arXiv:2611.29287v1 [nlin.CG] 22 Nov 2026

从信息与干预中探讨个体性：元胞自动机中的谱系、分离与持久性

Konstantin Doubrovinski *

2026年11月24日

摘要

我们提出一种确定性动力系统的个体性概念，并针对元胞自动机加以发展，该概念以算法信息和干预为基础。谱系是由一系列时空区域构成的序列，这些区域的内容能够以相差不超过几个比特的程度相互确定，而且较早区域受到的扰动会沿着谱系向前传递。两个精确副本无法仅凭其内容区分；它们的因果关系则各不相同，因为对其中一个的扰动未必会传递到另一个。个体是扰动能够在其间传递的谱系类别，并由此形成一个具有裂变、融合和网状演化的谱系结构。由低代价步骤构成的链定义了一种有向瓶颈超度量，因此，阈值会导出一种滤过和一种为个体性分级的持久性结构。我们不预先指定任何区域：一个区域的后代，是指那些可由短程序定位、能够恢复该区域扰动、彼此连通且大小近乎最小的区域。将所有源区域一并考虑，就能得到一种规范嵌套结构，而自主性条件则标示出优选尺度。所有概念在干预结构的可计算同构下均保持不变，且不使用空间度量。我们证明，除常数项外，干预条件是已知干预式香农量的逐点版本；而谱系连续性则是真正的算法性概念：它能否定位一个对象，取决于该对象的复杂度。我们证明，单独使用这两种要素中的任何一种都不够：运行完全相同、甚至依赖结构也完全相同的系统，其个体仍可能不同。对于正方格点上的奇偶规则，我们证明：边长为 q 的一个母区域会在时间 q 时裂变为四个彼此分离的个体；这一分裂会在数量级为 q^2 的一段阈值范围内持续存在；而当 2 的幂足够大时，所有后代区域都位于四个前沿。

*通讯作者：Konstantin.Doubrovinski@UTSouthwestern.edu

1 引言

动力系统中的某个部分何以成为一个个体？又是什么使它在稍后的时间仍是同一个个体？在生物学中，这个问题涉及生物体、群体、共生体和病毒；在人工生命研究中，它涉及元胞自动机中的模式，而这类自动机没有膜或其他内置边界。Krakauer、Bertschinger、Olbrich、Flack 和 Ay 最近提出一种观点 [1]，将个体视为能够把过去的信息传递到未来的聚合体，并以随机变量系综上的香农信息对这一观点加以形式化。

我们基于算法信息（柯尔莫哥洛夫复杂度）和干预，提出一种相关概念。准确说明其新意所在十分重要。局部判据——扰动的传递与分离——是针对某个区域的所有扰动来量化的，同时固定构型的其余部分；我们证明（命题3），除加性常数外，这些判据是响应映射纤维上的条件，也就是说，它们是 Ay 和 Polani 对均匀扰动及固定背景提出的干预信息流的逐点对应形式 [2]（另见 [3]）。就此而言，本文提出的概念是已知干预量的算法版本；它在背景和历史上是逐点的，但在扰动上不是。系综表述中没有对应形式的成分有三项。第一，*连续性*：谱系是这样的历史，沿着它们，实际内容每一步变化的比特数都很少；这是关于个体字符串的条件，取决于实际对象的复杂度（命题2）。第二，*跟踪*：定位某个区域的代价按找到该区域的程序长度计入，从而以内在方式选出后代区域（第6节）。第三，*相对于动力学定律*：所有量都以规则为条件，因此规则所提供的内容不会被归于个体。此外，这一概念还具有*谱系性*和*拓扑性*：它通过裂变与融合，在漫长时间跨度中跟踪个体，并包含一种滤过、一种针对历史的同伦概念，以及一种持久性结构。

干预这一要素解决了一个基本难题。一个对象的两个精确副本具有相同的内容，并且每一个都可由另一个用常数个比特确定；从其内容的任何信息论属性中都无法将它们区分开来。这是不可分辨者同一性的算法形式。然而，副本仍可通过它们的因果关系加以区分：对其中一个副本施加扰动会改变它自身的未来，而不会改变另一个副本的未来。我们利用这一点来定义个体之间的分离，并通过干预下的算法互信息对其进行度量。对于一次只考察一个候选聚合体的个体性系综测度而言，副本问题并不会出现，而这正是本文的出发点。

拓扑要素来自一种瓶颈构造。若两个时空区域由一条步链连接，且每一步的代价至多为 k，则称它们在 k 级相连。此类 k 的最小值构成一种有向超度量，可用于通过复杂度有界的变换链比较程序或证明。改变 k，便得到谱系的一个滤过，其中个体会出现、分裂和融合；分裂持续存在的 k 范围，是对个体性的一种分级度量。

贡献。我们定义连接、谱系、传递与分离，将后者与香农量联系起来，并证明连续性取决于个体对象的复杂度（第 3–4 节）；证明仅有关于运行的信息，或仅有关于哪些干预会产生影响的记录，均不足以独立满足要求（第 5 节）；不预设窗口形状，内在地定义后代窗口（第 6 节）；证明所有概念在干预结构的可计算同构下保持不变，且无需为空间指定度量（第 7 节）；通过涵盖所有源窗口的规范嵌套结构，消除对源窗口的选择，并以自主性标示优选尺度（第 11 节）；定义个体及其谱系，包括分支、融合和网状化数（第 8 节）；引入历史的同伦与持久性结构（第9节）；并证明奇偶规则的裂变定理，其中包括确定所有后代窗口在较大的 2 的幂处的位置（第10节）。我们用忒修斯之船说明这些概念（第 12 节），陈述定义所满足的充分性条件并与其他方法进行比较（第 13 节），最后讨论局限与开放问题（第 14 节）。

2 预备知识

2.1 算法信息

字符串是有限二进制序列，通过固定的可计算双射与自然数对应；$\langle x,\ y\rangle$ 表示一种可计算配对。我们固定一台通用前缀无关机 U。给定 y 时，x 的（前缀）柯尔莫哥洛夫复杂度为$K(x\,|\,y) = \min\{l(p)\ |\ U(p,\ y) = x\}$，且对于空字符串 ε，$K(x) = K(x\,|\,\varepsilon)$。若 $a \le b + c$，则记作 $a \overset{+}{\le} b$，其中 c为一个不依赖于所涉及字符串的常数（它可能依赖于 U、所选编码以及明确固定的可计算函数）；若 $a \overset{+}{\le} b$ 且 $b \overset{+}{\le} a$，则记作 $a \overset{\pm}{=} b$ 。我们使用以下标准事实 [4, 5, 6]。

(F1) 对每个可计算的 g，$K(g(x,y)\ |\ y) \overset{+}{\le} K(x\,|\,y)$。特别地，$K(\langle x,y\rangle\,|\,z) \overset{+}{\le} K(x\,|\,z) + K(y\,|\,z)$，且 $K(x\,|\,z) \overset{+}{\le} K(y\,|\,z) + K(x\,|\,\langle y,z\rangle)$。(F2)（信息对称性。）存在一个常数 c，使得 $|K(\langle x,y\rangle\,|\,z) - K(x\,|\,z) - K(y\,|\,\langle x,z\rangle)| \le c\log(n+2)$，其中 $n = l(x) + l(y) + l(z)$。(F3)（计数。）对于每个 z 和 L，满足 $K(x\,|\,z) < L$的字符串 x 少于 2^L 个。因此，对于任意有限集 X，其中超过一半的元素 $x \in X$满足 $K(x\,|\,z) \ge \log_2 |X| - 1$。

条件互信息为 $I(x:\ y\,|\,z) = K(x\,|\,z) + K(y\,|\,z) - K(\langle x,\ y\rangle\,|\,z)$；根据 (F1)，$I(x:\ y\,|\,z) \overset{+}{\le} K(y\,|\,z)$；根据 (F2)，$I(x:\ y\,|\,z) = K(x\,|\,z) - K(x\,|\,\langle y,z\rangle)$，误差不超过 $O(\log(n+2))$。条件信息距离[7] 是

$$E(x,y\,|\,z) = \max\{K(x\,|\,\langle y,z\rangle),\ K(y\,|\,\langle x,z\rangle)\} \quad .$$

根据 (F1)，它满足 $E(x,\ y \mid z) \overset{+}{\leq} E(x,\ w \mid z) + E(w,\ y \mid z)$。

2.2 元胞自动机、光锥与干预

设定 $d \geq 1$、一个带有静止态 0 的有限字母表 Σ、半径 $\rho \geq 1$ 以及局部规则 ϕ：$\Sigma^{\{-\rho,\dots,\rho\}^d} \to \Sigma$，其中 $\phi(0,\dots,0) = 0$。全局映射为 $F(c)(i) = \phi((c(i+e))_{|e|_\infty \leq \rho})$，其定义域为配置 $c : \mathbb{Z}^d \to \Sigma$。若某个构型的支撑集 $\mathrm{supp}(c) = \{i \mid c(i) \neq 0\}$ 是有限集，则该构型称为有限构型；F 将有限构型映射为有限构型。有限构型 c_0 的运行是 $c_t = F^t(c_0)$，$t \geq 0$。规则、有限构型以及配置在有限集上的限制（作为带有其位置的数组），均以固定的可计算方式编码为字符串。

以下定义中不使用 $\mathbb{Z}^d$ 上的度量；所有几何性质均由动力学导出。单元 w 的依赖集 为

$$N(w) = \{u \in \mathbb{Z}^d \mid F(c)(w) \neq F(c')(w) \text{ for some } c, c' \text{ that differ only at } u\}\ .$$

它包含于 $w + \{-\rho,\dots,\rho\}^d$ 中，并且可由 ϕ 和 w 计算得到。由于有限乘积上的函数在仅改变某个坐标而其值始终不变时并不依赖该坐标，因此 $F(c)(w)$ 仅依赖于 $c|_{N(w)}$。对于 $R \subseteq \mathbb{Z}^d$，令 $R^{\leftarrow} = \bigcup_{w \in R} N(w)$ 表示 R 所依赖的单元，并令 $R^{\rightarrow} = \{w \mid N(w) \cap R \neq \emptyset\}$ 表示 R 所影响的单元；再令 $R^{\leftarrow t}$ 为 $R \mapsto R^{\leftarrow}$ 的 t 重迭代，其中 $R^{\leftarrow 0} = R$。

引理 1（光锥）。如果 c 和 c' 在 $R^{\leftarrow t}$ 上一致，那么 $F^t(c)$ 和 $F^t(c')$ 在 R 上一致。

证明。对 t 进行归纳：如果 c、c' 在 $R^{\leftarrow(t+1)} = (R^{\leftarrow})^{\leftarrow t}$ 上一致，那么 $F^t(c)$、$F^t(c')$ 在 $R^{\leftarrow}$ 上一致，并且对于 $i \in R$，$F(\cdot)(i)$ 仅依赖于 $N(i) \subseteq R^{\leftarrow}$ 中的值。□

元胞系统。第 3–9 节的定义仅使用以下结构：一个单元集合、一个带有静止态的有限字母表、作用于有限构型的全局映射 F，以及依赖集 $N(w)$。这些依赖集是有限的，可由 w 计算得到，其中 $F(c)(w)$ 仅取决于 $c|_{N(w)}$，且每个单元仅属于有限多个可计算给出的集合 $N(w)$。我们将这种结构称为元胞系统，并将其单元及其字母表称为其干预结构：这里考虑的干预是替换有限单元集合的内容。平移不变性和 $\mathbb{Z}^d$ 的格结构仅在示例中用到。所有定义在其下均保持不变的相关等价关系，见第 7 节。

在时间 s 进行干预 时，会将某次运行的构型 c_s 替换为修改后的构型 c'_s，并从那里继续运行：$c'_{s+\tau} = F^\tau(c'_s)$。在元胞自动机中，Pearl 的 do-算子 [8] 意义下的每种干预都属于这种形式。

3 位点、连接与谱系

时空区域由任意形状的有限窗口描述。其大小不预先设定上限。若没有任何约束，整个

构型将显然成为一个个体；约束由信息和干预提供（定义3和第6节），而不是由预先规定的窗口形状决定。

定义1（位点）。一个位点是一个对 $\sigma = (s, W_\sigma)$，其中 $s \geq 0$ 是时间，$W_\sigma \subseteq \mathbb{Z}^d$ 是一个有限非空集合，即其窗口。它在运行 (c_t) 中的内容是数组 $v_\sigma = c_s|_{W_\sigma}$；与所有限制一样，它与其位置一同编码，因此可由 v_σ 计算得出 W_σ。对于位点 $\sigma = (s, W)$ 和 $\tau = (s', W')$，框架为 $\theta(\sigma, \tau) = \langle \phi, s, s' \rangle$：规则和两个时间。

定义 2（连接与链）。一步是两个位点 $\sigma = (s, W)$、$\sigma' = (s+1, W')$，其中 $W' \subseteq W^{\rightarrow}$ 和 $W \subseteq W'^{\leftarrow}$：新窗口中的每个单元都依赖于旧窗口中的某个单元，并且旧窗口中的每个单元都会影响新窗口中的某个单元。其代价是在给定框架的情况下，两个内容之间的信息距离：

$$\ell(\sigma, \sigma') = E\big(v_\sigma, v_{\sigma'} \,\big|\, \theta(\sigma, \sigma')\big) \quad .$$

从 σ 到 τ 的链是一系列位点 $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_n = \tau$，其中每一对相邻位点构成一步；其代价为 $\max_i \ell(\sigma_i, \sigma_{i+1})$（如果 $n = 0$，则为 0）。从 σ 到较后位点 τ 的连接代价为

$$D(\sigma, \tau) = \min\{\text{cost of } \gamma \,|\, \gamma \text{ a chain from } \sigma \text{ to } \tau\} \quad ,$$

若不存在链，则 $D(\sigma, \tau) = \infty$。

一步的代价度量新内容中有多少不是由旧内容决定的，以及旧内容有多少丢失。由于内容携带其位置，该代价包括对方每个窗口的描述；将窗口平移到相邻位置时，这是一项常数。框架特意不包含这些窗口：否则，在与某一步兼容的众多形状中选择窗口形状，便可能对内容进行编码，而代价也就无法度量它本应度量的对象。代价至多为 k 的链，是一段历史，其中内容每一步至多改变 k 比特；经过许多步后，内容可能发生彻底变化。

命题1（有向超度量）。对于位点 σ、π、τ，其时间为 $s(\sigma) \leq s(\pi) \leq s(\tau)$：

(i) $D(\sigma, \sigma) = 0$;

(ii) $D(\sigma, \tau) \leq$ 最大值$\{D(\sigma, \pi)\ D(\pi, \tau)\}$。

对于每个 k，关系“$D(\sigma, \tau) \leq k$”因此是自反且传递的：它是时空上的预序，并遵循时间的方向。

证明。(i) 长度为 0 的链。(ii) 如果 γ_1 是从 σ 到 π 的一条链，而 γ_2 是从 π 到 τ 的一条链，那么将它们连接起来，就得到一条从 σ 到 τ 的链，其代价是两条链的代价中的最大值。 □

备注 1（瓶颈距离）。 D 是瓶颈（极小极大）距离：一条连接的代价等于其中代价最高的步骤的代价，并在所有连接中取最小值。在由复杂度有界的变换连接起来的一组对象上，其对称对应形式是这样的：距离是使两个对象能够通过一条变换链连接起来的最小 k，其中每个变换的复杂度至多为 k。这种距离是一个超度量，其子水平集是单链接聚类的簇；它们随 k 的演化就是 0 维持久同调 [9, 10]。这里的变换是动力学中的单个时间步，因此所得结构是有向的。

在封闭系统中，只要初始对象的信息局部存在，连接就很廉价。因此，连续性本身只约束信息位于何处，而不约束信息如何处理；实质性条件见第 4 节。

引理 *2*（封闭运行中的廉价连接）。设 c_0 在有限集 A 之外为零，并设 $x = c_0|_A$（及其位置）。存在常数 c，使得对于每个具有窗口 W、W'、$K(x \mid \langle \theta, v_\sigma \rangle) \le k$ 和 $K(x \mid \langle \theta, v_{\sigma'} \rangle) \le k$ 的步 (σ, σ')，其中 $\theta = \theta(\sigma, \sigma')$，都有 $\ell(\sigma, \sigma') \le k + max\{K(W' \mid W)\ K(W \mid W')\} + c$。

证明。运行可由 x 和 θ（其中包含规则和时间）计算得到，因此 $v_{\sigma'}$ 可由 x、θ 和 W' 计算得到。根据 (F1)，$K(v_{\sigma'} \mid \langle \theta, v_\sigma \rangle) \overset{+}{\le} K(x \mid \langle \theta, v_\sigma \rangle) + K(W' \mid W)$，因为 W 可由 v_σ 计算得到；反之亦然。 □

关于内容的信息沿链只能逐渐丢失：

引理 3 (链上的信息)。存在一个常数 c，使得对于任意代价至多为 k 的链 $\sigma_0, \ldots, \sigma_j$，其中 σ_0 在时间 s_0，

$$K\big(v_{\sigma_0} \,\big|\, \langle \phi, s_0, j, v_{\sigma_j} \rangle\big) \le j\,\big(k + 2\log_2(j+1) + c\big) \quad .$$

证明。对于每个 $i < j$，$K(v_{\sigma_i} \mid \langle \theta_i, v_{\sigma_{i+1}} \rangle) \le k$，其中 $\theta_i = \langle \phi, s_0 + i, s_0 + i + 1 \rangle$可由 $\langle \phi, s_0 \rangle$ 和 i计算得出，并且 $K(i) \le 2\log_2(j+1) + c$。根据（F1）组合这些$j$ 程序即可得到该界。 □

下面的命题表明，连续性是关于单个对象的条件，而不是关于对象分布的条件。对于有限集 A 和 $t \ge 0$，令$A^{\to t}$为 $R \mapsto R^{\to}$ 的 t 次迭代；根据引理 1 和 $\phi(0, \ldots, 0) = 0$，一个在时间 0 时于 A 之外消失的运行，在时间 t 时于 $A^{\to t}$ 之外消失。

命题2 (连续性取决于单个父节点)。存在常数 c，使得以下结论成立。假设 c_0 在有限集 A之外均为零，令 $x = c_0|_A$（及其位置）、$\beta =$ 对数$_2 |\Sigma|$，以及 $\sigma_0 = (0,\ A)$。

(i) 每一步 (σ, σ')，使用窗口 W, W'，其代价为 $\ell(\sigma, \sigma') \le K(x \mid \phi) + \max\{K(W' \mid W)\ K(W \mid W')\} + c$。特别地，若 $K(x \mid \phi) \le k - c - w$，那么，任何由连续窗口构成步骤且彼此可由不超过 w 比特确定的位置族，都是代价至多为 k 的链，无论其位于何处，包括 $A^{\to t}$ 之外运行处于静止状态的区域，例如，将一个固定窗口平移至相邻位置所得到的窗口。

(ii) 若 $K(x \mid \phi) \geq |A|\beta - d$，且 γ 是一条代价至多为 k 的链，从 σ_0 到时间 j 位于位置 τ 的某个位点，其窗口位于 $A^{\to j}$ 之外，那么

$$j\left(k + 2\log_2(j+1) + c\right) \;\geq\; |A|\beta - d - K(W_\tau \mid \langle \phi, j\rangle) - 2\log_2(j+1) - c \quad .$$

证明。(i) 每个内容都可以由 x、规则、时间和窗口计算得出；论证方法与引理 2 相同。(ii) τ 的内容是 W_τ 上的静止数组，因此 $K(\langle j,\ v_\tau\rangle \mid \phi) \leq K(j) + K(W_\tau \mid \langle \phi,\ j\rangle) + c$。由 (F1)，$K(x \mid \phi) \leq K(x \mid \langle \phi,\ 0,\ j,\ v_\tau\rangle) + K(\langle j,\ v_\tau\rangle \mid \phi) + c$，而引理 3 给出了第一项的界，因为 $v_{\sigma_0} = x$。 □

对于简单母体，连续性无法局部化任何东西：廉价链处处运行，包括穿过空空间；只有第 4 节的干预条件才能区分谱系与漂移的空窗口。对于不可压缩母体，廉价链离开母体信息所在区域的速度不能超过每步约 k 比特；它至少需要约 $|A|\beta/k$ 步才能到达空空间。这两种说法都针对单个对象 x。在以随机母体为对象的系综表述中，第一种情况的权重趋于零，而平均量无法表达连续性的局部化能力取决于当前存在的是哪一个母体。

4 传输与分离

对于位置 $\sigma = (s,\ W_\sigma)$ 和数组 $\delta \in \Sigma^{W_\sigma}$，设 $c^{\sigma \leftarrow \delta}$ 为通过干预得到的运行：在时间 s，将 W_σ 的内容替换为 δ，并保持 W_σ之外的 c_s不变。对于位置 $\tau = (s',\ W_\tau)$，若 $s' \geq s$，设 $v_\tau^\delta = c_{s'}^{\sigma \leftarrow \delta}|_{W_\tau}$为响应，并令

$$z = z(\sigma, s') = \langle \phi,\, s,\, W_\sigma,\, s',\, c_s|_{\mathbb{Z}^d \setminus W_\sigma} \rangle$$

为源数据：规则、源位置、目标时间，以及在时间 s源窗口之外未受干预的构型（一个有限构型）。源数据不包含目标窗口。

定义 3（传输与分离）。设 $k \geq 0$，并设 τ 为一个不早于 σ的位置。

(i) σ 向传输的水平为 k，记作 $\sigma \Rightarrow_k \tau$，如果 $K(W_\tau \mid z) \leq k$并且，对于所有 $\delta \in \Sigma^{W_\sigma}$中至少 $3/4$的 $K(\delta \mid \langle z,\ v_\tau^\delta\rangle) \leq k$：目标窗口至多可通过 k 比特从源数据中定位（跟踪），且该处的响应能够确定扰动（充分性）。(ii) σ 以 k的水平与 τ 分离，记作 $\sigma \perp_k \tau$，如果对于所有$\delta \in \Sigma^{W_\sigma}$中至少 $3/4$ 的 $I(\delta :\ v_\tau^\delta \mid z) \leq k$：$\tau$处的响应几乎不携带关于扰动的信息。

这两个概念都将干预与信息测量结合起来，并且都是信息上界。它们针对大多数扰动，因此可以通过计数来确立，而无需证明任何特定字符串是复杂的。二者都具有单调性： $\sigma \Rightarrow_k \tau$ 蕴含 $\sigma \Rightarrow_{k'} \tau$，且 $\sigma \perp_k \tau$蕴含 $\sigma \perp_{k'} \tau$，对于 $k \le k'$而言如此。跟踪条件取代了预先规定的窗口形状：它要求根据已知的源信息，通过一个短程序找到后代，并排除从信息恰好所在的位置逐个单元拼装窗口的情况（注2）。对于携带超过约 $2k$ 比特的窗口，这两个概念互斥：

引理 4（传输与分离是相反的）。 存在一个常数 c，使得如果 $\sigma \Rightarrow_k \tau$且 $\sigma \perp_k \tau$，那么 $|W_\sigma| \log_2 |\Sigma| \le 2k + c \log(n+2) + 1$，其中$n$ 界定了 z、 δ 和 v_τ^δ的长度。

证明。 根据（F3），超过半数的 $\delta \in \Sigma^{W_\sigma}$满足 $K(\delta \mid z) \ge |W_\sigma| \log_2 |\Sigma| - 1$。由于这两个条件中的每一个对所有 δ中至少 $3/4$ 的对象成立，因此存在某个 δ 同时满足这三个性质。对于它，根据（F2）， $I(\delta : v_\tau^\delta \mid z) \ge K(\delta \mid z) - K(\delta \mid \langle z, v_\tau^\delta \rangle) - c \log(n+2) \ge |W_\sigma| \log_2 |\Sigma| - 1 - k - c \log(n+2)$，而该值必定至多为 k。 □

传输与分离有着密切的香农对应概念。固定 σ, τ 和源数据 z，令 $g : \Sigma^{W_\sigma} \to \Sigma^{W_\tau}$, $g(\delta) = v_\tau^\delta$ 为响应映射；它可由 z 和 W_τ计算得到。令 $N = |\Sigma|^{|W_\sigma|}$，对于响应 v，令$g^{-1}(v)$ 表示其纤维。若 δ 在 Σ^{W_σ} 上均匀分布，且 $V = g(\delta)$，则$H(\delta \mid V) = \mathbb{E} \log_2 |g^{-1}(V)|$，并且 $I(\delta ; V) = H(V) = \mathbb{E} \log_2 (N / |g^{-1}(V)|)$；这些是当背景固定时，对$W_\sigma$ 进行均匀干预下 [2]的干预信息量。

命题3 (香农对应概念)。 存在一个常数 c，使得对于上述所有 σ, τ, z，若 n对 z, δ和 v_τ^δ的长度作界定，则：

(i) for every δ, $K(\delta \mid \langle z, v_\tau^\delta \rangle) \le \log_2 |g^{-1}(v_\tau^\delta)| + c$;

(ii) 对于每个 $d \ge 0$，在所有 δ 中，满足 $K(\delta \mid \langle z, v_\tau^\delta \rangle) < \log_2 |g^{-1}(v_\tau^\delta)| - d$ 的比例小于 2^{-d};

(iii) $H(\delta \mid V) \le \mathbb{E}\, K(\delta \mid \langle z, V \rangle) \le H(\delta \mid V) + c$，对 δ 一致;

(iv) 对于每个 δ， $I(\delta : v_\tau^\delta \mid z) \le \log_2 (N / |g^{-1}(v_\tau^\delta)|) + K(W_\tau \mid z) + c$；并且对于每个 $d \ge 0$，在所有 δ 中，除比例 2^{-d} 外，均满足 $I(\delta : v_\tau^\delta \mid z) \ge \log_2 (N / |g^{-1}(v_\tau^\delta)|) - d - c \log(n+2)$。

证明。（i）由包含 W_τ 的 z 和 $v = v_\tau^\delta$ 可知，纤维 $g^{-1}(v)$ 是可计算的，而 δ 可由其在该纤维中的索引指定，这是一个长度已知的字符串 $\lceil \log_2 |g^{-1}(v)| \rceil$。（ii）对于每个响应 v，根据 (F3)，纤维中复杂度在给定 $\langle z, v \rangle$ 后低于 $\log_2 |g^{-1}(v)| - d$ 的元素少于 $2^{-d} |g^{-1}(v)|$ ；对 v 求和。（iii）上界是 (i) 的平均值。对于下界，对每个 v，长度 $K(\delta \mid \langle z, v \rangle)$、 $\delta \in g^{-1}(v)$ 满足克拉夫特不等式，因此它们在该纤维上的平均值至少为 $\log_2 |g^{-1}(v)|$；再对 v 求平均。（iv）根据 (F1) 和 (F2)， $I(\delta : v \mid z) \overset{+}{\le} K(v \mid z)$，并且 v 可由 z 通过 W_τ 和该

针对 V 的分布的 v 的香农–范诺编码，该分布可由 z 和 W_τ 计算得到，编码长度为 $\log_2(N/|g^{-1}(v)|)+O(1)$。对于下界，根据 (F2)$I(\delta:\, v\mid z)\ge K(\delta\mid z)-K(\delta\mid\langle z,\ v\rangle)-c\log(n+2)$；根据 (F3)，除比例为 2^{-d} 的 δ 外，其余都有 $K(\delta\mid z)\ge\log_2 N-d$，而 (i) 给出了第二项的界。 □

因此，给定源数据，当至少有 $3/4$ 的全部扰动位于大小至多为 2^{k-c} 的纤维中时，传输在 k层级上的充分性部分成立；当超过 $1/4+2^{-d}$ 的扰动位于大小大于 2^{k+d} 的纤维中时，该部分不成立；分离则是关于大纤维的相应表述。除这些常数外，传输与分离都是仅关于响应映射的条件，其中的柯尔莫哥洛夫复杂度可以用计数替代。无法以这种方式化简的是跟踪条件，因为该条件需要为定位目标窗口付出代价；此外，定义 2 的连续性涉及实际内容而非扰动（命题2）。

引理 5（大小、支撑集和目标数量）。存在一个常数 c，使得对于每个位置 $\sigma=$（s、W_σ）、时间 $s'\ge s$ 和 $k\ge 0$，以下结论成立。记作 $\beta=\log_2|\Sigma|$，并令 $R=R$（σ、s'）为满足以下条件的单元集合：i 使得 $c_{s'}^{\sigma\leftarrow\delta}(i)$ 依赖于 $\delta\in\Sigma^{W_\sigma}$。

(i) 若 $\sigma\Rightarrow_k(s',W)$，则 $|W|\,\beta\ge|W_\sigma|\,\beta-2k-c$。
(ii) 若 $\sigma\Rightarrow_k(s',W)$，则 $|W\cap R|\,\beta\ge|W_\sigma|\,\beta-3k-c$。

(iii) 满足 $\sigma\Rightarrow_k(s',W)$ 的窗口少于 2^{k+1} W。

证明。设 $z=z(\sigma,\ s')$。(iii) 每个这样的 W 都满足 $K(W\mid z)\le k$，根据 (F3)，满足条件的字符串少于 2^{k+1}。

(i) 根据 (F3) 和传递的定义，存在某个 δ 同时满足 $K(\delta\mid z)\ge|W_\sigma|\beta-1$ 和 $K(\delta\mid\langle z,\ v^\delta\rangle)\le k$，其中 v^δ 是在 W 上的响应。该响应由 W 和 Σ^W 的一个元素组成，因此根据 (F1)，$K(v^\delta\mid z)\overset{+}{\le}K(W\mid z)+|W|\beta\le k+|W|\beta$。根据 (F1)，$K(\delta\mid z)\overset{+}{\le}K(v^\delta\mid z)+K(\delta\mid\langle z,\ v^\delta\rangle)$，结论得证。

(ii) 通过对每个有限的 δ 运行干预，可以从 z 计算出集合 R；而响应在 R 之外的取值不依赖于 δ，因此可从 z 和 W 计算得出（对任意固定的 δ 运行干预）。令 u^δ 为限制在 $W\cap R$ 上的响应。于是 v^δ 可从 z、W 和 u^δ 计算得出，因此至少对所有 δ 中的 $3/4$，$K(\delta\mid\langle z,\ u^\delta\rangle)\overset{+}{\le}K(W\mid z)+K(\delta\mid\langle z,\ v^\delta\rangle)\le 2k$。由于 $W\cap R$ 可从 z 和 W 计算得出，$K(u^\delta\mid z)\overset{+}{\le}k+|W\cap R|\beta$。现在按照 (i) 中的方法论证。 □

备注2（为什么需要跟踪和经济性）。信息在目标窗口中的传递大致具有单调性：如果 $\sigma\Rightarrow_k(s',W)$，$W\subseteq W'$ 且 $K(W'\mid z)\le k$，那么在 $2k+c$ 级别上，W' 满足充分性条件，因为 v^δ_W 是根据 $v^\delta_{W'}$ 和 W 计算得出的，而 $K(W\mid\langle z,W'\rangle)\overset{+}{\le}K(W\mid z)$。因此，只要大而简单的窗口（例如半径为 2^n 的球（复杂度约为 $\log n$）或整个光锥）内部存在某个小窗口能够传递信息，这些大窗口也能传递信息；后代必须是

大小近乎最小的。反过来，如果没有跟踪条件，那么从整个光锥中逐个挑选出来的一组单元，只要每个单元都携带扰动的一部分信息，也会被算作后代；在线性规则下，例如第10节中的规则，这类分散的集合大量存在，而找到其中一个的代价约为 $\log_2 \binom{N}{|W|}$ 比特，其中 N 是光锥中的单元数。

5 信息或干预都不足以单独奏效

这些定义将信息度量与干预结合起来。现在我们将说明，两种成分缺一不可：一种只考察运行、并对其应用任意信息度量的判据，无法区分相互作用的副本与互不相互作用的副本；而一种考察运行以及哪些干预影响哪些区域的完整记录、却不考察这些干预携带多少信息的判据，无法区分谱系与摧毁其内容的通道。这两种构造都是一维的，半径为1。

我们将一次运行的依赖结构 称为由所有形如$((s,\ U),\ (s',\ W'))$的有序对构成的集合，其中 $s \le s'$ 以及 U、 W' 均为有限值，并且在时间 s' 对时间 s 作用于 U 的干预所产生的扰动$\delta \in \Sigma^U$，会使 W' 上的响应成为非恒定函数。它记录了哪些干预会在哪里产生影响，而不涉及影响有多大。

命题4 (两种成分的必要性)。存在一个常数 c，使得下述结论成立。

(i)（仅有信息并不足够。）对于任意 $q \ge 1$、 $L \ge q$ 和 $x \in \mathbb{F}_2^q$，都存在两个元胞自动机 F_1、 F_2，其字母表为 $\Sigma = \mathbb{F}_2^2$，且具有一个初始构型 c_0，使得对于所有 $t \ge 0$， $F_1^t(c_0) = F_2^t(c_0)$；运行在所有时刻都包含位于窗口 $A = \{0, \dots, q-1\}$ 和 $B = \{L, \dots, L+q-1\}$ 中的 x 的精确副本；在 F_1 下，对于每个 t，$(0, A) \perp_c (t, B)$，对 B 的响应完全不依赖于扰动；并且在 F_2 下，对于每个满足 $k < q - c$，$(0, A) \not\perp_k (L, B)$。

(ii)（仅有干预并不足够。）对于任意 $m \ge 2$、 $q \ge 1$ 和 $x \in \{0, e_1\}^q \subseteq (\mathbb{F}_2^m)^q$，都存在两个元胞自动机 G_1、 G_2，其字母表为 $\Sigma = \mathbb{F}_2^m$，且具有一个初始构型 c_0，使得这两个运行彼此相同，具有相同的依赖集和相同的依赖结构；并且族 $\Lambda(s) = (s, W + s)$， $W = \{0, \dots, q-1\}$，在两者中承载相同的内容；在 G_1 下，对于每个 $k \ge c$， Λ 在每个区间上都是一个 k-谱系；而在 G_2 下，对于所有 $s < s'$ 以及所有满足 $q - c$ 的 $k < (m-1)$， $\Lambda(s) \not\Rightarrow_k \Lambda(s')$，因此 Λ 在任何正长度区间上都不是一个 k-谱系。

证明。(i) 将状态写成对 $(a,\ b) \in \mathbb{F}_2^2$。令 F_1 为恒等映射，并令 F_2 保留第一分量，将第二分量向右移动： $F_2(c)(i) = (a(i)\ b(i-1))$。二者的静止态都是 $(0,\ 0)$。令 c_0 的第一分量在 A 上为 x，在 B上为 x，其他位置均为 0，第二分量处处为 0。由于 F_2 只移动

第二分量，而第二分量均为零，因此两种运行都是常数，且彼此相同。在 F_1下，对 A 进行干预不会改变 A以外的任何内容，因此B 上的响应就是未受干预的内容，可由 z 计算得到，并且根据 (F1)， $I(\delta:\, v^{\delta} \mid z) \le c$。在 F_2下，写作 $\delta = (\delta_a,\ \delta_b)$。 δ 的第二分量每步向右移动一个单元，因此在时间 L， B 上的响应由 x 的第一分量和 δ_b的平移构成。因此 $K(\delta \mid \langle z,\ v^{\delta}\rangle) \le K(\delta_a) + c \le q + 2$对数$_2\, q + c$；而根据 (F3)，所有 δ 中至少有 $3/4$ 满足 $K(\delta \mid z) \ge 2q - 2$。根据 (F2)，这些 δ满足 $I(\delta:\, v^{\delta} \mid z) \ge q - c$对数$(L + q + 2)$，其中 c为适当的常数，因此在低于此界的每个层级上，分离都不成立。

(ii) 设 $G_1(c)(i) = c(i-1)$，且 $G_2(c)(i) = P(c(i-1))$，其中 $P(y) = (y_1 + \cdots + y_m)\ e_1$。二者的静止态均为 0，并且二者的依赖集均为 $N(w) = \{w-1\}$，因为 P 在每个坐标上都是非常数的。令 $c_0 = x$ 在 W 上取值，在其他位置取 0。由于 P固定 0 和 e_1，两次运行都是 $c_t(i) = x(i-t)$，因此二者相同，而 Λ 携带着 x的平移副本。对于在时间 s 对 U进行的干预，在 G_1下，时间 $s' = s + t$的响应为 $c_{s'}(w) = \delta(w-t)$；而在G_2 下，对于 $w \in U + t$，响应为 $c_{s'}(w) = P^t(\delta(w-t))$，其他位置则取未扰动值。对于 $t \ge 1$，$P^t = P$在 $\mathbb{F}_2^m$上是非常数的，因此在两个系统中，当且仅当 $W' \cap (U + t) \neq \emptyset$时，$W'$ 上的响应是非常数的；对于 $t = 0$，两个响应在 U上都是 δ。因此，依赖结构一致。在 G_1下， Λ的相邻位置构成代价恒定的步，而 $W + s'$ 上的响应是 δ的平移副本，所以 $\Lambda(s) \Rightarrow_c \Lambda(s')$；因此， Λ 是 $k \ge c$的一个 k-谱系。在 G_2下，对于 $s' > s$，$W + s'$上的响应是奇偶性数组 $(\sum_j \delta(i)j)\ \ e_1, i \in W + s$；响应映射的每个纤维都有 $2^{(m-1)q}$ 个元素。根据命题 3(ii) 和 $d = 2$，所有 δ中有超过 $1/4$ 的对象满足 $K(\delta \mid \langle z,\ v^{\delta}\rangle) \ge (m-1)q - 2$，因此对于$k < (m-1)q - 2$，传递失败。

□

第（i）部分讨论任何仅以运行本身为函数的判据：无论它对内容采用何种信息度量，都会对这两个系统给出相同的判断，尽管在一个系统中，副本之间无法相互影响，而在另一个系统中，对第一个副本的扰动会以约 q 比特的信息传递到第二个副本。第（ii）部分讨论任何以运行及其依赖结构为函数的判据：它会对这样两个系统给出相同的判断——一个系统中，移动模式将其扰动完整地向前传递；另一个系统中，这些扰动被压缩为每个单元一比特。定义3中的判据能够区分这两组系统，因为它度量的是干预所能传递的信息量。因此，命题4对这两种成分给出的是极小性陈述，而非对具体定义的唯一性陈述；这与配套工作中关于自我复制的相应必要性结果相呼应。

6 后代窗口

定义 4（连通窗口）。 影响图 以单元为顶点，若 u与 w相邻，且 $u \in N(w)$ 或 $w \in N(u)$，则二者之间有边。窗口 W若其诱导的影响图子图连通，则称为连通。

连通性是一种干预条件。如果 $W = A \sqcup B$ 中 A 和 B之间没有边，那么在一个时间步内，对 A进行任何干预都不会改变 B中任一单元的下一状态；反之亦然：这些部分不会直接相互作用。反过来，如果存在一条边，例如 $u \in A$ 与 $u \in N$之间有边，且 w($w \in B$)，那么在某种构型下，对 u 进行某种干预会改变 w 的下一状态。因此，连通性恰好意味着不存在这样一种拆分：拆分出的各部分在一步内无法相互影响。下文的命题 7 表明，连通性这一条件不能省略。

定义 5（后代窗口）。设 k，$\lambda \geq 0$，令 σ 为时间 s的一个位置，并令 $s' \geq s$。令

$$m_k(\sigma, s') = \min\{|W| \,|\, W \text{ connected}, \ \sigma \Rightarrow_k (s', W)\} \quad ,$$

若不存在这样的 W，则取 $m_k = \infty$。σ 在时间 s'的一个（k，λ）-后代窗口是一个连通窗口 W，满足 $\sigma \Rightarrow_k$（s'，W）且（$|W| - m_k$（σ，s'））$\log_2 |\Sigma| \leq \lambda$。

因此，后代窗口满足四个条件：可以用少量比特从源数据中定位（跟踪）；它决定源的扰动（充分性）；它是连通的；并且其大小不超过满足前两个条件的连通窗口最小大小的 λ 比特（经济性）。经济性条件会去除多余的单元，也会去除那些通过长路径连接不同副本片段的连通窗口（定理 2）。

命题 *5*（基本性质）。存在一个常数 c，使得对于每个位置 σ 和时间 $s' \geq s$：σ 在时间 s' 的（k，λ）-后代窗口少于 2^{k+1} 个；每个窗口至少有 $|W_\sigma| - (2k + c) / \log_2 |\Sigma|$ 个单元，其中至少 $|W_\sigma| - (3k + c) / \log_2 |\Sigma|$ 个位于集合 R（σ，s'）中，该集合由受 σ 的扰动影响的单元构成；并且如果某个连通 W 满足 $\sigma \Rightarrow_k$（s'，W）和 $|W| \log_2 |\Sigma| \leq |W_\sigma| \log_2 |\Sigma| + \lambda - 2k - c$，那么 W 就是一个（k，λ）-后代窗口。

证明。前两个陈述是引理 5。对于最后一个，引理 5(i) 给出$m_k(\sigma, s') \log_2 |\Sigma| \geq |W_\sigma| \log_2 |\Sigma| - 2k - c$，因此 $(|W| - m_k) \log_2 |\Sigma| \leq \lambda$。 □

定义 5 中的所有条件都相对于源窗口 W_σ而言；源窗口规定了要扰动的对象，并且仍由我们选定。不再由我们选定的是在哪里、以什么形状寻找它的后代。在第 11 节中，通过同时考虑所有源窗口，彻底取消了对源窗口的选择。

7 不变性

定义 6（可计算同构）。设 (V, Σ, F) 和 (V', Σ', G) 是元胞系统。它们之间的可计算同构 是一个有序对 (π, h)，其中 $\pi : V \to V'$ 是一个双射，且 π 和 π^{-1} 可计算；h 则为每个单元 $i \in V$ 指派一个双射 $h_i : \Sigma \to \Sigma'$，满足 $h_i(0) = 0$，并且该指派可根据 i计算。由此在构型上诱导的映射 $H(c)(\pi(i)) = h_i(c(i))$，在有限构型上满足$G \circ H = H \circ F$。

可计算同构可以用任意可计算的方式重新标记单元，只要它将一个系统的干预（即对单元集合内容的替换）映射到另一个系统的干预上。它按 $H(s, W) = (s, \pi(W))$ 扩展到位点，并逐位点扩展到谱系。

命题 6 (不变性)。设 (π, h) 是一个可计算同构，其诱导映射为 H。存在一个常数 c_H，仅取决于 H、这两条规则和编码，使得对于每次运行、所有位点 σ, τ 以及所有 k, λ：

(i) $N_G(\pi(w)) = \pi(N_F(w))$ 对每个单元 w 都成立；因此 π 保持影响图、连通性、步以及受影响单元集合，且 $|\pi(W)| = |W|$；*(ii)* 对每个步 (σ, σ')，$|\ell(H\sigma, H\sigma') - \ell(\sigma, \sigma')| \le c_H$；*(iii)* $\sigma \Rightarrow_k \tau$ 蕴含 $H\sigma \Rightarrow_{k+c_H} H\tau$，且 $\sigma \perp_k \tau$ 蕴含 $H\sigma \perp_{k+c_H} H\tau$；$H^{-1}$ 也同样如此；*(iv)* 每条 k-谱系都映射为一条 $(k + c_H)$-谱系，且 $\Lambda \approx_s \Lambda'$ 在层级 k 成立蕴含 $H\Lambda \approx_s H\Lambda'$ 在层级 $k + c_H$ 成立；*(v)* 若 W 是 σ 在时间 s' 的一个 (k, λ)-后代窗口，则 $\pi(W)$ 是 $H\sigma$ 在时间 s' 的一个 $(k + c_H, \lambda')$-后代窗口，其中 $\lambda' = \lambda + (m_k(\sigma, s') - m_{k+2c_H}(\sigma, s'))$ 为 $\log_2 |\Sigma|$。

证明。(i) 配置 c, c' 仅在 u 处不同，当且仅当 $H(c)$、$H(c')$ 仅在 $\pi(u)$ 处不同，并且 $G(H(c))(\pi(w)) = h_w(F(c)(w))$，其中 h_w 是一个双射。其余结论随即成立，因为所有这些概念都是根据依赖集和窗口基数定义的。（注意，$|\Sigma'| = |\Sigma|$。）

(ii)–(iii) 图像的框架、源数据、内容、扰动和响应，可由原对象的相应项通过可计算双射得到；这些双射由 H 和规则的编码统一给出：$H\sigma$ 的源数据 z' 可由 z 计算，反之亦然；目标窗口 $\pi(W)$ 可由 W 得到，反之亦然；并且扰动 $\delta \mapsto (h_i(\delta(i)))_i$ 是一个双射，因此扰动的比例得以保持。根据（F1），定义 2 和 3 中的每个条件复杂度变化至多为一个常数，互信息也如此，因为互信息由三个这样的项组合而成。

(iv) 可由 (i)–(iii) 和定义得出。

(v) 连通性和传递由 (i) 和 (iii) 保持不变。将 (iii) 应用于 H^{-1}，每个满足 $H\sigma \Rightarrow_{k+c_H} (s', W')$ 的连通 W' 都满足 $\sigma \Rightarrow_{k+2c_H} (s', \pi^{-1}(W'))$，因此 $m_{k+c_H}(H\sigma, s') \ge m_{k+2c_H}(\sigma, s')$。于是 $(|\pi(W)| - m_{k+c_H}(H\sigma, s')) \log_2 |\Sigma| \le (|W| - m_k(\sigma, s')) \log_2 |\Sigma| + (m_k(\sigma, s') - m_{k+2c_H}(\sigma, s')) \log_2 |\Sigma|$。 □

因此，除经济性仅在最小规模 m_k（它随 k 增大而不增）在 k 和 $k + 2c_H$ 之间没有下降时才保持不变外，所有概念在阈值发生常数偏移后都保持不变。用持久性的语言来说，这两个滤过是交错的：一个系统在层级 k 的结构包含于另一个系统在层级 $k + c_H$ 的结构中，反之亦然。那些

在远长于 c_H 的阈值区间内持续存在的特征，例如推论 1 中的裂变，因此保持不变。

可计算同构不包括会改变单元本身的局部重编码，例如滑动块码或高阶块表示；这类表示会将多个单元合并为一个，并引入禁块。它也不包括对整个构型进行任意可计算双射，因为这种双射不保留干预结构。任何此类概念都不可能在后一种变换下保持不变：单次运行若被视为一列经过任意可计算双射变换的构型，就不包含部分分解，因此无法区分两个副本与一个副本（第 14 节）。

8 个体与谱系

定义 7（谱系）。时间区间 $[s_0, s_1]$ 上的 k-谱系是位置 $\Lambda = (\Lambda(s))_{s_0 \le s \le s_1}$ 的一个族，其中在时间 s 时有 $\Lambda(s)$，满足

（L1）（连续性）$(\Lambda(s)\ \Lambda(s+1))$ 是一个代价至多为 k 的步，其中 $s_0 \le s < s_1$；

（L2）（完整性） $\Lambda(s) \Rightarrow_k \Lambda(s')$ 对所有 $s_0 \le s \le s' \le s_1$ 成立。

连续性表示内容缓慢变化；完整性表示谱系会将自身的变异向前传递。因此，谱系是时空中的一个有界区域，信息在其中传播，扰动也在其中持续存在。

为了比较谱系，我们在每个时间按照扰动是否能够在它们之间传递来对其进行分组。

定义 8（个体与谱系）。设 $\mathcal{L}$ 是公共区间 $[s_0, s_1]$ 上的有限个 k-谱系的一个族。对于 $s \in [s_0, s_1]$ 和 Λ、$\Lambda' \in \mathcal{L}$，若 $\Lambda \approx_s \Lambda'$ if$\Lambda(s) = \Lambda'(s)$，或对于某个 $s' \in [s, s_1]$，$\Lambda(s) \Rightarrow_k \Lambda'(s')$，或对于某个 $s' \in [s, s_1]$，$\Lambda'(s) \Rightarrow_k \Lambda(s')$，则记作 $\Lambda \approx_s \Lambda'$。$\approx_s$ 的传递闭包的等价类，就是 $\mathcal{L}$ 在时间 s 的k-个体。谱系 $G_k(\mathcal{L})$ 是这样一个图：其顶点是形如 (s, C) 的序对，其中 C 是时间 s 的一个个体；当且仅当 $C \cap C' \neq \emptyset$ 时，其边连接 (s, C) 和 $(s+1, C')$。

因此，时间 s 的一个个体，是指扰动能够直接或通过中介在其间传递的最大谱系群。谱系中有两个后继的顶点表示裂变 （分裂或出芽）；有两个前驱的顶点表示融合。不同谱系也可能属于同一个个体，例如同一生物体的两个部分。

定义 9（网状演化）。层级 k 处 $\mathcal{L}$ 的网状化数，是圈秩 $b_1(G_k(\mathcal{L}))$ $= |E| - |V| + \kappa$，其中 E、V和 κ 分别是 $G_k(\mathcal{L})$的边数、顶点数和连通分量数。

定义 8 中的族 $\mathcal{L}$ 可以根据内在性质选取，即选取所有由给定位置的后代窗口构成的谱系。

定义 10（后代谱系）。设 σ_0 是时间 s_0 的一个位置，且 $s_1 \geq s_0$。σ_0 在 $[s_0, s_1]$ 上的一个（k，λ）-后代谱系 是一个 k-谱系 Λ，具有 $\Lambda(s_0) = \sigma_0$，使得对于每个 $s \in (s_0,\ s_1]$，$\Lambda(s)$ 的窗口都是 σ_0 在时间 s 的一个（k，λ）-后代窗口。它们的集合记为 $\mathcal{D}_{k,\ \lambda}(\sigma_0,\ s_1)$。

根据命题 5，$\mathcal{D}_{k,\ \lambda}(\sigma_0,\ s_1)$ 是有限的，元素少于 $2^{(k+1)(s_1-s_0)}$ 个，因此 $G_k(\mathcal{D}_{k,\ \lambda}(\sigma_0,\ s_1))$ 有定义。它只取决于 σ_0、s_1、k 和 λ：σ_0的内在系谱 。

没有融合的谱系是一片森林，网状化数为 0。当已经分离的谱系之后交换信息时，就会出现环，例如重组或水平转移；因此，网状化数衡量谱系偏离树的程度。

备注 3（副本与不可分辨者同一性）。携带同一对象精确副本的两条谱系，其内容可以以常数代价相互确定，因此不存在任何关于内容的条件能够将它们区分开来。定义 8 根据扰动的传播将它们区分开来，这是一种关系性和因果属性。根据引理 4，对于携带超过约 $2k$ 比特的窗口，分离与传递互不相容，因此，从某个时刻起始终相互分离的两条此类谱系是不同的个体。

9 同伦与持久性

定义11（链的同伦）。具有相同端点（$\sigma_0 = \sigma'_0, \sigma_n = \sigma'_n$）的两条链 $\gamma = (\sigma_0、\ldots\ldots、\sigma_n)$ 和 $\gamma' = (\sigma'_0、\ldots\ldots、\sigma'_n)$，如果它们恰好只在一个中间位置上不同，且二者的代价都不超过 k，则称它们在层级 k 下相差一个初等变形。如果它们可以通过层级 k下的一系列有限次初等变形相互连接，则称它们在层级 k 下同伦。

层级 k 下的同伦是在端点固定且代价不超过 k的链上定义的一种等价关系，并且关于 k具有单调性：在层级 k 下同伦的链，在每一个层级 $k' \geq k$下都同伦。同一对端点之间彼此不等价的链，是信息从一个位置传播到另一个位置的不同路径，它们由不存在低代价链的区域彼此分隔。链遵循时间的方向，因此自然采用有向同伦的框架；有向同伦是为具有不可逆时间方向的空间发展起来的，例如并发理论中的空间 [11, 12]。

持久性。第3–8节中的所有概念都取决于阈值 k。随着 k 增大，连续性和完整性更容易满足，因此更多位点族符合谱系的条件；分离也更容易满足，因此更多谱系对被视为彼此分离。这些效应对个体数量的影响方向相反。一种清晰的组织方式是使用两个阈值：k 用于连续性和完整性，k' 用于分离，从而得到一个双参数谱系族 $G_{k,\ k'}$。谱系的某个特征（例如裂变为给定数量的个体）若在（k，k'）平面上的大范围区域内都存在，则该特征是稳健的；若只在小范围区域内存在，则是边缘的。我们将该区域的范围称为这一特征的持久性 ，并将其视为一种分级程度

的个体性。在定义 8 的单阈值设置中，持久性是 k 的一个取值区间（推论 1）。

10 奇偶规则下的裂变

令 $d=2$、$\Sigma=\mathbb{F}_2$，以及

$$F(c)(i)=\sum_{e\in N_0} c(i+e) \pmod 2 \quad , \qquad N_0=\{\pm e_1,\pm e_2\} \quad ,$$

四个最近邻上的奇偶规则（通常归功于 Fredkin），其中 $\rho=1$。其依赖集为 $N(w)=w+N_0$，因此其影响图是 $\mathbb{Z}^2$ 的四邻域图；特别地，连通窗口是由单元构成的四连通集合。由于 $N_0=-N_0$，连续的前沿窗口 $Q+se$ 和 $Q+(s+1)e$ 构成一步。固定 $q\ge 1$、母体窗口 $Q=\{0,\dots,q-1\}^2$ 和任意一个母体 $x\in\mathbb{F}_2^{Q}$；运行从满足以下条件的 c_0 开始：在 Q 上等于 x，其他位置均为 0。母体位置是 $\sigma_0=(0,\ Q)$。对于 $e\in N_0$ 和 $s\ge 0$，令前沿位置为 $\sigma_e(s)=(s,\ Q+se)$，并令 $\Lambda_e=(\sigma_e(s))_{s\ge 0}$。四条前沿谱系都从 σ_0 开始。方框 Q 仅描述母体；后代窗口的特征由定理 2 内在地刻画。

令 $N_s(v)\in\mathbb{F}_2$ 为从 0 到 $v\in\mathbb{Z}^2$、步长属于 N_0 且长度为 s 的游走数量的奇偶性。由于 F 在 $\mathbb{F}_2$ 上是线性的，且 $F=\sum_{e\in N_0}T_e$ 满足 $(T_e c)(i)=c(i+e)$，因此有 $F^s=\sum_v N_s(v)T_v$，即

$$c_s(i)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} N_s(j-i)\,c_0(j) \quad . \tag{1}$$

由于每条长度为 s 的游走，其终点与起点的距离至多为 s，因此当 $|v|_1>s$ 时，$N_s(v)=0$。于是：

引理 6 (ℓ_1 光锥)。对于每个有限构型 c，$\operatorname{supp}(F^\tau(c))\subseteq\{j+v\mid j\in\operatorname{supp}(c),\ |v|_1\le\tau\}$。

引理 7 (前沿确定母体)。对于任意 $s\ge 0$ 和 $e\in N_0$，映射 $\mathbb{F}_2^{Q}\to\mathbb{F}_2^{Q}$，$y\mapsto F^s(y)|_{Q+se}$（其中将 y 放置在 Q 上、在其他位置置为 0，并将结果平移回 Q）是一个线性双射。此外，对于放置在 $Q+b$ 上的每个 $\Delta\in\mathbb{F}_2^{Q+b}$，映射 $\Delta\mapsto F^\tau(\Delta)|_{Q+b+\tau e}$ 对于任意 $b\in\mathbb{Z}^2$ 和 $\tau\ge 0$ 都是一个线性双射。

证明。由与 F 可交换的晶格对称性，只需考虑 $e=e_1$；由平移不变性，只需证明第一个陈述。对于 $i=(s+a,b)\in Q+se_1$ 和 $j\in Q$，方程（1）给出系数 $N_s(v)$，其中 $v=j-i=(j_1-a-s,\,j_2-b)$。如果 $j_1<a$，那么 $|v|_1\ge|v_1|>s$，且系数为 0。如果 $j_1=a$，那么 $v_1=-s$，因此游走的每一步都是 $-e_1$，于是 $v_2=0$，且当且仅当 $j_2=b$ 时，系数为 1，否则为 0。将 $Q+se_1$ 和 Q 均按其第一坐标（相对于窗口）排序后，该映射的矩阵因此为分块上三角矩阵，对角线上是单位块，所以在 $\mathbb{F}_2$ 上可逆。 □

证明还揭示了更多：对于 $0 \le a_0 < q$， $Q + se_1$ 中相对第一坐标不小于 a_0 的单元，仅取决于 Q 中第一坐标不小于 a_0 的单元，其间由一个对角线上为单位块的分块上三角映射相联系。因此，前沿窗口外侧列 $\{a_0, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, q-1\}$ 的内容决定了母体中相应的列；根据对称性，每个前沿窗口的外侧列或行也同样如此。

定理 1（裂变为四个个体）。存在常数 c 和 c'，它们仅取决于 U 和编码，并且对每个$q \ge 1$ 和每个母体 x，以下结论均成立。

(i)（连续性）每个步$(\sigma_e(s)\ \sigma_e(s+1))$ 的代价至多为 c。

(ii)（完整性）对于所有 $s \le s'$和每个 $\delta \in \mathbb{F}_2^{Q+se}$， $K(Q + s'e \mid z) \le c$以及$K\big(\delta \mid \langle z, v^{\delta}_{\sigma_e(s')}\rangle\big) \le c$，其中 $z = z(\sigma_e(s)\ s')$且干预发生在$\sigma_e(s)$。特别地，每个 Λ_e 都是一个 k-谱系，且在每个区间上对每个$k \ge c$均如此。

(iii)（分离）对于 $e \ne e'$, $s \ge q$, $s' \ge s$ 和每个 $\delta \in \mathbb{F}_2^{Q+se}$，对发生在 $\sigma_e(s)$的干预的响应 $v^{\delta}_{\sigma_{e'}(s')}$ 不依赖于 δ，并且$I(\delta :\ v^{\delta}_{\sigma_{e'}(s')} \mid z) \le c$，其中 $z = z(\sigma_e(s)\ s')$。

(iv) (副本) 对于每个 $t = 2^m \ge q$，在时间 t，每个前沿窗口 $Q + te$ 的内容都是 x 的精确平移。

证明。(i) 根据引理 7， $v_{\sigma_e(s)} = L_s(x)$ 和 $v_{\sigma_e(s+1)} = L_{s+1}(x)$ 分别是关于可由规则、时间、 q 和 e 计算的线性双射 L_s、 L_{s+1}。每个窗口都可以通过平移 $\pm e$ 从另一个窗口得到，而 q 可从窗口中读出，因此每个内容都可以通过一个固定程序从另一个内容计算得到，该程序作用于框架以及指定 e 的两个比特；每一步的代价都由一个常数界定。

(ii) 设 $W = Q + se$ 和 $\tau = s' - s$。目标窗口 $Q + s'e = W + \tau e$ 可由 z（其中包含 W、 s 和 s'）以及指定 e 的两个比特计算得到。根据线性， $c_{s'}^{\sigma \leftarrow \delta} = F^{\tau}(\tilde{c}_s) + F^{\tau}(\delta)$, 其中 $\tilde{c}_s$ 是将 W 设为 0 的 c_s，而 δ 被置于 W 上；第一项可由 z 计算得到。根据引理 7， $F^{\tau}(\delta)|_{W+\tau e}$ 是 δ 的线性双射，可由框架计算得到。由于 $W + \tau e = Q + s'e$、 δ 可由 z 和 $v^{\delta}_{\sigma_e(s')}$ 通过一个固定程序计算得到，该程序从响应的位置读出 e。

(iii) 根据引理 6，扰动只会影响与 $W = Q + se$ 的 ℓ_1 距离至多为 $\tau = s' - s$ 的单元。我们证明， $Q + s'e'$ 中的每个单元与 W 的 ℓ_1 距离都大于 τ。设 $p, p' \in Q$，使得每个坐标上的 $|p_l - p'_l| \le q - 1$。如果 $e' = -e$，则 $se + p$ 与 $s'e' + p'$ 在 e 的坐标上的差的绝对值至少为 $s + s' -$（$q-1$），因此 ℓ_1 距离至少为 $2s + \tau -$（$q-1$）$> \tau$，因为 $s \ge q$。如果 $e' \perp e$，则该差的两个坐标的绝对值分别至少为 $s -$（$q-1$）和 $s' -$（$q-1$），因此 ℓ_1 距离至少为 $2s + \tau - 2$（$q-1$）$> \tau$。因此 $v^{\delta}_{\sigma_{e'}(s')} = F^{\tau}(\tilde{c}_s)|_{Q+s'e'}$，这并不取决于 δ，且可由 z计算。由 (F1)， $I(\delta :\ v^{\delta} \mid z) \overset{+}{\le} K(v^{\delta} \mid z) \overset{+}{\le} 0$。

(iv) 由于 $F^2 = \sum_{e,\ e'} T_{e+e'} = \sum_e T_{2e}$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上（含有 $e \neq e'$ 的项两两抵消），由归纳法得出 $F^{2^m} = \sum_{e \in N_0} T_{2^m e}$。结合 $t = 2^m$，$c_t(i) = \sum_e x(i+te)$。对于满足 $j \in Q$ 的 $i = j + te'$，项 $e = -e'$ 给出 $x(j)$；对于 $e \neq -e'$，点 $i + te = j + t(e + e')$ 位于 Q 之外，因为 $e + e' \neq 0$ 有一个绝对值至少为 1 的坐标，且 $t \geq q$。因此，$c_t|_{Q+te'}$ 是 x 的平移。 □

推论 1 (谱系与持久性)。设 $\mathcal{L} = \{\Lambda_e \mid e \in N_0\}$ 位于区间 $[0, s_1]$ 上，且满足 $s_1 \geq q$。对于每个满足 $c \leq k < q^2 - c'$ 的 k，谱系 $G_k(\mathcal{L})$ 在时间 0 恰有一个顶点，而在每个时间 $s \in [q, s_1]$ 恰有四个顶点。因此，母体最迟在时间 q 发生裂变为四个个体；这一裂变在长度约为 q^2 的阈值区间内持续存在，该长度即母体窗口的信息量。

证明。根据定理 1(i)–(ii)，每个 Λ_e 都是关于 $k \geq c$ 的 k-谱系。在时间 0，四条谱系都位于位置 (0,0)，因此构成一个个体。令 $s \geq q$ 和 $e \neq e'$。根据定理 1(iii)，对于每个 $s' \geq s$，在 $\sigma_{e'}(s')$ 处对 $\sigma_e(s)$ 进行干预所产生的响应可由 z 计算，因此 $K(\delta \mid \langle z, v^\delta \rangle) \overset{+}{\geq} K(\delta \mid z)$。根据 (F3)，超过一半的 δ 满足 $K(\delta \mid z) \geq q^2 - 1$，因此，若 $k < q^2 - c'$ 取某个合适的常数 c'，则超过四分之一的 δ 不满足传输条件，且 $\sigma_e(s) \not\Rightarrow_k \sigma_{e'}(s')$。因此，对于所有 $e \neq e'$，都有 $\Lambda_e \not\approx_s \Lambda_{e'}$，并且四条谱系在时间 s 是四个不同的个体。 □

现在我们证明，这四个前沿也能仅凭内在性质加以区分，而且这需要连通性。

命题 7 (嵌合体)。存在一个常数 c，使得对每个 $q \geq 2$ 和 $s \geq 0$，以下结论成立。设 $h = \lfloor q/2 \rfloor$，并令 C_s 为东侧前沿窗口外侧的 h 列 $\{s + q - h, \ldots, s + q - 1\} \times \{0, \ldots, q - 1\}$ 与西侧前沿窗口外侧的 $q - h$ 列 $\{-s, \ldots, -s + q - h - 1\} \times \{0, \ldots, q - 1\}$ 的并集。那么 $|C_s| = q^2$、$\sigma_0 \Rightarrow_c (s, C_s)$，且对于 $s \geq 1$，窗口 C_s 不连通：它的两部分之间的 ℓ_1-距离为 $2s + 1 > 1$。对于 $s \geq q$，它们位于定理 *1(iii)* 中两个分离的前沿窗口之内。

证明。C_s 可由 q 和 s 计算得到，因此对于 $z = z(\sigma_0,\ s)$，$K(C_s \mid z) \leq c$。根据引理 7 之后的备注，东部确定了扰动的列 $q - h$、……、$q - 1$。关于直线 $i_1 = (q-1)/2$ 的反射将 Q 映射到自身，与 F 交换，并置换东部和西部前沿窗口，将西侧前沿窗口的外侧 $q-h$ 列映射到东部前沿窗口的外侧 $q - h$ 列；因此，西部确定了列 0、……、$q - h - 1$。二者共同通过一个固定程序确定扰动，因此对于每个 δ，$K(\delta \mid \langle z,\ v^\delta \rangle) \leq c$。距离的陈述是显然的。 □

嵌合体的大小与母体相同，位于常数代价处，并能精确确定母体；仅从大小和信息量来看，它与前沿窗口一样，都是合格的后代。它由彼此分离的两个副本的部分拼合而成。定义 5 中连通性的作用就是排除这类嵌合体；在较大的 2 的幂处，经济性条件会排除其部分由路径连接的嵌合体。

定理 2（奇偶规则的后代窗口）。 存在一个常数 c，使得对于每个 $q \geq 1$、每个母体 x、每个 $k \geq c$ 和每个 $\lambda \geq 2k + c$，以下结论成立。

(i) 对每个 $s \geq 0$ 和 $e \in N_0$，前沿窗口 $Q + se$ 都是 σ_0 在时间 s 的一个 *(k, λ)*-后代窗口。特别地，在每个区间 $[0, s_1]$ 上，每条前沿谱系 Λ_e 都是 σ_0 的一条 *(k, λ)*-后代谱系。*(ii)* 假设 $3k + c < q^2$，并令 $t = 2^m$ 满足 $t > q + \lambda + 3k + c$。那么， σ_0 在时间 t 的每个 *(k, λ)*-后代窗口都恰好与四个前沿窗口 $Q + te$ 之一相交，并且其中至少有 $q^2 - 3k - c$ 个单元。*(iii)* 此外，假设 $t > q^2 + q + \lambda + 3k + c$。如果 $\Lambda \in \mathcal{D}_k$，$\lambda(\sigma_0, 2t)$，那么 $\Lambda(t)$ 和 $\Lambda(2t)$ 的窗口会与同一个前沿 e 的前沿窗口相交。因此， σ_0 的每条 *(k, λ)*-后代谱系，在其区间内所有 *2* 的幂 $t' \geq t$ 处，都会与同一个前沿的前沿窗口相交。

证明。 记作 $z_s = z(\sigma_0, s)$； Q 之外的背景为 0，而对$\delta \in \mathbb{F}_2^Q$ 的响应为 $F^s(\delta)$，其中 δ 置于 Q上。

（i）窗口 $Q + se$ 是连通的，并且根据定理 1(ii)（干预发生在时间 0），$\sigma_0 \Rightarrow_c (s, Q + se)$。根据引理 5(i)， $m_k(\sigma_0, s) \geq q^2 - 2k - c$，因此 $q^2 - m_k \leq 2k + c \leq \lambda$。步条件成立，因为连续的前沿窗口相差一个单元的平移；谱系条件则由定理 1(i)–(ii)成立。

(ii) 根据定理 1(iv)， $F^t(\delta) = \sum_e T_{te}\delta$，因此，受影响单元集合 $R(\sigma_0, t)$ 包含于四个前沿窗口的并集 B 中。令 W 为一个 (k, λ)-后代窗口。根据引理 5(ii)， $|W \cap B| \geq q^2 - 3k - c > 0$，因此 W 与某个前沿窗口相交。假设 W 与两个前沿窗口相交。由于 W 连通，它包含一条单元路径，路径上每个单元与下一个单元之间的 ℓ_1-距离为 1，该路径从一个前沿窗口延伸至另一个前沿窗口；我们可以选择这条路径，使其中间单元位于 B 之外。不同的前沿窗口之间的 ℓ_1-距离至少为 $2(t - q + 1)$（垂直前沿之间可达到该距离），因此这条路径至少有 $2(t - q) + 1 > t - q$ 个中间单元，并且 $|W| \geq q^2 - 3k - c + t - q$。根据 (i)， $m_k(\sigma_0, t) \leq q^2$，因此利用经济性可得 $|W| \leq q^2 + \lambda$。所以 $t - q \leq \lambda + 3k + c$，矛盾。

(iii) 令 W_t 和 W_{2t} 分别为 $\Lambda(t)$和 $\Lambda(2t)$的窗口，并根据 (ii) 假设它们与前沿 e和 e'的窗口相交。根据定义 2，时间 $s + 1$ 的窗口中的每个单元都依赖于时间 s的窗口中的某个单元，因此与其相距 ℓ_1距离 1；于是， W_{2t} 中的每个单元都在某个 W_t 中的单元的 ℓ_1距离内，从而也在ℓ_∞距离 t 内。若 $e' \neq e$，则窗口 $Q + te$ 和 $Q + 2te'$ 之间的 ℓ_∞距离至少为 $2t - q + 1$；因此， W_t 中有一个单元距 $Q + 2te'$ 不超过 t，另有一个单元位于 $Q + te$中，而这两个单元之间的距离至少为 $t - q + 1$。但是，W_t 是 4-连通的，且至多包含 $q^2 + \lambda$ 个单元，因此其 ℓ_1直径以及ℓ_∞直径都小于 $q^2 + \lambda$，矛盾。最后一个结论可通过对连续的 2 的幂归纳得到。 □

因此，在仅将母体窗口设为指定区域的情况下，2 的较大幂处的后代恰好局部化于四个前沿，并且每个

后代谱系都沿着单个前沿延伸。定理 2 尚未揭示的是内在系谱本身，即 $G_k(\mathcal{D}_{k,\lambda}(\sigma_0,\ s_1))$ 中个体的数量：沿着前沿 e 延伸的谱系在 2 的幂之间未必重合，而不同前沿上的谱系之间的分离，则需要分析它们在中间时刻的窗口。我们推测，在推论 1 的阈值范围内，内在系谱在所有时间 $s \geq q$ 都包含四个个体。

备注 4（数值观察）。对于 $q = 4$，我们通过对线性映射 $x \mapsto c_s|_W$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上进行高斯消元，计算出哪些形状为 Q 的窗口 W 能确定母体。正如引理 7 所保证的，在我们测试的每个时间点（$0 \leq s \leq 16$ 和 $s \in \{24, 31, 32, 33, 48, 63, 64\}$）都存在这样的窗口。我们还统计了时间点 $s \in \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 31, 32\}$ 上所有这类窗口的数量。在 $s = 1$ 时有四个，它们形成一个由相邻位置组成的簇。除 12 和 20 之外的其他时间点上，恰好有四个窗口，分别位于四个前沿，形成四个彼此分离的簇。在 $s = 12 = 8 + 4$ 和 $s = 20 = 16 + 4$ 时有十六个；此时构型是四个时间点为 4 时的构型的平移副本之和（因为 $F^8 = \sum_e T_{8e}$ 和 $F^{16} = \sum_e T_{16e}$），每个副本各自贡献四个前沿。因此，在测试的时间点上，除了这些窗口之外，没有其他与母体同样大小的窗口携带母体的信息。去掉形状约束后，对于 $q = 2$（19 种形状；$s \leq 20$）和 $q = 3$（9910 种形状；$3 \leq s \leq 7$），我们枚举了所有恰好包含 q^2 个单元且能确定母体的连通窗口（定义 4；对于这条规则而言，即固定多格骨牌）。在测试过的 2 的幂 $s \geq q$ 时，恰好有四个这样的窗口，即前沿窗口。其他时间点上则有更多：有些与前沿窗口重叠，另一些位于上述平移子构型的前沿，例如在 ℓ_∞ 时，距最近的前沿窗口最多可达 10；对于 $q = 2$、$s = 13 = 8+4+1$ 也是如此。这些额外窗口不会作为后代在远离前沿的位置持续存在：在较大的 2 的幂时，所有后代窗口都位于前沿（定理 2(ii)）。我们还直接验证了 $2 \leq q \leq 6$ 和 $q \leq s \leq 25$ 时的命题 7。我们猜想，对于所有 q 和 s，前沿窗口以及它们在平移构型中的对应窗口（如 $s = 12$ 和 $s = 20$ 时的情况）就是仅有的这类窗口；要证明这一点，需要更细致地分析奇偶性 $N_s(v)$，例如借助卢卡斯定理。

奇偶规则常被称为一种让每个模式都“繁殖”的规则。在当前框架中，它的行为是一种裂变：母体的信息立即离开原始窗口，沿着四个前沿向外传播；这些前沿最迟在时间 q 成为因果分离的个体，并在时间 $2^m \geq q$持有母体的精确副本。这种裂变是否算作自我繁殖，则是另一个问题，单凭谱系无法回答（第 14 节）。

11 个体的层级与优选尺度

定义 5 中的源窗口规定了受到扰动的对象。我们不再选择某个源窗口，而是同时考虑所有源窗口。由此得到一种结构，它

仅取决于运行和阈值，其中个体彼此嵌套，源的大小则成为一个额外的过滤参数。随后，自主性这一选择准则会在该结构中标出优选尺度，但并不定义该结构。

对于子窗口对后代的继承，我们需要一致传递的一个一致版本。对于位置 σ、不早于 σ 的位置 τ，以及命题3的响应映射g，若 $K(W_\tau \mid z) \le k$，且 g的每个纤维至多包含 2^k 个元素，则记作 $\sigma \Rightarrow_k^* \tau$（一致传递）。根据命题3(i)，$\sigma \Rightarrow_k^* \tau$ 意味着对每个 δ，都有 $K(\delta \mid \langle z,\ v_\tau^\delta \rangle) \le k + c$，因此 $\sigma \Rightarrow_{k+c} \tau$。在奇偶规则下，前沿窗口以某个常数级别一致传递，因为它们的响应映射是双射（引理 7）。

引理8（通过子窗口继承）。存在一个常数 c，使得以下结论成立。设 $\sigma = (s, W)$ 和 $\sigma' = (s, W')$ 满足 $W' \subseteq W$，并设 τ 是一个不早于 s 的位置。若 $\sigma \Rightarrow_k^* \tau$，则 $\sigma' \Rightarrow_{k+K(W \mid W')\ +c}^* \tau$。

证明。令 z, z' 为 σ, σ' 和 $y = c_s|_{W \setminus W'}$ 的源数据。由于 W 之外的构型是 W' 之外构型的限制，因此数据 z 可由 z' 和 W 计算得出；于是 $K(W_\tau \mid z') \le K(W_\tau \mid z) + K(W \mid W') + c$。$\sigma'$ 的响应映射为 $g'(\delta') = g(\delta' \cup y)$，其中 $\delta' \cup y$ 是对 W 的扰动，在 W' 上等于 δ'，在 $W \setminus W'$ 上等于 y；因此，$\delta' \mapsto \delta' \cup y$ 将 g' 的每个纤维单射地映射到 g 的一个纤维中，而后者至多有 2^k 个元素。 □

因此，每个均匀接收某个窗口的扰动的连通窗口，也会以提高相应级别的方式接收其每个子窗口的扰动；提高的幅度等于描述该窗口相对于子窗口所需的代价。特别是，它包含一个包含意义下极小且具有这一性质的连通窗口。部分的后代可以在整体的后代中找到。对于定义 3 中基于分数的传递，类似结论可能不成立：W' 的扰动构成 Σ^W 的一个切片，其中窗口其余部分具有其实际内容 y，而关于 Σ^W 的 $3/4$ 条件并不能说明某个特定切片的情况。门控传递就是这种情形：部分是否传递取决于窗口其余部分的状态。

定义12（典范下降结构）。对于 $k \ge 0$，第 k 层运行的下降关系是位点对 $(\sigma,\ \tau)$ 的集合 $\mathcal{T}_k$，其中 τ 不早于 σ，且 W_τ 连通并且 $\sigma \Rightarrow_k^* \tau$。该运行的个体化结构 是关系族 $\mathcal{T}_k$、$k \ge 0$，以及所有位点 σ_0 的内禀谱系$G_k(\mathcal{D}_{k,\ \lambda}(\sigma_0,\ s_1))$。

个体化结构仅取决于运行、规则和阈值；并未选定窗口。根据引理8，它关于源是反单调的：扩大源窗口只会移除目标，至多产生层级偏移 $K(W \mid W') + c$。个体呈嵌套关系，作为拥有各自后代的个体的部分出现，而源窗口的大小与 k 和 λ 一样，也是一个尺度参数。根据命题 6，在干预结构的可计算同构下，该结构对阈值的常数偏移保持不变，因为一致

传递作为关于纤维大小和跟踪的条件，其保持方式与传递相同。

哪些尺度更受偏好，是另一个问题。对于窗口 W 和$r \geq 1$，令领圈 $C_r(W)$ 表示窗口外、在影响图中与 W 的距离不超过 r的单元集合。

定义 13（自主性）。位置 $\sigma = (s, W)$ 在时间 $s' \geq s$ 是（k, r）-自主的，当且仅当存在一个连通窗口 W'，使得 $\sigma \Rightarrow_k^* (s', W')$ 且（$s, C_r(W)$） $\perp_k (s', W')$：对窗口的扰动完全到达 W'，而对其领圈的扰动在窗口保持其实际内容时，携带到那里的比特至多为 k 。

自主性是边界或马尔可夫毯的一种干预类比。如果在某次运行中，存在尺寸为 k 和 r的自主窗口，且这种情况在较长时间区间和广泛范围内持续成立，那么该尺度便更受偏好；这同样是一种持久性概念，它标示出尺度，而非定义个体。

命题 *8*（奇偶规则下不存在优先个体）。在奇偶规则下，对于窗口 W、 W'和时滞 $t = s' - s$，响应映射将 (s, W) 映到 (s', W') 的纤维大小，以及将 $(s, C_r(W))$ 映到 (s', W') 的响应映射的纤维大小，只取决于 W 、 W' 、 r 和 t，并且在同时平移 W和 W'时保持不变；它们不取决于运行。特别地，忽略命题*3*中的常数和追踪成本，若且唯若线性映射 $\delta \mapsto F^t(\delta)|_{W'}$, $\delta \in \mathbb{F}^{C_r(W)}$ *2* 在 $\mathbb{F}_2$ 上的秩至多为 k， W 的边界层就在层级 k 与 W' 分离。

证明。由线性性可知，对集合 U 的扰动 δ 所产生的响应为 $F^t(\tilde{c}_s) + F^t(\delta)$，其中 $\tilde{c}_s$ 是将 U 设为 0 后得到的构型；第一项不依赖于 δ，因此响应映射在 W' 上的纤维是 $\delta \mapsto F^t(\delta)|_{W'}$ 的核的陪集。该映射由形状和时滞确定，并且与平移可交换。维数为 $|C_r(W)| - \rho$ 的核（其中 ρ 是秩）产生大小为 $2^{|C_r(W)| - \rho}$ 的纤维；对除比例为 2^{-d} 的 δ 之外的所有情形，命题3(iv)给出 $I(\delta : v^\delta \mid z) = \rho$，上下误差分别至多为 $K(W' \mid z) + c$ 和 $d + c \log(n + 2)$。 □

因此，在奇偶规则的任何运行中，自主性都无法区分母体窗口与任何其他形状相同的窗口：不存在优先个体，这与每个模式都以相同方式复制这一事实相符。我们计算了 $q = 4$、 $W = Q$、 $W' = Q + s e_1$（东侧前沿窗口， W 会在每个 s上均匀地向其传输）以及宽度为 $r = 1$的领圈的领圈映射的秩，2：

s	4	5	6	7	8	9	10	12	15	16	17	24	32
$r = 1$	2	12	8	12	0	12	10	2	12	0	12	0	0
$r = 2$	8	16	16	12	0	12	16	8	12	0	12	0	0

在 $s \in \{8, 16, 24, 32\}$ 时，领圈不会向前沿窗口泄漏任何信息，这与 $F^{2^m} = \sum_e T_{2^m e}$（以及 $F^{24} = F^{16} F^8$）一致；

而在其他时间，最多会泄漏完整的 16 比特。因此，对于所有窗口而言，前沿谱系的自主性只在离散的时间点成立。

要使自主性能够选出一个非平凡的窗口族，规则必须包含边界。两种直观的构造都行不通，原因颇具启发性。如果膜是单元的一种状态，那么干预就包括对膜本身的扰动，而扰动会将膜打开；对包含膜单元的窗口进行随机扰动，几乎必然会打开膜。反之，如果将膜写入法则之中，比如把它设定为状态既不改变、也不影响任何事物的单元，那么被包围的区域就只是影响图的连通分量，仅由依赖结构选出，与信息无关。要得到一个非平凡的例子，膜必须是一种状态，并能在受到扰动后修复，这样它所包围的窗口在大多数扰动下都是自主的；这使自主性与自创生的闭包条件联系起来 [13]。

12 幅图示

例 1（忒修斯之船）。一艘船的木板逐块更换，被拆下的木板则储存起来，之后重新组装成另一艘船。将船体和储存的木板建模为确定性系统中的区域。每次更换都会使船体发生有限的信息变化，因此，船体状态序列构成一条低代价谱系；储存的木板被运至存放处并重新组装，也构成另一条谱系。在木板被拆下之前，对船的任何部分进行扰动，都会传播到后来形成的两艘船上（通过船体传播到修复后的船，通过木板传播到重新组装的船），因此只有一个个体。拆下木板之后，对储存木板的扰动会传播到重新组装的船，而不会传播到修复后的船；对船体及其替换木板的扰动则会产生相反的结果。两条谱系彼此分离，因此存在两个个体。按照定义 8，原船发生了裂变，其发生时间在每个阈值 k 下都有明确定义；至于两艘船中哪一艘“是”原船，除了这段谱系之外无从回答，尤其无法根据两艘船各自的内容来回答。

示例 2（网状演化）。假设两条谱系分离一段时间后重新接触，并交换其部分内容，之后各自的扰动都会传播到另一条谱系中。在接触时，两个个体融合为一个；如果它们后来再次分离，谱系中就会包含一个环，且网状化数为正。这是重组或水平转移的模式，与推论 1 中纯粹的分支谱系相对。

13 充分性条件

个体性的定义是否合理，取决于它能否正确处理相关案例以及它所具备的属性。我们列出这些定义旨在满足的条件及其依据，

并将其与其他方法进行比较。

（A1）副本。 两个无法相互影响的精确副本是不同的个体；在其间可以传递扰动的副本，则不能被认定为不同个体。（引理 4、第 8 节关于副本的备注、定理 1。）（A2）周转。 沿着一段历史，其内容在每一步仅改变少量比特，却同时将自身的扰动向前传递；这样的历史是一个个体；其中的信息只能逐渐丢失。（定义 7、引理 3、忒修斯之船。）（A3）裂变与融合。 这种表示能够体现分裂与合并，并在每个阈值处标示时间和分级稳健性。（定义 8、推论 1。）（A4）不变性。 判定不依赖于通用机器、可计算的编码或干预结构的可计算同构，至多导致阈值发生常数偏移。（命题 6；只有在最小大小 m_k 局部恒定的地方，经济性才具有不变性。）（A5）两种成分。 该判据既不是运行本身的函数，也不是运行及其依赖结构的函数。（命题4。）（A6）单次运行。 该判据适用于一次确定性运行及其实际背景和历史，不涉及历史或环境上的任何分布；它只对扰动进行量化。（命题 3 和命题 2。）（A7）内在区域。 不预先规定任何区域：后代窗口以内在方式选取，而源窗口并非被选择出来，而是一次性全部纳入考虑，由此形成以源大小为尺度参数的嵌套结构；自主性标示出优选尺度。（定义 5、定理 2、定义 12、引理8、命题 8。）

表1将当前框架与 Krakauer 等人的系综方法 [1], 、Ay 和 Polani 的干预信息流 [2] （一种度量，而非个体性理论）、整合信息理论[14], （其排他性公设为系统划定边界），以及对生命游戏中模式的自创生分析 [13]进行了比较。其他方法的条目反映了我们对它们的理解，因而是暂定的；这些条目的目的在于定位当前提案，而不是根据其他方法自身的目标对其进行评价，因为其中有几种方法的目标与我们不同。

该表并非排名。其要点在于，条件（A1）–（A3）涉及随时间保持恒等映射以及副本之间的区分，而复制使这些条件不可避免；当前框架满足这些条件，同时也满足（A5）和（A6）。

	本文	Krakauer	Ay–Polani IIT 3.0		自创生
（A1）副本	yes	?	yes[a]	yes	?
（A2）周转	yes	no[b]	n.a.	no[c]	yes
（A3）裂变、融合	yes	no	n.a.	no[c]	?
（A4）不变性	yes[d]	部分[e]	部分[e]	部分[f]	?
（A5）两种成分	yes	no	yes	yes	?
（A6）单次运行	yes	no	部分[g]	部分[h]	yes
（A7）内在区域	yes[j]	部分[i]	no	yes	yes

表1：当前框架及其他方法的充分性条件（A1）–（A7）。“? ”：根据我们的阅读无法确定；“不适用”：该方法是一种度量，而非个体性理论。注：[a] 用作分离判据；[b] 候选聚合体是固定的变量集合，并在相邻两步之间进行比较；[c] 分析针对某一时间点的系统；[d]在常数范围内，但经济性方面另有保留；[e] 在状态重新标记下保持不变，但取决于变量的选择；[f] 取决于元素和粒度的选择；[g] 背景可以保持固定，但该度量是对干预取平均；[h] 依赖于状态，但根据完整的转移概率定义；[i] 通过对候选聚合体进行优化；[j] 作为涵盖所有源窗口的嵌套结构，而非单一选择。

14 讨论

这一概念无法判定的内容。谱系和系谱是根据运行及对其区域进行的干预计算得出的。它们描述信息如何传播和分离，也就是说，谁是从谁衍生而来的。但它们无法判定后代是由其母体构建的，还是由动力学定律产生的：在奇偶规则下，副本源于定律对任意模式执行的裂变。要作出这一判定，就需要对母体的内部结构进行干预；这正是关于自我复制的配套工作的研究主题。

与先前研究的关系。 Krakauer 等人 [1] 通过候选聚合体从一个时间步向下一时间步传播的、以其环境为条件的香农信息来定义个体性，这需要一个系综。Ay 和 Polani [2], 定义了干预性信息流，其中背景变量要么固定不变，要么取平均；Lizier 和 Prokopenko [3]分析了它与信息传递的关系。根据命题3，传输与分离条件除加性常数外，是 Ay–Polani 流在均匀干预和固定背景下的逐点版本；我们将其视为继承自这项工作的干预核心，而非一种新度量。整合信息理论和因果涌现的有效信息方法也使用结合信息与干预的度量来界定系统；我们尚未发现命题4的双向必要性陈述曾针对个体性被提出，但信息与干预的结合本身并非新内容。当前框架新增的是：必要性陈述本身；谱系连续性——这是个体字符串的一项条件，其定位能力取决于个体对象的复杂度（命题2）；跟踪条件以及后代区域的内在选择，包括连通性的必要性（命题 7）；对精确副本的处理；涉及裂变、融合和网状演化的长时间系谱；瓶颈过滤与持久性；干预结构在可计算同构下的不变性（命题6）；以及针对具体系统的定理（第10节）。

将算法条件独立性用于有关个体对象的因果问题，可追溯至 Janzing 和 Sch¨olkopf [15]；用于连接的信息距离采用 Bennett 等人 [7]提出的定义。

不变性。 所有条件都是关于条件柯尔莫哥洛夫复杂度的界，因此在更换通用机器和可计算编码时，它们在阈值上相差加性常数的意义下保持不变。这里没有使用空间度量：连通性、步和光锥都是从规则的依赖集导出的，因此这些定义在干预结构的所有可计算同构下保持不变（命题 6）。干预结构本身，即哪些状态集可以被独立设定，并不是由信息决定的；它是给定内容的一部分，正如递归论不变性结果中给定一个可接受的编号一样。若要将不变性扩展到局部重编码，就需要一种不计算单元数量的大小度量，例如由响应携带的信息$K(v_\tau^\delta \mid z)$，以取代经济性条件中的 $|W| \log_2 |\Sigma|$；我们尚未检验定理 2 是否在这一改变下仍然成立。这里没有规定窗口形状：后代窗口通过跟踪、充分性、连通性和经济性来选取（定义 5），而尺度则由源窗口和阈值 k 及 λ设定。

为何后代窗口的每项条件都是必要的。若没有经济性，影响图中半径为 2^n 的球等大型简单窗口也会符合条件；若没有跟踪，从整个光锥中收集的零散单元集合也会符合条件；若没有连通性，由分离副本的部分构成的嵌合体也会符合条件（命题 7）。跟踪是窗口的柯尔莫哥洛夫简洁性发挥作用的唯一环节，而且它以源数据为条件，而非仅以背景为条件。它不会惩罚那些随环境一同移动的后代，因为未扰动构型是源数据的一部分。

内在源窗口。我们不筛选源窗口，而是将它们全部纳入考量（第 11 节）。因此，输出是一种嵌套结构，而非单一个体列表；我们认为这恰当反映了生物个体性的嵌套特征：单元嵌套于生物体中，生物体又嵌套于群体中。Krakauer 等人 [1] 同样从候选聚合体出发；在此，候选者是所有窗口，而其后代则由此推导得出。自主性这一马尔可夫毯的干预类比，在该结构中标示出优先尺度。奇偶规则不具备自主性（命题 8）；而要让自主性在某条规则中发挥非平凡的筛选作用，则需要自修复膜。

尚待解决的问题。

(1) 证明第10节注释中的猜想，该猜想描述了在奇偶规则下能够确定母体的所有与母体大小相同的窗口。

(2) 确定奇偶规则的内在系谱 $G_k(\mathcal{D}_{k,\ \lambda}(\sigma_0,\ \ s_1))$，并

证明它在时间 $s \geq q$ 有四个个体（第10节）。

(3) 构造一种具有自修复膜的规则，使自主性（定义13）能够以可证明的方式选出被膜包围的区域，且仅选出这些区域，作为优选尺度。(4) 对于基于分数的传递，找出下降关系能够由窗口传递至其子窗口的条件，例如当窗口其余部分中的大多数内容满足条件时（引理8）。(5) 发展第9节中的双参数持久性，并计算同时具有裂变与融合的实例。(6) 构造一种具有可证明网状演化的元胞自动机，即具有正圈秩的谱系。(7) 找出一个关于个体性的结果，其中背景的算法复杂度至关重要，超出了香农框架下以固定背景为条件所能提供的结果；命题2针对母体而非环境，正是这类结果。(8) 研究能够提供信息的环境，例如随机放置的积木；在这些环境中，连接成本也变得至关重要，而不仅仅是信息的局部性。(9) 将链的同伦类（定义11）与具体系统中信息流动所经由的通道联系起来，例如奇偶规则的四个前沿；从母体到不同副本的链彼此不可比较。

生成式人工智能使用声明

本文在 Claude（Anthropic；模型 Claude Opus 5.5）的重大协助下完成，该模型于 2026年11月通过对话界面使用。作者提出了通过信息论方法追踪后代随时间演变的思路、与同伦的类比、程序与证明之间瓶颈距离的关联，以及以柯尔莫哥洛夫简单邻域替代预设窗口形状的做法；要求起草正式文本；并指导了修订，包括递归不变性、与 Krakauer 等人研究的关系，以及内在源窗口等问题。该人工智能系统制定了定义，陈述并证明了结果，执行了第10节备注中报告的数值计算，建议了参考文献，并撰写了正文。

参考文献

[1] David Krakauer、Nils Bertschinger、Eckehard Olbrich、Jessica C. Flack 和 Nihat Ay。《个体性的信息论》。*Theory in Biosciences*，139(2):209–223，2020。

[2] Nihat Ay 和 Daniel Polani。因果网络中的信息流。*Ad-vances in Complex Systems*，11(1):17–41，2008。[3]Joseph T. Lizier 和 Mikhail Prokopenko。区分信息传递与因果效应。《欧洲物理学杂志*B*》，73(4):605–615，2010。[4] Ming Li 和 Paul Vit´anyi。《柯尔莫哥洛夫复杂度及其应用导论》。施普林格，纽约，第3版，2008。[5] P´eter G´acs。论算法信息的对称性。*Soviet Mathe-matics Doklady*，15:1477–1480，1974。[6] Gregory J. Chaitin。一个与信息论形式上完全相同的程序长度理论。《*ACM*学报》，22(3):329–340，1975。[7] Charles H. Bennett、P´eter G´acs、Ming Li、Paul M. B. Vit´anyi 和 Woj- ciech H. Zurek。信息距离。《*IEEE*信息论汇刊》，44(4):1407–1423，1998。[8] Judea Pearl。《因果性：模型、推理与推断》。剑桥大学出版社，第2版，2009。[9] Gunnar Carlsson。拓扑学与数据。*Bulletin of the American Mathe-matical Society*，46(2):255–308，2009。[10] Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。《计算拓扑学：导论》。美国数学学会，2010。[11] Marco Grandis。《有向代数拓扑：不可逆世界的模型》。剑桥大学出版社，2009。[12] Lisbeth Fajstrup、Eric Goubault 和 Martin Raussen。代数拓扑学与并发。《理论计算机科学》，357(1–3):241–278，2006。[13] Randall D. Beer。生命游戏中的自创生与认知。《人工生命》，10(3):309–326，2004。[14] Masafumi Oizumi、Larissa Albantakis 和 Giulio Tononi。从意识现象学到其机制：整合信息理论3.0。《公共科学图书馆·计算生物学》，10(5):e1003588，2014。[15] Dominik Janzing 和 Bernhard Sch¨olkopf。使用算法马尔可夫条件进行因果推断。《*IEEE*信息论汇刊》，56(10):5168–5194，2010。