arXiv:2611.29298v1 [cs.LO] 22 Nov 2026

Y&X：凸包与交叉多胞体的中间逻辑

Yumin Ji 和肖涵

摘要。我们研究几何克里普克框架的两种逻辑：Y，由有限凸包定义；X，由交叉多胞体定义。我们利用凸独立性刻画凸包框架上 Kreisel–Putnam 公理的有效性。我们的主要技术结果涉及利用两种翻译 C 和 D所得到的若干归约。特别地，我们证明 X 在 C下保持不变，而 Y 在 D下保持不变。此外，同一个翻译 D将梅德韦杰夫逻辑归约到区间 $[\mathrm{Y}', \mathrm{Med}]$，中的每一种逻辑，其中 Y′ 是一个自然定义的、严格介于 Y 与 Med 之间的中间逻辑。结合几何论证，这些归约确立了 Y、X 和 Cheq 两两不可比，同时每一种逻辑都严格介于 PL 与梅德韦杰夫逻辑之间。我们还证明，$[\mathrm{Y}, \mathrm{Med}]$ 中的每一种逻辑都不是有限公理化的，并且该区间包含连续统多个彼此不同的逻辑。此外，$[\mathrm{Y}', \mathrm{Med}]$ 中的每一种逻辑都是不可判定的。我们证明 X 是不可判定的，而 $\mathrm{Y} \in \Pi^0_1$。特别地，我们证明，判断一个有限偏序集是否同构于一个有限凸包框架是可判定的，并且由有界数量的点的构形所确定的逻辑是可判定的。最后，我们将研究扩展到无限凸包框架。我们证明，包含关系给出 KC，而反向包含给出 IPC。对于后一个结果，我们使用康托尔集构造映到任意有限有根框架上的p-态射。

1. 引言

本项目源于第一作者在概念层面的思考。具体而言，项目始于探索如何运用逻辑工具研究概念的几何表示，即 Gärdenfors（2000）提出的概念空间理论。逻辑 Y 正是在这一概念探索过程中被发现的。关于框架的几何对应物的结果——也就是说，由按包含关系排序的无限凸包构成的框架所定义的逻辑是 KC，而由反向包含关系定义的逻辑是 IPC——同样出于概念层面的动机。随后，为了探究这些受概念动机启发的逻辑之间的关系，我们采用了 Xiao（2026）提出的归约技术。此外，我们还关心这些逻辑对于我们的概念表征有何启示——例如，在特定条件下，以某种方式学习一个概念有多困难

概念假设。因此，可判定性结果也随之进入了讨论。

为说明这一点，我们简要介绍 Gärdenfors（2000）提出的概念空间理论。这是一种用于概念表征的几何框架，其中对象沿着具有认知意义的品质维度进行表征，而相似性则通过几何方式加以刻画。概念空间是一个度量空间，其维度代表各种性质。例如，色彩空间可以由三个品质维度构成：色相、饱和度和明度。每个点代表具体实例可能呈现的各种性质值组合，而

自然属性则由凸区域表示。因此，“蓝色”可以对应于由特定色相、饱和度和明度范围所定义的凸区域。某个概念的概念空间，是与该概念相关的各项属性所对应的概念空间的笛卡尔积。

在这种几何表示下，我们考察了关于概念学习的两种观点。一种观点假定存在一种正确表征概念的方式。也就是说，给定一个概念，其相关性质是固定的。因此，学习一个概念就是确定它的边界。另一种观点则不假定概念的正确性源于其内在结构。在这种观点下，学习一个概念就是能够识别实例之间的差异与相似性，从而充分熟悉其实例的多样性及其相互关系。随后，我们考察了概念假设的三个阶段。首先，我们要求以最少的信息量实现表示。在这一假设下考察概念学习，会得到两种不同的中间逻辑：KC 和 Med。接下来，我们放宽这一假设：学习过程仍然是有限的，但表示不一定以最少的信息量实现。在这一较弱的假设下，两种学习观点分别导向逻辑 KC 和本文提出的逻辑 Y。最后，我们进一步放宽这一假设，允许学习过程无限进行。这两种观点分别导向 KC 和 IPC。

本文介绍了该项目的原始技术结果。[1]

2. 预备知识

本文中，我们假定读者熟悉中间逻辑的基本理论。我们用 IPC 表示直觉主义命题演算。所谓一个（直觉主义 Kripke）框架，是指一个偏序集。

给定一个框架**F**，我们用 Log(**F**) 表示由在框架**F**上有效的所有公式组成的命题逻辑；如果 L ⊆ Log(**F**)，则称**F** 为一个 L-框架。如果 $\mathcal{C}$ 是一个框架类，我们用 Log($\mathcal{C}$) 表示由在 $\mathcal{C}$的每个框架上都有效的所有公式组成的中间逻辑；在这种情况下，我们说 $\mathcal{C}$ 刻画了该逻辑。

2.1. 作为 Kripke 框架的偏序集。 设$\mathbf{F} = \langle F, \leq\rangle$ 是一个有限偏序集；我们记作 $x < y$，如果 $x \leq y$ 且 $x \neq y$。如果不存在满足 $x < y$的 $y \in F$，则称元素 $x \in F$ 为极大元；如果所有元素都在它之下，则称其为顶元。顶元必然是唯一的。若**F** 包含一个顶元，则称其为具有顶元的框架。如果 $x < y$，则当不存在满足 $x < z < y$的 z 时，称 y 为 x 的直接后继。

记号 $x{\uparrow}$（分别）表示上集 $\{y \in F\colon x \leq y\}$（分别表示下集$\{y \in F\colon x \geq y\}$）。若子框架$\mathbf{S} = \langle S, \leq\rangle$ 属于$\mathbf{F} = \langle F, \leq\rangle$，且 S 在 F中向上封闭，则称其为生成子框架；若 $S = x{\uparrow}$，则称**S** 由 x 生成。若**F** 由 x生成，则称**F** 为有根的，x 为**F**的根。

设$\mathbf{F} = \langle F、\leq_0\rangle$和$\mathbf{G} = \langle G、\leq_1\rangle$为偏序集。它们的积是偏序集$\mathbf{F} \times \mathbf{G}\colon = \langle F \times G、\leq\rangle$，其中序关系 $\leq$按坐标定义：当且仅当（x、y）$\leq$（x'、y'）时，$x \leq_0 x'$ 且 $y \leq_1 y'$。对于偏序集**F**，记$\mathbf{F}^2 := \mathbf{F} \times \mathbf{F}$，并归纳地定义$\mathbf{F}^n := \mathbf{F}^{n-1} \times \mathbf{F}$。

[1]如需详细讨论上述概念性考量，请联系第一作者索取草稿。

2.2. **态射**。 若**F** 和**G** 是偏序集，且 $f:\ F \to G$ 是一个映射，则称 f 为*p*-态射，如果对所有 x、$y \in F$，若 $x \leq y$，则 $f(x) \leq f(y)$；并且若 $f(x) \leq u$，则存在某个 $y \geq x$ 使得 $f(y) = u$。若 f 是满射，则称**G** 为**F**的*p*-态射像。

定理1 (民间知识)。 若**G** 是-态射像，则对任意公式 φ，$\mathbf{F} \vDash \varphi$ 蕴涵**G** $\vDash \varphi$。

定理2 (Jankov-deJongh)。 给定一个有限有根框架**F**，存在一个公式 $\chi(\mathbf{F})$，使得对于每个框架**G**，

$\mathbf{G} \nvDash \chi(\mathbf{F})$ 当且仅当**F** 是**G**的某个生成子框架的 p-态射像。

公式 $\chi(\mathbf{F})$ 称为**F**的 *Jankov-de Jongh*公式。

推论3 (民间知识)。 给定一个对根生成子框架封闭的有限框架类$\boldsymbol{C}$，对于任意有限有根框架 $\mathcal{F}$，

$\mathcal{F} \vDash \mathsf{Log}(\boldsymbol{C})$ 当且仅当 $\mathcal{F}$ 是$\boldsymbol{C}$中某个元素的p-态射像。

2.3. **Friedman翻译**。

定义 4. 设 ρ 是任意公式。对于任意公式 φ，φ 关于 ρ的*Friedman*翻译记作 φ^ρ，归纳定义如下：

- $\varphi^\rho := \varphi \vee \rho$，若 φ 是原子公式；
- $(\varphi_0 \circ \varphi_1)^\rho := \varphi_0^\rho \circ \varphi_1^\rho$，其中 $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$。

2.4. **梅德韦杰夫逻辑**。 1932 年，Kolmogorov（1932）提出了将直觉主义逻辑解释为问题演算的一种构造性诠释。为明确 Kolmogorov 提出的描述，Medvedev（1962）为有限问题逻辑建立了基础框架。我们回顾梅德韦杰夫框架及相应的梅德韦杰夫逻辑的定义。

定义 5. 对于 $n \geq 1$，定义在 n 原子 $\mathbf{P}_0(n)$ 上的**梅德韦杰夫框架**$_0(n)$ 定义为：$= \langle \{X \subseteq [n]:\ X \neq \varnothing\},\ \supseteq \rangle$，其中 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$。梅德韦杰夫逻辑Med 是所有梅德韦杰夫框架的中间逻辑，即 $\mathsf{Med} := \mathsf{Log}\big(\{\mathbf{P}_0(n) : n \geq 1\}\big)$。

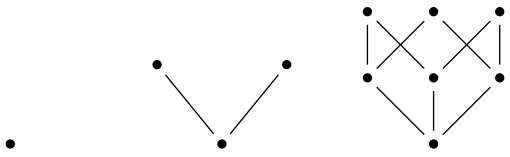

图 1. 梅德韦杰夫框架。

引理 6 (Maksimova、Skvortsov 和 Shehtman)。 如果**F** 是一个具有顶元的有限有根框架，那么**F** 就是一个Med-框架。

沿袭有限问题逻辑框架的这一传统，这里我们的有限布尔代数中的序是反向包含 $\supseteq$。

定义 7. 对于 $n \geq 1$，以 n 个生成元 $\mathbf{P}(n)$ 为底的布尔代数定义为$\mathbf{P}(n) := \langle \mathcal{P}([n])$ $\supseteq \rangle$，其中 $\mathcal{P}([n])$ 表示 $[n]$ 的幂集。

定义 8. 中间逻辑 KC 是在 IPC 中加入弱排中律 $\neg p \vee \neg\neg p$ 得到的。它也称为扬科夫逻辑或弱排中逻辑。

定理 9. $\mathsf{KC} = \bigcap_{n\geq 1}\mathsf{Log}\big(\mathbf{P}_0(n)^{\mathrm{op}}\big)$.

证明。 这可由 Maksimova 等人（1979）的推论 1 得出。 □

2.5. **逻辑** Cheq。 2003 年，van Benthem 等人（2003）提出了棋盘格子集的模态逻辑 L_∞ 。该逻辑在研究各种拓扑空间的模态逻辑中发挥着重要作用；例如参见 van Benthem 和 Bezhanishvili（2007）；Aiello 等人（2003）。除了在非经典逻辑中的作用外，L_∞ 也出现在强迫的模态逻辑研究中；例如参见 Xiao（2024）。Litak（2004）后来将其中间类比逻辑记为 Cheq。L_∞ 或 Cheq 是否有限公理化，是一个长期悬而未决的问题。Xiao（2026）对此问题给出了否定答案。

定义 10. 令$\mathbf{V}$ 为双叉，即由三个元素$\{w_0, w_1, w_2\}$ 组成的偏序集，其中 w_0 是根，而 w_1 和 w_2 是不可比较的极大元。递归地定义$\mathbf{V}_1 := \mathbf{V}$ 和$\mathbf{V}_{n+1} := \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}$，其中 $\times$ 表示通常的偏序集的积。$\mathbf{V}_n$ 中的每个点 x 都可以与一个 n元组（$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$）对应，其中 $x_i \in \{w_0, w_1, w_2\}$。逻辑 Cheq是由类 $\{\mathbf{V}_n : n \geq 1\}$刻画的中间逻辑。

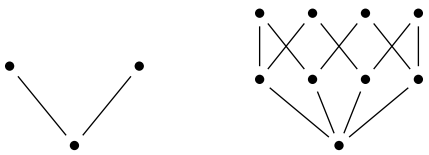

图 2. $\mathbf{V}_1$ 和$\mathbf{V}_2$。

2.6. **单形**。

定义 11。设 $S = \{p_0, p_1, \ldots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$。仿射组合是 $x = \Sigma_{i=0}^k \lambda_i p_i$，其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 且 $\Sigma_{i=0}^k \lambda_i = 1$。若对于所有$i$都有 $\lambda_i \geq 0$，则它是一个凸组合。所有凸组合构成的集合称为 S的凸包。若集合 S 中没有任何一点是其他点的仿射组合，则称其仿射无关。 k单纯形是 $k+1$ 个仿射无关点的凸包，而这些点就是它的顶点。

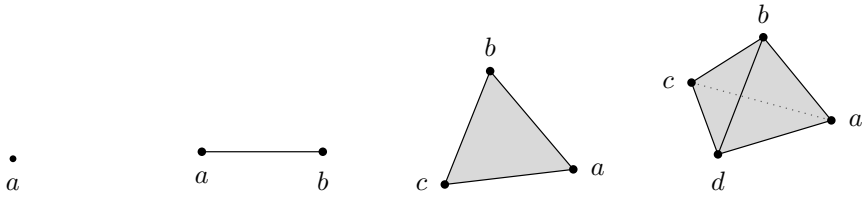

图 3. n-单形

注意，对于单纯形顶点的任意子集，该子集中各点的凸包本身也是一个单纯形。为便于表述，我们在下方列出相关定义；这样的单纯形称为原单纯形的面。

定义 12。 设 σ 是由 $S=\{p_0,p_1,\ldots,p_k\}$ 定义的一个 k-单纯形。由 $T\subseteq S$ 定义的单纯形 τ 是 σ 的一个面 。

3. 新逻辑：Y 与 X

我们考察定义 13 中所定义的凸包对偶框架类。根据定理 14，在所有这些框架上有效的逻辑同样是 KC。

定义 13。 给定一个非空集合 $S=\{p_0,p_1,\ldots,p_k\}\subseteq\mathbb{R}^n$，通过有限凸包对偶框架 定义$\mathbf{F}_S^{\mathrm{op}}:=\langle\{\mathsf{conv}(X):\ \emptyset\neq X\subseteq S\},\ \subseteq\rangle$。有限凸包对偶逻辑 Y^{op} 是所有对偶框架$\mathbf{F}_S^{\mathrm{op}}$ 的中间逻辑。

定理 14。$\mathsf{Y}^{\mathrm{op}}=\mathsf{KC}$。

定义 15。 令 $S=\{p_0,p_1,\ldots,p_k\}\subseteq\mathbb{R}^n$。$S$ 的有限凸包框架为$\mathbf{F}_S:=\langle\{\mathsf{conv}(X):\ \emptyset\neq X\subseteq S\},\ \supseteq\rangle$。 $\mathbb{R}^n$中的有限凸包逻辑记为 Y_n，是所有非空有限点集 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 的所有凸包框架的中间逻辑，即 $\mathsf{Y}_n:=\bigcap_{S\subseteq\mathbb{R}^n}\mathsf{Log}(\mathbf{F}_S)$。有限凸包逻辑 Y 是所有凸包框架的中间逻辑，即 $\mathsf{Y}:=\bigcap_{n\geq 1}\mathsf{Y}_n$。

下文将介绍这一逻辑的若干性质。本文主要关注其中揭示其与几何学之间联系的性质。我们从对克赖塞尔–普特南公理 $\mathsf{KP}:=(\neg p\to(q\vee r))\ \to((\neg p\to q)\ \vee(\neg p\to r))$的几何诠释开始。据我们所知，此前只有 Holliday（2017）讨论过这一公理的一种概念性诠释。本文提出的诠释提供了第二种诠释，并具有简单的几何对应关系。

定理 16。 以下命题等价：

(1) $\mathbf{F}_S\vDash\mathsf{KP}$。(2) S 是凸独立的。(3) $\mathbf{F}_S\cong\mathbf{P}_0(|S|)$。

证明。（1. $\Rightarrow$ 2。）假设 $\mathbf{F}_S\vDash\mathsf{KP}$，且 S 不是凸独立的。设 a 是 S 中的一个点，使得 $a\in\mathsf{conv}(S\setminus\{a\})$。现在我们在 $\mathbf{F}_S$上给出一个赋值 V。对于命题变元 p，令 $V(p)=\{a\}$ 属于 $\mathbf{F}_S$。每个点 $x\neq a$ 都包含在某个不包含 a 且关于包含关系为极大的凸包中。因此，如果这样的凸包只有一个，那么它就包含 $S\setminus\{a\}$中的所有点，因而包含 $\mathsf{conv}(S\setminus\{a\})$。于是 $a\notin\mathsf{conv}(S\setminus\{a\})$，矛盾！因此，至少存在两个不同的、不包含 a的极大凸包。接着，我们将这些极大凸包划分为两个非空的族F_0 和 F_1。令 $V(q)=\bigcup_{C\in F_0}C\uparrow$且 $V(r)=\bigcup_{C\in F_1}C\uparrow$。令 $\mathcal{M}=(\mathbf{F}_S,V)$。对于任意凸包 C，$C\vDash_{\mathcal{M}}\neg p$ 当且仅当 $a\notin C$。因此，若 $C\vDash_{\mathcal{M}}\neg p$，则 $C\in V(q)$或$C\in V(r)$，所以 $C\vDash_{\mathcal{M}}q\vee r$。于是 $\mathsf{conv}(S)\vDash_{\mathcal{M}}\neg p\to(q\vee r)$。对于任意 $C\in F_1$，由于它不包含 a，所以 $C\vDash_{\mathcal{M}}\neg p$。由于 C 是极大元且属于 F_1，因此$C\notin V(q)$，故 $\mathsf{conv}(S)\nvDash_{\mathcal{M}}\neg p\to q$。同理，$\mathsf{conv}(S)\nvDash_{\mathcal{M}}\neg p\to r$。因此，$\mathsf{conv}(S)\nvDash_{\mathcal{M}}\mathsf{KP}$，故 $\mathbf{F}_S\nvDash\mathsf{KP}$，矛盾！

（2. $\Rightarrow$ 3。）如果 S 凸独立，那么 $f(X)=$凸包(X) 是从$\mathbf{P}_0(|S|)$到$\mathbf{F}_S$的同构。

（3. $\Rightarrow$ 1。）众所周知，$\mathsf{KP}\in\mathsf{Med}$。因此 $\mathbf{F}_S\vDash\mathsf{KP}$。 □

推论 17。KP $\not\subseteq$Y。

现在应用定理 16，我们给出定理 14 的证明。

定理 *14* 的证明。 每个框架 $\mathbf{F}_S^{\mathrm{op}}$ 都有一个顶元 conv(S)。回忆一下，KC 是所有具有顶元的有限框架所对应的逻辑。因此，每个这样的框架都验证 KC。于是 KC $\subseteq$ Y^{op}。

若 S 是凸独立的，则根据定理 16，$\mathbf{F}_S^{\mathrm{op}} \cong \mathbf{P}_0(|S|)^{\mathrm{op}}$。由此可得，Y^{op} $\subseteq \bigcap_{n\geq 1}$Log($\mathbf{P}_0(n)^{\mathrm{op}}$) $=$ KC。这两个包含关系证明了所需结论。□

现在我们来刻画另一种具有丰富几何意义的逻辑，它也与 Cheq、Med 和 Y 等逻辑有着密切联系。Cheq 的几何描述，即一个 n-立方体的面偏序集，启发我们用交叉多胞体构造类似的对象；交叉多胞体是 n-立方体的对偶多胞体。令 e_i 表示 $\mathbb{R}^n$中的第 i 个单位向量。对于任意 $n \geq 1$，令 $U_n :=$ conv($\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$) 为 n 维交叉多胞体。

定义 18. 令 $\mathbf{X}_n$ 表示由 U_n的所有非空面构成的偏序集，并按反向包含关系排序。交叉多胞体逻辑 X 是所有$\mathbf{X}_n$的中间逻辑，即 X $= \bigcap_{n\geq 1}$Log($\mathbf{X}_n$)。

U_n 的每个非空真面都是单纯形。由 U_n 的一个超面生成的有根子框架，同构于梅德韦杰夫框架$\mathbf{P}_0(n)$。

4. Y 与 X 的交汇

现在我们将深入探究 Y 和 X，考察它们的地位与性质。尽管 Y 和 X 在结构上似乎大不相同，但梅德韦杰夫逻辑却显著地将二者统一起来。具体而言，在 X 以及与 Y 相关的一系列逻辑（例如 Y′）中，真有根生成子框架恰好都是梅德韦杰夫框架。因此，可以统一地将归约 D 应用于它们。

4.1. 相关逻辑的比较。

我们来考察它在可用几何对象刻画的中间逻辑中的位置。起点是 Adam-Day 等人（2023）提出的、赋予框架上 PL 以结构性含义的方法。

引理 19 (Adam-Day、Bezhanishvili、Gabelaia 和 Marra)。 设$\mathbf{F}$ 是一个有限偏序集。那么$\mathbf{F}$ $\vDash$PL 当且仅当满足以下条件。

(1) 若 $d(x) = 2$，则 $|\{y \in \mathbf{F} : \ y > x\}| \leq 2$。(2) 若 $d(x) > 2$，则集合 $\{y \in \mathbf{F} : \ y > x\}$ 是连通的。

引理 20。 设 S 是一个有限集，并设 $W \subseteq \mathcal{P}(S)$。假设 $\emptyset \notin W$，且$\{x\} \in W$对每个 $x \in S$都成立。对任意 $w \in W$，定义图 $G_w :=(w, E_w)$，其中$E_w = \{\{x, y\} : x \neq y \in w, \{x, y\} \in W\}$。那么 $\langle W, \supseteq\rangle \vDash$ PL 当且仅当对任意 $w \in W$， G_w是连通的。

证明。 ($\Rightarrow$) 假设 $\langle W, \supseteq\rangle \vDash$ PL，并且存在一个 $w' \in W$，使得 $|w'|$最小且 $G_{w'}$ 是不连通的。如果 $|w| = 2$，那么 G_w 是连通的，因此 $|w'| \geq 3$。图 $G_{w'}$ 是其连通分支的不交并集。对于任意 $v \in W$和 $v \subsetneq w'$， G_v 是连通的，因此恰好存在一个连通分支，使得 G_v 包含于其中。因此， $\{w \in \mathbf{F} : \ w > w'\}$ 是不连通的。因此，这与引理 19 的条件矛盾。

(⇐) 对于任意 $w \in W$，如果 $|w| = 2$，那么 w 恰有两个直接后继。如果$|w| \geq 3$，那么 $d(w) > 2$。任取 v_0，$v_1 \in w\uparrow \setminus \{w\}$，并选择 $x \in v_0$和 $y \in v_1$。由于 G_w 是连通的，G_w中存在一条连接 x 和 y 的路径。这条路径的边给出了连接 v_0 和 v_1的一条路径。因此，$w\uparrow \setminus \{w\}$ 是连通的。根据引理 19，$\langle W, \supseteq\rangle \vDash$ PL。□

我们采用几何方法证明以下定理。

定理 21。PL $\subseteq$ Cheq $\cap$Y $\cap$X。

证明。对于 Cheq，Xiao（2024）证明，每个框架$\mathbf{V}_n$ 都同构于按反向包含关系排序的 n-立方体非空面的偏序集。对于 X，刻画 X 的框架也可类似地由交叉多胞体得到。令 P 为这些多胞体之一。对于 P的任意非空面 F，定义

$$f(F) = \{F_0 : F_0 \text{ is a vertex of } F\}.$$

每个面都是其顶点的凸包，因此 $F \subseteq F'$ 当且仅当 $f(F) \subseteq f(F')$。P的非空面的偏序集同构于 $\langle\{f(F)\colon\ F$是 $P\}$的非空面，$\supseteq\rangle$。

因此，$G_{f(F)}$ 是一个图，其顶点为 F 的 0维面，边为 F的 1维面，并且它是 F的 1-骨架。由于凸多胞体的每个非空面的 1-骨架都是连通的，根据引理 20，每个这样的框架都验证 PL，因此 PL $\subseteq$ Cheq $\cap$X。

在 Y 的情形下，设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有限非空集。对于 S 的任意非空子集 X，定义

$$f'\left(\mathrm{conv}(X)\right) = \mathrm{conv}(X) \cap S.$$

它给出了一个从 $\mathbf{F}_S$ 到 $\mathbf{F}'_S$ 的同构：$= \langle\{X \subseteq S\colon\ \emptyset \neq X =$ conv(X) $\cap S\}$，$\supseteq\rangle$，其逆映射为 f'^{-1}(X) = conv(X)。对于任意 $X \in \mathbf{F}_S$，我们断言 G_X 是连通的。

对于任意 $x \neq y \in G_X$，x 和 y 相邻，当且仅当 $\{x, y\} \in \mathbf{F}'_S$，当且仅当 $[x, y] \cap S = \{x, y\}$。若 $x \neq y \in X$，则 $[x, y] \subseteq$ conv(X)，因此 $[x, y] \cap S \subseteq$ conv(X) $\cap S = X$。由于 S 是有限的，我们可以按从 x 到 y 的顺序枚举 $[x, y] \cap S$ 中的所有点：p_0，p_1，…，p_s，其中 $p_0 = x$，$p_s = y$ 且 $[p_i, p_{i+1}] \cap S = \{p_i, p_{i+1}\}$。因此，$p_i$ 和 p_{i+1} 相邻，从而在 G_X 中给出一条从 x 到 y 的路径。因此，G_X 是连通的。所以，每个框架 $\mathbf{F}'_S$ 和 $\mathbf{F}_S$ 都验证 PL，因此 PL $\subseteq$Y。□

回顾 Xiao（2026），我们构造了一个从 Med 到 Cheq 的归约。对于任意公式 φ，令 p，q 为两个不同的命题变元，且它们不出现在 φ 中。定义 ψ_0(p) 和 ψ_1(p，q) 如下：

$$\psi_0(p) := p \vee \neg p \quad \psi_1(p, q) := \neg p \vee \neg q.$$

然后我们定义公式 $C(\varphi) := (\varphi^{\psi_0} \to \psi_1) \to \psi_1$。

现在我们给出另一个从 Med 到 X 的归约。对于任意公式 φ，令 p 为一个不出现在 φ 中的命题变元。我们定义公式 $D(\varphi) := p \vee (p \to \varphi)$。

哥德尔–杜梅逻辑，又称链逻辑，定义为 LC := IPC +GD，其中 GD := $(p \to q) \vee (q \to p)$ 是哥德尔 – 杜梅公理。以下定理通过变换 C 建立了从 LC 到 Y 的归约。

定理 22. 对于任意公式 φ，$\varphi \in$ LC 当且仅当 $C(\varphi) \in$ Y。

证明。(⇒) 假设 $C(\varphi) \notin$Y，那么存在一个定义在某个框架 $\mathbf{F}_S$ 上的模型 $\mathcal{M}$，并且在 $\mathbf{F}_S$中存在一个凸包 C_0，使得 $C_0 \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$ 且 $C_0 \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$。对于所有包含在 C_0中的凸包，按包含关系选取其中极小的一个，记为

反驳 ψ_1，记为 C_1，那么 $C_1 \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$ 且 $C_1 \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$。因此 $C_1 \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0}$。由于 $C_1 \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$，于是存在点 x、 $y \in C_1 \cap S$、 $\{x\} \vDash_{\mathcal{M}} p$，且 $\{y\} \vDash_{\mathcal{M}} q$。如果 $x = y$，那么 $\{x\} \vDash_{\mathcal{M}} \psi_0$，因此 $\{x\} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0}$。由于 $\{x\} \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$，我们得到 $\{x\} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$，矛盾。因此， $x \neq y$。由于$[x, y] =$凸包$(x, y) \subseteq C_1$反驳 ψ_1，由极小性可知 $C_1 = [x, y]$。如果存在另一个 $z \neq x \in [x, y] \cap S$满足 $\{z\} \vDash_{\mathcal{M}} p$，那么 $z \neq y$ 且 $[z, y] \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$。由于$[z, y] \subsetneq [x, y]$，这就产生了矛盾。因此， x 是 $[x, y]$ 中唯一满足p 的点，而 y 是唯一满足 q的点。由于 S 有限，我们可以枚举 $[x, y] \cap S$ 中的所有点，记为 $\{p_0, p_1, \ldots, p_s\}$，其中 $p_0 = x$且 $p_1 = y$。现在我们只考虑限制在 $[x, y]\uparrow$上的反模型。由于 $[p_i, p_j] \vDash_{\mathcal{M}} \neg p$当且仅当 $x \notin [p_i, p_j]$，所以反驳 $\psi_0 = p \vee \neg p$ 的凸包恰好构成一条链：$[x, y] \supsetneq [x, p_{s-1}] \supsetneq \ldots \supsetneq [x, p_1]$。根据剪枝引理， $[x, y] \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0}$蕴含$[x, y] \nvDash_{\mathcal{M}^{\psi_0}} \varphi$，这意味着 φ 在一个有限链的模型中被反驳。因此，$\varphi \notin$LC。

($\Leftarrow$) 假设 $\varphi \notin$ LC，令 $\mathcal{M}_0$ 为一个反模型，它位于一个 s-链中，且其根反驳 φ，赋值为 V_0。现在我们选取 $s+1$ 个共线点 $p_0 < p_1 < \ldots < p_s$。在框架 $\mathbf{F}_{\{p_0, p_1, \ldots, p_s\}}$中，令 V_1 为其上的一个赋值，使得 $V_1(p) = p_0$且 $V_1(q) = p_s$。令 $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbf{F}_{\{p_0, p_1, \ldots, p_s\}}, V_1 \rangle$，在此模型中，反驳$\psi_0 = p \vee \neg p$的点恰好构成 s-链 $[p_0, p_s] \supsetneq [p_0, p_{s-1}] \supsetneq \ldots \supsetneq [p_0, p_1]$。令 $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbf{F}_{\{p_0, p_1, \ldots, p_s\}}, V_2 \rangle$，其中 $V_2(p) = V_1(p)$，$V_2(q) = V_1(q)$，并且对于 φ 中出现的任意命题变元 r， $V_2(r) = V_0(r)$。由剪枝引理，$[p_0, p_s] \nvDash_{\mathcal{M}_2} \varphi^{\psi_0}$，因为 $[p_0, p_s] \nvDash_{\mathcal{M}_2^{\psi_0}} \varphi$。由于只有 $\{p_0\} \vDash_{\mathcal{M}_2} p$和 $\{p_s\} \vDash_{\mathcal{M}_2} q$，因此 $[p_0, p_s] \nvDash_{\mathcal{M}_2} \psi_1$ 且 $C \vDash_{\mathcal{M}_2} \psi_1$ 对于任意 $C > [p_0, p_s]$。由此，$[p_0, p_s] \vDash_{\mathcal{M}_2} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$，所以$[p_0, p_s] \nvDash_{\mathcal{M}_2} (\varphi^{\psi_0} \to \psi_1) \to \psi_1$。因此， $C(\varphi) \notin$ Y。□

以下定理表明，X 在 C 下保持不变，Y 在 D 下保持不变。

定理23. 对于任意公式 φ， $\varphi \in$ X 当且仅当 $C(\varphi) \in$ X。

证明。($\Rightarrow$) 假设 $C(\varphi) \notin$ X。那么存在一个模型 $\mathcal{M}$，它定义在某个 $\mathbf{X}_n$ 上，并存在一个非空面 U，它是 U_n 的面，使得 $U \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$ 且 $U \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$。对于包含在 U 中的所有非空面，按包含关系选取一个极小的、能反驳 ψ_1 的面，记为 U'，则 $U' \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$ 且 $U' \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$。因此 $U' \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0}$。由于 $U' \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$，存在点 x、 $y \in U'$，使得 $\{x\} \vDash_{\mathcal{M}} p$ 且 $\{y\} \vDash_{\mathcal{M}} q$。若 $x = y$，则 $x \vDash_{\mathcal{M}} \psi_0$，因此$\{x\} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0}$。由于 $\{x\} \nvDash_{\mathcal{M}} \psi_1$，我们得到$\{x\} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$，这就产生了矛盾。因此， $x \neq y$。若 U' 是U_n 的真面，则 U' 是一个单纯形。由于单纯形 $[x, y] =$凸包$(x, y) \subseteq U'$ 反驳了 ψ_1，根据极小性可得$U' = [x, y]$。对于 $U' = U_1$，同样的结论也成立。因此， x 是 $[x, y]$ 中唯一满足 p 的点，而 y 是唯一满足 $\neg p$ 的点。在这种情况下，只有一个点 $[x, y]$ 不蕴涵 ψ_0。若 $U' = U_n$ 且 $n \geq 2$，则根据极小性， x 和 y 是对跖点。对于任意其他顶点 z，无论 $z \vDash_{\mathcal{M}} p$ 还是 $z \vDash_{\mathcal{M}} q$，它与 x 或 y 一起构成一个满足ψ_1 的真面，这就产生了矛盾！因此， x 是 U_n 中唯一满足 p 的点，而 y 是唯一满足 q 的点。因此，对于任意面 U''，$U'' \vDash_{\mathcal{M}} \neg p$ 当且仅当 $x \notin U''$。于是，若$\mathcal{M}^{\psi_1} = \langle W^{\psi_1}, \supseteq, V \rangle$，则 $W^{\psi_1} = \{U_n\} \bigcup \{U : U$ 是 U_n 的真面， $x \in U \neq \{x\}\}$，因此 $\langle W^{\psi_1}, \supseteq \rangle \cong \mathbf{X}_{n-1}$。综上， $\mathcal{M}^{\psi_0}$ 是定义在单个点或 $\mathbf{X}_{n-1}$ 上的模型。但根据剪枝引理， $U' \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi^{\psi_0}$ 当且仅当 $U' \nvDash_{\mathcal{M}^{\psi_0}} \varphi$，于是 $\varphi \notin \mathbf{X}$。

($\Leftarrow$) 假设 $\varphi \notin$X，令 $\mathcal{M}_0$ 为 $\mathbf{X}_n$ 中的一个反模型，其根反驳 φ，赋值为 V_0。现在我们选择 U_{n+1}。在框架 $\mathbf{X}_{n+1}$ 中，令 V_1 为一个赋值

使其满足 $V_1(p) = +e_0$ 且 $V_1(q) = -e_0$。令 $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbf{X}_{n+1}, V_1\rangle$，在此模型中，利用相同的论证，反驳 $\psi_0 = p \vee \neg p$ 的点构成 $\mathbf{X}_n$。令$\mathcal{M}_2 = \langle \mathbf{X}_{n+1}, V_2\rangle$，其中 $V_2(p) = V_1(p)$，$V_2(q) = V_1(q)$，且对于 φ 中出现的任意命题变元 r，$V_2(r) = V_0(r)$。根据剪枝引理，$U_{n+1} \nvDash_{\mathcal{M}_2} \varphi^{\psi_0}$，因为 $U_{n+1} \nvDash_{\mathcal{M}_2^{\psi_0}} \varphi$。由于 $V_2(p) = +e_0$，$V_2(q) = -e_0$，因此 $U_{n+1} \nvDash_{\mathcal{M}_2} \psi_1$，并且对于 U_{n+1}的任意真面 U，$U \vDash_{\mathcal{M}_2} \psi_1$。因此，$U_{n+1} \vDash_{\mathcal{M}_2} \varphi^{\psi_0} \to \psi_1$，所以$U_{n+1} \nvDash_{\mathcal{M}_2} (\varphi^{\psi_0} \to \psi_1) \to \psi_1$。因此，$C(\varphi) \notin \mathbf{X}$。□

定理 24。对于任意公式 φ，$\varphi \in \mathsf{Y}$ 当且仅当 $D(\varphi) \in \mathsf{Y}$。

证明。($\Rightarrow$) 显然，$(\varphi \to D(\varphi)) \in$ IPC，因此如果 $\varphi \in \mathsf{Y}$，则 $D(\varphi) \in \mathsf{Y}$。

($\Leftarrow$) 如果 $\varphi \notin Y$，那么存在一个有限点集 S 和一个定义在 $\mathbf{F}_S$ 上的赋值 V，使得 $\mathsf{conv}(S) \nvDash_{(\mathbf{F}_S, V)} \varphi$。令 $S' = S \cup \{s\}$，其中 $s \notin S$。那么，S的凸包↑在 $\mathbf{F}_{S'}$ 中恰好是 $\mathbf{F}_S$。令 s 在 $\mathbf{F}_{S'}$ 上的赋值为 $\mathsf{conv}(S)$↑，φ 中变量的赋值等于 V。于是，带有此赋值的 $\mathbf{F}_{S'}$ 是$D(\varphi)$的反模型，因此 $D(\varphi) \notin$Y。□

沿用定理 24 中的相同论证，我们可以证明 Cheq 在 D 下保持不变。

定理 25. 对于任意公式 φ, $\varphi \in$ Cheq 当且仅当 $D(\varphi) \in$ Cheq。

以下结果通过变换 D 构造了从 Med 到 X 的归约。证明稍后给出。

定理 26. 对于任意公式 φ, $\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in \mathsf{X}$。

证明。($\Rightarrow$) 对于公式 φ，假设 $D(\varphi) \notin$X。存在一个反模型 $\mathcal{M}$，其定义在$\mathbf{X}_n$上；$\mathbf{X}_n$ 的一个面 U 使 $D(\varphi) = p \vee (p \to \varphi)$ 不成立。于是 $U \nvDash_{\mathcal{M}} p$，并且存在 $U' \subsetneq U$使得 $U' \vDash_{\mathcal{M}} p$且 $U' \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi$。$U'$是一个单纯形，因此 U'↑是一个梅德韦杰夫框架。故 $\varphi \notin$Med。

($\Leftarrow$) 假设 $\varphi \notin$Med，那么存在一个反模型 $\mathcal{M}'$，其定义在$\mathbf{P}_0(n)$上，且其根使 φ 不成立。考虑交叉多胞体 U_n，其超面 U 是一个 n-单纯形。现在，通过将 p 的赋值设为 U 的非空面，把由该超面 U 生成的有根子框架上的 $\mathcal{M}'$ 扩展到$\mathbf{X}_n$。因此 $U \vDash_{\mathcal{M}'} p$ 且 $U \nvDash_{\mathcal{M}'} \varphi$。由于 $U_n \nvDash_{\mathcal{M}'} p$，所以 $U_n \nvDash_{\mathcal{M}'} p \to \varphi$ 且 $U_n \nvDash_{\mathcal{M}'} p \vee (p \to \varphi)$。故 $D(\varphi) \notin \mathbf{X}$。□

定理 27. 命题逻辑 $\subsetneq$Y $\subsetneq$Med。

证明。由定理 16，对于所有凸独立的 S，逻辑 $\bigcap_S \mathsf{Log}(\mathbf{F}_S)$ 都是梅德韦杰夫逻辑 Med。因此，$\mathsf{Y} = \bigcap_S \mathsf{Log}(\mathbf{F}_S) \subseteq$ Med。推论 17 表明 KP $\in$ Med \Y。因此，$\mathsf{Y} \subsetneq$ Med。

由于 GD $\in$ LC，根据定理 22，C(GD) $\in$ Y。在 Xiao（2026）中，对于任意 φ，$\varphi \in$ Med 当且仅当 $C(\varphi) \in$ Cheq。众所周知，GD $\notin$ Med，因此 C(GD) $\notin$ Cheq。根据定理 21，C(GD) $\notin$命题逻辑，且命题逻辑 $\subseteq$ Y。综上，命题逻辑 $\subsetneq$ Y。□

定理 28. 命题逻辑 $\subsetneq \mathsf{X} \subsetneq$ Med。

证明。给定一个交叉多胞体，选取它的一个超面；该超面是一个单纯形。因此，这个超面上方的根生成子框架是按反向包含关系排序的单纯形非空面偏序集。因此，X $\subseteq$ Med。Litak（2004）给出了二维立方体上的 KP 反模型，而二维立方体也是一个交叉多胞体，因此 KP $\notin$X。因此，$\mathsf{X} \subsetneq$ Med。

根据定理 21，PL $\subseteq$ X。根据定理 26，由于 KP $\in$Med，因此 D(KP) $\in$ X。不难看出，D(KP) $\notin$PL。因此，PL $\subsetneq$ X. □

定理 29。PL $\subsetneq$Cheq $\subsetneq$Med。

证明。 根据 Xiao（2026），我们有 Cheq $\subsetneq$Med。

根据定理 21，PL $\subseteq$ Cheq。另一方面，根据 Xiao（2026），我们有C(KP) $\in$ Cheq，因为 KP $\in$Med。根据定理 28，KP $\notin$X。因此，根据定理23，C(KP) $\notin$X，进而 C(KP) $\notin$ PL。于是，PL $\subsetneq$ Cheq。□

引理 30. Cheq $\not\subseteq$Y。

证明。 设 $\{p_0, p_1, p_2\}$ 为三个仿射无关点。它们构成一个 2-单形。设 x 和 y 为位于该单纯形内部的两个点。设 $S = \{p_0, p_1, p_2, x, y\}$。我们证明，$\mathbf{F}_S$不是任何$\mathbf{V}_n$的 p-态射像。

设 f 是从 $\mathbf{V}_n$ 到 $\mathbf{F}_S$ 的 p-态射，不妨取最小的 n。我们将 $\mathbf{V}_n$ 视为 n-立方体 Q_n 的偏序集，参见 Xiao（2024，2026）。

选取一个线性函数 P，使得 P 在 S 中的五个点上取两两不同的值，并按照 P 的值递增顺序重新排列 S，将所得序列记为 $z_0 < z_1 < \ldots < z_4$。令 $X_i :=$凸包($\{z_0, z_1, \ldots, z_i\}$)，则凸包($S$) $= X_4 \supsetneq X_3 \supsetneq \ldots \supsetneq X_0 = z_0$ 是 $\mathbf{F}_S$ 中的一条链。由于 f 是一个 p-态射，因此存在 Q_n 中的一条链 $Q_n = Y_4 \supsetneq Y_3 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_0$，使得 $f(Y_i) = X_i$。因此，$n \geq 4$。

由于 f 是一个 p-态射，因此存在 Q_n的一个子面 Q_m，使得 $f(Q_m) =[p_0, p_1]$，且 Q_m 中的所有顶点都被 f映射到 p_0 或 p_1。此外，Q_m中存在一条边 e_0,1，其端点分别被映射到 p_0 或 p_1。按照相同的论证，我们得到 e_1,2 和 e_0,2。若 $n \geq 4$，那么我们可以选择一个沿坐标$\vec{}$方向的方向 j，使其与 e_0,1、e_1,2 和 e_0,2 正交。考察 $Q_n$$\vec{}$中法向量为 j的两个超面。于是 e_0,1、e_1,2 和 e_0,2 属于这两个超面，因此其中一个超面 F包含这些边中的两条，从而 $f(F)$ 包含 p_0、p_1和 p_2。因此，$f(F)$ =凸包($\{p_0, p_1, p_2\}$) $= S$，这与 Q_n的极小性矛盾。

由于$\mathbf{F}_S$ 不是任何$\mathbf{V}_n$的 p-态射像，因此$\mathbf{F}_S \not\in$Cheq，所以 Cheq $\not\subseteq$Y。□

定理31。 Cheq、Y 和X 两两不可比。

证明。 由于 KP $\in$ Med，因此 D(KP) $\in$ X（定理 26）。但 KP $\notin$ Y，因此D(KP) $\notin$ Y（定理 24）。由于 KP $\notin$Cheq，因此 D(KP) $\notin$Cheq（定理 25）。由于 GD $\in$ LC，因此 C(GD) $\in$ Y（定理 22）。但 GD $\notin$ X，因此 C(GD) $\notin$ X（定理23）。由于 GD $\notin$Med，因此 C(GD) $\notin$ Cheq（见 Xiao（2026））。由于 KP $\in$ Med，因此 C(KP) $\in$Cheq（见 Xiao（2026））。由于 KP $\in$LC，因此C(KP) $\in$ Y（定理 22）。但 KP $\notin$X，因此 C(KP) $\notin$X（定理23）。

结合引理 30，我们得到 Cheq、Y 和 X 两两不可比较。□

因此，Y 和 X 的位置关系可总结如下。

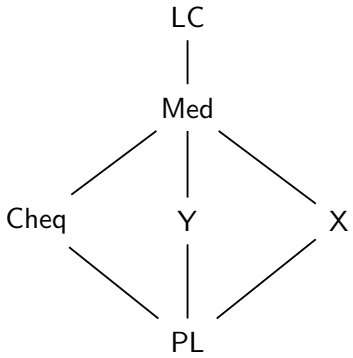

图 4. 相干逻辑的比较。

4.2. **非有限公理化与不可判定性**。

定理32. 逻辑 X 是不可判定的，且不能有限公理化。

证明。 Almeida 和 Knudstorp（2026）；Pawlowski（2026）使用人工智能证明了 Med 的不可判定性；根据定理 26，X 不可判定。结合 X 的有限模型性质可知，X 不是有限公理化的。□

定理33。 Y 不是有限公理化的。

证明。 我们将直接沿用 Fontaine（2006）中断言7的证明。针对 Y 的凸包语境，唯一需要作出的修改是进行几何推广：在原证明中，我们将取两个子集的并集这一操作推广为取两个子凸包的凸包，并将集合的基数替换为作为原像的最小凸包的顶点基数。其余论证可以保持不变。□

定理34。 对于任何满足Y $\subseteq$ M $\subseteq$ Med的逻辑M， M 都不是有限公理化的。

证明。 假设 M 可用 s 个命题变元有限公理化。我们直接采用结构$\mathbf{L}_{s,2^{s+3}}$，其最初的构造归功于 Maksimova 等人（1979）。由于证明 Y 不是有限公理化时恰好使用了$\mathbf{L}_{s,2^{s+3}}$，因此我们得到 $\chi(\mathbf{L}_{s,2^{s+3}}) \in$Y。对于任意 $M \supseteq Y$, $\chi(\mathbf{L}_{s,2^{s+3}}) \in$M。

由于每个框架$\mathbf{L}'_{s,2^{s+3},m} \vDash$ 都属于 Med，且 M $\subseteq$ Med，因此$\mathbf{L}'_{s,2^{s+3},m} \vDash$ M。因为 M 可用 s 个命题变元有限公理化，所以我们得到$\mathbf{L}_{s,2^{s+3}} \vDash$M 和$\mathbf{L}_{s,2^{s+3}} \vDash \chi(\mathbf{L}_{s,2^{s+3}})$，矛盾！□

定理35。$\mathsf{Y} \in \Pi^0_1$。

证明。我们沿用定理 21 中的构造。设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有限非空集。对于任意非空子集 X， S， $f'(\mathrm{conv}(X)) = \mathrm{conv}(X) \cap S$ 给出从 F_S 到 F'_S 的同构：$= \langle \{X \subseteq S : \emptyset \neq X = \mathrm{conv}(X) \cap S\}, \supseteq \rangle$。如果我们知道哪个非空子集 $X \subseteq S$ 满足 $X = \mathrm{conv}(X) \cap S$，那么我们就知道框架 F'_S。设 $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$。那么，F'_S 中的点集可编码为 $W \subseteq \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$， 满足： $X \in W$ 当且仅当 $\{p_i : i \in X\} = \mathrm{conv}(\{p_i : i \in X\}) \cap S$。这给出同构： $\langle W, \supseteq \rangle \cong \mathrm{F}'_S$。我们假设 $S = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$，由此可以将每个 p_i 与其坐标 $p_i = (p_i,\ 1,\ p_i,\ 2,\ \ldots,\ p_i,\ _{n-1})$ 对应起来。由于

$\mathsf{conv}(\{p_i:\ i\in X\}) = \{\sum_{i\in X}\lambda_i p_i:\ \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i\in X}\lambda_i = 1\}$，那么 $p_j\in\mathsf{conv}(\{p_i:\ i\in X\})$ 当且仅当存在 $\{\lambda_i:\ i\in X\}$，使得 $p_j=\sum_{i\in X}\lambda_i p_i$，其中 $\lambda_i\geq 0$ 且 $\sum_{i\in X}\lambda_i =$ 为 1。设 $\Psi_j,\ x(\bar{p}):=\exists(\lambda_i)_{i\in X}\bigwedge_{m=1}^{n-1}(p_j,\ _m=\sum_{i\in X}\lambda_i p_i,\ _m)\ \bigwedge_{i\in X}\lambda_i\geq 0\wedge\sum_{i\in X}\lambda_i = 1$。因此，$p_j\in\mathsf{conv}(\{p_i:\ i\in X\})$ 可表示为 $\Psi_j,\ x(\bar{p})$，其中 $\bar{p}=(p_1,\ 1,\ p_1,\ 2,\ \ldots,\ p_1,\ _{n-1},\ p_2,\ 1,\ \ldots,\ p_n,\ _{n-1})$。设 $\Phi_X(\bar{p}):=\bigwedge_{j\in[n]\setminus X}\neg\Psi_j,\ x(\bar{p})$。若所有 p_i 两两不同，则 $\Phi_X(\bar{p})$ 成立当且仅当 $\{p_i:\ i\in X\}=\mathsf{conv}(\{p_i:\ i\in X\})\cap S$。设$\Delta_n(\bar{p})$:
$=\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}\left(\sum_{m=1}^{n-1}(p_i,\ _m-p_j,\ _m)^2>0\right)$。那么，$S$ 中的点两两不同，当且仅当 $\Delta(\bar{p})$ 成立。

设 $\Omega_{n,\ W}:=\exists\bar{p}\left(\Delta_n(\bar{p})\ \wedge\bigwedge_{X\in W}\Phi_X(\bar{p})\wedge\bigwedge_{X\notin W,\ \emptyset\neq X\subseteq[n]}\neg\Phi_X(\bar{p})\right)$。存在两两不同的点 $p_1,\ .....,\ p_n\in\mathbb{R}^{n-1}$，使得 $g(X)=\{p_i:\ i\in X\}$ 将W 映射到 $\mathbf{F}'_S$ 中的所有点，当且仅当公式 $\Omega_{n,\ W}$ 在 $\mathbb{R}$ 中成立。存在一种算法，对于任意输入的 n 和 W，该算法经过有限步后输出 $\Omega_{n,\ W}$，且 $\Omega_{n,\ W}$ 是有序域语言中的一个系数为整数的一阶句子。根据实闭域的塔斯基判定定理，可以判定 $\mathbb{R}\vDash\Omega_W$ 是否成立。

对于任意固定的 n，枚举所有 $W\subseteq\mathcal{P}([n])\setminus\{\emptyset\}$，并保留满足$\mathbb{R}\vDash\Omega_W$的项，由此得到一个有限且可有效计算的框架列表 $\langle T_n,\ \supseteq\rangle$。$T_n$ 中的每个框架都与某个由 n 个点构成的$\mathbf{F}'_S$ S 同构。反过来，任何由 n 个点构成的$\mathbf{F}'_S$ S，都与 T_n 上的一个框架同构。因此，$T_1,\ T_2,\ .....$可以有效枚举所有有限凸包的框架。

现在我们证明，判断一个有限偏序集是否同构于某个有限凸包的框架是可判定的。设$\mathbf{F}$ 是一个具有 n 个极大点的有限偏序集，那么 F同构于某个有限凸包的框架，当且仅当 F 同构于 T_n中的某个框架。由于有限偏序集之间的同构关系是可判定的，且 T_n 是有限的、可有效计算的，因此所需的判定过程随之成立。

众所周知，有限框架上命题公式的有效性是可判定的。令 $E(n,\ \ulcorner\varphi\urcorner)$表示 T_n 中的每个框架都验证 φ，其中 $\ulcorner\varphi\urcorner$ 是 φ的哥德尔编码。则 E 是一个全可计算谓词。容易看出，$\varphi\in\mathbf{Y}$当且仅当对任意 n，$E(n,\ \ulcorner\varphi\urcorner)$，因此$\mathbf{Y}\in\Pi^0_1$。□

定理35的证明还给出了以下可判定性结果。

定理36。判断给定的有限偏序集是否同构于有限凸包框架是可判定的。

当点的数量有界时，同样的构造也能判定有效性。

定理37。对于每个 $n\geq 1$，令 $\mathsf{Y}^{\leq n}:=\bigcap_{1\leq|S|\leq n}\mathsf{Log}(\mathbf{F}_S)$。则 $\mathsf{Y}^{\leq n}$ 是可判定的。

我们得到了一列可判定逻辑 $\mathbf{Y}^{\leq 1}\supseteq\mathbf{Y}^{\leq 2}\supseteq\ldots$。显然，$\mathbf{Y}=\bigcap_{n\geq 1}\mathbf{Y}^{\leq n}$。我们有如下猜想。

猜想38。Y 是不可判定的。

给定 $n\geq 2$，令 $S_n=\{p_0,p_1,\ldots,p_n\}$ 为一个仿射无关集。则其凸包是一个 n- 单纯形；令 q_n 为该单纯形的重心。令 $S'_n:=S_n\cup\{q_n\}$。

定义39。S'_n 的凸包框架为 S'_n is $\mathbf{F}_n:=\langle\{\text{凸包}(X):\ \emptyset\neq X\subseteq S'_n\},\ \supseteq\rangle$。令 $\mathbf{Y}'_n:=\mathsf{Med}\cap\mathsf{Log}(\mathbf{F}_n)$，并令 χ_n 为$\mathbf{F}_n$的 Jonkov-de Jongh公式。逻辑 $\mathbf{Y}':=\bigcap_{n\geq 2}\mathbf{Y}'_n$。

引理 40。Y $\subsetneq$Y′ $\subsetneq$Med。

证明。 由于每个框架 $\mathbf{F}_n$ 都是凸包框架，因此 Y $\subseteq$Y′$_n$ $\subseteq$Med，故 Y $\subseteq$ Y′ $\subseteq$Med。

根据定理 16，KP $\notin$Y′，这是因为 S'_n 的凸依赖。我们已经知道 KP $\in$Med。

稍后我们将在定理 43 中看到，$\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in$ Y′。令 $S = \{0, 1, 2, 3\}$ 为实数直线上的点集。那么，由于凸依赖，在 F_S 中由 $[1, 3]$ 生成的有根子框架反驳 KP。现在令这个 KP 反模型的赋值扩展到 F_S，并令 $V(p) := [1, 3]\uparrow$, $\mathcal{M} = (\mathbf{F}_S,\ V)$。那么 $[0, 3] \nvDash_{\mathcal{M}} p \vee (p \to \mathrm{KP})$。因此，$D(\mathrm{KP}) \notin$ Y。由此，Y $\subsetneq$ Y′ $\subsetneq$ Med。□

定理 41. 区间 [Y′,Med]中有 $2^{\aleph_0}$ 个逻辑

证明。我们首先证明，当 $n \neq m$ 时，任意 F_m 都不是 F_n 的 p-态射像。容易看出，$\mathrm{F}_n \cong \langle \mathcal{P}(S'_n) \setminus \{S_n, \emptyset\}, \supseteq\rangle$。假设 F_m 是 F_n 在 p-态射 f下的 p-态射像。由于单点是框架的极大点，p-态射 f 引入了一个从 S'_n 到 S'_m的映射 f'，使得$f(\{p_i\}) = \{f'(p_i)\}$。容易看出，对于任意点集 X，$f(X) = \{f'(p) : p \in X\}$。现在考虑点集 S_m，它不是框架 F_m中的一个点。令 S为满足 $\{f'(p) : p \in S\} = S_m$的 S'_n 的集合；假设 S 是框架 F_n中的一个点，则 $f(S) = \{f'(p) : p \in S\} = S_m$，但 $S_m = f(S)$不是 F_m中的一个点。因此，非空集 S 不是 F_n中的一个点，所以 $S = S_n$。于是，$\{f'(p) : p \in S_n\} = S_m$且 $f'(q_n) = q_m$。因此，$n \geq m$。若 $n > m$，则存在两个不同的点 P_0 和 p_1，使得 $f'(p_0) = f'(p_1)$。那么 $S_n \setminus \{p_0\}$是 F_n中的一个点，但$\{f'(p) : p \in S_n \setminus \{p_0\}\} = S_m$，因此 $f(S_n \setminus \{p_0\}) = S_m \notin \mathrm{F}_m$，矛盾。故 $n = m$。

接下来我们证明，当 $n \neq m$ 时，$\mathbf{F}_m$ 不是 $\mathbf{F}_n$ 的任何有根生成子框架的 p-态射像。如果这个有根生成子框架本身不是 $\mathbf{F}_n$，那么它将是一个梅德韦杰夫框架。但任何梅德韦杰夫框架都满足 KP，而 $\mathbf{F}_m$ 不满足。根据 Jonkov-de Jongh 定理，$\mathbf{F}_n \vDash \chi_m$ 当且仅当 $n \neq m$。

对于任意 $A \subseteq \{2, 3, \ldots\}$，令 $\mathrm{L}_A :=$ Y′$+\{\chi_i : i \in A\}$，则 Y′ $\subseteq \mathrm{L}_A \subseteq$ Med，且 $\chi_i \in \mathrm{L}_A$ 当且仅当 $i \in A$。因此，我们至少得到 $2^{\aleph_0}$ 个不同的逻辑 L_A。由于不同逻辑的数量至多为 $2^{\aleph_0}$，故区间 [Y′, Med] 中逻辑的基数为 $2^{\aleph_0}$。□

推论 42. 区间 [Y,Med]，中有 $2^{\aleph_0}$ 个逻辑，它们都不是有限公理化的。

利用归约 D，我们甚至可以证明整个区间中的每个逻辑都是不可判定的。

定理 43. 对于任意满足 Y′ $\subseteq$ M $\subseteq$ Med 的逻辑 M，对于任意公式 φ,$\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in$ M。

证明。 沿用定理 26 中的相同论证，我们得到，对于任意公式φ, $\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in$ Med，且 $\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in$ Y′。

给定区间 (Y′,Med) 中的逻辑 M，对于任意公式 φ, $\varphi \in$ Med 蕴含$D(\varphi) \in$ Y′，因此 $D(\varphi) \in$ M；而$\varphi \notin$ Med 蕴含 $D(\varphi) \notin$ Med，因此 $D(\varphi) \notin$M。由此，$\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in$ M。□

定理 44. 对于任意满足 Y′ $\subseteq$ M $\subseteq$ Med 的逻辑 M，M 是不可判定的。

证明。 根据定理 43，$\varphi \in$ Med 当且仅当 $D(\varphi) \in$ M。Med 的不可判定性意味着 M 不可判定。□

我们已经证明，区间 [Y，Med] 中的每个逻辑都不能有限公理化，而区间 [Y′，Med] 中的每个逻辑都不可判定。我们有如下猜想：

猜想 45. 对于任何满足 Y $\subseteq$ M $\subseteq$ Med 的逻辑 M，M 都是不可判定的。

5. 无限情形

当 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意集合时，我们将其凸包视为包含 S 的最小凸集，即 conv(S) $= \{\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i : m \geq 1, p_i \in S, \lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\} = \bigcup_{\emptyset \neq X \subseteq_{\text{fin}} S} \text{conv}(X)$。如果 S 是一个无限点集，我们称其为凸独立，若对于任意 $p \in S$， $p \notin \text{conv}(S \setminus \{p\})$。

定义 46. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个任意的、可能无限的点集。 S 的凸包框架 为 $\mathbf{F}_S$: $= \langle \{\text{conv}(X) : \emptyset \neq X \subseteq S\}, \supseteq \rangle$，其对偶框架为 $\mathbf{F}_S^{\text{op}} := \langle \{\text{conv}(X) : \emptyset \neq X \subseteq S\}, \subseteq \rangle$。凸包逻辑 Y_∞ 是所有凸包框架的中间逻辑。对偶凸包逻辑 $\text{Y}_\infty^{\text{op}}$ 是所有对偶凸包框架的中间逻辑。

现在我们证明定理 16 的无限情形。

定理 47. 若 S 是一个无限点集，则下列命题等价：

(1) $\mathbf{F}_S \vDash$KP。(2) S 是凸独立的。
(3) $\mathbf{F}_S$ 是一个无限 *Skvortsov* 框架。
(4) Log($\mathbf{F}_S$) = Skvo。

证明。(1. $\Rightarrow$ 2.) 假设 $\text{F}_S \vDash$ KP，且 S 不是凸独立的。令 a 为 S 中的一点，使得 $a \in$ 凸包($S \setminus \{a\}$)。根据定义，我们可以选取一个关于包含关系极小的有限集 $X = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$，使得$X \subseteq S \setminus \{a\}$ 且 $a \in$ 凸包(X)。因此 $a \notin$ 凸包($X \setminus \{p_0\}$)。现在我们在 F_S上定义一个赋值V。令 $V(p) = \{\{a\}\}$， $V(q) = \bigcup_{p_0 \notin C} C\uparrow$，并且 $V(r) = \bigcup_{\{p_1,\ldots,p_n\} \not\subseteq C} C\uparrow$。令$\mathcal{M} = (\text{F}_S, V)$。对于任意凸包 C， $C \vDash_{\mathcal{M}} \neg p$ 当且仅当 $a \notin C$。若 $a \notin C$，则 $X \not\subseteq C$，因此 $p_0 \notin C$或 $\{p_1, \ldots, p_n\} \not\subseteq C$。于是 $C \vDash_{\mathcal{M}} q \vee r$ 且凸包(X) $\vDash_{\mathcal{M}} \neg p \to (q \vee r)$。由于 $p_0 \notin V(q)$且凸包$\{p_1, \ldots, p_n\} \notin V(r)$，所以 Conv($X$) $\nvDash_{\mathcal{M}} \neg p \to q$ 且 Conv(X) $\nvDash_{\mathcal{M}} \neg p \to r$。综上所述，Conv($X$) $\nvDash_{\mathcal{M}}$ KP，因此 $\text{F}_S \nvDash$KP，矛盾！

(2. $\Rightarrow$ 3.) 若 S 凸独立，则对任意 $X \subseteq S$, $f(X) =$ 凸包(X) 是从 $\mathbf{F}_S$ 到 $\langle \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}, \supseteq \rangle$ 的同构。

(3. $\Rightarrow$ 4.) Skvortsov（1979）证明了 Skvo $=$ Log ($\langle \mathcal{P}(\omega) \setminus \{\emptyset\}, \supseteq \rangle$)。对于任意无限 S，它都有一个可数子集，由该子集生成的子框架同构于 $\langle \mathcal{P}(\omega) \setminus \{\emptyset\}, \supseteq \rangle$，因此 Skov $\subseteq$ Log($\mathbf{F}_S$) $\subseteq$ Log ($\langle \mathcal{P}(\omega) \setminus \{\emptyset\}, \supseteq \rangle$) $=$ Skov，所以 Log($\mathbf{F}_S$) = Skvo。

(4. $\Rightarrow$ 1.) 众所周知，KP $\in$ Skov。因此 $\mathbf{F}_S \vDash$ KP。 □

定理48。$\text{Y}_\infty^{op} =$KC。

证明。 由于每个框架$\mathbf{F}_S^{\text{op}}$ 都有顶元凸包(S)，因此 KC $\subseteq \text{Y}_\infty^{\text{op}}$。

对于任意有限集 $S_{\text{fin}} \subseteq \mathbb{R}^n$，设 $S := S_{\text{fin}} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$。投影映射$\pi$($x_1$，...，$x_n$，$x_{n+1}$) =($x_1$，.....，$x_n$) 按如下方式引入一个满射 f: $\mathbf{F}_S \to \mathbf{F}_{S_{\text{fin}}}$:

$$f(\text{conv}(X)) = \pi(\text{conv}(X)).$$

现在证明 f 是一个 p-态射。若 $\mathrm{conv}(X_0) \subseteq \mathrm{conv}(X_1)$，则 $f(\mathrm{conv}(X_0)) = \pi(\mathrm{conv}(X_0)) \subseteq \pi(\mathrm{conv}(X_1)) = f(\mathrm{conv}(X_1))$。若 $f(\mathrm{conv}(X)) = \pi(\mathrm{conv}(X)) \subseteq \mathrm{conv}(Y)$，其中 $Y \subseteq S_{\mathrm{fin}}$。现在考虑凸包 $\mathrm{conv}((Y \times \{1\}) \cup X)$，显然 $\mathrm{conv}(X) \subseteq \mathrm{conv}((Y \times \{1\}) \cup X)$，且 $f(\mathrm{conv}((Y \times \{1\}) \cup X)) = \pi(\mathrm{conv}((Y \times \{1\}) \cup X)) = \mathrm{conv}(Y)$。因此，$\mathbf{F}_{S_{\mathrm{fin}}}$ 是 $\mathbf{F}_S$ 的 p-态射像。对任意有限集 S_{fin}，取 $\mathbf{F}_{S_{\mathrm{fin}}}$ 的所有逻辑的交集，由定理 14 得到 KC。因此，$\mathsf{Y}_\infty^{\mathrm{op}} \subseteq \bigcap_{S=S_{\mathrm{fin}}\times\mathbb{N}} \mathrm{Log}(\mathbf{F}_S) \subseteq \mathsf{KC}$。

综合以上结果，我们得到 $\mathsf{Y}_\infty^{\mathrm{op}} = \mathsf{KC}$。 □

5.1. **康托尔集与IPC。**

定义 49. 康托尔集是通过不断删除每个剩余区间的开放的中间三分之一而得到的子集 $\mathcal{C}_\infty \subset [0,1]$。更准确地说，定义$\mathcal{C}_0 = [0,1]$和 $\mathcal{C}_{n+1} = \frac{1}{3}\mathcal{C}_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{C}_n\right)$，其中 $n \geq 0$。那么 $\mathcal{C}_\infty := \bar{\lim}_{n\to\infty}\bar{\mathcal{C}}_n = \bar{\bigcap}_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_n$。在第 n 次三等分步骤中移除的开区间称为第 *-th* 层区间。

康托尔集是紧致、完美、全不连通、不可数且自相似的，并且其勒贝格测度为零。以下证明主要依赖于康托尔集 $\mathcal{C}_\infty$ 的完美性、不连通性和自相似性所对应的被移除区间。

定理 50. $\mathsf{Y}_\infty = \mathsf{IPC}$。

证明。 令 $S = [0,1] \cap \mathbb{Q}$。我们旨在证明：对于任意有限有根框架 $\mathbf{F}$，它都是 $\mathbf{F}_S$ 的一个 p- 态射像；证明方法是对 $\mathbf{F}$ 中点的基数使用数学归纳法。

若 $\mathbf{F}$ 是单点集，则 p-态射的存在性显然。假设 $\mathbf{F}$ 不是单点集，它有一个极大点 a，其根 r 有 n 个直接后继 $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$，那么根据归纳假设，每个 $s_i\uparrow$ 都是 $\mathbf{F}_S$ 在 f_i 下的一个 p-态射像。对于任意第 m 层区间 X，其凸包是一个闭区间 $[x,y]$，其中 $x, y \in \mathbb{Q}$。仿射映射 $g(t) := x + (y-x)t$ 是从 S 到 $S \cap [x,y]$ 的双射，并由此导出一个 $\mathbf{F}_S \cong [x,y]\uparrow$ 的同构。假设$m \equiv i (\mathrm{mod}\ n)$，那么 $\mathbf{F}$ 中的 $s_i\uparrow$ 是 $\mathbf{F}_S$ 中 $[x,y]\uparrow$ 的一个 p- 态射像。这个选择是良定义的，因为康托尔集中那些被移除区间的凸包两两不相交。现在我们按如下方式构造从 $\mathbf{F}_S$ 到 $\mathbf{F}$ 的映射 f：对于 S 中任意一个凸包 Y，

$$f(Y) = \begin{cases} f_i(Y), \text{ 如果 } Y \text{包含在第 } m \text{ 层区间中且 } m \equiv i(\text{模 } n)a, & \text{如果 } Y \text{是单点集且不属于任何被移除区间} r \\ . & \text{否则} \end{cases}$$

f 的第四个条件显然成立。对于回条件，假设 $f(Y) \leq y$，如果 Y 包含在某个被移除区间中，则由归纳假设可得回条件。如果 $f(Y) = a$，则该情形显然成立。剩下的情形是$f(Y) = r$。回顾康托尔集的性质，对于任意开区间 X，若 $\mathcal{C}_\infty \cap X \neq \emptyset$，则对于任意 $0 \leq i < n$，存在一个包含于 X 中的第 m 层区间，使得$m \equiv i$(模 n)。若 $\mathcal{C}_\infty \cap \mathrm{int}(Y) = \emptyset$，则连通的 $\mathrm{int}(Y)$ 属于某个被移除区间，因此 Y 包含于这个被移除区间中，矛盾。因此$\mathcal{C}_\infty \cap \mathrm{int}(Y) \neq \emptyset$。由于 $r < y$，因此存在某个 $s_i \leq y$ 使得 $0 \leq i < n$。存在一个 X，其凸包包含于 Y 中，且 X 是第 m 层区间，$m \equiv i$(模 n)。

因此，存在一个凸包 Y_1 包含于 conv(X) 中，且 $f(Y_1) = f_i(Y_1) = y$，并且$Y_1 \subseteq$ conv(X) $\subseteq Y$。因此， f 是从 $\mathbf{F}_S$ 到 $\mathbf{F}$ 的一个 p-态射。

由于每个有限有根框架都是 $\mathbf{F}_S$ 的 p-态射像，因此 Log($\mathbf{F}_S$) $\subseteq$IPC。结合 $\mathbf{F}_S \vDash$ IPC，我们得到 Log($\mathbf{F}_S$) = IPC，因此 Y_∞ = IPC。□

6. 未来工作

还有两个猜想尚未解决。第一个涉及 Y 的可判定性。我们证明了 $\mathrm{Y} \in \Pi^0_1$，并且对于每个 $n \geq 1$，逻辑 $\mathrm{Y}^{\leq n}$ 都是可判定的。然而，这些结果并未确定 Y 本身是否可判定。我们猜想 Y 是不可判定的。第二个猜想涉及整个区间 [Y，Med]。我们证明了该区间内的每个逻辑都不是有限公理化的，并且 [Y′，Med] 中的每个逻辑都是不可判定的。我们猜想，满足 $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{M} \subseteq$ Med 的每个逻辑 M 都是不可判定的。特别是，对于该区间内不包含 Y′ 的那些逻辑（包括 Y 本身），其不可判定性仍有待证明。

致谢

作者谨向 Johan van Benthem、Nick Bezhanishvili 和 Martin Stokhof 致谢，感谢他们富有启发性的讨论。

本文所呈现的数学论证和证明均非借助任何人工智能技术生成或发展而来。所有这些论证和证明均由作者独立构思并完成。本文唯一使用的人工智能生成的数学结果是梅德韦杰夫逻辑的不可判定性，该结果仅用于定理 32 和 44 的证明。

参考文献

Sam Adam-Day、Nick Bezhanishvili、David Gabelaia 和 Vincenzo Marra。凸多面体的中间逻辑。arXiv 预印本 arXiv:2307.16600，2023年。URL https://arxiv.org/abs/2307.16600。Marco Aiello、Johan van Benthem 和 Guram Bezhanishvili。空间推理：模态路径。《逻辑与计算杂志》，13(6):889–920，2003年。doi:10.1093/logcom/13.6.889。Rodrigo N. Almeida 和 Søren B. Knudstorp。梅德韦杰夫逻辑不可判定。arXiv 预印本 arXiv:2609.13359，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2609.13359。Gaëlle Fontaine。ML 与 Cheq 的公理化。硕士论文，阿姆斯特丹大学，2006年。URL https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/771/。逻辑学硕士论文，ILLC MoL-2006-08。Peter Gärdenfors。《概念空间：思想的几何学》。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，2000年。doi:10.7551/mitpress/2076.001.0001。Wesley H. Holliday。关于子集与超集的模态逻辑：梅德韦杰夫框架上的时态逻辑。《逻辑学研究》，105(1):13–35，2017年。doi:10.1007/s11225-016- 9680-1。Andrey N. Kolmogorov。论直觉主义逻辑的解释。《数学杂志》，35:58–65，1932年。doi:10.1007/BF01186549。Tadeusz Litak。关于$\mathbb{R}^\infty$棋盘格子集的超直觉主义逻辑的一些注记。《逻辑分部通报》，33(2):81–86，2004年。URL https://arxiv.org/abs/1808.06393。后续 arXiv 版本：arXiv:1808.06393（2018年）。

Larisa L. Maksimova、Dmitrii P. Skvortsov 和 Valentin B. Shehtman。梅德韦杰夫有限问题逻辑不可能有限公理化。苏联科学院通报，245(5):1051–1054，1979。URL https://www.mathnet.ru/eng/dan42643。英文译本：《苏联数学通报》20（1979年），394–398。Yuri T. Medvedev。有限问题。《苏联数学通报》，3:227–230，1962年。Pawel Pawlowski。梅德韦杰夫逻辑不可判定。它是 Π^0_1-完全的。谁能想到？arXiv 预印本 arXiv:2609.11576，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2609.11576。Dmitrii P. Skvortsov。无限问题逻辑与集合的原子半格上的 Kripke 模型。苏联科学院通报，245(4):798–801，1979。URLhttps://www.mathnet.ru/eng/dan42627。俄文。英文译本：《苏联数学通报》20（1979年），360–363。Johan van Benthem 和 Guram Bezhanishvili。空间模态逻辑。载于 Marco Aiello、Ian Pratt-Hartmann 和 Johan van Benthem 编，《空间逻辑手册》，第217–298页。施普林格出版社，多德雷赫特，2007年。doi:10.1007/978-1- 4020-5587-4 5。_Johan van Benthem、Guram Bezhanishvili 和 Mai Gehrke。模态逻辑中的欧几里得层级。《逻辑学研究》，75(3):327–344，2003年。doi:10.1023/B:STUD.0000009564.00287.16。Han Xiao。由可数链条件强迫的一个开放问题启发的模态逻辑与中间逻辑。博士论文，汉堡大学，汉堡，2024年9月。URL https://ediss.sub.uni-hamburg.de/handle/ediss/11363。Han Xiao。Cheq 的非有限公理化性与不可判定性。arXiv 预印本 arXiv:2609.39577，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2609.39577。

清华大学—阿姆斯特丹大学逻辑联合研究中心，清华大学，中国北京电子邮件地址，YuminJi： m2e07@naver.com电子邮件地址，肖涵： sheropen@163.com