arXiv:2611.29308v1 [math.AG] 22 Nov 2026

Sun–Yang–Zuo 猜想的行列式证明

JINBANG YANG

摘要。我们给出一个初等证明，证明 [3,猜想 A.1] 中的行列式恒等式，该恒等式适用于任意奇特征域 p。证明通过用两个不同的首一多项式进行除法，计算一个线性映射的行列式。根据 [3, 命题 A.9], , 该恒等式为 Sun–Yang–Zuo 猜想提供了另一种证明。该猜想将四点标记射影直线的 Higgs–de Rham 自映射与其椭圆双覆盖上由乘以 p所诱导的映射等同起来。

1. 引言

设 k 是一个特征为 $p > 2$的域，并设 $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$。置 $p = 2m + 1$，令 t 为一个不定元，并定义 $g(x) = (x - 1)(x - \lambda)$。定义系数 γ_n如下

$$x^m g(x)^m = \sum_{n=m}^{3m} \gamma_n x^n.$$

对于 $1 \le n \le p - 2$，令

$$\delta_n(\lambda, t) = \frac{\lambda^p(1 - t) - (\lambda^p - t)\lambda^n}{n}.$$

设 $A = A(\lambda, t)$ 和 $B = B(\lambda, t)$ 为元素为

$$A_{rj} = \delta_{m+j-r}(\lambda, t) \qquad (0 \le r, j < m),$$

$$B_{rs} = \begin{cases} \gamma_{m+r-s}, & r \ge s, \\ t\gamma_{m+p+r-s}, & r < s \end{cases} \qquad (0 \le r, s \le m).$$

下述定理给出了 Sun、Yang 和 Zuo 猜想的行列式恒等式 [3, 猜想 A.1] 的多项式形式。

定理 1（行列式恒等式）。对于上述 k、λ、A 和 B，令

$$C = \left(\frac{1}{m + j - r}\right)_{0 \le r, j < m}, \qquad c_p = (-1)^m \det C.$$

于是 $c_p \in \mathbb{F}_p^\times$ 且

$$\det A(\lambda, t) = c_p\, \lambda^{m^2} (\lambda - 1)^{m^2} \det B(\lambda, t) \qquad in\ k[t]. \tag{1.1}$$

这两个矩阵来自射影直线上两个自映射的公式。现在假设 k 是完美的，并令 $X = \mathbb{P}^1_k$ 带有标记除子 $D = 0 + 1 + \lambda + \infty$。在 (X, D) 上，次数为一的稳定秩二分次对数 Higgs 丛的模空间，可通过非零 Higgs 分量 $\mathcal{O}(1) \to \mathcal{O} \otimes \Omega^1_X(\log D)$ [3, §4.1 和 §4.3]的唯一零点，与 X 相识。在此相识下，

扭曲的 Higgs–de Rham 流诱导出一个态射 $\varphi_{\lambda,p}\colon X \to X$ [3, §4.2 和附录 A.1]。若 a 表示 Higgs 零点的仿射坐标，则该公式中的分母包含 $A_p(\lambda,a) = A(\lambda,a^p)$ 的行列式，见 [3, 附录 A 和定理 A.5]。

对于第二个映射，令 E_λ 为椭圆曲线 $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$，其无穷远点为原点。x 坐标给出了二重覆盖 $\pi\colon E_\lambda \to X$，其分支点为 D。乘以 p 与 $P \mapsto -P$ 可交换，因此可通过 π 下降为 X 的自映射，即与 $[p]$ 相关的 ***Lattès*** 映射 。该映射公式的分母涉及 $B_{m+1}(\lambda,a) = B(\lambda,a^p)$ [3, 定理 A.8] 的行列式。

Sun、Yang 和 Zuo 猜想这两个自映射相同 [3, 猜想 4.8]。

将 (1.1) 在 $t = a^p$ 处特化，便证明了 [3, 猜想 A.1]。[3, 命题 A.9] 随即推出 [3, 猜想 4.8]。

推论 2 (Sun–Yang–Zuo 猜想)。设 k 是一个特征为$p > 2$的完美域，且设 $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$。那么下图交换。

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda & \xrightarrow{[p]} & E_\lambda \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow[\varphi_{\lambda,p}]{} & X \end{array}$$

注。推论成立并不能直接推出定理成立：该推论等价于断言两个分数相等，而定理 *1* 则将分母行列式确定到一个明确的非零因子。[3, 命题 A。9] 的证明在(λ^{-1}, a^{-1}) 处应用行列式恒等式，得到相应的分子行列式关系，然后将这两个关系代入两个自映射的公式。

历史说明。在 [2], 中，作者通过将 Higgs–de Rham 流提升到相应椭圆曲线上的模空间，给出了一种研究该猜想的方法。Lam 和 Litt 将较早的证明归功于 [2]，并利用中间卷积给出了自己的证明 [1, 定理 1.11 和 §5]。

我们的证明沿用 Sun、Yang 和 Zuo 将问题归约为一个行列式恒等式的思路。我们通过多项式除法证明 [3, ConjectureA.1] 中的行列式恒等式，并运用 [3, Proposition A.9]中的归约。

致谢。作者获得中央高校基本科研业务费专项资金、国家自然科学基金（项目编号：12671021 和 12331002）以及全球挑战与可持续发展科学基金（项目编号：W2441003）的资助。

2. 行列式恒等式的证明

本节沿用定理 1 中的记号。

2.1. **关键线性映射 Φ 及其行列式**。令 $R = k[t]$，$U = R[x]_{\le m}$，且 $W = R[x]_{<m^\circ}$ 记 R- 线性映射

$$\begin{aligned} \Phi\colon U \oplus W \oplus W &\longrightarrow R[x]_{\le 3m}, \\ (\varphi,\psi,\tau) &\longmapsto g^m\varphi - x^{m+1}\psi - (x^p - t)\tau. \end{aligned} \tag{2.1}$$

两个模的秩均为 $3m+1$。在源空间上，我们使用有序基

$$\mathcal{B}_s = \Big((x^i,0,0)_{i=0}^{m},\ (0,x^i,0)_{i=0}^{m-1},\ (0,0,x^i)_{i=0}^{m-1}\Big).$$

在目标空间上，分别除以 x^p-t 和 g^m，得到以下有序基

$$\mathcal{B}_t = \big(1,x,\dots,x^{2m},\ x^p-t,\dots,x^{m-1}(x^p-t)\big),$$
$$\mathcal{B}'_t = \big(g^m,xg^m,\dots,x^mg^m,\ 1,x,\dots,x^{2m-1}\big).$$

设 M_1 和 M_2 分别是 Φ 在源基 $\mathcal{B}_s$ 以及目标基 $\mathcal{B}_t$ 和 $\mathcal{B}'_t$ 下的矩阵。即，

$$\Phi(\mathcal{B}_s) = \mathcal{B}_tM_1 = \mathcal{B}'_tM_2,$$

其中 $\Phi(\mathcal{B}_s)$ 是源基向量像组成的行。设 T 是由 $\mathcal{B}'_t = \mathcal{B}_tT$ 定义的坐标变换矩阵。那么

$$M_1 = TM_2. \tag{2.2}$$

引理 3. 矩阵 T 和 M_1 满足

$$\text{(i)}\quad \det T = 1, \qquad \text{(ii)}\quad \det M_1 = \det B.$$

证明。（*i*）基变换。设 $\mathcal{B}_t^{st}=(1,\ x,\ \dots\dots,\ x^{3m})$ 为标准单项式基。按次数递增的顺序重新排列 $\mathcal{B}'_t$，得到

$$\mathcal{B}_t'^{+} = \big(1,x,\dots,x^{2m-1},\ g^m,xg^m,\dots,x^mg^m\big).$$

定义 T_1、T_2和 T_3 如下

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t^{st}T_1, \qquad \mathcal{B}_t'^{+} = \mathcal{B}_t^{st}T_2, \qquad \mathcal{B}'_t = \mathcal{B}_t'^{+}T_3.$$

$\mathcal{B}_t$和 $\mathcal{B}_t'^{+}$中的向量是次数依次为 $0,\ \dots\dots,\ 3m$的首一多项式。因此，它们的坐标矩阵 T_1 和 T_2 是对角元素均为 1 的上三角矩阵。置换矩阵 T_3交换长度为 $2m$和 $m+1$的块，因此

$$\det T_3 = (-1)^{2m(m+1)} = 1.$$

比较 $\mathcal{B}'_t = \mathcal{B}_t'^{+}T_3 = \mathcal{B}_t^{st}T_2T_3$ 与 $\mathcal{B}'_t = \mathcal{B}_tT = \mathcal{B}_t^{st}T_1T$ 可得 $T_2T_3 = T_1T$。因此，$T = T_1^{-1}T_2T_3$ 的行列式为 1。

（*ii*）模……约化 x^p-t。用 x^p-t除 $g^m\varphi$。商式的次数至多为 $3m-p=m-1$，余式的次数至多为 $p-1=2m$。将余式拆分为次数至多为 m 的项和次数较高的项，得到

$$g^m\varphi = \varphi_0 + x^{m+1}\psi_0 + (x^p-t)\tau_0, \qquad \varphi_0\in U,\quad \psi_0,\tau_0\in W.$$

由此可得

$$\Phi(\varphi,\psi,\tau) = \varphi_0 + x^{m+1}(\psi_0-\psi) + (x^p-t)(\tau_0-\tau).$$

$\mathcal{B}_t$坐标的三个块分别是 φ_0、$\psi_0-\psi$和$\tau_0-\tau$的系数向量。

要找出 $\varphi\mapsto\varphi_0$的矩阵，取 $\varphi=x^s$，其中 $0\le s\le m$。根据γ_n 的定义，得到

$$g^mx^s = \sum_{i=0}^{2m}\gamma_{m+i}x^{i+s}.$$

由于 $i+s\le 3m<2p$，只有次数为 r 和 $p+r$ 的项才能对余式中 x^r 的系数作出贡献。对于 $0\le r,\ s\le m$，有两种情况。

• 若 $r \geq s$，则 $0 \leq r-s \leq m$ 和 $p+r-s > 2m$。求和中只出现 $i = r-s$，所得系数为 γ_{m+r-s}。
• 若 $r < s$，则 $r-s < 0$ 和 $m+1 \leq p+r-s \leq 2m$。只有 $i = p+r-s$出现。由于 $x^{p+r} \equiv tx^r$ （模 $x^p - t$），得到系数 $t\gamma_{m+p+r-s}$。

这些是 φ_0的系数，因为 $r \leq m$，且它们与元素B_{rs}一致。因此， $\varphi \mapsto \varphi_0$ 在 U 的有序单项式基下的矩阵为 B，并且

$$M_1 = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ * & -I_m & 0 \\ * & 0 & -I_m \end{pmatrix}.$$

取行列式可得

$$\det M_1 = \det B\,(-1)^{2m} = \det B. \tag{2.3}$$

□

2.2. 模.....约化 g^m。 在基 $\mathcal{B}'_t$下，最后 $2m$个坐标记录模 g^m的余式。对于首一多项式 h，用 $\mathsf{rem}_h(f)$表示 f 除以 h所得的余式。定义

$$\begin{aligned} \Psi\colon W \oplus W &\longrightarrow R[x]_{<2m}, \\ (\psi, \tau) &\longmapsto \mathrm{rem}_{g^m}\big(x^{m+1}\psi + (x^p - t)\tau\big). \end{aligned}$$

对于 Ψ 之间的映射 F 以及下面的映射，记作

$$[F]$$

对于其在按次数递增排列的单项式基下的矩阵，直和因子按所示顺序排列。

引理 4。 M_2 的右下 $2m \times 2m$ 块为 $-[\Psi]$，并且

$$\det M_2 = \det[\Psi].$$

证明。 对于 $0 \leq i \leq m$，像 $\Phi(x^i,\ 0,\ 0) = x^i g^m$ 是 $\mathcal{B}'_t$第一块中的对应基向量。因此， M_2 的前 $m+1$ 列给出这些块 I_{m+1} 和 0。

对于 M_2其余的列，我们有

$$\mathrm{rem}_{g^m}\big(\Phi(0,\psi,\tau)\big) = -\,\mathrm{rem}_{g^m}\big(x^{m+1}\psi + (x^p - t)\tau\big) = -\Psi(\psi,\tau).$$

这些列对应的源向量按 $[\Psi]$的源基排列。因此， M_2 的右下块为 $-[\Psi]$，并且

$$M_2 = \begin{pmatrix} I_{m+1} & * \\ 0 & -[\Psi] \end{pmatrix}.$$

由于 $[\Psi]$ 的大小为 $2m \times 2m$，我们得到

$$\det M_2 = \det(-[\Psi]) = (-1)^{2m} \det[\Psi] = \det[\Psi]. \tag{2.4}$$

□

2.3. 局部余式。 分解 $g^m = (x-1)^m(x-\lambda)^m$ 使我们可以通过 Ψ 在 1 和 λ 处的余式读出其输出。对于 $z \in \{1, \lambda\}$，令

$$\rho_z \colon R[x] \to W, \qquad f \mapsto \operatorname{rem}_{(x-z)^m}(f),$$

$$\Gamma \colon R[x]_{<2m} \to W \oplus W, \qquad f \mapsto \big(\rho_1(f), \rho_\lambda(f)\big).$$

and

$$\Lambda_z \colon W \to W, \qquad \Lambda_z(f) = \rho_z(x^m f).$$

我们得到复合映射

$$W \oplus W \xrightarrow{\Psi} R[x]_{<2m} \xrightarrow{\Gamma} W \oplus W \xrightarrow{\Lambda_1 \oplus \Lambda_\lambda} W \oplus W,$$

其矩阵为

$$M_2' = \begin{pmatrix} [\Lambda_1] & \\ & [\Lambda_\lambda] \end{pmatrix} \cdot [\Gamma] \cdot [\Psi]. \tag{2.5}$$

我们还设

$$M_2'' = (\lambda^p - t)[\Lambda_\lambda] - \lambda^p(1-t)[\Lambda_1] \tag{2.6}$$

引理 5。 有

(1) $\det[\Gamma] = (\lambda-1)^{m^2}$, $\det[\Lambda_z] = z^{m^2}$ *for* $z \in \{1, \lambda\})$, *and*
(2) $\det M_2'' = \det M_2' = \lambda^{m^2}(\lambda-1)^{m^2} \det[\Psi]$.

证明。 多项式 $(x-1)^m$ 和 $(x-\lambda)^m$ 在 $k[x]$ 中互素，因此它们在 $R[x]$ 中生成单位理想。中国剩余定理给出同构

$$R[x]/(g^m) \longrightarrow R[x]/\big((x-1)^m\big) \oplus R[x]/\big((x-\lambda)^m\big).$$

用唯一余式表示每个类，将这一同构与 Γ 识别。为计算 $\det[\Gamma]$，暂时使用有序源基

$$\big((x-1)^j\big)_{j=0}^{m-1}, \qquad \big((x-1)^m(x-\lambda)^j\big)_{j=0}^{m-1},$$

以及目标分量 z 中的有序基 $1,\ x-z,\ \ldots\ldots,\ (x-z)^{m-1}$。从单项式基进行的每次基变换的行列式均为 1，因为新多项式是首一的，并且在相应空间中具有连续的次数。

在这些基下，Γ 的第一个分量给出块行 $(I_m,\ 0)$。对于右下块，令 $y = x - \lambda$。将 $(x-1)^m(x-\lambda)^j$ 对 $(x-\lambda)^m$ 取模所得的余式为

$$\sum_{a=0}^{m-1-j} \binom{m}{a} (\lambda-1)^{m-a} y^{a+j},$$

将 $(\lambda - 1 + y)^m y^j$ 展开，并舍去次数至少为 m 的 y 中的项即可得到。y^j 的系数为 $(\lambda-1)^m$，而所有低次项的系数均为零。因此，右下块是下三角矩阵，其对角元素为 $(\lambda-1)^m$。取行列式可得

$$\det[\Gamma] = \big((\lambda-1)^m\big)^m = (\lambda-1)^{m^2}.$$

对于 Λ_z，使用 W 的基 $1,\ y,\ \ldots\ldots,\ y^{m-1}$，其中 $y = x - z$。展开 $(z+y)^m y^j$ 并舍去 y 中次数至少为 m 的项，得到

$$\Lambda_z(y^j) = \sum_{a=0}^{m-1-j} \binom{m}{a} z^{m-a} y^{a+j}.$$

所得矩阵是下三角矩阵，对角元素为 z^m。在源空间和目标空间上使用相同的临时基可保持行列式不变，因此

$$\det[\Lambda_z] = (z^m)^m = z^{m^2}.$$

在单项式基中，以 z 为索引的 $(\Lambda_1 \oplus \Lambda_\lambda) \circ \Gamma \circ \Psi$ 分量将 $(\psi,\ \tau)$ 映射为

$$\Lambda_z\big(\rho_z(\Psi(\psi,\tau))\big) = \rho_z\big(x^m \Psi(\psi,\tau)\big).$$

根据定义，$\Psi(\psi,\ \tau)$ 与 $x^{m+1}\psi + (x^p - t)\tau$ 模 g^m 同余，因此也模 $(x-z)^m$ 同余。由于在特征 p 下有 $x^p - z^p = (x-z)^p$，故 $x^p \equiv z^p$（模 $(x-z)^m$）。利用 $p = 2m+1$ 和 $\psi \in W$，我们得到

$$\begin{aligned}\rho_z\big(x^m \Psi(\psi,\tau)\big) &= \rho_z\big(x^p\psi + x^m(x^p - t)\tau\big)\\ &= z^p\psi + (z^p - t)\rho_z(x^m\tau)\\ &= z^p\psi + (z^p - t)\Lambda_z(\tau).\end{aligned}$$

依次取 $z = 1$ 和 $z = \lambda$，得到

$$M_2' = \begin{pmatrix} I_m & (1-t)[\Lambda_1] \\ \lambda^p I_m & (\lambda^p - t)[\Lambda_\lambda] \end{pmatrix}.$$

从第二个块行中减去 λ^p 倍的第一个块行不会改变行列式，并得到

$$\begin{pmatrix} I_m & (1-t)[\Lambda_1] \\ 0 & M_2'' \end{pmatrix},$$

其中 M_2'' 由 (2.6) 给出。因此 $\det\ M_2' = \det\ M_2''$。乘积公式给出 (2.5)

$$\begin{aligned}\det M_2' &= \det[\Lambda_1]\ \det[\Lambda_\lambda]\ \det[\Gamma]\ \det[\Psi]\\ &= \lambda^{m^2}(\lambda-1)^{m^2}\det[\Psi].\end{aligned}$$

□

2.4. 与 A的比较。为了比较 M_2'' 与 A，我们将 $[\Lambda_z]$各元素中的行因子和列因子分离。令

$$D_L = \mathrm{diag}(d_0, \dots, d_{m-1}), \qquad D_R = \mathrm{diag}(e_0, \dots, e_{m-1}),$$

其中

$$d_r = \frac{(-1)^{m-1-r}}{r!(m-1-r)!}, \qquad e_j = \frac{(m+j)!}{j!} \qquad (0 \le r, j < m).$$

所有阶乘参数都小于 p，因此 D_L 和 D_R 均可逆。

引理 6。设 C 和 c_p 如定理 *1* 中所示，则有

$$M_2'' = -D_L A D_R, \qquad [\Lambda_1] = D_L C D_R.$$

因此，$c_p \in \mathbb{F}_p^\times$和 行列式 $A = c_p$ 行列式 M_2''。

证明。对于 $0 \le r,\ j < m$，$r,\ j$ 项是 $[\Lambda_z]$ 中 x^r 的系数，该系数来自 $\rho_z(x^{m+j})$。展开 $x^{m+j} = (z + (x-z))^{m+j}$ 并舍去能被 $(x-z)^m$ 整除的项，得到

$$\rho_z(x^{m+j}) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m+j}{\ell} z^{m+j-\ell}(x-z)^\ell.$$

令 $n = m + j - r$ 和 $b = m - 1 - r$。提取 x^r 的系数，得到

$$\begin{aligned}[\Lambda_z]_{rj} &= \sum_{\ell=r}^{m-1} \binom{m+j}{\ell}\binom{\ell}{r} z^{m+j-\ell}(-z)^{\ell-r} \\ &= z^n \binom{m+j}{r} \sum_{q=0}^{b} (-1)^q \binom{n}{q}.\end{aligned}$$

在第二行中，我们令 $q = \ell - r$ 并使用了

$$\binom{m+j}{\ell}\binom{\ell}{r} = \binom{m+j}{r}\binom{m+j-r}{\ell-r}.$$

帕斯卡恒等式给出

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{b} (-1)^q \binom{n}{q} &= \sum_{q=0}^{b} (-1)^q \binom{n-1}{q} - \sum_{q=0}^{b-1} (-1)^q \binom{n-1}{q} \\ &= (-1)^b \binom{n-1}{b},\end{aligned}$$

其中当 $b = 0$时第二个和为空。由于 $n - 1 - b = j$，我们有

$$\binom{m+j}{r}\binom{n-1}{b} = \frac{(m+j)!}{r!\,n!}\frac{(n-1)!}{b!\,j!} = \frac{1}{r!\,b!}\frac{1}{n}\frac{(m+j)!}{j!}.$$

所有阶乘参数都小于 p，且 $1 \le n \le p-2$。代入 d_r 和 e_j得

$$[\Lambda_z]_{rj} = d_r \frac{z^n}{n} e_j, \qquad n = m + j - r.$$

由 (2.6)，这个元素公式给出

$$\begin{aligned}(M_2'')_{rj} &= (\lambda^p - t) d_r \frac{\lambda^n}{n} e_j - \lambda^p (1-t) d_r \frac{1}{n} e_j \\ &= -d_r \frac{\lambda^p(1-t) - (\lambda^p - t)\lambda^n}{n} e_j \\ &= -d_r A_{rj} e_j.\end{aligned}$$

因此 $M_2'' = -D_L A D_R$。在同一元素公式中取 $z = 1$，得 $[\Lambda_1]_{rj} = d_r C_{rj} e_j$，故 $[\Lambda_1] = D_L C D_R$。

由引理 5，$\det[\Lambda_1] = 1$。对第二个分解取行列式，得

$$1 = \det D_L \, \det C \, \det D_R, \qquad \det C = (\det D_L \, \det D_R)^{-1}.$$

特别地，$\det C \neq 0$。由于 C 的元素属于 $\mathbb{F}_p$，我们有 $c_p = (-1)^m \det C \in \mathbb{F}_p^\times$。对第一个分解取行列式，得

$$\det M_2'' = (-1)^m \det D_L \, \det A \, \det D_R.$$

两边乘以 $c_p = (-1)^m \det C$，并代入 $\det C = (\det D_L \det D_R)^{-1}$，得到 $\det A = c_p \det M_2''$。□

定理 *1* 的证明。由 (2.2) 和引理 3，$\det M_2 = \det M_1 = \det B$，因为 $\det T = 1$。引理 4、5 和 6 现在给出

$$\begin{aligned}\det A &= c_p \det M_2'' \\ &= c_p\, \lambda^{m^2} (\lambda - 1)^{m^2} \det[\Psi] \\ &= c_p\, \lambda^{m^2} (\lambda - 1)^{m^2} \det M_2 \\ &= c_p\, \lambda^{m^2} (\lambda - 1)^{m^2} \det B.\end{aligned}$$

引理 6 也给出 $c_p \in \mathbb{F}_p^{\times}$。 □

参考文献

[1] Y. H. J. Lam 和 D. Litt，射影直线去掉四个点上的几何局部系统，Compos. Math.**161** (2025),536–554. doi:10.1112/S0010437X24007620. [2] X. Lin、M. Sheng 和 J. Wang，去掉 $\mathbb{P}^1$ 上四个点处 *Kodaira–Spencer* 零点的挠性，arXiv:2212.02038v3, 2023。[3] R. Sun、J. Yang 和 K. Zuo，*étale* 基本群的射影晶体表示与扭曲周期 *Higgs–de Rham* 流，J. Eur. Math. Soc. **24**(2022), 1991–2076. doi:10.4171/JEMS/1116.