理 5.17，$\mathrm{L}(Y)$ 在 $\mathfrak{H}$ 上的左乘法是元素 $\sum_E c_{Y、\ E}$ 的作用，该元素属于 $\mathcal{T}$，并通过 $\chi_A([Y])$ 作用于 $W_{A、\ B}$（引理 5.12(a)）；因此 $\mathrm{L}(Y)$ 从左侧通过 $\chi_A([Y])$ 作用于 $K_{A、\ B}$，从右侧的作用同理为 $\chi_B([Y])$。由 (4.1)，$p_X=\mathrm{L}(e_X)$ 因此从左侧通过 $\chi_A(e_X)=\delta_{A、\ X}$ 作用于 $K_{A、\ B}$，从右侧则通过 $\delta_{B、\ X}$ 作用。因此 $K_{A、\ B}$ 是 $p_A\mathfrak{M}\otimes(p_B\mathfrak{M})^{\mathrm{op}}$ 上的幺模；当 $A、\ B\in\Sigma$ 不成立时，该模为零；当 $A、\ B\in\Sigma$ 成立时，该模为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_A)\otimes\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_B)^{\mathrm{op}}$（定理 4.20(b)）。因此，除非 $A、\ B\in\Sigma$，否则 $K_{A、\ B}=0$；而对于 $X、\ X'\in\Sigma$，有 $K_{X、\ X'}\cong(V_X\otimes V_{X'}^*)^{\oplus k_{X、\ X'}}$，其中某些$k_{X、\ X'}\geq 0$。

还需证明对于每一对固定的 $X、\ X'\in\Sigma$，$k_{X、\ X'}=1$；注意，$k_{X、\ X'}$ 不依赖于 E。对于 $E\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，$\mathrm{id}_E\in\mathcal{T}$ 在 $\mathfrak{H}$ 上的作用是投影到 $\mathfrak{H}_E$ 上（引理 5.15(a)），而在 $W_{X、\ X'}$ 上的作用是投影到 $\mathrm{Hom}(X,E\otimes X')$ 上。因此，根据定理 4.20(c)，$p_X\mathfrak{H}_Ep_{X'}\cong\mathrm{Hom}(X,E\otimes X')\otimes K_{X、\ X'}$，其维数为 $N_{EX'}^X\,k_{X、\ X'}\,M_XM_{X'}$，其中 $N_{EX'}^X=\dim\mathrm{Hom}(X,E\otimes X')$。由推论 5.7 和 $\sum_E d_EN_{EX'}^X=d_{X\otimes X'^{\vee}}=d_Xd_{X'}$，

$$k_{X,X'}\,d_Xd_{X'}M_XM_{X'}=d_Xd_{X'}M_XM_{X'},$$

且 $M_X,\ M_{X'}>0$ 为 $X,\ X'\in\Sigma$。因此 $k_{X,\ X'}=1$。 □

应用投影 恒等态射 $_E\in\mathcal{T}$，我们得到引言中定理 1.5 所述的形式：

推论 5.19。 对于 $E\in\mathcal{C}$，存在一个 $\mathfrak{M}$-双模同构

$$\mathfrak{H}_E\ \cong\ \bigoplus_{X,X'\in\Sigma}\left(V_X\otimes V_{X'}^*\right)^{\oplus N_{EX'}^X},\qquad N_{EX'}^X=\dim\mathrm{Hom}(X,E\otimes X').$$

特别地，维数 $p_X\mathfrak{H}_Ep_{X'}=N_{EX'}^XM_XM_{X'}$。

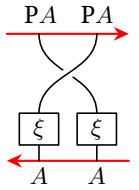
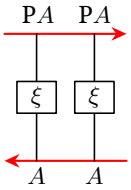
证明。 两边关于 E 都是可加的，因此令 E 为简单对象。于是 恒等态射 $_E\in\mathcal{T}$ 将 $\mathfrak{H}$ 投影到 $\mathfrak{H}_E$，并且$W_{X,\ X'}$ 投影到 $\mathrm{Hom}(X,\ E\otimes X')$。□

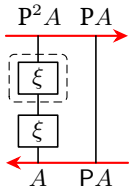
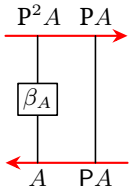
5.3. 扭结的常值性。 回忆一下，$\Sigma=\{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})\mid V_X\neq 0\}$。本小节的目的是证明，$\theta_X$ 在 Σ上等于中心元 $\mathrm{M}(O)$ 作用于 V_X 所乘的标量 o_X 的一个常数倍，并给出该常数的显式公式。当 β 相干时，$o_X=1$，因此 θ_X 在 Σ 上为常数。

我们先记下可逆 A 时 $\mathrm{M}(A)$ 的平方。

引理 5.20。 设 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 满足 $\mathsf{P}A \cong A$，使得 $A \in$ 不动点集(P)。则 $\mathrm{M}(A)^2 = \theta_A^{-1}\,\mathrm{L}(A)$；此处$\theta_A = \pm 1$由引理*3.32*。

证明。 设 $\xi := \xi_A$。 则

$\mathrm{M}(A)\cdot\mathrm{M}(A)$ $\overset{\text{命题 3.14}}{=}$  $\overset{\text{引理 3.32}}{=}$ $\theta_A^{-1}\circ$ 

$\overset{\text{引理 3.7}}{=}$ $\theta_A^{-1}\circ$  $\overset{(3.1)}{=}$ θ_A^{-1}  $\overset{\text{定义 3.36}}{=}$ $\theta_A^{-1}\circ\,\mathrm{L}(A)$。

□

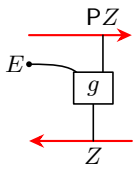
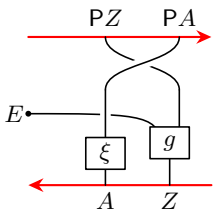
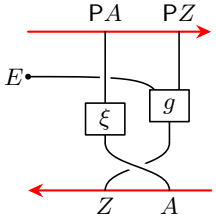
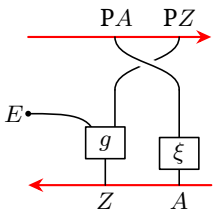
接下来，我们描述可逆 A 下的 $\mathrm{M}(A)$ 共轭。

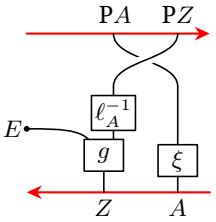
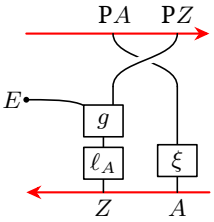
引理 5.21. 设 $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 且$\mathsf{P}A \cong A$，使得 $A \in \mathrm{Fix}(\mathsf{P})$。那么$\mathrm{M}(A)$ 可逆，且$\mathrm{M}(A)^{-1} = \mathrm{M}(A)^\star$，对于 $E \in \mathcal{C}$ 和 $[Z,g] \in \mathfrak{H}_E$，

$$\mathrm{M}(A)\cdot[Z,g]\cdot\mathrm{M}(A)^{-1} = [Z,\, g\circ\ell_{A,Z}].$$

证明。由命题 3.34(c) 和定义 3.11，$\mathrm{M}(A)^\star\mathrm{M}(A)$ 可由 $A^\vee\otimes A \cong \mathbf{1}$ 上的一个态射表示，因此由命题 3.23，它是单位元 $\mathrm{M}(\mathbf{1})$ 的一个倍数；根据命题 3.34(d)，该倍数为$\varepsilon(\mathrm{M}(A)^\star\mathrm{M}(A)) = 1$。由于 $\mathfrak{M}$ 是有限维的，$\mathrm{M}(A)^{-1} = \mathrm{M}(A)^\star$。

对于共轭，记 $\xi := \xi_A$。那么

$\mathrm{M}(A)\cdot$  $\overset{\text{引理 5.2(c)}}{=}$  $\overset{\text{引理 5.2(b)}}{=}$  $=$ 

$\overset{\text{引理 4.7}}{=}$  $\overset{\text{引理 5.2(a)}}{=}$ $\overset{\text{引理 4.9}}{}$  $\overset{\text{引理 5.2(c)}}{=}$ $[Z, g\circ\ell_{A,Z}]\cdot\mathrm{M}(A)$。

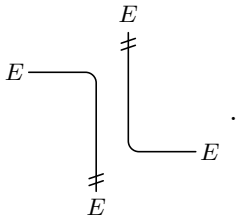
在右侧乘以 $\mathrm{M}(A)^{-1}$ 即可得证。 □

我们将此应用于 O 的相干性障碍 β（命题 4.10）。

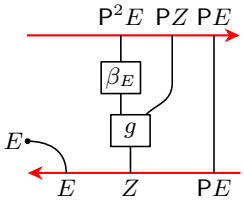
命题 5.22。 $O \in$ 不动点集(P)，从而$\mathrm{M}(O) \in \mathfrak{M}$ 有定义。它是可逆的，且 $\mathrm{M}(O)^{-1} = \mathrm{M}(O)^\star$，并且当 β 相干时，$\mathrm{M}(O) = \mathrm{M}(\mathbf{1})$。

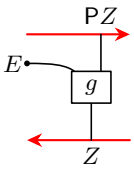
证明。 $\mathsf{P}O \cong O$ 由命题 4.12（a），且引理 5.21 给出了逆映射。当 β 相干时，$O = \mathbf{1}$（定义 4.11），因此 $\mathrm{M}(O) = \mathrm{M}(\mathbf{1})$。 □

引理 5.23。 对于 $E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，令 $\omega_E \in \mathcal{T}$ 为 $id_{E\otimes E}$，视为 $\mathrm{Hom}(V\otimes E, E\otimes V)$ 中的一个元素，满足 $V = E$:

$\omega_E =$ 

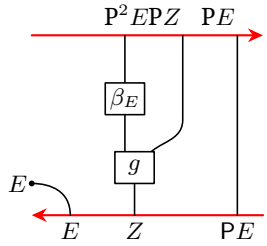
于是 $F_{\omega_E}(w) = \mathrm{M}(O)\, w\, \mathrm{M}(O)^{-1}$ 对于 $w \in \mathfrak{H}_E$；特别地，当 β 相干时，$F_{\omega_E} =$ 为恒等态射。也就是说，对每个对象 Z 以及每个 g: $Z \to E \otimes \mathsf{P}Z$,

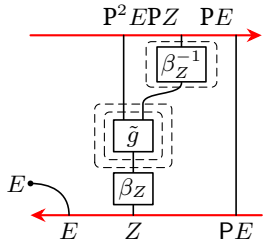
$F_{\omega_E}[Z,g] =$ 

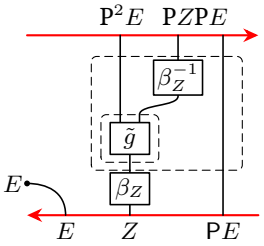
$= \mathrm{M}(O) \cdot$ 

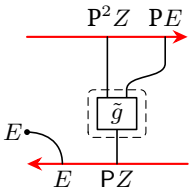
$\cdot\, \mathrm{M}(O)^{-1}.$

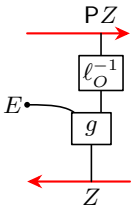
证明。 我们让 g 绕核心转两圈。令 $\tilde{g} :=$(恒等态射 $_E \otimes \ell_O^{-1}{}_{,\mathsf{P}Z}$) g，则有 ($\beta_E \otimes$恒等态射 $_{\mathsf{P}Z}$) $g =$(恒等态射 $_{\mathsf{P}^2E} \otimes \mathsf{P}(\beta_Z^{-1})$) $\langle\langle \tilde{g}\rangle_{\mathsf{P}}\rangle_{\mathsf{P}}\, \beta_Z$，并且

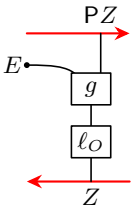
$F_{\omega_E}[Z,g] =$ 

(B7)
(4.2)


(B1)–(B3)


引理 5.2(a)
=


引理 5.2(a)
=


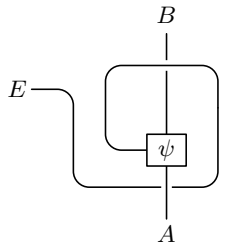
引理 4.9
=
(R2)


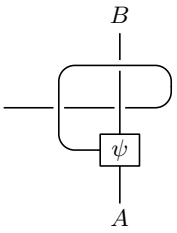
引理 5.21
=
$\mathrm{M}(O) \cdot [Z,g] \cdot \mathrm{M}(O)^{-1}.$

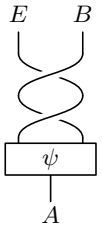
□

引理 5.24. 对于 $A, B, E \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$, F_{ω_E} 在 $\mathrm{Hom}(A, E\otimes B) \subset W_{A,B}$ 上按 $\theta_A\theta_B^{-1}$ 作用。

证明。我们有

$F_{\omega_E}\psi \overset{\text{定义 5.10}}{=}$ 

$=$ 

$= \theta_E$ 

$= \theta_A\theta_B^{-1}\,\psi.$

□

引理 5.25. $\mathrm{M}(O)$在 $\mathfrak{M}$中是中心的。

证明。 对于 $E = \mathbf{1}$, $\omega_{\mathbf{1}} =$ 恒等态射$_{\mathbf{1}}$ 满足 $V = \mathbf{1}$, 因此 $F_{\omega_{\mathbf{1}}}$ 由引理 $\mathfrak{H}_{\mathbf{1}} = \mathfrak{M}$ 5.15(a) 是的恒等式。因此 $\mathrm{M}(O)\, w\, \mathrm{M}(O)^{-1} = F_{\omega_{\mathbf{1}}}(w) = w$ 根据引理 $w \in \mathfrak{M}$ 5.23。 □

定义 5.26。 对于 $X \in \Sigma$，令 o_X 为中心元 $\mathrm{M}(O)$ 作用于不可约模 V_X时对应的标量，使得 $\mathrm{M}(O)$ $p_X = o_X\, p_X$。根据引理 5.20， $\mathrm{M}(O)^2 = \theta_O^{-1}\mathrm{L}(O)$，且$\mathrm{L}(O)$ 作用于 V_X 的方式为 $\chi_X([O])$，因此

$$o_X^2 = \theta_O^{-1}\,\chi_X([O]);$$

特别地， $|o_X| = 1$，因为 $\theta_O = \pm 1$和 $\chi_X([O])$ 是单位根。当 β相干时， $o_X = 1$。 ⌟

命题 5.27。 比值 θ_X/o_X 在 Σ上是常数。特别地，当 β相干时， θ_X 在 Σ 上是常数。

证明。设 X， $X' \in \Sigma$，并选取 $E \in \mathbf{Irr}(\mathcal{C})$，使得 $N_{EX'}^{X} = \dim \mathbf{Hom}(E, X \otimes X'^{\vee}) \geq 1$。根据定理 5.18， $p_X \mathfrak{H}_E p_{X'}$是 $\mathfrak{H}$的非零求和项 $\mathbf{Hom}(X, E \otimes X') \otimes V_X \otimes V_{X'}^*$。在其上， F_{ω_E}通过 $\theta_X\theta_{X'}^{-1}$（引理 5.24）以及通过 $o_X o_{X'}^{-1}$（引理 5.23 和定义 5.26）作用。因此$\theta_X/o_X = \theta_{X'}/o_{X'}$。 □

接下来我们确定 θ_X/o_X 的常值。令 $p_+ := \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_X^2\theta_X$ 为高斯和，并令 $\lambda := p_+/D$。众所周知， λ是一个单位根 [EGNO15，推论 8.18。2]。

引理 5.28。 $\lambda = \pm 1$当 $\mathcal{C}$ 具有反幺半对合 P 时。

证明。 由于 $X \mapsto \mathsf{P}X$ 将 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 置换为 $d_{\mathsf{P}X} = d_X$ (推论2.6)， 且 $\theta_{\mathsf{P}X} = \theta_X^{-1} = \theta_X$（引理 3.32；扭结是单位根 [Vaf88，AM88], [EGNO15，推论 8.18。2])， $p_+ = p_+$是实数。因此 $\lambda = \pm 1$。 □

我们还定义，对于 $Y \in \mathbf{Irr}(\mathcal{C})$,

$$\eta_Y^O := \varepsilon\big(\mathrm{L}(Y^\vee)\,\mathrm{M}(O)\big), \qquad \sigma := \frac{1}{D}\sum_{Y\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \overline{\eta_Y^O}\, d_Y\, \theta_Y^{-1}.$$

现在我们可以证明第二个主要结果，该结果在引言中以定理 1.4的形式陈述，适用于相干的 β:

定理 5.29。 对于 $X \in \Sigma$，我们有 $\theta_X = \lambda\sigma\, o_X$， 且 $|\sigma| = 1$。

证明。 由命题 5.27，对于 $X \in \Sigma$，有 $\theta_X = k\, o_X$， 其中存在满足 $|k| = 1$ 的 k。根据平衡公理，$s_{X,\ Y} = \theta_X^{-1}\theta_Y^{-1}\mathbf{tr}(\theta_{X\otimes Y}) = \theta_X^{-1}\theta_Y^{-1}\sum_Z N_{XY}^Z\,\theta_Z d_Z$，其中 $N_{XY}^Z = \dim \mathbf{Hom}(X \otimes Y,\ Z)$。由于 $\sum_X N_{XY}^Z d_X = d_{Z\otimes Y^\vee} = d_Z d_Y$，因此得到

$$\sum_X d_X\theta_X S_{X,Y} = \frac{\theta_Y^{-1}}{D}\sum_Z \theta_Z d_Z \sum_X N_{XY}^Z d_X = \lambda\, d_Y\theta_Y^{-1}.$$

因此

$$k\,\mathrm{M}(O) \overset{(1)}{=} \sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \theta_X\, p_X \overset{(2)}{=} \mathrm{L}\Big(\sum_{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \theta_X\, e_X\Big) \overset{(3)}{=} \frac{\lambda}{D}\sum_{A\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_A\,\theta_A^{-1}\,\mathrm{L}(A).$$

(1) $\mathrm{M}(O)\,p_X = o_X\,p_X$ (定义 5.26)， $p_X = 0$ 对于 $X \notin \Sigma$，且 $\sum_X p_X = \mathrm{M}(\mathbf{1})$。 （2）

$p_X = \mathrm{L}(e_X)$.

(3) 根据（4.1）以及 $S_{A,X} = S_{X,A^\vee}$, $\sum_X \theta_X e_X = \sum_A [A]\,\frac{1}{D}\sum_X d_X\theta_X S_{X,A^\vee}$，并结合上面关于 $Y = A^\vee$ 的关系，其中 $d_{A^\vee} = d_A$ 且 $\theta_{A^\vee} = \theta_A$。

乘以 $\mathsf{M}(O)^{-1} = \mathsf{M}(O)^\star$（命题 5.22），并应用 ε。由引理 3.38 和命题 3.34(d)，$\varepsilon(\mathsf{L}(A)\mathsf{M}(O)^\star) = \varepsilon(\mathsf{M}(O)\mathsf{L}(A^\vee)) = \eta_A^O$，因此 $k = \lambda\sigma$。于是，根据引理 5.28，$|\sigma| = |k| = 1$。□

注 5.30. 平方运算、定义 5.26 给出 $\theta_X^2 = \sigma^2\,\theta_O^{-1}\,\chi_X([O])$ 对于 $X \in \Sigma$：比值 $\theta_X^2/\chi_X([O])$ 在 Σ 上为常数，且有显式表达式。对于 $\mathcal{C}_1$ 第 6.3 节中的 $O = \epsilon$，这给出 $\theta_{\psi_\pm}^2 = -1$。⌟

在相干情形下，这就化为以下结果，该结果即引言中的定理 1.4：

C推论 5.31。假设 β 是相干的。那么对于所有 $X \in \Sigma$，都有 $\theta_X = \lambda\sigma$，其中

$$\sigma = \frac{1}{D}\sum_{Y\in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})} \eta_Y\, d_Y\, \theta_Y,$$

且 $\lambda\sigma = \pm 1$。

证明。由命题 5.22 和定义 5.26，$\mathsf{M}(O) = \mathsf{M}(\mathbf{1})$ 且 $o_X = 1$，因此 $\eta^O = \eta$，它在 Fix(T) 之外为零，在其上则为 ± 1（命题 4.18）。对于 $Y \in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})$，$\mathsf{P}Y \cong Y^\vee$ 给出 $\theta_Y^{-1} = \theta_{\mathsf{P}Y} = \theta_{Y^\vee} = \theta_Y$（引理 3.32），因此 $\theta_Y = \pm 1$。这给出了 σ 的公式，因此它是实数；由于 $|\sigma| = 1$ 且 $\lambda = \pm 1$（定理 5.29、引理 5.28），$\lambda\sigma = \pm 1$。□

注 5.32。推论 5.31 中的求和对任意 β 均有定义，但只有在相干情形下才非零：

$$\frac{1}{D}\sum_{Y\in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})} \eta_Y\, d_Y\, \theta_Y = \begin{cases} \sigma = \pm 1, & \text{if } \beta \text{ is coherent},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

事实上，在定理 5.29 的证明中，将 ε 应用于恒等式 $k\mathsf{M}(O) = \frac{\lambda}{D}\sum_A d_A\theta_A^{-1}\,\mathsf{L}(A)$，但不乘以 $\mathsf{M}(O)^{-1}$。由于 $k = \lambda\sigma$、$\lambda^2 = 1$ 以及 $\varepsilon(\mathsf{L}(A))$（定义 4.17 和命题 4.18(a)、(c)），可得 $\frac{1}{D}\sum_A \eta_A\, d_A\,\theta_A^{-1} = \sigma\,\varepsilon(\mathsf{M}(O))$，并且 $\varepsilon(\mathsf{M}(O))$（$\mathsf{M}(O)$ 中 $\mathsf{M}(\mathbf{1})$ 的系数（定义 3.33））在 $O \cong \mathbf{1}$ 时为 1，否则为 0。取复共轭即得所述结论，因为 η 在 Fix(T) 之外为零（命题 4.18(a)），且 σ 在相干情形下为实数。因此，[WL16] 的异常指标表达式（其对相干的 β 有定义）在对非相干的 β 求值时为零，而定理 5.29 以对 $\mathsf{M}(O)$ 施加扭结的求和 σ 取代了它。⌟

6. 示例

我们通过三个例子来说明这些结果。对于尖锐范畴 C，一切都归结为一个带有非退化二次型和对合的有限阿贝尔群，并由此恢复 [LT18、Ori25a、Ori25b] 的结果。第二个例子是范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 本身是模范畴，对合交换两个因子。结果发现，其中的融合代数是 $\mathcal{E}$ 的融合代数。第三个例子涉及 Barkeshli 和 Cheng [BC17] 研究的两个具有 $\mathfrak{so}_5$ 在 2 级时融合规则的模范畴：借助推论 5.31，我们仅凭模数据就证明，2级时的模范畴 $\mathfrak{so}_5$ 本身不存在可提升其简单对象唯一可能置换的相干反幺半对合。对于另一种情形，我们通过附录 A 的方法，由 F 和 R 符号构造 $(\mathsf{P}\ U, \beta)$，得到 $\mathfrak{M} \cong$ 矩阵代数$_2(\mathbb{C})$。我们还

证明了 $\mathfrak{so}_5$ 在 2级时确实存在不满足相干性的反幺半对合，并推导出其$\mathfrak{m} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$。

6.1. 尖锐范畴。设 $\mathcal{C}$ 为尖锐的。那么，Irr($\mathcal{C}$) $= A$ 是一个有限阿贝尔群，记作加法群，其单值化是一个非退化双特征标 $B(a,b) = s_a$，满足 $\theta_{a+b} = \theta_a\theta_b B(a,b)$。在本小节中，$P$ 表示 A 的一个自同构，且满足 $P^2 = 1$ 和对所有 $a \in A$ 都有 $\theta_{Pa} = \theta_a^{-1}$，因此 $B(Pa, Pb) = B(a,b)^{-1}$。反幺半对合 P 根据引理 3.32 诱导出这样的P；反过来，每个这样的 P 都由一个具有相干性的反幺半对合诱导（命题 6.2）。对于尖锐范畴 $\mathcal{C}$，数值 M_a，尤其是它们的整性，已在 [Ori25a] 中得到（另见 [WL16, (8)–(9)]）；我们从定理 4.20 重新推导这些数值，并解释其中发现的非零 M_a 的含义（命题 6.4）。

引理 6.1. 令

$$K_\pm := \mathrm{Ker}(1 \mp P), \qquad R_\pm := \mathrm{Im}(1 \pm P).$$

则有：

(a) 若 P 由反幺半对合P诱导，则不动点集(P) $= K_+$ 且不动点集(T) $= K_-$。*(b)* $R_\pm \subset K_\pm$，并且对 $x \in K_\pm$有 $2x \in R_\pm$，因此 $K_\pm/R_\pm$ 也是 $\mathbb{F}_2$-向量空间。*(c)* 关于 B，有 $K_\pm^\perp = R_-$ 和 $K_+^\perp = R_+$。*(d)* $|K_+|/|R_+| = |K_-|/|R_-|$。

证明。 P$a = Pa$ 且 (Pa)$^\vee = -Pa$。

(b) $(1 \mp P)(1 \pm P) = 1 - P^2 = 0$，且对 $x \in K_\pm$有 $2x = x \pm Px$。

(c) $B(x, y \mp Py) = B(x,y)\ B(Px,y)^{\pm 1} = B(x \pm Px, y)$，因为 $B(x,Py) = B(Px,y)^{-1}$。因此$R_\mp^\perp = K_\mp$，也就是说，$K_\mp^\perp = R_\mp$。

(d) $|R_\pm| = |A|/|K_\mp|$，作为 $R_\pm \cong A/\ker(1 \pm P)$。 □

命题 6.2。对于上述每个 Pas，都存在一个反幺半对合 (P U, β)，它在 $\mathcal{C}$ 上与 P$a \cong Pa$ 满足相干条件，对所有 $a \in A$ 均如此。

唯一非平凡之处是 (Coh)，也就是障碍类的消失（命题 4.12）。这一点已在 [Ori25b] 中通过显式余循环计算得以证明；下面的证明是其无坐标版本。

证明。(1) 令 $\mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$ 为 $\mathcal{C}$，配备反向张量积 $X \otimes^{\mathrm{op}} Y := Y \otimes X$ 以及编织$c_X^{-1}{}_{,Y}$: $X \otimes^{\mathrm{op}} Y \to Y \otimes^{\mathrm{op}} X$。那么 (A1)–(A3) 恰好说明 (P U) 是一个编织幺半群函子$\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$。$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\otimes}$op 都是带基点的编织融合范畴，其简单对象构成的群为A，它们的二次型（即简单对象的自编织）分别为$c_{a,a} = \theta_a$ 和$c_a^{-1}{}_{,a} = \theta_a^{-1}$。根据 Joyal 和 Street 定理 [EGNO15，定理 8.4.12],，保持二次型的简单对象群同态由编织幺半群函子诱导，且该函子在幺半群自然同构意义下唯一。将其应用于 P，得到满足 (A1)–(A3) 且带有 P$a \cong Pa$ 的 (P U)；由于 P 是双射，它是一个等价。

(2) 函子 P^2, 具有幺半群结构 P$(U_{X,Y}) \circ U_{PY,PX}$是 $\mathcal{C}$的编织自等价，在 A上诱导 $P^2 = 1$。由 (1) 中的唯一性可知，它与 $id_{\mathcal{C}}$幺半同构，因此存在 β 满足 (A4)。

(3) 根据命题 4.10，$\mathsf{P}(\beta_X)^{-1}\beta_{\mathsf{P}X} = \ell_{a,\mathsf{P}X}$，其中 $a \in A$ 是 β 的相干性障碍；根据命题 4.12(b)，只需证明 $a \in R_+ = \mathrm{Im}(1+P)$：若 $a = b + Pb$，则 $\beta \circ \ell_{-b}$ 是相干的。令 $x \in K_+ = \mathrm{Ker}(1-P)$，并令 ξ 为 x 上的一个 P-结构（引理 3.19）。β 和 $\beta_x = \mathsf{P}(\xi)\,\xi$ 的自然性给出

$$\beta_{\mathsf{P}x} = \mathsf{P}^2(\xi)\,\beta_x\,\xi^{-1} = \mathsf{P}^2(\xi)\,\mathsf{P}(\xi) = \mathsf{P}(\beta_x).$$

因此 $B(a,\ x) = \ell_{a,\ \mathsf{P}x} = 1$ 对所有 $x \in K_+$，也就是说，$a \in K_+^\perp = R_+$ 由引理6.1(c)。 □

从现在起，我们固定一个反幺半对合$(\mathsf{P}\ U,\ \beta)$，其相干性诱导出 P；由命题6.2可知它存在。

引理 6.3。 $\eta|_{K_-}$ 是 K_-的一个特征。

证明。设 $b \in K_-$。则 $b \otimes \mathsf{P}b \cong b + Pb = 0$，因此由命题3.23 $\mathrm{L}(b)$ 是单位元$\mathrm{M}(0)$的倍数，且倍数为 $\varepsilon(\mathrm{L}(b)) = \eta_{-b} = \eta_b$（定义4.17，以及命题4.18(c)，因为 β 是相干的）。因此 $\mathrm{L}(b) = \eta_b \mathrm{M}(0)$，并且 $\eta|_{K_-}$ 是一个特征，因为L 是乘法保持的（命题3.37）。□

由于 B 是非退化的，特征 $\eta|_{K_-}$ 可延拓为 A的一个特征，因此存在 $w \in A$，使得 $\eta_b = B(w,b)$ 对于 $b \in K_-$成立。定义 n 为 $2^n := |K_-|/|R_-|$。

命题 6.4。

$$M_a = \begin{cases} 2^{n/2}, & a \in -w + R_-, \\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

证明。 根据定理 4.20（c）和引理6.1（a），

$$M_a = |A|^{-1/2} \sum_{b \in K_-} B(a,b)\,\eta_b = |A|^{-1/2} \sum_{b \in K_-} B(a+w,b).$$

该和在 $|K_-|$ 时为 $a + w \in K_-^\perp = R_-$，而在 0 时为其他情况，并且根据引理 $|K_-|\,|R_-| = |A|$ 6.1（c），因此 $|A|^{-1/2}|K_-| = \left(|K_-|/|R_-|\right)^{1/2} = 2^{n/2}$。 □

由于 M_a 应为一个整数，n 应为偶数。我们将在下一个命题中解释这一点，以及 M_a 为何是 2 的幂。

命题 *6.5. (a)* 对于 $x, y \in K_+$，*M(x)M(y)* 是 *M*$(x+y)$ 的非零倍数，并且 *M(y)M(x)* $= B$*(x, y) M(x)M(y)*，其中 $B(x,y) = \pm 1$。*(b)* $\mathfrak{M}$ 的中心由 *M(r)* 张成，$r \in R_+$，而 B 在 K_+/R_+上诱导出一个非退化交替形式，其维数为 n，因此必为偶数。*(c)* 对每个满足 $p_a \neq 0$的 $a \in A$，$\mathbb{C}l_n(\mathbb{C}) \cong \mathit{Mat}_{2^{n/2}}(\mathbb{C})$。

证明. (a) $\xi_x \cdot \xi_y$是一个同构 $x+y \to \mathsf{P}(x+y)$，因此 $\mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y) = [x+y, \xi_x \cdot \xi_y]$是 $\mathrm{M}(x+y)$ 的非零倍数（命题 3.14）。由引理 5.21，对于 $E = 1$，$\mathrm{M}(x) \cdot \mathrm{M}(y) \cdot \mathrm{M}(x)^{-1} = [y, \xi_y \circ \ell_{x,y}] = \chi_y([x])\ \mathrm{M}(y)$ $= B(x,y)\ \mathrm{M}(y)$。最后，$B(x,y) = B(Px, Py)^{-1} = B(x,y)^{-1}$，所以 $\mathrm{M}(y)\mathrm{M}(x) = B(x,y)\ \mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y)$。

(b) 根据 (a)，$\mathfrak{M}$ 是 K_+ 的一个扭曲群代数，其交换子配对为 $B|_{K_+}$，因此其中心由 $\mathrm{M}(x)$ 所张成，其中 x 属于根基 $K_+ \cap K_+^\perp = R_+$（引理 6.1（b）、（c））。诱导形式

在 K_+/R_+ 上是非退化的，并且由于 $\mathrm{M}(x)$ 与自身交换，所以是交替的。根据引理n6.1（d），其维数为。

(c) 选择 $x_1, \dots, x_n \in K_+$，使它们的像构成 K_+/R_+ 的一组基，并且对所有 $i \neq j$ 都有 $B(x_i, x_j) = -1$；这是可能的，因为 $\mathbb{F}_2^n$ 上的所有非退化交错型都彼此等价，而矩阵 $J-1$（其中 J 为全 1 矩阵）就是其中之一，因为在 $\mathbb{F}_2$ 上 $(J-1)^2 = 1$。由 (a) 可知，$\mathrm{M}(x_i)$ 两两反对易；根据引理 5.20，$\mathrm{M}(x_i)^2 = \theta_{x_i}^{-1}\mathrm{L}(x_i)$，后者在 $p_a\mathfrak{M}$ 上通过标量 $\theta_{x_i}^{-1}\chi_a([x_i]) = \theta_{x_i}^{-1}B(a, x_i) \neq 0$ 作用。因此，将每个 $\mathrm{M}(x_i)$ 除以该标量的一个平方根后，$p_a\mathrm{M}(x_i)$ 满足 $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ 的关系。它们生成 $p_a\mathfrak{M}$，因为每个 $\mathrm{M}(x)$ 都是若干 $\mathrm{M}(x_i)$ 的乘积与某个满足 $r \in R_+$ 的 $\mathrm{M}(r)$ 的倍数。由于 $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \cong$ 矩阵代数 $_{2^{n/2}}(\mathbb{C})$ 是简单对象，$p_a\mathfrak{M} \cong \mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$。□

因此，不可约模 V_a 是$\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$的旋量模，其维数为 $2^{n/2} = M_a$，与命题 6.4一致。

回忆一下，非退化交替形式 $\langle -, - \rangle$ 上的二次精化是一个映射 $q\colon V \to \{\pm 1\}$，满足 $q(x+y) = q(x)\,q(y)\,\langle x, y\rangle$，其 ***Arf*** 不变量 $\mathrm{Arf}(q) := 2^{-n/2}\sum_{x\in V} q(x)$ 为 ± 1。

命题 6.6。扭结在 $\Sigma = -w + R_-$ 上为常数，其值为

$$\theta_w = \lambda\ \mathrm{Arf}(q) = \pm 1, \qquad \lambda = |A|^{-1/2}\sum_{a\in A}\theta_a,$$

其中 q 是由 B 在 K_-/R_-上诱导的形式的二次精化 $q(b)$。这是推论 *5.31*，其中 $\sigma = \mathrm{Arf}(q)$，这就是 *[LT18]*的公式。

证明。根据命题 6.4，$\Sigma = -w + R_-$，以及推论 5.31，θ 在 Σ 上为常值，取值为 $\lambda\sigma = \pm 1$；由于 $\theta_{-x} = \theta_x$，该值为 θ_w。对于 $r \in R_-$，常值性给出 $\theta_{-w} = \theta_{-w+r} = \theta_{-w}\,\theta_r\,B(-w, r)$，因此 $\theta_r = B(w, r) = \eta_r$。还需证明 $\sigma = \mathrm{Arf}(q)$。

设 $b \in K_-$。于是 $\theta_b = \theta_{-b} = \theta_{Pb} = \theta_b^{-1}$，故 $\theta_b = \pm 1$，且 $\eta_b^2 = \eta_{2b} = \theta_{2b} = \theta_b^4 = 1$，因为 $2b \in R_-$。对于 $r \in R_-$，我们有 $B(b, r) = 1$ 以及 $\eta_r = \theta_r$，因此 $q(b+r) = q(b)\,\theta_r^2 = q(b)$，并且 q 下降到 K_-/R_-。在那里，B 诱导出一个非退化形式（引理 6.1(c)），由于 $B(b,b) = \theta_{2b}\theta_b^{-2} = 1$，该形式是交替的；而 $q(b+b') = q(b)\,q(b')\,B(b, b')$。由于 $|K_-/R_-| = 2^n$ 和$|A| = |K_-|\,|R_-|$，我们得到

$$\sigma = |A|^{-1/2}\sum_{b\in K_-}\eta_b\,\theta_b = \frac{|R_-|}{|A|^{1/2}}\sum_{x\in K_-/R_-} q(x) = \mathrm{Arf}(q).$$

□

6.2. 形如 $\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$ 的范畴。设 $\mathcal{E}$ 是一个伪酉模张量范畴，我们将其视为严格范畴；设 $n := |\mathrm{Irr}(\mathcal{E})|$，并令 w、x、y 遍历 $\mathrm{Irr}(\mathcal{E})$。设 $\mathcal{E}$ 是具有逆编织的 $\overline{\mathcal{E}}$，$\bar{c}_{v,\,v'} := c_{v',v}^{-1}$；其扭结为 θ^{-1}，其 S-矩阵为S，因为其单值是 $\mathcal{E}$ 的单值的逆（第 4.1 节）。设 $\mathcal{C} := \mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$：其对象是 $u\boxtimes v$ 与 u、$v \in \mathcal{E}$ 的直和，且 $\mathrm{Hom}(u\boxtimes v, u'\boxtimes v') = \mathrm{Hom}(u, u') \otimes \mathrm{Hom}(v, v')$，配备分量张量积和编织

$$c_{u\boxtimes v,\,u'\boxtimes v'} = c_{u,u'}\boxtimes c_{v',v}^{-1}\colon (u\otimes u')\boxtimes(v\otimes v') \to (u'\otimes u)\boxtimes(v'\otimes v).$$

它是一个严格伪幺正模张量范畴，$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \overline{\{x \boxtimes y\}}$，$(x \boxtimes y)^\vee = x^\vee \boxtimes y^\vee$,$d_{x\boxtimes y} = d_x d_y$, $\theta_{x\boxtimes y} = \theta_x \theta_y^{-1}$, $S_{x\boxtimes y,\ x'\boxtimes y'} = S_{x,\ x'} S_{y,\ y'}$和 $D_{\mathcal{C}} = D_{\mathcal{E}}^2$。

令 P 交换这两个因子：

$$\mathsf{P}(u \boxtimes v) := v \boxtimes u, \qquad \mathsf{P}(f \boxtimes g) := g \boxtimes f.$$

于是 $\mathsf{P}^2 =$ 恒等态射$_{\mathcal{C}}$、$\mathsf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$，且 P 是严格幺半的，$\mathsf{P}(X \otimes Y) = \mathsf{P}X \otimes \mathsf{P}Y$，但它会反转编织：

$$\mathsf{P}(c_{X,Y}) = c_{\mathsf{P}Y,\mathsf{P}X}^{-1}, \tag{6.1}$$

因为 $\mathsf{P}(c_{u,\ u'} \boxtimes c_{v'\ v,}^{-1}) = c_{v'\ ,\ v}^{-1} \boxtimes c_{u,\ u'}$ 而 $c_{\mathsf{P}Y,\ \mathsf{P}X} = c_{v'\boxtimes u',\ v\boxtimes u} = c_{v',\ v} \boxtimes c_{u\ u',}^{-1}$。$\mathcal{C}$的编织使 P 成为反幺半的：

引理 6.7。

$$U_{X,Y} := c_{\mathsf{P}Y,\mathsf{P}X} \colon \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}X \to \mathsf{P}X \otimes \mathsf{P}Y = \mathsf{P}(X \otimes Y), \qquad U_0 := id_{\mathbf{1}}, \qquad \beta := id$$

构成一种反幺半对合，其含义见定义 *2.3*。

证明。(A1)成立，因为根据六边形公理，两边都是正半扭转 $\mathsf{P}Z \otimes \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}X \to \mathsf{P}X \otimes \mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}Z$；(A2)成立，因为 $c_{\mathbf{1},-} = c_{-,\mathbf{1}} =$ 恒等态射。由 (6.1)，(A3) 两边都是 $\mathsf{P}Y \otimes \mathsf{P}X$ 的恒等式：$\mathsf{P}(c_{X,Y})\, U_{X,Y} = c^{-1}\, \mathsf{P}_{Y,}\mathsf{P}_X c_{\mathsf{P}Y,}$ $_{\mathsf{P}X}$和 $U_{Y,X}\, c^{-1}\, \mathsf{P}_{X,}\mathsf{P}_Y = c_{\mathsf{P}X,\mathsf{P}Y} c^{-1}\, \mathsf{P}_{X,}\mathsf{P}_Y$。同理，(A4) 在 $\beta =$恒等态射 下写作 $\mathsf{P}(U_{X,Y})\, U_{\mathsf{P}Y,\mathsf{P}X} = \mathsf{P}(c_{\mathsf{P}Y,\mathsf{P}X})$ $c_{X,Y} = c_X^{-1}{}_{,Y} c_{X,Y} =$ 恒等态射 和 $\mathsf{P}(U_0)U_0 =$ 恒等态射，而 (Coh) 显然成立。□

从现在起，u和 v也遍历 $\mathrm{Irr}(\mathcal{E})$。由于 $(x \boxtimes y)^\vee = x^\vee \boxtimes y^\vee$，我们有 $(\mathsf{P}(x \boxtimes y))^\vee = y^\vee \boxtimes x^\vee$，因此

$$\mathrm{Fix}(\mathsf{P}) = \{u \boxtimes u\}, \qquad \mathrm{Fix}(\mathsf{T}) = \{u \boxtimes u^\vee\}, \qquad \dim \mathfrak{M} = n.$$

由于 $\beta =$ 恒等态射，$u \boxtimes u$的恒等式是一个 P-结构，并且我们取 $\mathbf{M}(u \boxtimes u) := [u \boxtimes u,$恒等态射$]$.

命题 6.8。

$$\mathrm{M}(u \boxtimes u)\, \mathrm{M}(v \boxtimes v) = \mathrm{L}(u \boxtimes v) = \sum_w N_{uv}^w\, \mathrm{M}(w \boxtimes w),$$

使得 $\mathrm{M}(u\boxtimes u) \mapsto [u]$是代数 $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{F}(\mathcal{E})$的代数同构，在此同构下，$\mathrm{L}(u\boxtimes v) \mapsto [u][v]$,$\varepsilon$ 成为 $[\mathbf{1}]$, 的系数，而 $\star$ 成为 $[u] \mapsto [u^\vee]$。此外，$\eta \equiv 1$ 在不动点集(T)上。

证明。对于 $Y = u \boxtimes \mathbf{1}$，我们有 $\mathsf{P}Y = \mathbf{1} \boxtimes u$, $Y \otimes \mathsf{P}Y = u \boxtimes u$，并且$b_Y = U_{Y,\mathsf{P}Y} = c_{u\boxtimes\mathbf{1},\,\mathbf{1}\boxtimes u} =$$c_{u,}$ $_{\mathbf{1}} \boxtimes c_{u}^{-1}{}_{,\mathbf{1}} =$恒等态射，因为 $\beta =$恒等态射；所以 $\mathbf{L}(u \boxtimes \mathbf{1}) = [u \boxtimes u,$恒等态射$] = \mathbf{M}(u \boxtimes u)$，同理 $\mathbf{L}(\mathbf{1} \boxtimes u) = \mathbf{M}(u \boxtimes u)$。根据命题 3.37,

$$\mathrm{M}(u \boxtimes u)\, \mathrm{M}(v \boxtimes v) = \mathrm{L}(u \boxtimes \mathbf{1})\, \mathrm{L}(\mathbf{1} \boxtimes v) = \mathrm{L}(u \boxtimes v),$$
$$\mathrm{L}(u \boxtimes \mathbf{1})\, \mathrm{L}(v \boxtimes \mathbf{1}) = \mathrm{L}\big((u \otimes v) \boxtimes \mathbf{1}\big) = \sum_w N_{uv}^w\, \mathrm{M}(w \boxtimes w).$$

这就得到了所示公式和同构，并且 ε 是 $\mathrm{M}(\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1}) \mapsto [\mathbf{1}]$的系数。由引理 3.38，$\mathrm{M}(u\boxtimes u)^\star =$$\mathrm{L}(u\boxtimes \mathbf{1})$ $^\star =$$\mathrm{L}(u^\vee \boxtimes \mathbf{1}) =$$\mathrm{M}(u^\vee \boxtimes u^\vee)$。最后，由定义 4.17，$\eta_{u\boxtimes u^\vee} = \varepsilon(\mathrm{L}(u^\vee \boxtimes u))$ 是 $[\mathbf{1}]$ 在 $[u^\vee][u]$中的系数，即 $N_{u^\vee u}^{\mathbf{1}} = 1$。□

命题 6.9。 $M_{x\boxtimes y} = \delta_{y,\ x^\vee}$，因此 $\Sigma = \{x \boxtimes x^\vee\}$ 且 $\mathfrak{M} \cong \mathbb{C}^{\oplus n}$。在命题 *6.8*给出的同构下，$V_{x\boxtimes x^\vee}$ 是一个一维模，其中 $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ 通过特征 χ_x作用。

证明。在命题 6.8 的同构下，$\mathrm{L}\colon\ \mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \otimes \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ 是乘法；由于 $\mathcal{E}$ 的 S-矩阵为 S，其标记为 y 的本原幂等元为 $e_{y^\vee}$，因此 $p_{x\boxtimes y} = \mathrm{L}(e_x \otimes e_{y^\vee}) \mapsto e_x e_{y^\vee} = \delta_{y,x^\vee} e_{x_\circ}$ 所以 $p_{x\boxtimes y}\mathfrak{M}$ 对于 $y = x^\vee$ 为 $\mathbb{C}e_x$，其他情况下为 0，并且根据定理 4.20(b)、(c)，$M_{x\boxtimes y} = \dim V_{x\boxtimes y} = \delta_{y,x^\vee}$；在 $V_{x\boxtimes x^\vee} = \mathbb{C}e_x$ 上，$\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ 作用为 χ_{x°。□

命题 6.10。 $\theta_{x\boxtimes x^\vee} = 1$ 对于每个 $x \boxtimes x^\vee \in \Sigma$，以及 $\lambda = \sigma = 1$，根据推论 *5.31*。

证明。 $\theta_{x\boxtimes x^\vee} = \theta_x \theta_{x^\vee}^{-1} = 1$，以及

$$p_+ = \sum_{x,y} d_x^2 d_y^2\, \theta_x \theta_y^{-1} = \left|\sum_x d_x^2 \theta_x\right|^2 = D_{\mathcal{E}}^2 = D_{\mathcal{C}},$$
$$\sigma = \frac{1}{D_{\mathcal{C}}} \sum_u \eta_{u\boxtimes u^\vee}\, d_u^2\, \theta_{u\boxtimes u^\vee} = \frac{1}{D_{\mathcal{E}}^2} \sum_u d_u^2 = 1. \qquad \square$$

注 6.11。 这些结果反映了莫比乌斯带的定向双覆盖是一个圆环这一事实。在穿过 P 的切口处粘合、并以 $\mathcal{E}\boxtimes\mathcal{E}$ 着色的带上的图，与以 $\overline{\mathcal{E}}$ 着色的圆环上的图相同：核心环 $\mathrm{M}(u\boxtimes u)$ 提升为环绕圆环、以 u 着色的环，而边界环 $\mathrm{L}(u\boxtimes v)$ 则提升为两个以 u 和 v 着色的边界圆；圆环上这类环的代数是 $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$。同样，维数 $\delta_{y,\ x^\vee} = M_{x\boxtimes y}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathbf{1}, x\otimes y)$ 的维数；Reshetikhin–Turaev 理论将这个空间赋给带有两个标记点、分别以 x 和 y 着色的球面，而它是带有一个以$x\boxtimes y$着色的标记点的 $\mathbb{RP}^2$ 的双覆盖。

⌟

6.3. 秩六的某些非 pointed 范畴。 考虑具有六个简单对象 $\mathbf{1}, \epsilon, \phi_1, \phi_2, \psi_+, \psi_-$ 且维数为 1,1, 2, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ 的伪酉模范畴，以及融合规则

$$\epsilon\otimes\epsilon = \mathbf{1}, \qquad \epsilon\otimes\phi_i = \phi_i, \qquad \epsilon\otimes\psi_\pm = \psi_\mp,$$
$$\phi_i\otimes\phi_i = \mathbf{1}\oplus\epsilon\oplus\phi_{3-i}, \qquad \phi_1\otimes\phi_2 = \phi_1\oplus\phi_2, \qquad \phi_i\otimes\psi_\pm = \psi_+\oplus\psi_-,$$
$$\psi_+\otimes\psi_+ = \mathbf{1}\oplus\phi_1\oplus\phi_2, \qquad \psi_-\otimes\psi_- = \mathbf{1}\oplus\phi_1\oplus\phi_2, \qquad \psi_+\otimes\psi_- = \epsilon\oplus\phi_1\oplus\phi_2,$$

那些 $\mathfrak{so}_5$ 在 2级的范畴。AFT16 中构造了四个具有这些融合规则且各自带有编织的融合范畴 [AFT16, §6。2], 而根据 [VS26] 中对低秩无重数融合范畴的普查，不存在其他范畴。我们需要由此得到的模范畴中的两个，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$。（另外两个是它们在 $\sqrt{5}\mapsto -\sqrt{5}$下的伽罗瓦共轭，仍然是伪酉的。）两者都有 $\theta_{\mathbf{1}} = \theta_\epsilon = 1$ 和 $\theta_{\phi_1} = \theta_{\phi_2} = e^{4\pi i/5}$；它们的区别在于

$$\mathcal{C}_1:\ \theta_{\psi_\pm} = \pm i, \qquad\qquad \mathcal{C}_2:\ \theta_{\psi_\pm} = \pm 1.$$

$\mathcal{C}_1$ 是 $\widehat{\mathfrak{so}}_5$ 在 2 级的可积表示范畴，而 $\mathcal{C}_2$ 是 [BC17]中记作 $\mathrm{USp}(4)_2^\vee$ 的范畴。对这两个范畴，$D = \sqrt{20}$ 和 $\lambda = p_+/D = -1$。我们需要的 S 的条目为$\sqrt{20}\,S_{X,\ \mathbf{1}} = d_X$；对于 $X \in \{\mathbf{1}, \epsilon, \phi_i\}$，有 $\sqrt{20}\,S_{X,\ \epsilon} = d_X$；$\sqrt{20}\,S_{\psi_\pm,\ \epsilon} = -\sqrt{5}$；$S_{\phi_i,\ \psi_\pm} = 0$；而对于 $\mathcal{C}_1$，有$\sqrt{20}\,S_{\psi_s,\ \psi_t} = st\sqrt{5}$，但对于 $\mathcal{C}_2$ 则有 $-st\sqrt{5}$（$s,\ t = \pm$），这是平衡公理所要求的。

6.3.1. 具有相干性的反幺半对合。我们来研究这些范畴是否存在具有相干性的反幺半对合。首先，我们仅利用模数据证明， $\mathcal{C}_1$不存在具有相干性的反幺半对合。

命题 6.12. *$\mathcal{C}_1$ 在定义2.3 和定义 4.11.所述的相干性条件下，不存在反幺半对合*

证明. 假设 (P U, β) 是一个。保持 $\theta_{PX} = \theta_X$ （引理 3.32）中融合规则的 $\mathcal{C}_1$ 简单对象的唯一置换是 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2, \psi_+ \leftrightarrow \psi_-$， 因此 Fix(P) = Fix(T) $= \{\mathbf{1}, \epsilon\}$。那么 $M_{\phi_i} = 2(1+\eta_\epsilon)/\sqrt{20}$ 是整数当且仅当 $\eta_\epsilon = -1$，于是 $M_{\mathbf{1}} = M_\epsilon = M_{\phi_i} = 0$和 $M_{\psi_\pm} = 1$。所以 $\Sigma = \{\psi_+, \psi_-\}$，在其上 $\theta = \pm i$ 既非常数也非 ± 1，这与推论 5.31 矛盾。□

注 6.13. 这最初由 Barkeshli 和 Cheng 发现 [BC17]. ⌟

对于 $\mathcal{C}_2$，模数据决定了除一个符号之外的一切。

命题 6.14. *设 (P U, β) 是 $\mathcal{C}_2$ 上具有相干性的反幺半对合。则不动点集(P) $=$ Fix(T) $= \{\mathbf{1}, \epsilon, \psi_+, \psi_-\}$, 维数 $\mathfrak{M} = 4$，且存在符号 η_0，使得*

$$\eta_\epsilon = -1, \qquad \eta_{\psi_\pm} = \pm\eta_0, \qquad \Sigma = \{\psi_{-\eta_0}\}, \qquad M_{\psi_{-\eta_0}} = 2, \qquad \mathfrak{M} \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

作用于 Σ 上的扭结为 $-\eta_0 = \lambda\sigma$，且 $\sigma = \eta_0$，正如推论 5.31所要求的。将 β 替换为 $\beta \circ \ell_\epsilon$ 会得到另一个反幺半对合，其 η_0的符号相反。

证明。现在该置换为 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$，其中 $\psi_\pm$ 不动，因此得到 Fix(P) 和 Fix(T)，并由命题 3.23 得到 $\dim \mathfrak{M} = 4$。 M_{ϕ_i} 的整性再次给出 $\eta_\epsilon = -1$，因为 $S_{\phi_i,\psi_\pm} = 0$。于是 $M_{\mathbf{1}} = -M_\epsilon = \frac{1}{2}(\eta_{\psi_+} + \eta_{\psi_-})$，且只有当 $\eta_{\psi_-} = -\eta_{\psi_+}$ 时两者才均为非负： $-\eta_0$；于是$M_{\psi_\pm} = 1 \mp \eta_0$。根据定理 4.20(c)，我们于是有 $\mathfrak{M} \cong$ 矩阵代数$_2(\mathbb{C})$。$\psi_{-\eta_0}$ 的扭结为 $-\eta_0$，并且

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{20}}\left(1 - 1 + \sqrt{5}\,\eta_0 + \sqrt{5}\,(-\eta_0)(-1)\right) = \eta_0.$$

最后， $\beta \circ \ell_\epsilon$ 再次是幺半的，并且满足（Coh），因为 $\epsilon \otimes \mathrm{P}\epsilon \cong \mathbf{1}$ （定义 4.11 和命题 4.12(b)）；它将 η_Y与 $\chi_Y([\epsilon]) = S_{\epsilon\text{相乘},\,Y}/S_{\mathbf{1},\,Y}$，这对于 $Y = \psi_\pm$是 -1。□

It r剩下要证明的是， $\mathcal{C}_2$ 确实具有一个相干的反幺半对合 .

命题 6.15。 *$\mathcal{C}_2$ 具有一个相干的反幺半对合，并且命题 6.14 中的两种符号 η_0 均出现。*

证明。 参见附录 A.4。 □

代数 $\mathfrak{M}$ 随后可根据推论 3.25明确写出。

命题 6.16。 *对于 $\eta_0 = 1$，不动点集(P) $\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ 在融合规则下，* d

$$\mathrm{M}(\epsilon)^2 = -\mathrm{M}(\mathbf{1}), \qquad \mathrm{M}(\psi_\pm)^2 = \mathrm{M}(\mathbf{1}),$$

$$\mathrm{M}(\epsilon)\mathrm{M}(\psi_+) = \mathrm{M}(\psi_-) = -\mathrm{M}(\psi_+)\mathrm{M}(\epsilon), \qquad \mathrm{M}(\psi_+)\mathrm{M}(\psi_-) = -\mathrm{M}(\epsilon) = -\mathrm{M}(\psi_-)\mathrm{M}(\psi_+).$$

因此， $\mathfrak{M}$ 是由反交换的$\mathrm{Cl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ $\mathrm{M}(\psi_\pm)$生成的克利福德代数，其中$\mathrm{L}(\epsilon) = -\mathrm{M}(\mathbf{1})$、$\mathrm{L}(\phi_i) = 0$、$\mathrm{L}(\psi_\pm) = \pm\mathrm{M}(\mathbf{1})$以及 $p_{\psi_-} = \mathrm{M}(\mathbf{1})$。

证明。在 $\mathcal{C}_2$ 中，对于 X、$Y \in \mathrm{Fix(P)}$，$X \otimes Y$ 的唯一 P-不变直和项是 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ 中的乘法，因此推论 3.25 中的每个乘法都只有一项。其系数 $\xi_X \xi_Y R_Z^{XY}/(u_Z^{XY}\xi_Z)$ 按照附录 A 的记号，使用附录 A.4 的数据求得。L 的取值由命题 4.18 得出，因为每个 $\mathrm{L}(Y)$ 都是中心的，因而是标量，并且 $\varepsilon(\mathrm{L}(Y)) = \eta_{Y^\vee} = \eta_Y$如 $Y^\vee \cong Y$；且 $p_{\psi_-} = \mathrm{M}(1)$，因为 $\Sigma = \{\psi_-\}$。关系 $\mathrm{M}(\epsilon)^2 = \theta_\epsilon^{-1}\mathrm{L}(\epsilon) = -\mathrm{M}(1)$ 也可由引理 5.20 得出，无需使用这些数据。□

因此，$\mathfrak{M}$ 有一个不可约模 V_{ψ_-}，维数为二，尽管 ψ_- 并不可逆。

6.3.2. 没有相干性的反幺半对合。尽管 $\mathcal{C}_1$ 不具有带相干性的反幺半对合，但它确实具有一个无相干性的反幺半对合，并且定理 4.20和 5.29适用于它。

命题 6.17。 $\mathcal{C}_1$ 具有一个反幺半对合 $(\mathrm{P}\ U, \beta)$，在同构意义下以及将 β 替换为 $\beta \circ \ell_\epsilon$的意义下唯一。它们都不具有相干性：$O = \epsilon$。对于其中每一个：

(a) 不动点集(P) = 不动点集(T) = $\{\mathbf{1}, \epsilon\}$，$\eta_\epsilon = -1$，$M_{\mathbf{1}} = M_\epsilon = M_{\phi_i} = 0$ 和 $M_{\psi_\pm} = 1$，因此$\Sigma = \{\psi_+, \psi_-\}$。*(b)* $\mathfrak{M}$ 具有基 $\mathrm{M}(\mathbf{1})$、$\mathrm{M}(\epsilon)$，其中 $\mathrm{M}(\epsilon)^2 = -\mathrm{M}(\mathbf{1})$，因此 $\mathfrak{M} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$。存在一个符号 s，使得

$$\mathrm{L}(\epsilon) = -\mathrm{M}(\mathbf{1}), \qquad \mathrm{L}(\phi_i) = 0, \qquad \mathrm{L}(\psi_\pm) = \pm is\,\mathrm{M}(\epsilon), \qquad p_{\psi_\pm} = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{M}(\mathbf{1}) \pm is\,\mathrm{M}(\epsilon)\big).$$

当 s 被替换为 ξ_ϵ 时，符号会改变；当 $-\xi_\epsilon$被替换为 β 时，符号也会改变；后者在 $\beta \circ \ell_\epsilon$上具有相同的P-结构。$\epsilon$。*(c)* $\mathrm{M}(O) = \mathrm{M}(\epsilon)$ 通过 $V_{\psi_\pm}$ 以 $o_{\psi_\pm} = \mp is$作用，且 $\sigma = s$。因此 $\theta_{\psi_\pm} = \pm i = \lambda\sigma\, o_{\psi_\pm}$，这正是定理 5.29所要求的，尽管 θ 在 Σ上并非常数。

证明。存在性和唯一性的证明见附录 A.4。由于 $O \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}_1) = \{\mathbf{1}, \epsilon\}$，且 $\mathcal{C}_1$ 不存在相干的反幺半对合（命题 6.12），$O = \epsilon$。

(a) 不动点集(P)可由命题 6.12中的置换读出，且 不动点集(T) = 不动点集(P)，因为所有简单对象都是自对偶的。根据命题4.18(c)，$\eta_\epsilon^{-2} = \chi_\epsilon([\epsilon]) = 1$，且 $\eta_{\epsilon^\vee} = \eta_\epsilon$。其余部分的计算见命题6.12的证明，其中只用到了定理 4.20(c) 和模数据。

(b) 由命题 3.23，$\dim \mathfrak{M} = |\mathrm{Fix(P)}| = 2$。每个 $\mathrm{L}(Y)$ 都是中心的，并通过$\chi_{\psi_t}([Y]) = S_{Y,\psi_t}/S_{\mathbf{1},\psi_t}$作用于 V_{ψ_t}，其值对 $Y = \epsilon$ 为 -1，对 $Y = \phi_i$ 为 0，对 $Y = \psi_\pm$ 为 $\pm t$。因此 $\mathrm{L}(\epsilon) = -\mathrm{M}(1)$，$\mathrm{L}(\phi_i) = 0$，$\mathrm{L}(\psi_\pm) = \pm(p_{\psi_+} - p_{\psi_-})$，且 $\mathrm{L}(\psi_+)^2 = \mathrm{M}(1)$；由引理 5.20，$\mathrm{M}(\epsilon)^2 = \theta_\epsilon^{-1}\mathrm{L}(\epsilon) = -\mathrm{M}(1)$。由于 $\psi_+ \otimes \mathrm{P}$ $\psi_+ = \epsilon \oplus \phi_1 \oplus \phi_2$ 包含 ϵ 但不含 $\mathbf{1}$，由命题 3.23，$\mathrm{L}(\psi_+)$ 是 $\mathrm{M}(\epsilon)$ 的倍数；由于 $\mathrm{M}(\epsilon)^2 = -\mathrm{M}(1)$，该倍数为符号 s下的 is。将ξ_ϵ 替换为 $-\xi_\epsilon$ 会改变 $\mathrm{M}(\epsilon)$ 的符号，进而改变 s的符号。对于 $\beta' = \beta \circ \ell_\epsilon$，我们有$\beta'_\epsilon = \chi_\epsilon([\epsilon])\ \beta_\epsilon = \beta_\epsilon$，所以可以保留 ξ_ϵ和 $\mathrm{M}(\epsilon)$；而$\beta'_{\psi_+} = \chi_{\psi_+}([\epsilon])\beta_{\psi_+} = -\beta_{\psi_+}$ 会改变b_{ψ_+} 和 $\mathrm{L}(\psi_+)$ 的符号（定义 3.36），因此 s 会改变符号。最后，$p_{\psi_\pm} = \frac{1}{2}(\mathrm{M}(1) \pm \mathrm{L}(\psi_+))$。

–

（c）根据（b），$\mathrm{M}(\epsilon) = -is\mathrm{L}(\psi_+)$，其通过 $\mp is$作用于 $V_{\psi_\pm}$。于是，$\eta_Y^O = \varepsilon(\mathrm{L}(Y)$ $\mathrm{M}(\{\mathrm{v8}\}))$（如 $Y^\vee \cong Y$）对 $Y = \psi_\pm$ 为 $\mp is$，其他情况下为 0，并且

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{20}}\left(\overline{(-is)}\,\sqrt{5}\,(i)^{-1} + \overline{(is)}\,\sqrt{5}\,(-i)^{-1}\right) = \frac{1}{2}(s+s) = s.$$

由于 $\lambda=-1$，$\lambda\sigma\, o_{\psi_\pm}=(-s)(\mp is)\ =\pm i=\theta_{\psi_\pm}$。 □

附录 A. 在骨架模型中寻找反幺半对合

我们描述如何根据 $\mathcal{C}$ 的骨架模型的 F-符号和 R-符号，判定 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 的给定置换是否由一个反幺半对合诱导（无论是否具有相干性），如何找出所有此类对合，以及如何读出 O 和 η。我们分两个步骤进行，先执行 $(\mathsf{P}\ U)$，然后执行 β。为简单起见，我们假设融合规则是无重数的；下面的一些论证无法推广到具有重数的情形。

A.1. **设定。** 如推论 3.25中一样，我们舍弃严格性假设，并令 $\mathcal{C}$ 为骨架模型，此时满足 $\dim \mathrm{Hom}(c,\ a\otimes b)\le 1$ 对于简单对象 a，b，c。每当该空间非零时，选取一个非零的 $v_c^{ab}\in\mathrm{Hom}(c,\ a\otimes b)$，并令 $v_a^{\mathbf{1}a}=v_a^{a\mathbf{1}}=id_a$。于是，$\mathcal{C}$的数据就是 F-符号和 R-符号，它们定义为

$$(\mathrm{A.1})\qquad (v_e^{ab}\otimes id_c)\,v_d^{ec}=\sum_f F^{abc}_{d;ef}\,(id_a\otimes v_f^{bc})\,v_d^{af},\qquad c_{a,b}\,v_c^{ab}=R_c^{ab}\,v_c^{ba}.$$

设 P 是 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 的一个置换，满足 $P^2=1$，并保持融合规则且满足 $\theta_{Pa}=\theta_a^{-1}$。这些条件是必要的：反幺半对合会置换 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 并保持融合规则，β 给出 $\mathsf{P}^2X\cong X$，而 $\theta_{\mathsf{P}X}=\theta_X^{-1}$ 由引理 3.32 得出。由平衡公理可知，它们蕴含 $S_{Pa,Pb}=S_{a,b}$。

A.2. **寻找函子** $(\mathsf{P}\ U)$。 在骨架中，P 作用于简单对象上的方式为 P。推论 3.25 中的线性映射是一个标量，我们用同一个字母表示它：

$$U^{-1}_{a,b}\mathsf{P}(v_c^{ab})=\langle v_c^{ab}\rangle_{\mathsf{P}}=u_c^{ab}\,v_{Pc}^{Pb,Pa}.$$

取 b　　两个关系（A.1）的方框由 (B1)–(B4)，条件（A1）–（A3）变为

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A1})\quad F^{abc}_{d;ef}\,u_f^{bc}\,u_d^{af}=\left[(F_{Pd}^{Pc\,Pb\,Pa})^{-1}\right]_{Pe,Pf}\,u_e^{ab}\,u_d^{ec},\\ &(\mathrm{A2})\quad u_a^{\mathbf{1}a}=u_a^{a\mathbf{1}}=1,\\ &(\mathrm{A3})\quad u_c^{ab}=R_c^{ab}\,R_{Pc}^{Pa\,Pb}\,u_c^{ba}.\end{aligned}$$

此处 $u_a^{\mathbf{1}a}=u_a^{a\mathbf{1}}=U_0$ 由（A2）给出，我们通过 1 处的自然同构将其规范化为 $\mathbf{1}$。将$(\mathsf{P}\ U)$ 通过标量 $\varphi_a\in\mathbb{C}^\times$ 和 $\varphi_{\mathbf{1}}=1$替换为同构的反幺半函子，会将 u_c^{ab}变为$u_c^{ab}\,\varphi_a\varphi_b/\varphi_c$。我们称之为规范。

写成 $u_c^{ab}=|u_c^{ab}|\,e^{2\pi i x_c^{ab}}$。该系统变为

$$A\,x\equiv b\pmod{\mathbb{Z}},\qquad A\,\log|u|=\log|\rho|,$$

其中 A 是一个整数矩阵，元素属于 $\{0,\pm1,\pm2\}$。这里，ρ 是方程中两个系数的比值，而 $b=$ 是 $\arg\rho/2\pi$。第二个系统是在 $\mathbb{R}$ 上的普通线性代数问题；在幺正规范下，其解为 $|u|=1$。对于第一个系统，取整数矩阵 V 和 W，它们在 $\mathbb{Z}$ 上可逆，且满足 WAV 为对角矩阵，其非零元素为 d_1、……、d_r（史密斯标准形）。令 $y=V^{-1}x$ 和 $c=Wb$，该系统可写为

$$d_i\,y_i\equiv c_i\quad(i\le r),\qquad 0\equiv c_i\quad(i>r)\pmod{\mathbb{Z}}.$$

命题　**关于 A.1.** *(a)* 存在$(\mathsf{P}\ U)$ 诱导 P，当且仅当对于所有 $i>r$，都有 $c_i\in\mathbb{Z}$.

(b) 若如此，解 x 构成一个以$(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{n-r} \times \prod_{i\le r} \mathbb{Z}/|d_i|$为底的扭子，其中 n 是未知数的个数。*(c)* 同构意义下的解与 $\prod_{i\le r} \mathbb{Z}/|d_i|$一一对应。

证明。 (a) 和 (b) 可直接从对角系统读出。

(c) 诱导 P 的 (P U) 之间的同构恰好就是规范变换，因为 P 的自然同构是一个标量族 $\varphi_a \in \mathrm{End}(Pa) = \mathbb{C}$。在相位 x 上，规范群通过紧致环面 $\{(\varphi_a) \mid \varphi_{\mathbf{1}} = 1, |\varphi_a| = 1\}$ 作用；该环面是连通的，维数为$|\mathrm{Irr}(\mathcal{C})| - 1$，且在任一解处的稳定子都是有限群：它由满足 $\varphi_a\varphi_b = \varphi_c$（当且仅当$c \subset a \otimes b$）的 φ 组成，也就是说，它是 $\mathcal{C}$ 的通用分次群的特征；该群是有限的。因此，每个规范轨道的维数都是 $|\mathrm{Irr}(\mathcal{C})| - 1$。另一方面，规范轨道包含在解集中，而根据 (b)，解集的连通分支维数为 $n - r$。反幺半函子是张量函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\otimes \mathrm{op}}$；根据 Ocneanu 刚性 [ENO02，定理 2.31]，融合范畴之间的张量函子不存在非平凡变形。条件 (A3) 只会增加方程，因此解的每个变形都是规范变换，并且 $|\mathrm{Irr}(\mathcal{C})| - 1 = n - r$。于是，每个规范轨道都是连通的，且在一个紧致连通分支中维数达到全维，因此它就是整个连通分支；连通规范群也不会置换这些连通分支。因此，同构类与连通分支一一对应，也就是与 (b) 中的 $\prod_{i\le r} \mathbb{Z}/|d_i|$ 对应。□

(a) 中的条件有直接的含义。一行 w 由 W 构成 $i > r$ 满足 $wA = 0$。因此，它是若干方程的整数线性组合，其中所有 u都相互抵消，也就是说，它是由 F- 符号和 R- 符号构成的规范不变单项式。该条件表明，这个不变量在 $\mathcal{C}$ 的数据上的取值，与在经 P重新标记的反向范畴的数据上的取值相同。最简单的此类不变量是 $R_c^{ab}R_c^{ba} = \theta_c/\theta_a\theta_b$，对它们而言，该条件就是 $\theta_{Pa} = \theta_a^{-1}$。其余不变量涉及$F$。对于带标号的 $\mathcal{C}$，根据命题 6.2，不存在其他条件。我们不知道一般情况下关于 P的条件是否足够。

A.3. **求出** β。 固定步骤 1 的一个解 u，并令 $\gamma_c^{ab} := u_c^{ab}\, u_{Pc}^{Pb\,Pa}$。由于 $P^2 = 1$，每个$\beta_a \in \mathrm{End}(a) = \mathbb{C}$都是一个标量。根据 (B7)， $\langle\langle v_c^{ab}\rangle_{\mathsf{P}}\rangle_{\mathsf{P}} = \gamma_c^{ab}\, v_c^{ab}$必须等于 $(\beta_a \otimes \beta_b)\, v_c^{ab}\, \beta_c^{-1}$。因此，若要求相干性，则（A4）和（Coh）变为

$$\beta_a\beta_b/\beta_c = \gamma_c^{ab}, \quad \beta_{\mathbf{1}} = 1, \qquad \text{and} \qquad \beta_{Pa} = \beta_a.$$

我们采用与上文相同的方法来求解。方程（A4）的解（如果存在）构成定义 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 中的群 4.6上的一个扭子。将（Coh）作为附加行加入后，命题 A.1（a）中具有相干性的解的条件，是 $H^3(\mathbb{Z}/2,\ \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 中的障碍类 命题 4.12所对应的障碍类消失。该类取决于 （P U），而不仅仅取决于 P。因此，对于命题 （P U） A.1（c）中的有限多个，都必须运行步骤 2。

没有相干性时，方程 β （A4）的每个解都会给出一个反幺半对合，而 O 可以从中读出。标量 β_a 的盒仍是同一个标量，因此（4.2）变为 $\beta_{Pa} = \beta_a\, \chi_{Pa}([O])$，且$O$ 是 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ 中满足 $\chi_a([O]) = \beta_a/\beta_{Pa}$ 的元素，其中对所有 a均成立。

最后，对于 $Y \in$Fix(T)，我们有 $PY = Y^\vee$，而 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, Y \otimes PY)$ 由 $v^{Y}{}_{,\mathbf{1}}{}^{PY}$ 张成。结合 $U_0 = 1$，引理 4.14中的映射 R_{U_0,b_Y} 是 $\Phi \mapsto (\beta_Y^{-1} \otimes$恒等态射 $)\ \langle\Phi\rangle_{\mathsf{P}}$，它将 $v^{Y}{}_{,\mathbf{1}}{}^{PY}$ 乘以

$u^{Y,\mathbf{1}^{PY}}/\beta_Y$。因此，根据命题 4.18，

$$\eta_Y = \frac{u_{\mathbf{1}}^{Y,PY}}{\beta_Y} \quad (Y \in \mathrm{Fix}(\mathsf{T})), \qquad \eta_Y = 0 \quad (Y \notin \mathrm{Fix}(\mathsf{T})).$$

$\mathfrak{M}$ 的结构常数由推论3.25给出。

A.4. 范畴 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$。我们将此应用于第 6.3 节的范畴 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 。它们的 F-符号和 R-符号在 [AFT16]中确定。我们在 AnyOnWiki [DRSV26], 的数值形式中使用了这些符号；该融合环的数据来自 [VS26]: $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_1$ 是其中代码为 $[6,1,0,9,1,1,1]$ 和 $[6,1,0,9,3,1,1]$ 的范畴，即融合环 $\mathrm{FR}_9^{6,1,0}$, 的第一种和第三种范畴化，采用第一种球性（球面）结构。我们独立验证了五边形方程和六边形方程。在这两种情况下， P 分别是命题 6.12 和命题 6.14 中的置换。

步骤 1 有 58 个未知数和946 个秩为 53 的方程。根据命题 5，这 A.1(c) 中的自由方向必然是规范轨道，且不存在挠。因此在两种情况下，(P U) 都存在，并且在同构意义下唯一。在相容的行中， c_i 在数据的舍入误差 10^{-16}范围内是整数。在步骤 2 中，我们在两种情况下都找到了 (β A4) 的两个解，因为 $\mathrm{Inv}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{1}, \epsilon\}$；它们相差 ℓ_ϵ。

对于 $\mathcal{C}_2$ 两者都满足 (Coh)，因此二者都是具有相干性的反幺半对合。这证明了命题 6.15。

对于 $\mathcal{C}_1$ ，两者都不满足 (Coh)：添加的行与 $\mathbb{Z}$ 的偏差恰好为 $1/2$，即 $H^3(\mathbb{Z}/2, \mathrm{Inv}(\mathcal{C})) \cong \mathbb{Z}/2$ 中的非零类。由于 (P U) 是唯一的， $\mathcal{C}_1$ 不具有带相干性的反幺半对合，这与命题 6.12 一致。两个 β 都是不带相干性的反幺半对合。对于两者， β_a/β_{Pa} 对于 $a = \psi_\pm$ 均为 -1 ，在其他情况下为 1；这就是 $\chi_a([\epsilon])$；因此 $O = \epsilon$。推论 3.25 给出 $\mathsf{M}(\epsilon)^2 = -\mathsf{M}(\mathbf{1})$，而 $\mathsf{L}(\psi_+) = is\mathsf{M}(\epsilon)$，对于两个 β， s 的符号相反，这与命题 6.17 一致。

$\eta_Y = u^{Y,\mathbf{1}^{PY}}/\beta_Y$ 在 Fix(T) 上的取值如下； η 在其他简单对象上取值为零。

	O	$\eta_{\mathbf{1}}$	η_ϵ	η_{ψ_+}	η_{ψ_-}
$\mathcal{C}_2$, first β	$\mathbf{1}$	1	-1	1	-1
$\mathcal{C}_2$, second β	$\mathbf{1}$	1	-1	-1	1
$\mathcal{C}_1$, both β	ϵ	1	-1	–	–

对于 $\mathcal{C}_1$， $\psi_\pm \notin \mathrm{Fix}(\mathsf{T})$。关于 $\mathcal{C}_2$ 的各行对应命题6.14中的两种情况。

另外两个范畴化分别表现得像 $\mathcal{C}_2$ 或 $\mathcal{C}_1$，具体取决于 $\theta_{\psi_\pm} = \pm 1$ 还是 $\pm i$。最后的u_c^{ab}和 β_a 可以直接对照上面的方程进行验证。

参考文献

[AFT16] E. Ardonne、P. E. Finch 和 M. Titsworth，元辛融合范畴的分类，Symmetry **13**（2021）2102, arXiv:1608.03762 [数学-量子代数]。[AM88] G. Anderson 和 G. Moore，共形场论中的有理性，Commun. Math. Phys. **117** （1988）441–450。

[BBC+16] M. Barkeshli、P. Bonderson、M. Cheng、C.-M. Jian 和 K. Walker，反射与时间反演对称性丰富的拓扑物态：路径积分、不可定向流形与反常，Commun. Math. Phys. 374（2020）1021–1124，arXiv:1612.07792 [凝聚态物理-强关联电子]。[BBCW14] M. Barkeshli、P. Bonderson、M. Cheng 和 Z. Wang，拓扑相的对称性分数化、缺陷与规范化，物理评论B 100（2019）115147，arXiv:1410.4540 [凝聚态物理-强关联电子]。[BC17] M. Barkeshli 和 M. Cheng，拓扑物态中时间反演与空间反射对称性在（*2+1*）维中的局域化反常，物理评论B 98（2018）115129，arXiv:1706.09464[凝聚态物理-强关联电子]。[Bha16] L. Bhardwaj，非定向三维拓扑场论，JHEP 05（2017）048，arXiv:1611.02728 [高能物理理论]。[Des18] T. Deshpande，关于模范畴的扭曲 Verlinde 公式，2018。arXiv:1811.08447 [数学-量子代数]。[DGNO09] V. Drinfeld、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，关于编织融合范畴 I，数学精选（N.S.）16（2010）1–119，arXiv:0906.0620。[DRSV26] C. Delaney、R. Razzouk、J. Slingerland 和 G. Vercleyen，AnyOnWiki，2026年。arXiv:2610.30081[数学-量子代数]。数据：https://anyonwiki.org。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，张量范畴，《数学综论与专著》，第205卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015年。[ENO02] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik，关于融合范畴，数学年刊162（2005）581–642，arXiv:math/0203060。[ENO09] , 融合范畴与同伦论，量子拓扑1（2010）209–273，arXiv:0909.3140[数学-量子代数]。附录由 Ehud Meir 撰写。[GNN09] S. Gelaki、D. Naidu 和 D. Nikshych，分次融合范畴的中心，代数与数论3（2009）959–990，arXiv:0905.3117。[Izu00] M. Izumi，与 Longo–Rehren 包含相关的扇区结构 I：一般理论，Commun. Math. Phys. 213（2000）127–179。[Kit05] A. Kitaev，在精确求解模型及其推广中的任意子，Annals Phys. 321（2006）2–111，arXiv:cond- mat/0506438 [凝聚态物理-介观现象]。[LT18] Y. Lee 和 Y. Tachikawa，阿贝尔任意子的时间反演对称性研究，JHEP 07（2018）090，arXiv:1805.02738 [高能物理理论]。[MS88] G. W. Moore 和 N. Seiberg，有理共形场论的多项式方程，Phys. Lett. B 212（1988）451–460。[MS89] , 经典与量子共形场论，Commun. Math. Phys. 123（1989）177。[Müg01] M. Müger，从子因子到范畴与拓扑 II：张量范畴与子因子的量子双，纯粹与应用代数杂志180（2003）159–219，arXiv:math/0111205。[Ocn94] A. Ocneanu，算子代数的手征性，《子因子》（H. Araki、Y. Kawahigashi 和 H. Kosaki 编），世界科学出版社，1994年，第39–63页。[Ori25a] I. Orii，关于不可定向流形上（*2+1*）D 阿贝尔玻色拓扑系统的维数，PTEP 2025（2025）053B01，arXiv:2502.13532 [高能物理理论]。[Ori25b] , 时间反演对称性中 H^3 障碍在（*2+1*）D 阿贝尔玻色拓扑量子场论中的消失，JHEP 03（2026）018，arXiv:2509.07368 [高能物理理论]。[QJW17] Y. Qi、C.-M. Jian 和 C. Wang，通过折叠方法研究由镜像对称性丰富的拓扑序，物理评论B 99（2019）085128，arXiv:1710.09391 [凝聚态物理-强关联电子]。[RT90] N. Y. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，由量子群导出的带状图及其不变量，Commun. Math. Phys. 127（1990）1–26。[RT91] N. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，通过链环多项式与量子群得到的三维流形不变量，数学发明103（1991）547–597。[Tur94] V. G. Turaev，纽结与三维流形的量子不变量，《德格鲁伊特数学研究丛书》，第18卷，Walter de Gruyter，柏林，1994年。[TV13] V. Turaev 和 A. Virelizier，关于三维同伦量子场论 II：手术方法，国际数学杂志25（2014）1450027，arXiv:1303.1331 [数学-量子代数]。

[TY16] Y. Tachikawa 和 K. Yonekura，关于 *2+1*维拓扑相的时间反演反常，PTEP 2017 (2017) 033B04, arXiv:1610.07010 [高能物理理论].[Vaf88] C. Vafa，迈向共形理论的分类，Phys. Lett. B 206 (1988) 421–426。[Ver88] E. P. Verlinde，二维共形场论中的融合规则与模变换，Nucl. Phys. B 300 (1988) 360–376。[VS26] G. Vercleyen 和 J. Slingerland，低秩无重数复融合范畴，Commun. Math. Phys. 407 (2026年) 231。[Wit89] E. Witten，量子场论与琼斯多项式，Commun. Math. Phys. 121 (1989) 351–399。[WL16] C. Wang 和 M. Levin，时间反演对称拓扑序的反常指标，Phys. Rev. Lett. 119 (2017) 136801, arXiv:1610.04624 [凝聚态物理-强关联电子].[You18] M. B. Young，定向扭曲同伦场论与扭曲非定向 Dijkgraaf–Witten 理论，Commun. Math. Phys. 374 (2020) 1645–1691，arXiv:1810.04612。电子邮箱：ippo.orii@ipmu.jp 电子邮箱：yuji

· tachikawa@ipmu · jp

东京大学宇宙物理与数学研究所（WPI），日本千叶县柏市柏之叶5-1-5，邮编277-8583