通过粗粒化实现的广义涌现：一个范畴论框架

刘凯威[1] 和张江 *[1]

[1] 北京师范大学系统科学学院，北京，中国，100875[2]Swarma Research，北京，中国，102300

2026年11月24日

arXiv:2611.29302v1 [nlin.PS] 22 Nov 2026

摘要

涌现定量理论采用多种不同的表征和指标，因此难以识别其共同结构。本文提出一个通过粗粒化实现广义涌现的范畴论框架，不预设动力学、概率、干预或特定的信息度量。系统描述由范畴表示，粗粒化则由函子表示。广义涌现要求沿着一个可容许的非平凡函子，使某个指定的描述属性得到改进；该框架的扩展还会评估相应的内部态射。此判据将结构可容许性与属性改进区分开来，并能在选定的比较序下处理多个属性。不同函子体现不同的观察视角，因此涌现依赖观察者。选择最优粗粒化可以部分降低这种依赖，但这仅适用于给定的属性和约束；最优性既不保证唯一性，也不保证涌现。对于动力学模型，状态粗粒化和动力学粗粒化分别定义，并通过严格或近似闭合联系起来；用一个函子统一二者只是特殊情形。计算力学、因果涌现和近似动力学可逆性展示了动力学情形。两个静态示例展示了该判据的应用：对称性涌现中，对多边形进行粗粒化会提升旋转对称性和二面体对称性；凝聚性涌现中，对网络进行粗粒化会提高全局效率、边密度和聚类程度。每个示例也都包含一个粗粒化程度相同但不符合条件的情形：对于多边形，一种对称性度量提高而另一种降低；对于网络，三种凝聚性属性均下降。

关键词： 广义涌现；动力系统中的广义涌现；范畴论；粗粒化；函子；属性提升；描述层级。

1 引言

涌现是一个跨学科的常见概念 [1, 2]。相变会产生任何单个分子都不具备的序参量 [3]；鸟群、鱼群和昆虫群落展现出集体运动和劳动分工
而任何个体都不具备这些特征 [4, 5]；神经元群体承载着单个神经元所不具备的表征；市场、城市和生态系统产生了其任何成员都无法呈现的规律性 [6, 7]。不同领域的用语各不相同，但所描述的模式并无二致：经过某种形式的组织后，高层级描述会呈现出低层级描述无法显现的结构、能力或规律性。

然而，涌现是什么，至今仍未有定论。哲学文献区分弱涌现与强涌现，并探讨高层级属性原则上是否能从低层级属性推导出来 [8–11]。这关乎原则上可推导的内容，却无法将其操作化为针对特定模型或数据集的可检验标准 [12]。因此，判断特定系统是否具有涌现性，基本上仍取决于诠释，而非某种可以判定的描述属性 [13]。

过去几十年来，一系列定量框架试图提出这样的判据。Crutchfield 的计算力学（也称因果状态理论）通过将产生相同预测分布的过去划分为等价类，来概括一个随机过程；这些因果状态的统计复杂度衡量了该过程存储了多少关于过去的信息，而涌现结构则体现为一种预测架构，这种架构并未呈现在原始微观历史中 [14, 15]。Seth 的 G-涌现采用非线性格兰杰因果关系，并将这样一种宏观变量称为涌现变量：它既由微观变量导致，又相对于微观变量具有自主性 [16]。Hoel、Albantakis 和 Tononi 比较粗粒化前后因果模型的有效信息[17] ，并表明宏观模型所携带的有效信息可能多于微观模型；也就是说，宏观可以胜过微观 [17–20]。Rosas 等人将

*电子邮箱：zhangjiang@bnu.edu.cn

多变量系统中的信息分解为冗余成分、独有成分和协同成分，并将协同占主导视为因果涌现 [21]。Zhang 等人依据转移矩阵的奇异值分解进行比较，并表明粗粒化能够提高近似动力学可逆性和信息传输效率 [22]。

这些标准并不等价，而且对同一系统的排序可能各不相同：有效信息、统计复杂度、协同、格兰杰因果增益和奇异值谱是不同的量。尽管如此，它们都引出了一个共同的结构性问题：当通过粗粒化将微观描述替换为宏观描述时，选定的性质会如何变化？本文构建的框架讨论描述的属性，并在扩展中讨论这些描述内部态射的属性；它并不声称涵盖更广泛的涌现文献中的所有标准。各个理论留下了一个悬而未决的问题：它们背后是否存在共同的形式核心？能否在不预先依赖其中任何指标的情况下，一次性地表述出来?

范畴论是表述这一问题的自然选择，而且已有关于涌现的范畴论处理。Adam 将生成性形式化为观测函子未能保持表达相互连接的余极限，并以同调方式对其量化 [23, 24]；Li 等人将由此得到的上同调维数转化为网络上的可计算度量 [25]。另一条研究路线是因果抽象：它将两个因果模型之间的粗粒化表示为一个自然变换，并探究在干预下，高层模型何时能复现低层模型 [26–30]。第三种研究则从代数角度刻画涌现整体：将其视为一种结构化构造，并配有一个遗忘其运算的函子 [31]。这些工作提供了我们所需的语言，但它们形式化的是一致性、组合性或可靠性，而非改进。退化粗粒化（例如将每个微观状态都压缩成单一宏观状态）也能满足一致性和可靠性；而有害的粗粒化（例如级联失效）则会造成非组合性。因此，这些标准都没有将“宏观层面更好”作为定义对象。

本文研究通过粗粒化实现的广义涌现，并将跨层级属性比较的共同结构作为研究对象。我们用一个范畴表示一种描述，用描述范畴之间的函子表示粗粒化，并将广义涌现定义为沿着可容许且非平凡的函子 Q 发生的属性提升。本文主张的是：某个指定性质在某种指定变换下得到改善，而非宏观描述无条件地优于微观描述。同一微观描述在不同粗粒化下可能得出不同的涌现判断；因此，涌现明确地相对于 Q和属性 P而言。对于动力学建模，我们区分状态粗粒化与动力学粗粒化；若无额外的相容性条件，两者未必能组合成单一函子。本文不预设概率、干预、熵、线性结构或物理尺度，因此，动力学理论与静态结构比较是应用场景，而非前提。非动力学示例既包括发生属性提升的案例，也包括未发生属性提升的案例，而非仅呈现有利的简化。两个多边形案例都比较了 81 个顶点与 9 个顶点，两个网络案例都比较了 450 个节点与 9 个社群节点，但它们的属性变化方向不同。这清楚地揭示了微观结构的作用，也区分了联合多属性提升与仅在一个组成部分上有所改善。

我们的主要贡献如下。

1. 我们构建了框架本身：描述是一个范畴，粗粒化是描述范畴之间的函子，并可选择加入一个组织多个描述的元层级；广义涌现是沿着一个可容许且非平凡的函子发生的属性提升，因此结构可容许性与属性改进是彼此独立的条件，而且比较范围从描述扩展到其中的态射。2. 我们明确呈现了对粗粒化的依赖：不同的函子体现不同的观察视角；通过最大化给定属性而选出的最优粗粒化，只有在该属性及其约束下才能减弱这种依赖；最优解唯一成立的条件则另行阐述。3. 我们将动力学内生化于同一框架之中：状态是广义元素，状态粗粒化与动力学粗粒化分别定义，并通过严格闭合或近似闭合将二者联系起来；用一个函子同时处理二者是一个严格的特例。因此，计算力学、因果涌现和近似动力学可逆性是作为实例出现，而非作为前提。4. 我们通过两种非动力学对比检验这一判据：跨多边形粗粒化的对称性，以及跨网络粗粒化的内聚性。每种对比都包含一个满足判据的案例和一个在相同约简层级上不满足判据的案例，这表明涌现源于属性比较，而非约简本身。

第 2 节构建框架，第 3 节介绍动力学与非动力学实例，第 4 节讨论该框架的优势与局限。我们并未声称范畴论能够判定哪些属性至关重要。该框架明确了涌现判断所要求的层级与关系，并将以下事项留给

各个科学共同体自行界定：什么算作属性、什么算作可容许粗粒化，以及什么算作有意义的比较。

2 理论

2.1 范围与基本差异

2.1.1 系统与描述

我们用“系统”指代所研究的对象，但不将其绑定到唯一的数学表征。一个系统可以有多个描述，每个描述只保留系统结构的一部分。本文始终用 $\mathcal{S}$ 表示系统本身，而 $\mathcal{S}$ 仅用作汇集该系统各个描述的索引。系统的单个描述是一个范畴 $\mathcal{C}$ ，承载着基本对象和态射。研究目的所要求的任何其他结构都不单独设定符号：它通过可容许粗粒化必须保留的性质体现出来。某些动力学可以直接由$\mathcal{C}$中的态射表示；对于概率动力学，我们选择适当的结构化范畴，例如马尔可夫范畴、凸范畴或其他合适的语义范畴，以确定相应的态射。

$\mathcal{C}$ 的对象可以表示实体、状态、状态空间、部分、变量、结构单元或其他研究对象。态射可以表示关系、变换、作用、嵌入、复合、确定性演化或随机过程。本文不要求每个范畴都承载动力学语义，但也不排除范畴内部的动力学：在适当的语义范畴中，动力学由态射给出。

这一表述有一项重要的内在局限：范畴并非系统唯一的“真实本体论”，而是对系统进行结构化组织的描述。对于同一系统，可能存在不同的 $\mathcal{C}$ 。我们的广义涌现恰恰关注这些描述之间的非平凡变换，以及属性如何随之改变。

2.1.2 微观层面与宏观层面作为描述层级

令 $\mathcal{C}_\mu$ 表示系统的微观描述， $\mathcal{C}_M$ 表示宏观描述。下标 μ 和M 主要表示描述层级，而非物理尺度。它们也不意味着宏观层面必然具有独立的本体论实体。微观描述可能保留更多差异；宏观描述则可能将多个微观对象归为同一类、忽略某些态射，或重新组织现有关系。因此，宏观描述并非只是“删去”部分微观对象；它也可能是一种新的结构化表征。

在 最简单的框架中，只需给出两个范畴，以及一个从微观到宏观的函子 o:

$$Q : \mathcal{C}_\mu \to \mathcal{C}_M. \tag{2.1}$$

这里， Q 作用于对象（例如 A）和态射（例如 f， g），并满足

$$Q(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{Q(A)}, \qquad Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f). \tag{2.2}$$

因此，粗粒化并非对对象集进行任意映射，而是一个负责形成复合结构的结构性过程。

2.1.3 描述范畴作为可选的元层级

如果我们只研究一个微观描述、一个宏观描述和一个粗粒化函子，就没有必要引入描述范畴。为了统一对同一系统的多种可容许描述，我们可以进一步定义一个可选的描述范畴 Desc($\mathcal{S}$)。其对象是系统 $\mathcal{S}$ 的可容许结构化描述；每个描述都是一个范畴。其态射是在不同描述之间允许的保结构转换。

在这个元层级中，我们将 $\mathcal{C}_\mu$ 和 $\mathcal{C}_M$ 视为 Desc($\mathcal{S}$) 的对象，并将 Q 视为 Desc($\mathcal{S}$) 中的一个态射：

$$\mathcal{C}_\mu, \mathcal{C}_M \in \mathrm{Ob}\big(\mathrm{Desc}(\mathcal{S})\big), \qquad Q \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Desc}(\mathcal{S})}(\mathcal{C}_\mu, \mathcal{C}_M). \tag{2.3}$$

Q 有两种不同的“箭头”解释：在描述内部， Q 是范畴之间的函子；在元层级上， Q 是描述范畴中的一个态射。二者仅因观察层级不同而异，并不矛盾。

Desc($\mathcal{S}$) 并不会自动确定为唯一的数学对象。具体理论必须明确哪些描述属于同一系统、哪些结构变换被视为允许的，以及描述态射必须保留哪些结构。因此，Desc($\mathcal{S}$) 是该框架中的一种组织性构造，而非广义涌现的本体论前提。

2.2 范畴论基础与粗粒化函子

2.2.1 范畴、函子与结构保持

范畴论通过对象、态射和复合来表达结构关系。它是研究不同层级的结构化关系之间变换的自然语言；标准参考资料见[32, 33], , 而面向纯数学以外应用的入门介绍见 [34]。

令 $\mathcal{C}_\mu$ 和 $\mathcal{C}_M$ 是两个描述范畴。粗粒化函子 Q具有两部分作用 :

$$Q_0 : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\mu) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_M), \tag{2.4}$$

以及对每一对对象的一个态射映射

$$Q_{A,B} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_\mu}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_M}(Q(A), Q(B)). \tag{2.5}$$

这些作用必须与恒等态射和复合相容。函子性确保了与恒等态射和复合的相容性；排除纯粹重命名则需要下面单独的非平凡性条件。

本文不要求所有粗粒化函子都具有完全相同的性质。有些问题要求Q 保留特定结构；另一些问题允许 Q 遗忘结构；还有一些问题则要求取商或进行局部化。可容许性由具体研究领域给出，而非仅由范畴论决定。

2.2.2 可容许粗粒化类

在 $\mathrm{Desc}(\mathcal{S})$ 的元层级上，定义可容许粗粒化类:

$$\mathrm{CG}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathrm{Desc}(\mathcal{S})). \tag{2.6}$$

对于候选粗粒化 Q，记作

$$\mathrm{Adm}(Q) \iff Q \in \mathrm{CG}(\mathcal{S}). \tag{2.7}$$

$\mathrm{CG}(\mathcal{S})$ 可以根据不同来源加以规定；例如，可以要求粗粒化保留某类指定结构，尊重系统的复合与关系，与观测、表征或实验操作相容，属于某种允许的变量选择或取商方案，或者满足特定的可实现性约束。在不同实例中，这些条件可以表现为函子性质、伴随、商结构、单调性、可测性或其他外部约束。关键在于，可容许性是理论的一个参数，而不是必须预先假定其具有概率的、因果的或熵的性质。

2.2.3 非平凡性

仅有可容许性不足以产生涌现。如果 Q 仅仅是对同一描述的重新命名、坐标变换或范畴等价，那么属性变化就不应自动被称为涌现。令 $\mathrm{Eq}(\mathcal{S})$ 表示理论视为“纯描述性”的粗粒化类（例如范畴同构或范畴等价）。定义

$$\mathrm{Nontrivial}(Q) \iff Q \in \mathrm{CG}(\mathcal{S}) \setminus \mathrm{Eq}(\mathcal{S}). \tag{2.8}$$

这并不是说每个非等价函子都必然产生涌现；而是说，涌现至少要求排除纯描述性变换。更具体的非平凡性判据可能要求 Q 改变对象或态射的可区分性、改变结构自由度，或重组描述层级。

非平凡性必须相对于描述规范来理解。例如，在某种理论中，一个遗忘函子可能被认为是可容许且非平凡的；而在另一种理论中，同样的遗忘可能会破坏关键结构，因此可能不属于 $\mathrm{CG}(\mathcal{S})$。因此，非平凡性并非一个独立于理论语境的单一数值条件。

2.3 属性赋值与属性提升

2.3.1 描述的属性不必是函子

设 $\mathcal{V}$ 是配备比较关系 $\preceq$的属性空间。属性空间可以是偏序集、预序集、数值空间、向量空间、分级集或命题集。对于描述属性，定义一个作用于描述及其内部态射的属性赋值，

$$P : \mathrm{Ob}(\mathrm{Desc}(\mathcal{S})) \to (\mathcal{V}, \preceq). \tag{2.9}$$

因此， $P(\mathcal{C}_\mu)$ 和 $P(\mathcal{C}_M)$ 分别是微观描述和宏观描述的属性值。描述是一个范畴，因此可以根据其数据的任意部分计算其值：对象的某种性质、态射的某种性质，或它所携带的指定机制的某种性质。指定哪个态射是描述的一部分，因此 P 仍然是描述的函数；随后，根据 $Q(f)$ 计算宏观值。第 3.1 节中的实例对指定机制进行评估，因为有效信息和动力学可逆性是转移态射而非状态对象的性质。

应仔细区分属性赋值与属性函子。一般而言， P 仅赋予属性值，并未规定这些值如何沿描述之间的态射发生变化。因此，不能无条件地将 P 写成从 $\mathsf{Desc}(\mathcal{S})$ 到某个属性范畴的函子。如果某一特定属性确实诱导出态射层面的作用，并保持恒等态射与复合不变，那么 P 可以强化为属性函子。这是有用的额外结构，但并非广义涌现的基础要求。

2.3.2 属性序与提升

属性的宏观“提升”并不一定意味着数值增加。令 $\prec$ 表示属性空间上的严格改进关系。属性提升定义为

$$\mathrm{Lift}_P(Q) \iff P(\mathcal{C}_\mu) \prec P(\mathcal{C}_M), \qquad Q : \mathcal{C}_\mu \to \mathcal{C}_M. \tag{2.10}$$

对于指定机制 $f_\mu \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C}_\mu)$，同一关系比较 $P(f_\mu)$与 $P\big(Q(f_\mu)\big)$，因此，只有当 $Q(f_\mu)$是宏观机制时，宏观值才取自函子像，并描述同一机制。这里， $\mathcal{C}_M$ 是 Q的目标描述，而不是作为其自身范畴中的对象的 $\mathcal{C}_\mu$ 的像。在微观描述固定的情况下，改变 Q可能会改变目标描述，进而改变属性比较。如果只要求不减，则使用非严格关系 $\preceq$。当属性表示误差、冗余或泄漏时，研究者可以反转约定，使“越小越好”，同时仍使用同一序关系来表达提升。

数值属性是一种特殊情况。若 $P\colon \mathsf{Ob}(\mathsf{Desc}(\mathcal{S})) \to \mathbb{R}$，则可以定义属性增益

$$E_P(Q) = P(\mathcal{C}_M) - P(\mathcal{C}_\mu). \tag{2.11}$$

按照“越大越好”的约定， $E_P(Q) > 0$ 表示严格提升。然而，广义理论并不要求属性必须是数值型的。

2.3.3 多属性与偏序

一个系统通常同时具有多个属性。设

$$P = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \tag{2.12}$$

为一个多属性评估。此时，属性空间自然只有偏序，而不一定是全序。在这种情况下，宏观描述可能改善某些维度、使其他维度保持不变，或形成帕累托改进。这避免了将“涌现”简化为对单一指标的最大化。在应用中，可以选择一个主要属性、加权序、偏序，或一组相互不可约属性。不同选择可能产生不同的涌现判断。这并非框架的缺陷，而是体现了涌现的定义明确取决于研究目的。

2.4 广义涌现判据

2.4.1 广义涌现的定义

定义 2.1（广义涌现）。 固定一个系统 $\mathcal{S}$、一个微观描述 $\mathcal{C}_\mu$、一个可容许的粗粒化类，以及一个属性 P 及其改进序。当且仅当函子 $Q\colon \mathcal{C}_\mu \to \mathcal{C}_M$ 相对于 P 见证广义涌现时，

$$\mathrm{Emergence}_P(Q) \iff \mathrm{Adm}(Q) \wedge \mathrm{Nontrivial}(Q) \wedge \mathrm{Lift}_P(Q). \tag{2.13}$$

当 P 是从指定机制中读出的态射分量时，适用同一判据，只需将第 2.3.2 节中的机制层面比较替换为 $\mathrm{Lift}_P(Q)$。可容许性排除允许类别之外的变换，非平凡性排除纯粹重命名，而属性提升则提供了所检验的改进。因此，该定义涉及的是描述的某个属性，或其中某个指定态射的属性，而非描述之间关系的属性。

2.4.2 对粗粒化函子的依赖

广义涌现依赖于函子，并非无条件成立：固定 $\mathcal{C}_\mu$ 和 P 后，不同的 Q 可能提升也可能无法提升 P，因此涌现主张必须给出其见证 Q。“允许涌现”是指存在这样的 Q，而不是所有粗粒化都能奏效。这是表征意义上的观察者依赖性——不同的Q 以不同方式保留或合并差异——但一旦方案、属性和可容许性确定，判断就是确定的，而非主观的。

2.4.3 基本命题

命题 2.1（纯描述性粗粒化不会产生广义涌现）。 如果 $Q \in \mathrm{Eq}(\mathcal{S})$ 且属性 P 在 $\mathrm{Eq}(\mathcal{S})$上保持不变，那么 Q 不满足 $\mathrm{Emergence}_P(Q)$。

证明。由于 $Q \in$E q($\mathcal{S}$)，也就是说， Q是纯描述性的（同一描述的范畴同构或范畴等价同一描述的n)，非平凡性(Q)不成立。因此，合取式涌现判据不成立。 □

命题 2.2 (属性提升的复合)。 假设有两个连续的可容许粗粒化

$$\mathcal{C}_0 \xrightarrow{Q_1} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{Q_2} \mathcal{C}_2, \tag{2.14}$$

，并假设属性序 $\prec$具有传递性。若 $P(\mathcal{C}_0) \prec P(\mathcal{C}_1)$且 $P(\mathcal{C}_1) \prec P(\mathcal{C}_2)$，且复合粗粒化 $Q_2 \circ Q_1$ 是可容许且非平凡的，则

$$P(\mathcal{C}_0) \prec P(\mathcal{C}_2), \qquad \mathrm{Emergence}_P(Q_2 \circ Q_1) \tag{2.15}$$

成立。

证明。 由 $\prec$的传递性可得 $P(\mathcal{C}_0) \prec P(\mathcal{C}_2)$。结合复合粗粒化的可容许性和非平凡性，这些不等式满足定义 2.1 的三个条件。 □

这些条件表明，属性提升可以沿层级复合，但不能据此断定任意两个粗粒化复合后必然会产生涌现。复合结果是否仍然可容许且非平凡，必须另行验证。

2.5 选择最优粗粒化

涌现判断检验给定的 Q；它本身并不进行选择。要选择一种粗粒化，必须在优化之前固定微观描述 $\mathcal{C}_\mu$、允许的宏观描述以及可容许性约束。令 $\mathcal{Q}(\mathcal{C}_\mu)$ 表示由此得到的、以 $\mathcal{C}_\mu$ 为源的可容许且非平凡函子集合。对于每个候选项 Q，将其目标描述记为 $\mathcal{C}_M^Q$ 。约束可以固定宏观分辨率，或要求保留指定结构。这些约束可防止某种不可接受的坍缩仅仅因为提高了所选属性，就成为最优方案。

对于具有“大者更优”性质的实值描述属性 P，通过下式定义最优粗粒化的集合：

$$\mathcal{Q}_P^\star(\mathcal{C}_\mu) = \arg\max_{Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{C}_\mu)} P(\mathcal{C}_M^Q). \tag{2.16}$$

由于 $P(\mathcal{C}_\mu)$ 已固定，这也会最大化属性增益 $E_P(Q)$。如果较小的值更优，则改用最小化。对于具有偏序的向量属性，通常会得到一组帕累托最优候选项；需要一个标量目标或指定的偏好规则，才能在其中进行选择。

根据第 2.4.2 节的观察者依赖解释，最大化宏观属性 P 等同于在候选函子所表示的视角中寻求最优观察视角。这种最优性取决于所选属性、其改进序以及定义 $\mathcal{Q}(\mathcal{C}_\mu)$ 的约束。改变属性或约束可能会选出不同的视角；不存在不依赖属性或约束的系统最佳视角。因此，选择最优粗粒化可以在一定程度上降低涌现判断的观察者依赖性：它以共享的优化准则取代了任意选择视角的做法，同时保留了对所选属性和约束的依赖。

存在性与唯一性是彼此独立的要求。非空的有限候选集保证最大值能够取到；而在无限类中，上确界未必能够取到。即使最大值存在，也可能有多个函子能够取到该值。只有当 $\mathcal{Q}_P^\star(\mathcal{C}_\mu) = \{Q^\star\}$ 时，最大化才能在该候选集中唯一确定粗粒化。目标描述唯一并不足够：不同函子可能具有相同的目标，因此 P 的值也相同。

最后，只有当某个最优候选的宏观属性严格优于 $P(\mathcal{C}_\mu)$ 时，它才能作为广义涌现的证据。最优性是在允许的粗粒化之间进行比较；涌现则是与微观描述进行比较。前者并不意味着后者。对于因果涌现，最大化宏观有效信息体现了这一选择原则 [17]；其约束和局限性将在第 3.1 节中讨论。

2.6 动力系统中的广义涌现

广义涌现的基本定义并不要求动力学语义。然而，一旦系统描述选择用态射来表示变换、演化或随机过程，我们便得到一个重要的特例：动力系统中的广义涌现。

这里必须区分两种通常并不相同的操作：状态粗粒化将微观状态/分布映射为宏观状态/分布；动力学粗粒化将微观演化规则映射为宏观演化规则。二者的相容性，而非要求二者都由同一个函子给出，才是宏观动力学描述的基本要求。第 3.1 节将使用这种动力学表征讨论计算力学、因果涌现和近似动力学可逆性。

2.6.1 范畴内的动力学内生化

范畴涌现骨架并不要求系统具有动力学语义。但是，一旦所选语义范畴用态射表示转移/演化/随机过程，动力学便可作为该范畴中的态射实现内生化，而不必将其视为范畴之外的额外对象。

对于马尔可夫动力学，合适的语义范畴可以是马尔可夫范畴（或等价的 Kleisli 型概率范畴） [35]。在典型的马尔可夫范畴 **Mark** 中：

- 对象是状态空间，例如可测空间或有限集合 X；
- 态射是马尔可夫核 $K:\ X \rightsquigarrow Y$；
- 离散时间马尔可夫动力学是一个自态射 $K:\ X \rightsquigarrow X$；
- 概率分布 $p:\ I \rightsquigarrow X$ 是从单位对象 I 到 X的一个态射，也就是说，它是一个广义元素；
- 复合 $K \circ p:\ I \rightsquigarrow X$ 给出了应用动力学后分布的推前。

对于有限状态空间 X，马尔可夫核还会在概率单纯形上诱导仿射映射，$K^*:\ \Delta(X) \to \Delta(X)$。如果研究目标要求将分布空间视为对象，则可以转向凸范畴。这是一种替代性的语义实现，并非基本框架的必要选择。

2.6.2 状态粗粒化与动力学粗粒化

设微观状态空间和宏观状态空间分别为 X_μ 和 X_M，相应的单位对象为 I_μ 和 I_M。状态粗粒化是定义在广义元素上的映射：

$$\Phi_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mu}(I_\mu, X_\mu) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_M}(I_M, X_M), \qquad x \mapsto \Phi_X(x). \tag{2.17}$$

它规定了如何将每个微观状态或微观分布表示为宏观状态或宏观分布。

对于任意相关的微观变换 $f:\ X_\mu \to Y_\mu$，动力学粗粒化是一个独立的映射。

$$\Psi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mu}(X_\mu, Y_\mu) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_M}(X_M, Y_M), \qquad f \mapsto \Psi_{X,Y}(f). \tag{2.18}$$

映射 Φ 和 Ψ 在定义域、语义和建模来源上各不相同：Φ 通常源自观测、编码、聚合或分布推前；Ψ 通常源自模型降阶、参数拟合、动力学投影，或基于其他演化规则的构造。因此，在一般情形下，不应认为 Φ 和 Ψ 是同一态射类型上的某个单一映射的限制。

2.6.3 动力学闭合与严格函子性特例

联系状态与动力学粗粒化的基本闭合条件是：对于每个相关状态 $x : I_\mu \to X_\mu$ 以及每个动力学态射 $f : X_\mu \to Y_\mu$，我们要求

$$\Phi_Y(f \circ x) = \Psi_{X,Y}(f) \circ \Phi_X(x). \tag{2.19}$$

这表示“先在微观层级演化，再进行粗粒化”等同于“先对状态进行粗粒化，再应用宏观动力学”。这是 Φ 与 Ψ之间的相容条件，不能仅由 Φ 或 Ψ保证。

对于自态射 $K_\mu : X_\mu \rightsquigarrow X_\mu$，定义宏观动力学

$$K_M := \Psi_{X,X}(K_\mu). \tag{2.20}$$

于是公式 2.19 变为

$$\Phi_X(K_\mu \circ x) = K_M \circ \Phi_X(x). \tag{2.21}$$

在有限马尔可夫链中，如果状态粗粒化由确定性映射 $q\colon\ X_\mu \to X_M$ 诱导，那么分布粗粒化就是推前 q^*。K_M 的存在性条件变为 $K_M \circ q^* = q^* \circ K_\mu$，这是一种标准形式的可合并性（动力学因子分解） [36]。注意，$q^* \circ K_\mu$ 的定义域仍然是微观分布空间，因此不能直接将其视为宏观动力学。只有当因子分解条件成立时，才能在宏观空间上获得真正定义良好的宏观 K_M。

统一的函子性描述是一个更进一步且更强的严格特殊情形：如果存在一个保持单位元的（或与结构同构的）函子 $Q\colon\ \mathcal{C}_\mu \to \mathcal{C}_M$ 使得

$$X_M = Q_0(X_\mu), \quad Y_M = Q_0(Y_\mu), \tag{2.22}$$

and

$$\Phi_X(x) = Q_1(x), \qquad \Psi_{X,Y}(f) = Q_1(f), \tag{2.23}$$

那么，根据函子的复合保持性，方程 2.19 会自动成立 :

$$Q_1(f \circ x) = Q_1(f) \circ Q_1(x). \tag{2.24}$$

不应将这一严格特殊情形视为动力学粗粒化的一般定义；它仅描述了一种特殊情况，即状态和动力学可以由一个统一的保结构映射处理。

如果单步动力学满足严格闭合，并且 Ψ 保持由相关动力学态射、恒等态射及有限复合所形成的演化路径上的复合，那么这种相容性会传播到所有有限步演化。这表明动力学闭合涵盖了该演化范围。

2.6.4 近似闭合

在实际应用中，状态粗粒化 Φ 和宏观有效动力学 K_M^{eff} 通常来自有限观测、参数化模型或数据估计，因此不一定严格满足式 2.21。如果在宏观状态空间上给定距离/散度/代价函数 d，则将闭合缺陷定义为

$$\varepsilon(\Phi, K_M^{\text{eff}}; K_\mu) = \sup_{x \in A} d\Big(\Phi_X(K_\mu \circ x),\, K_M^{\text{eff}} \circ \Phi_X(x)\Big), \tag{2.25}$$

其中， A 是所考察的微观状态或分布类。若对于预先给定的容差 δ，满足 $\varepsilon \le \delta$，则称该状态—动力学粗粒化在容差 δ下近似闭合。若 K_M^{eff} 在允许的宏观模型类 D_M中取值，则还可以对该类取下确界／上确界，以评估该模型类中可实现的最佳闭合程度。

因此，近似闭合并非对函子公理的修改，也不需要以严格诱导的宏观动力学作为参照。它首先刻画 Φ 与有效动力学粗粒化之间的不匹配。严格函子特例提供了一个零缺陷基准模型。在此框架中，闭合缺陷作为动力学粗粒化的可容许性或模型精度约束，而不是能够独立证明涌现的属性。

3 示例

3.1 动力系统中的现有特例

本节将现有理论统一改写为第 2.6 节中动力学表征的特例。每个实例都应明确微观和宏观状态空间、状态粗粒化 Φ、微观动力学态射 K_μ，以及动力学粗粒化或有效宏观动力学 $\Psi(K_\mu)$（或 K_M^{eff}），并说明它们之间的严格或近似闭合关系。只有在存在额外的保单位函子时， Φ 和 Ψ 才能同时写成该函子的态射作用。这三种理论的粗粒化构造和评估属性各不相同。它们的数值比较评估的是带有指定机制的描述。若要得到定义 2.1 的严格实例，还必须提供一个在这些描述之间可容许且非平凡的函子 Q；仅有数值上的改进并不足够。由于此处使用的属性是从机制中读取的，严格实例还要求 Q将微观机制映射到宏观机制。表1总结了这种对应关系。

计算力学。 Crutchfield 及其同事通过将会产生相同未来整体条件分布的历史归为一组，重构平稳随机过程的预测结构；每个等价类都是一个因果状态 [14, 15]。因此，粗粒化将预测等价历史合并为因果状态，而不是任意合并不同的因果状态。状态映射 Φ 就是这个商映射，而它与连续符号更新的相容性会诱导出因果状态动力学，并由 ϵ-机表示。

相应动力学描述之间的粗粒化函子 Q必须实现这一商映射及其诱导的更新。对于具有指定预测状态 $R_{\mathcal{C}}$的描述 $\mathcal{C}$ ，我们可以选择预测效率作为属性[15]

$$P_{\mathrm{pred}}(\mathcal{C}) = \frac{I(R_{\mathcal{C}}; X^{+})}{H(R_{\mathcal{C}})}, \qquad 0 < H(R_{\mathcal{C}}) < \infty, \tag{3.1}$$

其中， X^{+} 表示未来， H 是香农熵， I 是互信息。对于因果状态表征 $R_{\mathcal{C}_M} = S$，预测充分性给出 $I(S; X^{+}) = \mathbf{E} = I(X^{-}; X^{+})$，即超额熵，其中 X^{-} 表示过去； $H(S) = C_{\mathrm{stat}}$ 是统计复杂度。因此，其预测效率为$\mathbf{E}/C_{\mathrm{stat}}$：每比特存储记忆所包含的预测信息。当冗余预测表征被商化为因果状态时，预测信息得以保留，而记忆熵不会增加；只有当该熵降低且保留的预测信息为正时，效率才会严格提高。当 Q 是可接受且非平凡的，这种提高便可作为广义涌现的证据；仅凭因果状态重构并不能保证效率严格提升。

3.1.1 因果涌现：因果动力学特例

Hoel、Albantakis 和 Tononi 的因果涌现理论使用有效信息量化不同层级的因果效力，并通过粗粒化 [17] 比较微观层和宏观层。当宏观层级的有效信息高于微观层级时，便认为该系统具有因果涌现 [17, 37]。

在第 2.6 节的框架中，微观和宏观状态空间是对象；具体状态和概率分布是来自单位对象的广义元素；微观机制是相应的动力学态射 K_{μ}。状态粗粒化 Φ作用于状态和概率分布：任何关于微观状态的分布都会被推前为关于宏观状态的分布。

理论实际需要的是由这种状态粗粒化所诱导的转移矩阵的粗粒化。宏观机制 K_M 通过汇总 K_{μ} 在宏观区块上的条目获得——例如采用区块平均——或者通过独立的动力学粗粒化 $\Psi(K_{\mu})$获得，后者根据经验模型拟合；当第 2.6 节的闭合关系成立时，两者一致。干预仅在属性的定义中出现：有效信息在原理论 [17], 中根据干预分布计算，而粗粒化本身则应用于普通状态分布。当闭合关系成立时，宏观机制能够忠实地表示所考虑状态类上的微观演化；函子性严格化是实现这种关系的充分但非必要方式。

有效信息提供了 P_{EI}，它是机制的性质，而非状态对象的性质[22]。它在状态—动力学粗粒化下的增加，属于应用层属性比较；只有在指定了两个描述之间一个可容许的、非平凡的函子 Q 之后，这种增加才在本文所述的意义上见证广义涌现。此时，比较的是 K_{μ} 及其函子像，因此需要满足 $Q(K_{\mu}) = K_M$ 。

粗粒化的选择也是这一理论的一部分。在原始理论中，宏观划分是通过最大化宏观动力学的有效信息来选定的 [20], ，而这一选择可能给闭合关系带来的缺陷并不属于优化目标；有人批评这种做法会让映射中的失真掩盖实际情况 [38]。后续研究通过在要求宏观有效信息最大化之外，进一步要求宏观状态能够以预先规定的准确度预测微观状态[39, 40]，修正了这一优化目标。该要求是缺陷条件 (2.25) 的一种变体：微观到宏观缺陷关注粗粒化后的动力学能否在宏观层面得到复现；宏观到微观准确度关注粗粒化是否能够被充分逆转，使宏观状态足以代表其所概括的微观状态；而可用的粗粒化需要两种缺陷都足够小。

3.1.2 动力学可逆性涌现：马尔可夫动力学特例

该实例保留了第 3.1.1 节的框架，仅替换了度量：以状态平均近似动力学可逆性取代有效信息。有限马尔可夫链很少是可逆的，因此 Zhang 等人并不询问转移映射是否可以被撤销，而是从转移概率矩阵 $T_{\mu} = U\Sigma V^{\top}$ 的奇异值谱中读取动力学，其中有序奇异值为 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_N \geq 0$[22, 41]。按照定义，该理论完全不需要粗粒化： α阶近似动力学可逆性为 $\Gamma_{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{\alpha}$，其在 r 个最大奇异方向上的状态平均形式为

$$P_{\mathrm{rev}} \equiv \gamma_{\alpha}(r) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{\alpha}, \tag{3.2}$$

对于阈值 $\epsilon \geq 0$ ，涌现度是通过舍弃低于 ϵ 的奇异值，并对保留的 $r_{\epsilon} = \max\{i : \sigma_i > \epsilon\}$ 个方向重新取平均而得到的改进量，

$$\Delta\Gamma_{\alpha}(\epsilon) = \gamma_{\alpha}(r_{\epsilon}) - \gamma_{\alpha}(N), \tag{3.3}$$

当该量为正时，即判定为涌现。这两个值均由同一个微观矩阵计算得出：其中不涉及宏观状态空间、宏观机制或粗粒化函子；作者指出，这种量化独立于所选的粗粒化方法 [22]。

谱截 断仍可视为一种近似粗粒化：保留 r_ϵ 主导 g
奇异方向 将机制压缩为

$$T_\mu \longmapsto \widetilde{T} = U_{r_\epsilon} \Sigma_{r_\epsilon} V_{r_\epsilon}^\top, \tag{3.4}$$

从而使粗粒化作用于机制而非状态，“宏观”对象是由主导奇异向量张成的子空间，而非一组宏观状态。这种解释是近似的，~恰恰是因为 T 是一个线性对象：其元素不一定非负，行和也不一定为一，因此它不是转移概率矩阵，也不是第 2.6 节意义上的马尔可夫核；此外，这种截断是针对单个机制、根据该机制自身的谱定义的，无法扩展为粗粒化函子。

该框架分别定位了这三种作用。属性 P_{rev} 由指定机制计算得出，这正是第 2.3.2 节所允许的情形：它是转移态射的性质，而非状态对象的性质。量 $\Delta\Gamma_\alpha(\epsilon)$ 属于第 2.5 节的逻辑：它衡量通过最优粗粒化将概率质量投影到主导奇异方向上所能实现的改进，但并未明确构造出这一策略， [22], 因此，谱所证明的是存在一种可行且非平凡的 Q ，并且其属性增益为正，而非展示具体的见证。第 [22] 节的构造性算法提供了明确的见证：将 T_μ 的各行投影到主导右奇异向量上，再将其聚类为微观状态的一个真正划分，并按此划分汇总平稳流，得到宏观转移概率矩阵。从这一步开始，第 2.6 节的动力学骨架可原样应用，其中 $Q(T_\mu) = T_M$；谱仅用于指导 Q 的选择，而非进行穷举式划分搜索。由于该构造近似最大化了宏观有效信息， [22],这一实例仍可与第 3.1.1 节的因果涌现实例相比较。

表1：第 2.6 节状态—动力学表示中的三种动力学理论。每一行给出状态粗粒化、宏观动力学的构造方式，以及所比较的属性。

理论实例	**第 2.6 节中的状态—动力学表示**	**提升后的属性**
计算力学	Φ 将预测等价历史分组成因果的状态；兼容的符号更新会诱导出 ϵ机器动力学。	预测效率 P_{pred}，等于超额熵除以统计复杂度，对于因果状态表示
因果涌现	Φ 对状态和状态分布进行粗粒化；由此诱导出的转移矩阵粗粒化给出宏观机制，据此计算有效信息。	有效信息/因果效应幂（P_{EI}）
动力学可逆性（奇异值分解）	Φ 推动状态分布；主导转移矩阵的奇异方向引导宏观机制的构建。	平均近似动力学可逆性（P_{rev}）

表格所表达的是结构对应，而非指标恒等。预测效率、有效信息和平均近似动力学可逆性所探讨的问题各不相同；这种对应关系并未确定它们的数值。

3.2 非动力学示例

除了基于动力学的广义涌现，我们还在下文给出两个非动力学示例。第一个示例比较闭合多边形的两种粗粒化结果：在一种情况下，将顶点分组求平均会同时降低两种对称性距离；而在另一种情况下，则会带来混合变化。第二个示例比较两种网络结构在基于社区的粗粒化下的表现：弱耦合模块化网络的凝聚性指标会增加，而社区呈环状排列的网络，其凝聚性指标则会降低。这些示例共同说明，属性提升取决于系统结构和所选的粗粒化方式。

3.2.1 多边形的对称性涌现

在本节中，平面多边形及其顶点序列和关联结构构成了对所研究系统的描述。我们对具有 N 个顶点的多边形应用 $\mathcal{C}_N$ ，并考虑两个描述层级：$\mathcal{C}_{81}$ 和 $\mathcal{C}_9$。粗粒化将每九个连续顶点合并为一个顶点，从而得到函子

$$\mathcal{C}_{81} \xrightarrow{Q_{81\to 9}} \mathcal{C}_9. \tag{3.5}$$

因此，本例比较了微观81边形与其宏观9边形。

我们使用连续对称性度量 [42] 来刻画多边形对称性，该度量根据每个节点到最近的 C_N重旋转对称配置和 σ重二面体对称配置的距离定义，分别记为 $D_R(\mathcal{C})$和

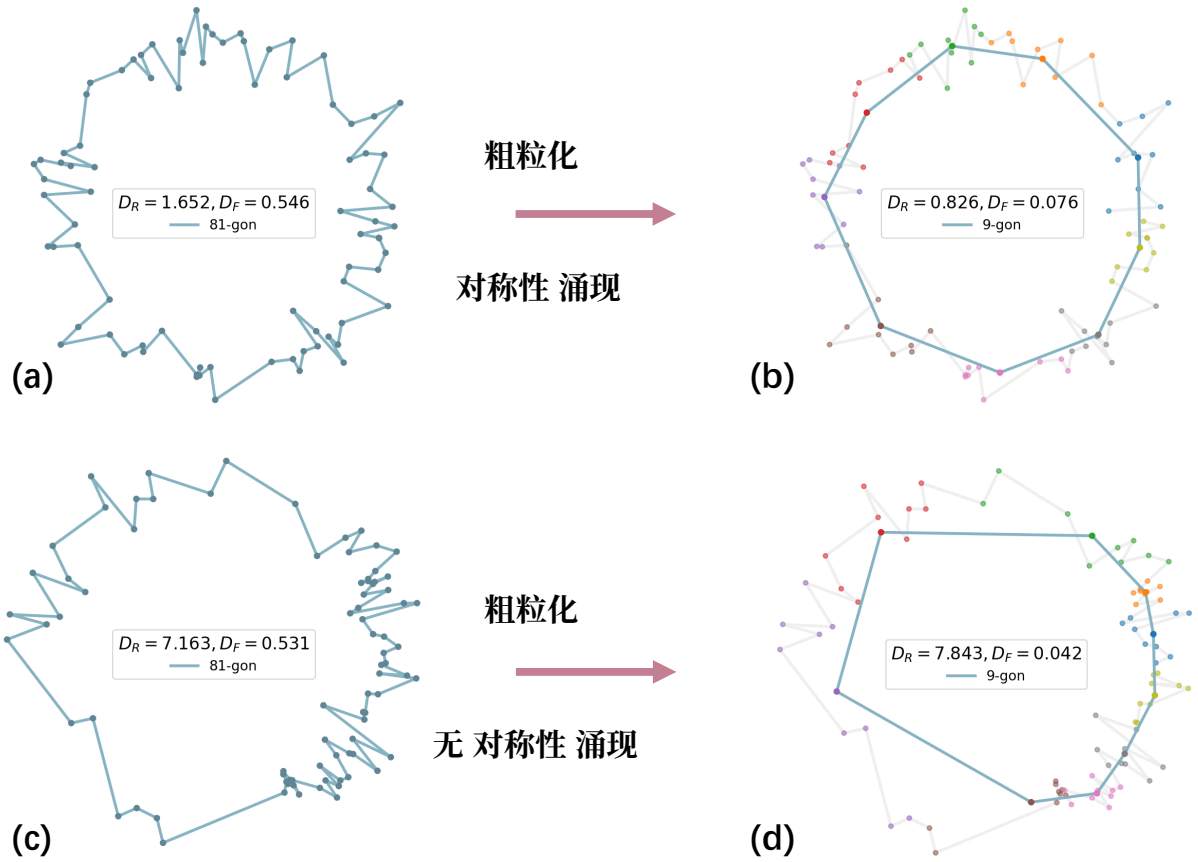

图 1：**粗粒化过程中，对称性距离可能减小，也可能朝相反方向变化**。我们采用粗粒化策略，将九个相邻且颜色相同的节点分为一组，并计算其平均位置，从而将微观81边形转化为宏观9边形。上排的（a）–（b）图展示了一个较为均匀的不完美81边形，以及对每组连续九个顶点取平均后得到的9边形。两种对称性距离均减小，因此该81边形系统在粗粒化过程中呈现出对称性涌现。下排的（c）–（d）图展示了一个均匀程度较低的不完美81边形及其粗粒化后的9边形；在此情况下，旋转对称性距离与二面体对称性距离朝相反方向变化，因此该81边形系统没有呈现对称性涌现。

$D_F(\mathcal{C})$，分别为。对于具有相应对称性的配置，两种距离均为零，因此数值越小表示对称性越强。因此，我们取

$$P = (-D_R, -D_F), \tag{3.6}$$

并将 $P(\mathcal{C}) \prec P(\mathcal{C}')$ 解读为“两个距离都严格更小”，即对称性严格提升。这沿用了第 2.3.2 节针对误差和畸变等属性所采用的约定，同时不改变提升的定义。具体而言，

$$\mathrm{Lift}_P(Q_{81\to 9}) \iff D_R(\mathcal{C}_9) < D_R(\mathcal{C}_{81}) \text{ and } D_F(\mathcal{C}_9) < D_F(\mathcal{C}_{81}). \tag{3.7}$$

对于图 1 (a)–(b) 中相对均匀的多边形，测得的距离列于表 2 中案例1下方的两列。两个距离均减小，因此 $P(\mathcal{C}_{81}) \prec P(\mathcal{C}_9)$，且粗粒化满足 $\mathrm{Lift}_P(Q_{81\to 9})$。相对于所选属性，此案例呈现出对称性涌现：在宏观层面，旋转对称性和二面体对称性都表现得更为显著。

	案例1（对称性涌现）		案例2（无对称性涌现）	
	$\mathcal{C}_{81}$	$\mathcal{C}_9$	$\mathcal{C}_{81}$	$\mathcal{C}_9$
D_R	1.652	0.826	7.163	7.843
D_F	0.546	0.076	0.531	0.042

表 2：两种案例中多边形的旋转对称性距离和二面体对称性距离。

图 1 (c)–(d) 所示的第二个多边形，其顶点分布不太均匀。其测得的距离列于表 2 中案例2下方的两列中。在此，旋转对称性距离增加，而二面体对称性距离减小。因此，$P(\mathcal{C}_{81}) \prec P(\mathcal{C}_9)$ 以及反向的逐分量改进均不成立，且粗粒化不满足 $\mathrm{Lift}_P(Q_{81\to 9})$。这一比较表明，对称性涌现并不能仅由粗粒化保证：其结果取决于微观构型的几何以及用于评估对称性的属性。

3.2.2 网络凝聚性涌现

将网络系统 [43–45] 理解为由节点、边及其连通结构组成的对象。我们使用三个结构指标来评估凝聚性：

- **全局效率** eff：衡量网络中信息传输的整体效率；较短的最短路径对应更高的全局效率 [43]。
- **边密度** ρ：边的数量与可能的最大边数之比。数值越大，网络越稠密 [46]。
- **聚类系数** CC：通过对各节点邻居之间的连接比例取平均值，衡量局部三角闭合程度。数值越大，局部聚类越强 [44]。

我们将多维属性定义为

$$P = (eff, \rho, CC), \tag{3.8}$$

并采用逐分量序，因此

$$P_1 \prec P_2 \Longleftrightarrow eff_1 < eff_2, \quad \rho_1 < \rho_2, \quad CC_1 < CC_2. \tag{3.9}$$

因此，相对于 P，提升要求三个指标均增加。

令研究网络为系统 $\mathcal{S}$，其中网络 $G(450)$（含 450 个节点）作为微观描述类别 $\mathcal{C}_\mu$，网络 $G(9)$（含 9 个节点）作为宏观社区级描述类别 $\mathcal{C}_M$。社区商函子 $Q : \mathcal{C}_\mu \to \mathcal{C}_M$ 将每个社区内的节点映射到一个宏观层级节点，并在商图中导出社区之间的连接。我们将这种基于社区的映射视为一种可容许粗粒化；由于它改变了描述的粒度，而非仅仅重新标记节点，因此也是非平凡的。

在第一个案例中，如图2 (a)–(b)所示，该网络包含九个密集连接的社区，社区之间的连接相对稀疏。因此，其模块化结构在微观层级上清晰可见，而商图则概括了这九个社区之间的连接。测量属性为 $P\big(G(450)\big) = (0.2914, 0.0224, 0.1659)$ $P(G(9)) = (0.8750, 0.7500, 0.6000)$。三个指标均有所提高，从而

$$P\big(G(450)\big) \prec P\big(G(9)\big). \tag{3.10}$$

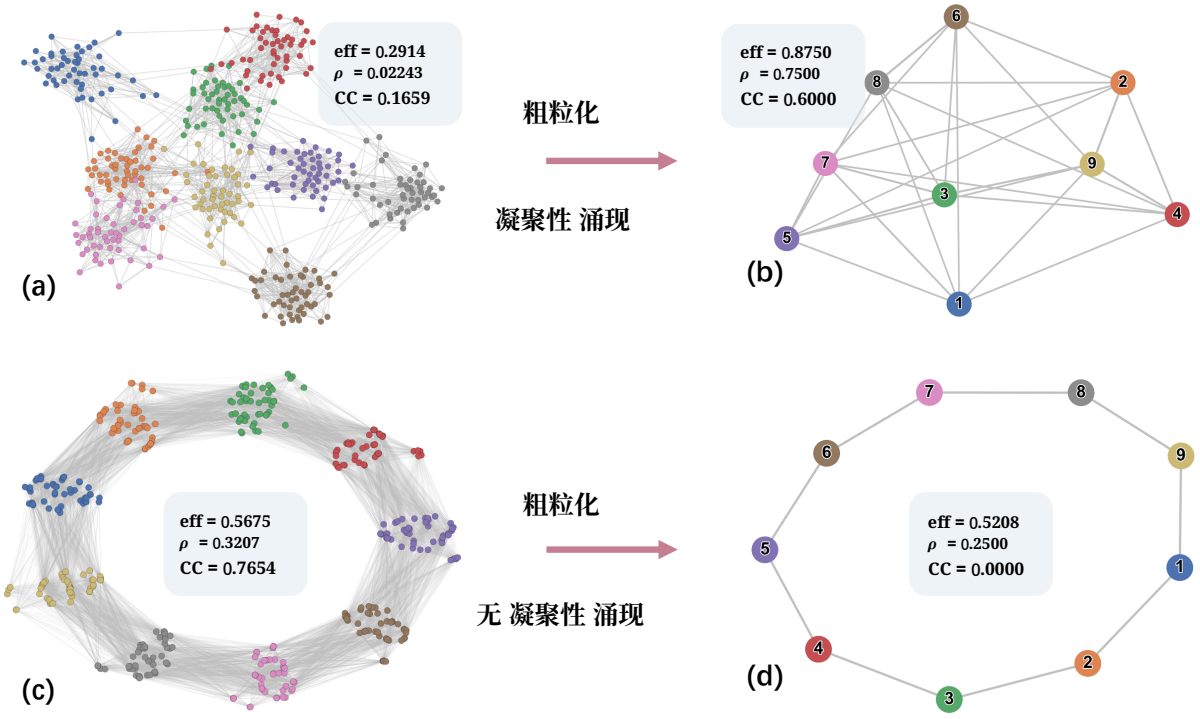

图2：**基于社区的粗粒化下的凝聚性指标**。粗粒化策略将微观网络 $G(450)$中颜色相同的各个社区合并为宏观节点，从而形成新的宏观网络 $G(9)$。上排（案例1，分图(a)–(b)）展示了一个弱耦合模块化网络及其9社区商图。下排（案例2，分图(c)–(d)）展示了一个由密集连接的社区构成、呈环状排列的网络及其9节点环形商图。在案例1中，全局效率、边密度和聚类在粗粒化后均有所提高，因此该系统表现出凝聚性涌现。在案例2中，三个指标均有所下降，因此该系统没有表现出凝聚性涌现。

因此，在此情况下，Lift$_P(Q)$成立，并且相对于选定指标，粗粒化呈现出凝聚性涌现。

在第二个案例中，如图2 (c)–(d)所示，九个社区内部连接紧密，并排列成环形，相邻社区沿环相互连接。不同于第一个案例，其商图保留了这种环形排列。测量属性为 $P\big(G(450)\big) = (0.5675, 0.3207, 0.7655)$ $P\big(G(9)\big) = (0.5208, 0.2500, 0.0000)$。每个指标在粗粒化后均下降；因此

$$P\big(G(9)\big) \prec P\big(G(450)\big), \tag{3.11}$$

并且Lift$_P(Q)$不成立。因此，这两个网络案例表明，凝聚性涌现并非自动发生：它在弱耦合模块化网络中得以观察到，但在环形组织网络中并未出现，后者的三个选定指标在商层级上均有所下降。

4 讨论

该框架将结构性问题——一种描述如何从另一种描述中获得——与评价性问题——某一指定属性是否得到改善——区分开来。因此，对其贡献的评估既应考察这种区分所实现的比较，也应考察它未予解决的科学选择与数学构造。

4.1 框架的优势

其主要优势在于提供了一种共同表述，而不将涌现等同于某一种特定机制或指标。计算力学中的预测效率、因果涌现中的有效信息，以及状态平均近似动力学可逆性，评估的是过程 [15, 17, 22] 的不同方面。它们的共同结构并不在于这些量彼此相等，而在于比较由指定粗粒化连接起来的不同描述中的某一属性。多边形和网络的例子表明，这种比较也可以在没有时间演化、概率或干预的情况下进行表述。它们相互对照的结果十分重要：该框架既适用于某一属性得到改善的情况，也适用于同类型的约简未能带来提升的情况。这些语义选择属于具体实例，而非基本定义，因此不必将指标之间的不一致误认为共同框架中的矛盾。

将可容许性、非平凡性与提升区分开来，可以明确涌现主张的依据。一个被允许的变换可能仅仅是重新标记，而一个非平凡变换也可能未能改善属性；反过来，数值上的增益并不能证明该变换保留了应用所要求的结构。合取判据区分了这些可能性，而不是将每一次约简都视为涌现，或将每一次增益都视为充分证据。更新后的示例具体展示了这种区别。对于多边形，同一个从 81 个顶点约简至 9 个顶点的顶点平均方案，在一种配置中同时降低了两个对称性距离，而在另一种配置中只改善了其中一个距离；后者不满足所选的联合改进序。对于网络，同一个从 450 个节点约简至 9 个社区的社群约简，在弱耦合模块化情形下提高了三个凝聚性指标，而在环组织情形下降低了这些指标。因此，即使约简至相同的分辨率，也未必会产生相同方向的属性变化，而非平凡性本身并不能确立提升。这也澄清了它与基于相互连接性和生成性的范畴论解释之间的关系 [23, 24]。观测是否保留部分的组合，以及宏观描述是否改善了选定属性，是两个不同的问题；通常，前一个问题的答案并不能决定后一个问题的答案，反之亦然。当前框架通过明确改进方向来补充此类解释，而不是取代它们的判据。

这种区分对于动力学模型尤其有用，因为指标的增加可能与不准确的宏观演化规则并存。第 2.6 节将状态映射 Φ、动力学映射 Ψ及其相容性区分开来，因此，闭合关注的是宏观动力学的有效性，而属性提升关注的是正在评估的性质。关于有效信息最大化的讨论说明了为何不应混淆这些检验 [38, 40]。将指定机制作为内部态射进行评估，也能明确指出比较的对象，而无需将属性赋值本身设为函子。这种做法既能容纳数值指标，又保留了微观机制与宏观机制之间的结构对应。

明确体现观察者依赖性，能够更准确地界定一个论断，而不是将其化约为个人偏好。不同的函子编码了对保留哪些差异的不同选择，而属性序则说明何谓改进。一旦这些选择确定下来，这项判断便是一种数学比较，其他研究者也可以复现。静态示例在同一种粗粒化方式下改变微观构型；它们所展示的是对系统结构的依赖性，本身并未展示对同一固定系统的不同观察者的依赖性。要展示后者，就需要针对同一微观描述和属性比较不同的可容许函子。第 2.5 节中的优化引入了一条通用的选择规则：在固定的容许类中，它考察哪种视角最能表达所选属性。这可以部分降低

对任意视角选择的依赖性，但仅限于给定的属性和约束；它并不会产生观察者无关视角。将最优性与涌现区分开来，还可以避免把最佳可用宏观描述宣称为涌现，即使它仍未优于微观描述。

函子性也提供了一种受控方式来讨论多个描述层级。恒等保持和复合保持使连续的变换在结构上具有可比性，而属性序的传递性则允许在复合仍然容许且非平凡时比较端点。这有助于分析层级描述，但并不意味着所有粗粒化链都会单调改进。可选的范畴 $\mathrm{Desc}(\mathcal{S})$ 可以组织这类备选方案和链，但单个涌现主张只需要相关描述和函子。将这些层级区分开来，可避免把描述的数学组织误当成系统的另一个物理组成部分。

4.2 框架的局限

该定义的广泛适用性需要付出相当大的代价，即依赖大量针对具体应用的输入。范畴论本身无法确定哪些描述代表同一系统、哪些差异可以舍弃，或哪种性质在科学上重要。如果缺乏对 P、其序以及容许类的独立论证，该判据就有沦为重述的风险：即按照偏好的度量，偏好的描述得分更高。因此，应在选择有利的粗粒化之前，先说明属性和约束的依据；如果科学解释取决于这些选择，也应考察相互竞争的选项。由此得出的判断并不能确立哲学意义上的强涌现、本体论新颖性或不可还原性 [10, 11]。

跨层级可比性是一项实质性要求，而不是使用相同符号 P 就自然得到的结果。各项评估必须针对同一属性，并采用相互兼容的单位、归一化方式和观测约定。新的网络比较使两个案例中的微观和宏观节点数保持相等，因此，两者的变化方向相反，不能仅用节点数减少来解释。尽管如此，收缩一个社区会消除其内部差异，并改变商层级上路径长度、边密度和三角闭合的含义。因此，这些结构统计量的增加并不能独立证明物理通信有所增强。同样，规模匹配的 81 对 9 多边形比较缩小了案例之间的分辨率不匹配，但参照对称类仍取决于顶点数，也要求距离归一化保持一致。这些匹配后的规模增强了比较的说服力，但不能取代合适的零模型、对加权约定的检查，或针对不同配置开展的稳健性测试。

另一项局限涉及范畴和函子本身的构造。将顶点平均或社群商称为粗粒化，并未明确规定其对每个相关态射的作用，也未证明其保持复合。要提出一个完整的范畴论主张，就需要明确给出一种表征，以便检验这些性质。说明性示例确立了属性比较，但没有提供所有相应描述范畴及态射作用的完整构造。同样，状态映射和拟合得到的宏观核并不会自动扩展为单个函子。第 2.6 节中的严格特例不能替代一般的建模情形，而近似闭合界本身也不是精确函子性的证明。构建具体实例，并阐明近似模型与精确范畴论见证之间的关系，仍是重要的待办工作。

非平凡性也取决于描述旨在保留的结构。排除范畴等价可以排除纯粹的描述性变化，但并非等价并不足以充分说明有意义的宏观组织。变换可能会破坏相关信息，却无法形成有用的描述；而某种压缩可能提升选定统计量，却违背模型的科学目的。必须通过有依据的保留要求或准确性约束来排除此类情况；抽象框架无法普遍提供这些约束。当额外的几何、概率或观测结构至关重要时，等价约定和非平凡性的定义必须将这些结构纳入考量。改进序也会产生影响：第二个多边形案例不符合联合判据，尽管一个对称分量有所改善。若只选择该分量，提升判断就会不同；而网络环案例则降低了全部三个选定指标。这些都是不符合所选联合判据的不同方式；但任何一种失败都不意味着不存在其他属性或可容许粗粒化能够证明涌现。

最后，对最优者进行形式化选择并不能消除计算或经验不确定性。即使是有限的划分搜索，其规模也可能过大而无法穷举评估，而不受限制的无限候选类未必能达到其上确界。多个函子可能共享一个最优目标，多个属性也可能产生彼此不可比的帕累托最优描述，而非唯一的最佳视角。尽管采用共同的优化规则，这些替代方案仍保留了观察者依赖性。对于从数据推断的模型，估计误差还可能改变表观的属性增益或闭合缺陷，而在众多候选者中进行最大化可能会偏向一个无法泛化的拟合结果。因此，对于经验性主张，需要不确定性估计、独立验证数据以及对约束的敏感性分析。该框架目前既没有提供通用的搜索算法，也没有

提供此类统计保证；需要依赖特定领域的构造和验证，才能将其形式化比较转化为可靠的科学结论。

5 结论

本文提出了一个用于广义涌现的范畴论框架：一个系统允许多种结构化描述，每种描述都由一个范畴表示；从微观到宏观的粗粒化是描述范畴之间的函子 Q；广义涌现则是沿着可容许、非平凡 Q的属性提升，其形式为 $\mathrm{Emergence}_P(Q) \iff \mathrm{Adm}(Q) \wedge \mathrm{Nontrivial}(Q) \wedge \mathrm{Lift}_P(Q)$，其中属性通过描述的任意部分（包括指定机制）进行评估。由于 Q 体现了一种观察视角，这一判断依赖于观察者；寻求最优粗粒化可以部分降低这种依赖性，但这仅相对于所选属性、其改进序以及界定容许类的约束而言。该框架不预设动力学或概率语义：它既适用于静态结构实例，也适用于动力学实例；在后者中，分布和马尔可夫核是态射，状态粗粒化与动力学粗粒化分别构造，并通过严格或近似闭合条件联系起来，而有效信息、近似动力学可逆性等属性则用于评估指定机制。范畴论所提供的并非取代具体度量的“超级指标”，而是一种能够清晰区分共享结构与具体差异的元理论语言。要将这种语言转化为可计算、可比较、可验证的科学理论，就需要构造具体的容许粗粒化类，并研究非平凡性与范畴等价之间的精确关系、属性最优粗粒化的存在性与唯一性，以及度量范畴、富化范畴或其他包含误差的结构中的近似粗粒化与近似闭合理论。

参考文献

[1] J. H. 霍兰德，《涌现：从混沌到秩序》. 牛津大学出版社 2000，.[2] P. Clayton 和 P. Davies 编，《涌现的再度兴起：从科学到宗教的涌现主义假说》。牛津：牛津大学出版社，2006年。[3] P. W. Anderson，“多即不同：对称性破缺与科学层级结构的本质”，《科学》，第177卷，第4047期，第393–396页，1972年。[4] C. W. Reynolds，“鸟群、兽群与鱼群：一种分布式行为模型”，载于《第14届计算机图形学与交互技术年度会议论文集》，第25–34页，1987年。[5] I. D. Couzin 和 J. Krause，“脊椎动物的自组织与集体行为”，《行为研究进展》，第32卷，第1–75页，2003年。[6] T. C. Schelling，《微观动机与宏观行为》。纽约：W. W. Norton，1978年。[7] S. Johnson，《涌现：蚂蚁、大脑、城市与软件相互关联的生命》。纽约：Scribner，2001年。[8] G. H. Lewes，《生命与心灵问题》，第2卷。波士顿：Osgood，1875年。[9] C. D. Broad，《心灵及其在自然中的位置》。伦敦：Routledge and Kegan Paul，1925年。[10] M. A. Bedau，“弱涌现”，《哲学视野》，第11卷，第375–399页，1997年。[11] D. J. Chalmers，“强涌现与弱涌现”，载于《涌现的再度兴起：从科学到宗教的涌现主义假说 》（P. Clayton 和 P. Davies 编），牛津：牛津大学出版社，2006年。[12] S. M. Carroll 和 A. Parola，“涌现可能意味着什么”，《arXiv预印本 arXiv:2410.15468》，2024年。[13] P. A. Corning，“‘涌现’的再度兴起：一个寻求理论的历史悠久的概念”，《复杂性》，第7卷，第6期，第18–30页，2002年。[14] J. P. Crutchfield 和 K. Young，“推断统计复杂度”，《物理评论快报》，第63卷，第2期，第105–108页，1989年。[15] J. P. Crutchfield，“涌现演算：计算、动力学与归纳”，《物理学 D：非线性现象》，第75卷，第1–3期，第11–54页，1994年。

[16] A. K. Seth，“通过非线性格兰杰因果关系测量涌现”，载于第十一届生命系统模拟与合成国际会议（ALIFE XI）论文集（马萨诸塞州剑桥），第545–552页，麻省理工学院出版社，2008年。[17] E. P. Hoel、L. Albantakis 和 G. Tononi，“量化因果涌现表明宏观胜过微观”，《美国国家科学院院刊》，第110卷，第49期，第19790–19795页，2013年。[18] E. P. Hoel，“当地图胜过疆域时”，《熵》，第19卷，第5期，第188页，2017年。[19] B. Klein 和 E. Hoel，“复杂网络中信息丰富的高层尺度的涌现”，《复杂性》，第2020卷，第1–12页，2020年。[20] K. Liu、B. Yuan 和 J. Zhang，“线性随机迭代系统因果涌现的精确理论”，《熵》，第26卷，第8期，2024年。[21] F. E. Rosas、P. A. M. Mediano、H. J. Jensen、A. K. Seth、A. B. Barrett、R. L. Carhart-Harris 和 D. Bor，“调和涌现：一种在多变量数据中识别因果涌现的信息论方法”，《PLOS计算生物学》，第16卷，e1008289页，2020年12月。[22] J. Zhang、R. Tao、K. H. Leong、M. Yang 和 B. Yuan，“动力学可逆性与一种基于奇异值分解的因果涌现新理论”，《npj复杂性》，第2卷，第3页，2025年1月。[23] E. M. Adam，《系统、生成性与交互效应》。麻省理工学院博士论文，2017年。[24]E. Adam 和 M. A. Dahleh，“生成性与交互效应：概述”，arXiv预印本 arXiv:1911.10406，2019年。[25] J. J. Li、S. Pardo-Guerra、K. Basu 和 G. A. Silva，“量化网络拓扑中涌现效应的范畴框架”，《神经计算》，第37卷，第8期，第1409–1438页，2025年。[26] J. Otsuka 和 H. Saigo，“论因果模型的等价性：一种范畴论方法”，载于《第一届因果学习与推理会议论文集》，《机器学习研究论文集》第177卷，第634–646页，2022年。[27] A. Geiger、D. Ibeling、A. Zur、M. Chaudhary、S. Chauhan、J. Huang、A. Arora、Z. Wu、N. Goodman、C. Potts 和 T. Icard，“因果抽象：机制可解释性的理论基础”，《机器学习研究杂志》，第26卷，第1–64页，2025年。[28] R. Massidda、A. Geiger、T. Icard 和 D. Bacciu，“软干预下的因果抽象”，载于《第二届因果学习与推理会议论文集》，《机器学习研究论文集》第213卷，第1–20页，2023年。[29]M. Englberger 和 D. S. Dhami，“因果抽象的范畴论统一”，arXiv预印本 arXiv:2510.05033，2025年。[30] R. Lorenz 和 S. Tull，“因果抽象与组合抽象”，arXiv预印本 arXiv:2602.16612，2026年。[31] G. G. La Guardia 和 P. J. Miranda，“论涌现的范畴论”，《Axiomathes》，第32卷，增刊3，第1059–1103页，2022年。[32] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，《数学研究生教材》第5卷。施普林格，第二版，1998年。[33] T. Leinster，《范畴论基础》，《剑桥高等数学研究》第143卷。剑桥大学出版社，2014年。[34] B. Fong 和 D. I. Spivak，《应用范畴论导论：组合性的七个草图》。剑桥大学出版社，2019年。[35] T. Fritz，“马尔可夫核、条件独立性与充分统计量定理的综合方法”，《数学进展》，第370卷，第107239页，2020年。[36] J. G. Kemeny 和 J. L. Snell，《有限马尔可夫链》。《大学本科数学丛书》，新泽西州普林斯顿：D. Van Nostrand，1960年。[37] B. Yuan、J. Zhang、A. Lyu、J. Wu、Z. Wang、M. Yang、K. Liu、M. Mou 和 P. Cui，“复杂系统中的涌现与因果性：因果涌现及相关定量研究综述”，《熵》，第26卷，第2期，第108页，2024年。

[38] F. Eberhardt 和 L. L. Lee, 《因果涌现：映射中的畸变何时会模糊疆域》, 《哲学》, 第 7 卷, 第 2 期, 第 30 页, 2022年。[39] J. Zhang 和 K. Liu, 《用于因果涌现的神经信息压缩器》, 《熵》, 第 25 卷, 第 1 期, 第 26 页, 2022年。[40] M. Yang、Z. Wang、K. Liu、Y. Rong、B. Yuan 和 J. Zhang, 《通过最大化有效信息在数据中发现涌现》, 《国家科学评论》, 第 12 卷, 第 1 期, 文章编号 nwae279, 2025年。[41] K. Liu、L. Pan、Z. Wang、M. Yang、B. Yuan 和 J. Zhang, 《面向高斯迭代系统的基于奇异值分解的因果涌现》, 《物理评论 *E*》, 第 112 卷, 第 5 期, 文章编号 054225, 2025年。[42] H. Zabrodsky、S. Peleg 和 D. Avnir, 《连续对称性度量》, 《美国化学会志》, 第 114 卷, 第 20 期, 第 7843–7851 页, 1992年。[43] V. Latora 和 M. Marchiori, 《小世界网络的高效行为》, 《物理评论快报》, 第 87 卷, 第 19 期, 文章编号 198701, 2001年。[44] A. Fronczak、P. Fronczak 和 J. A. Ho-lyst, 《巴拉巴西–阿尔伯特网络中聚类系数的平均场理论》, 《物理评论 *E*》, 第 68 卷, 第 4 期, 文章编号 046126, 2003年。[45] K. Liu、X. L¨u、F. Gao 和 J. Zhang, 《基于二元时间序列数据的期望最大化网络重构及其最适用的网络类型》, 《物理学 *D*：非线性现象》, 第 454 卷, 文章编号 133834, 2023年。[46] P. Ronhovde 和 Z. Nussinov, 《用于社区检测的局部无分辨率极限波茨模型》, 《物理评论 *E*：统计、非线性与软物质物理》, 第 81 卷, 第 4 期, 文章编号 046114, 2010年。