arXiv:2611.29323v1 [math.MG] 22 Nov 2026

尖锐 中心切割约翰椭球的体积收缩 d

周龙飞*

摘要

对于一个正维数凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，设 $w(K)$ 为其最大体积内接椭球的体积。对于一个边界经过该椭球中心的闭半空间 H，我们证明

$$w(K \cap H) \le R_n w(K), \qquad R_1 = \frac{1}{2}, \qquad R_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \quad (n \ge 2),$$

在每个固定维数下，等号均可取到。这改进了作者此前关于 Khachiyan 椭球猜想的合作研究所得出的最优维数无关界。我们刻画了完整的等号族，包括非单纯形极值体，并建立了精确的体积亏损恒等式，由此得到新椭球及其在 John 坐标下的加权接触几何的维数无关稳定性。证明将问题归结为有限个约翰接触点，并通过变换接触方向和共同极分解旋转，构造出显式的锥证书。其行列式由一个非负的接触缺陷控制。尖锐收缩定理、等号分类、稳定性估计及相关结果均已使用 mathlib 在 Lean 4 中完成形式化验证。

关键词： 最大体积内接椭球；中心切割；约翰分解；锥证书；行列式不等式；等号与稳定性。

Math学科分类（2020）： 主要分类 52A20；次要分类 52A40，90C25。

1 引言

凸体是 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内部的紧凸子集。设 $J(K)$ 为其唯一的最大体积内接椭球， $c(K)$ 为其中心，并令

$$w(K) = \operatorname{vol} J(K) = \max\{\operatorname{vol} E : E \subseteq K,\ E \text{ is an ellipsoid}\}, \tag{1.1}$$

其中 vol 表示勒贝格体积。其存在性、唯一性和接触刻画都是经典结果 [8, 10]。我们研究在边界包含 $c(K)$ 的半空间切割下， w 的变化。

重新计算的椭球的体积提供了切面之后进展的几何度量。确定其锐利的下降幅度，也引出了一个结构性问题：哪些凸体能达到这个界限？而微小的亏损又揭示了它们的椭球和支撑接触点的哪些特征？我们通过一个显式证书及其行列式估计来回答这些问题。

*longfei.gabriel.zhou@gmail.com

1.1 主要结果

这些结果沿着两条相互关联的脉络展开。

尖锐收缩。令 C_n 为凸体及经过其 John 中心的半空间上 $w(K\cap H)/w(K)$ 的上确界。我们证明

$$C_n = R_n, \qquad R_1 = \frac{1}{2}, \qquad R_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \quad (n \geq 2), \tag{1.2}$$

该上确界在每个维数下都能取到。若将上确界的范围限制为有限 John 接触多胞体，也会得到相同的精确常数：第2.2.1节中的约化在扩大切割区域的同时保留原椭球体积。证明利用所得有限数据构造显式的锥证书，并对其行列式进行界定。一个简单的极值构型确定了候选椭球及证书参数。

定理 1（尖锐中心切割收缩）。设 $K \subset \mathbb{R}^n$， $n \geq 1$ 为凸体，且 H 为一个闭半空间，其边界经过 c（K）。则

$$w(K \cap H) \leq R_n w(K), \tag{1.3}$$

其中 R_n 由 （1.2） 给出。对于每个固定维数，都存在使等号成立的凸体和中心切割。

等号与稳定性。与 R_n 的对数差距由几何行列式亏损、锥互补项和正定矩阵散度三部分组成。它们的零点集给出了所有等号情形，包括非单纯形极值体。对这些量的定量控制，为新椭球的形状和中心以及加权接触几何提供了与维数无关的界。

对于以下等号与稳定性陈述，取 John坐标 $J(K) = B_2^n$，假设$n \geq 2$，并记 $H_v = \{x : \ v^T x \leq 0\}$，其中 $\|v\| = 1$。这里的 B_2^n是欧几里得单位球。令 $b = 1/n$和 $P = I - vv^T$。极值椭球和接触集为

$$c_* = -\frac{1}{2}v, \qquad A_* = \frac{1}{2}vv^T + \frac{1}{\sqrt{1-b}}P, \qquad \mathcal{E}_* = c_* + A_* B_2^n,$$
$$\mathcal{Z}_b = \{-v\} \cup \{u : \|u\| = 1,\ u^T v = b\}.$$

定理 15 表明，当且仅当 $\mathcal{E}_* \subseteq K$ 和 K 具有一个支撑 John 标架，且其接触点位于 $\mathcal{Z}_b$中时，等号成立。John 框架是第 2.2 节中定义的正权接触分解。在等号情形下， $J(K \cap H_v) = \mathcal{E}_*$，并且每个支撑 K 的正权 John 框架都具有这种极点与纬圈几何。包含条件为其余部分的形状留下了自由度，因此极值体不局限于正则单形。

对于任意可行切割椭球 $\mathcal{E}(c, \ A) = c + AB_2^n \subseteq K \cap H_v$，其中 A 为对称正定，设其亏损满足

$$0 \leq \epsilon := \log \frac{R_n}{\det A} \leq 10^{-6}.$$

定理18 给出了明确且与维数无关的估计

$$\|A - A_*\|_F \leq 30\sqrt{\epsilon}, \qquad \|c - c_*\| \leq 50\sqrt{\epsilon}, \qquad \sum_i \lambda_i \operatorname{dist}(u_i, \mathcal{Z}_b)^2 \leq \frac{1024}{3}\epsilon,$$

其中矩阵范数为弗罗贝尼乌斯范数，而（u_i, λ_i）是 K的任意支撑 John 标架。因此，接近等号可以控制椭球和原始加权接触点，而无需选取唯一的极值体。第4节证明了完整分类以及所有稳定性估计。

证书与优化。对于任意正维数的有界满维多面体 $\mathcal{P}$，椭球问题在二阶锥支撑约束下最大化对数行列式 A。对于一个规范化原始–对偶可行对，其椭球为 $\mathcal{E}(c,\ A)$，且具有正定对偶聚合矩阵M，可计算的间隙满足

$$G = -\log\det M - \log\det A \geq 0, \qquad \operatorname{vol}\mathcal{E}(c,A) \geq e^{-G} w(\mathcal{P}).$$

归一化和可行性条件见第2.3节；相对体积保证在第 5.2.3 节中确立。它为椭球子问题提供了停止准则。对于维数至少为二的中心切割，我们的显式证书利用原始 John 接触点界定新的最优值，而无需已知重新计算的椭球。随后，命题13中的精确亏损恒等式将几何行列式损失与优化间隙区分开来。这将尖锐收缩分析与可认证的椭球计算联系起来。精确对偶性和接触恢复在第 5.1 节中得到证明。

John 定理和有限凸优化模型属于背景内容。本文针对具体问题的贡献在于定量证书估计，以及它所揭示的几何结构。

组织结构。定理 1 在第3节中得到证明：有限接触点约化导出一个显式证书，在完成几何论证之前，该证书的行列式已在所有维数下得到界定。接着，第4节根据精确亏损推导出等号分类和稳定性。第5节阐述精确对偶性、迭代界及更多矩阵推论。结论见第6节。

表 1 总结了主要结果及其优化解释。

结果	数学内容	位置
尖锐收缩	每个正维数中的精确达到的因子	定理 1
等号	极点与纬线接触点、模型包含关系及完整的非唯一极值族	定理 15
稳定性	显式形状、中心及加权接触界，并具有与维数无关的常数	定理18
证书与间隙	可行体积界及经认证的相对体积 椭球计算精度	引理 4; 第 5.2.3 节

表 1：主要结果及其优化解释。

1.2 相关工作

这类切面出现在凸优化的定位方法中。预言机提供一个包含目标集的半空间，然后将当前区域替换为其与该半空间的交集。中心的选择决定了几何上的推进效果。在质心法中，Gr¨unbaum 定理将保留下来的普通体积分数限定为 $1-(n/(n+1))^n < 1-e^{-1}$ [7]，但计算质心的代价很高。经典的包围椭球法支持 $O(n^2)$ 算术更新，其收缩因子取决于维数，为 [6, 16]。解析中心和体积中心则提供了其他计算上的权衡 [1, 3, 4, 17]。

内接椭球法改为使用 $c(K)$ 和势 $w(K)$ [14]。它还提供了一种几何归一化。如果 $J(K) = c + AB_2^n$，则 John舍入定理给出

$$c + AB_2^n \subseteq K \subseteq c + nAB_2^n, \qquad B_2^n \subseteq A^{-1}(K-c) \subseteq nB_2^n. \tag{1.4}$$

对于中心对称体，因子 n 提升至 $\sqrt{n}$。这种舍入对于几何预条件、体积近似和定维整数规划 [8, 12]很有用。

对于具有 N 个不等式的多面体，计算 $J(K)$ 是一个有限的凸优化问题；第 2 节给出了其形式化表述和对偶证书。内点法利用了该问题的结构[12, 13, 18]。一项已确立的界表明，在已知归一化条件 $B_2^n \subseteq K \subseteq \Lambda B_2^n$ 下，可在 $O(N^{7/2}\log(N\Lambda/\delta))$ 次算术运算内 [2]计算出体积至少为 $e^{-\delta}w(K)$、$0 < \delta < 1$ 的椭球。这是近似椭球计算的一个界。定理 1 讨论的是精确 John 中心；要将计算得到的中心与可容许切割联系起来，需要相应的近似分析。第5节.2 区分了这种计算成本与精确中心切割的次数。

Khachiyan 提出了寻找最优且与维数无关的收缩因子 [11] 的问题。Zhou、Zou 和 Liu 证明了其取值为 $\sqrt{e}/2$，并证明了它在一致意义下的最优性 [19]。本文确定了每个维数下的精确取值，并描述了等号成立及近等号情形的几何性质。

2 预备知识

我们使用仿射归一化、John 接触刻画和有限体积证书。这些要素足以得到精确的几何界。该证书的确切优化解释将在第 5.1 节中展开。

2.1 椭球与有限优化

在全文中，维数均为正整数。令 $B_2^n = \{z : \|z\|_2 \le 1\}$ 为闭欧几里得单位球。记

$$\mathcal{E}(c, A) = c + AB_2^n, \qquad A \in \mathbb{S}_{++}^n, \qquad \operatorname{vol}\mathcal{E}(c, A) = \kappa_n \det A, \quad \kappa_n = \operatorname{vol}(B_2^n). \tag{2.1}$$

矩阵 A 是作用于该球的线性映射。其特征值即为半轴长度。对于单个不等式 $g^T x \le \beta$，包含关系等价于

$$\max_{\|z\|\le 1} g^T(c + Az) = g^T c + \|Ag\| \le \beta. \tag{2.2}$$

因此，对于有界满维多面体 $\mathcal{P} = \{x : g_r^T x \le \beta_r, \quad r = 1, \ldots, N\}$，椭球问题为

$$\begin{aligned} \text{maximize}_{c,\ A\succ 0} \quad & \log\det A \\ \text{subject to} \quad & g_r^T c + \|Ag_r\| \le \beta_r, \qquad r = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.3}$$

目标函数是凹函数，约束是凸约束 [4, 第 8.4 节2]。每个支撑约束也是一个二阶锥约束：$(\beta_r - g_r^T c,\ Ag_r) \in \mathcal{L}_{n+1}$，其中 $\mathcal{L}_{n+1} = \{(\tau, z) : \ \tau \ge \|z\|\}$。我们使用 $g_r = 0$ 移除冗余不等式。

2.2 John 框架与接触约化

以下标准刻画将单位球的极大性转化为有限个矩恒等式和支撑不等式。

引理 2 (John 接触刻画 [10] 和 [8, 定理 3.1 和 3.3])。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个包含 B_2^n 的凸体。那么 $J(K) = B_2^n$ 当且仅当存在有限个单位向量

$u_i \in \partial K \cap S^{n-1}$ 以及满足以下条件的正权重 λ_i

$$u_i^T x \le 1 \ (x \in K), \qquad \sum_i \lambda_i u_i = 0, \qquad \sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I, \qquad \sum_i \lambda_i = n. \tag{2.4}$$

我们在此不加证明地使用这一标准结果。最后一个恒等式由对第二个矩恒等式取迹得到。我们将满足两个矩恒等式的有限个单位向量及正权重称为***John* 标架**；(2.4) 中的不等式表明该标架支撑 K。同一个向量 u_i 既确定了与单位球的切点，也确定了其支撑平面的外法向量。

2.2.1 有限接触点约化

可逆仿射坐标变换保持椭球体积之比不变。将 $J(K)$ 映射到单位球，并应用引理 2。所得的支撑标架将几何问题转化为有限多面体问题，同时保持精确上确界不变。

该标架无需刻画 K 的整个边界。仅保留这些支撑平面即可得到一个包含 K 的多面体，而 John 刻画则保证其原有的最大椭球保持不变。

引理 3 (有限接触点约化**)**。 设 K 是一个满足 $J(K) = B_2^n$ 的凸体，且 $\mathcal{U}$ 是引理 *2* 中的一个支撑 ***John*** 标架。那么，下文定义的接触多胞体是一个满足以下条件的凸体

$$P_{\mathcal{U}} = \{x : u_i^T x \le 1 \ \textit{for all } i\}, \qquad K \subseteq P_{\mathcal{U}}, \qquad J(P_{\mathcal{U}}) = B_2^n. \tag{2.5}$$

特别地， $w(P_{\mathcal{U}}) = w(K) = \kappa_n$。对于每个中心半空间 $H_v = \{x : \ v^T x \le 0\}$，其中 $\|v\| = 1$， $K \cap H_v$ 中的每个椭球在 $P_{\mathcal{U}} \cap H_v$ 中也都是可行的，因此 $w(K \cap H_v) \le w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)$。两个切集的内部均非空，因为它们分别包含单位球对应的一半。

证明。 关键在于有界性：否则，这些支撑半空间可能定义出一个无界集合。我们直接利用两个 John 矩得到半径界。由于 $\|u_i\| = 1$，该多面体包含 B_2^n。对于 $x \in P_{\mathcal{U}}$，令 $r = \|x\|$ 和 $s_i = u_i^T x$。于是 $-r \le s_i \le 1$、$\sum_i \lambda_i s_i = 0$ 和 $\sum_i \lambda_i s_i^2 = r^2$。乘积 $(1 - s_i)(r + s_i)$ 非负，且关于 s_i 是二次的，因此其加权和可仅利用这些矩精确计算：

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_i \lambda_i (1 - s_i)(r + s_i) &= r \sum_i \lambda_i + (1 - r) \sum_i \lambda_i s_i - \sum_i \lambda_i s_i^2 \\ &= nr - r^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

因此， $r(r - n) \le 0$ 和 $r \ge 0$ 蕴含 $r \le n$。有限交是闭凸集，因此$B_2^n \subseteq P_{\mathcal{U}} \subseteq nB_2^n$使其成为凸体。John 刻画给出 $J(P_{\mathcal{U}}) = B_2^n$，而支撑不等式给出 $K \subseteq P_{\mathcal{U}}$。

□

为何这种约化能保留精确常数。扩大可能会增加切割后椭球体积，但不会改变切割前体积。因此，

$$\frac{w(K \cap H_v)}{w(K)} \le \frac{w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)}{w(K)} = \frac{w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)}{w(P_{\mathcal{U}})}. \tag{2.7}$$

对于特定的 K，不等式可能是严格的。然而，对于极值问题，这两个类具有相同的上确界。每个归一化凸体都允许作这样的扩张。反过来，

任意 John 标架都定义了一个凸体 $P_{\mathcal{U}}$，其约翰椭球为 B_2^n：上面的有界性论证只用到了标架恒等式，而引理 2 则确定了它的椭球。因此，接触多胞体本身属于原来的类，并且

$$C_n = \sup_{\substack{\mathcal{U}\ \text{a John frame} \\ \|v\|=1}} \frac{w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)}{w(P_{\mathcal{U}})} = \sup_{\substack{\mathcal{U}\ \text{a John frame} \\ \|v\|=1}} \frac{w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)}{\kappa_n}. \tag{2.8}$$

第一种方向给出了适用于每个凸体的上界；反向论证则表明不会损失锐性。对于每个固定的标架和切面，$w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)/\kappa_n$ 是有限椭球问题（2.3）中的最大可行行列式，其中支撑不等式为（g_i, β_i）=（u_i, 1），并且只有一个新增切面（g_0, β_0）=（v, 0）。因此，几何问题已转化为关于有限接触数据的普适不等式。下一节将为这个有限问题给出证书。

2.3 有限体积证书

为了界定每个可行椭球的体积，为每个支撑不等式指定一个标量 α_r 和一个向量 q_r。令 $\operatorname{sym} X = (X + X^T)/2$，完整的证书条件为

$$\begin{aligned} \sum_r \alpha_r g_r = 0, \qquad & \sum_r \alpha_r \beta_r = n, \\ \|q_r\| \le \alpha_r \quad & \text{for every } r, \\ M = \sum_r \operatorname{sym}(q_r g_r^T) & \succ 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

平衡条件消去了未知中心，第二个等号确定了尺度。范数不等式是二阶锥约束（α_r, q_r）$\in \mathcal{L}_{n+1}$；它还意味着 $\alpha_r \ge 0$。最后一个条件将方向信息汇集到一个正定矩阵中。因此，（2.9）包含了下文对偶问题所用的所有约束。

引理 4（体积证书）。若（2.9）成立，则（2.3）中的每个可行椭球都满足

$$\operatorname{tr}(AM) \le n, \qquad \det A \le \frac{1}{\det M}. \tag{2.10}$$

证明。这两个结论需要分两步得出：首先将支撑约束转化为迹界，然后应用标量算术几何平均不等式，得到行列式界。将支撑不等式聚合起来；平衡条件会抵消中心项：

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AM) &= \sum_r q_r^T A g_r \le \sum_r \alpha_r \|A g_r\| \\ &\le \sum_r \alpha_r (\beta_r - g_r^T c) = n - c^T \sum_r \alpha_r g_r = n. \end{aligned} \tag{2.11}$$

要从迹推导出行列式，使用对称正定矩阵 $Y = M^{1/2} A M^{1/2}$。其迹和行列式正是我们需要的量。对于其特征值 $\rho_1, \dots, \rho_n > 0$，标量算术几何平均不等式给出

$$\det A \det M = \det Y = \prod_{j=1}^n \rho_j \le \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho_j \right)^n = \left(\frac{\operatorname{tr}(AM)}{n} \right)^n \le 1. \tag{2.12}$$

两边除以 $\det M > 0$，即可证明（2.10）。 □

矩阵 M 是一个证书：只需检查其有限约束，就足以界定最优值。行列式越大，界越强。对证书进行优化即可得到归一化对偶问题

$$\text{maximize } \log\det M \quad \text{over } (\alpha_r, q_r) \text{ satisfying } (2.9). \tag{2.13}$$

3 尖锐收缩界的证明

现在证明定理 1。等式模型确定了证书的参数。证明其行列式估计后，通过共同旋转得到一个可行的对偶矩阵，从而完成体积界的证明。最后处理一维情形。

对于 $n \geq 2$，取 John坐标，使得 $J(K) = B_2^n$，并记 $H = H_v = \{x : v^T x \leq 0\}$ with$\|v\| = 1$。候选椭球 $\mathcal{E}(c, A)$ 的相对体积为 $\det A$。只需证明对于 $K \cap H_v$ 中的每个候选椭球，都有 $\det A \leq R_n$。截切体的内部非空：例如，它包含以 $-v/4$ 为中心、半径为 $1/8$ 的球。

3.1 等式模型

本节中的证书论证以及第4节中的等号与稳定性结果均假设$n \geq 2$。

令 $b = 1/n$ an 令 $P = I - vv^T$ 为到 $v^\perp$的正交投影。考虑候选 e

$$c_* = -\frac{1}{2}v, \qquad A_* = \frac{1}{2}vv^T + \frac{1}{\sqrt{1-b}}P, \qquad \det A_* = R_n. \tag{3.1}$$

其中心远离切割平面 $1/2$。其轴向半短轴为 $1/2$，因此与切面相切；其横向半短轴扩展为 $(1-b)^{-1/2}$。这些长度的乘积就是所提出的锐利因子。

取一个外切于单位球的正则单纯形，其单位面法向量为 u_1、.....、 u_{n+1}。其标准接触恒等式为

$$u_i^T u_j = -\frac{1}{n}\ (i \neq j), \qquad \sum_i u_i = 0, \qquad \sum_i u_i u_i^T = \frac{n+1}{n} I. \tag{3.2}$$

因此， $\lambda_i = n/(n+1)$ 是 John 权重。取 $v = -u_1$，则接触高度为 -1 和 b。所需的三个支撑值为

$$\begin{aligned} (-v)^T c_* + \|A_*(-v)\| &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\ u_i^T c_* + \|A_* u_i\| &= -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{1-b^2}{1-b}} = 1 \quad (u_i^T v = b), \\ v^T c_* + \|A_* v\| &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此， $\mathcal{E}(c_*, A_*) \subseteq \Delta \cap H_v$ 且 $w(\Delta \cap H_v)/w(\Delta) \geq \det A_* = R_n$。
相同的支撑函数计算适用于接触点高度为 -1 和 b 的任意 John 标架。第 4.2 节将描述所有这类等号构型。为便于后续使用，将逆模型形状记作 $M_0 = A_*^{-1} = 2vv^T + \sqrt{1-b}\,P$。

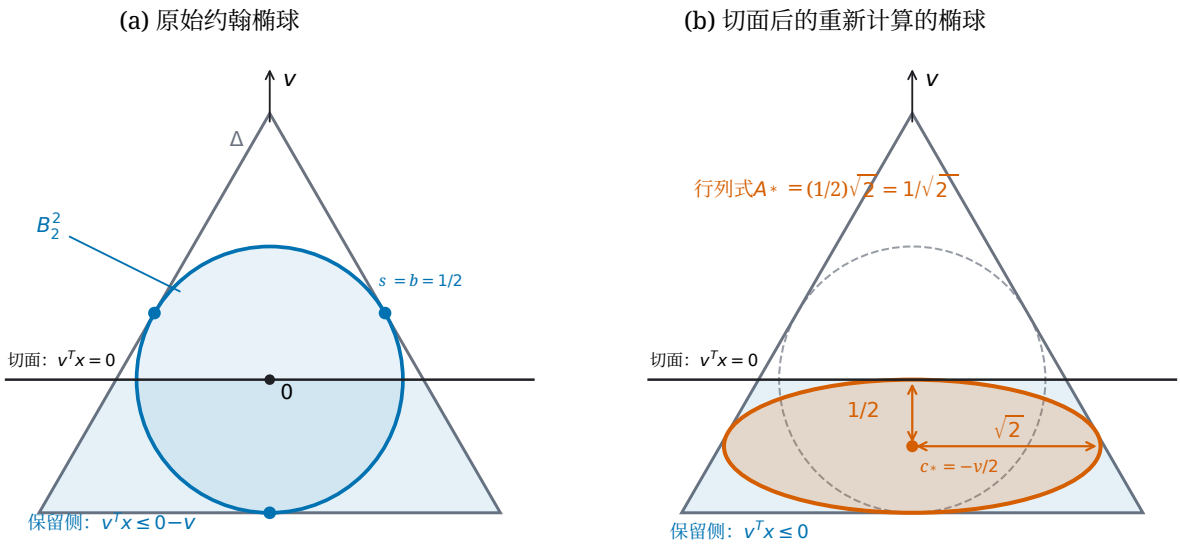

图1：二维中的模型。原始内切球的半径为一。新候选椭球的半轴为 $1/2$ 和 $\sqrt{2}$，因此其面积比为 $1/\sqrt{2}$。切面将旧椭球平分，但新椭球可以利用周围物体中的空间。

3.2 来自接触点的显式证书

设 (u_i, λ_i) 为任意支撑 John 标架。将其轴向分量和横向分量分别定义为 $s_i = u_i^T v$和 $y_i = P u_i$。旧支撑平面的索引为 i；新增切面则单独标记为 0。

等式模型告诉我们证书应当是什么：$M_0 = A_*^{-1}$。我们寻求仅依赖原始框架和切面的公式，这些公式对每个框架都成立，并且在模型处与该逆形状相符。标量权重确保平衡；向量方向确保锥可行性和模型的支撑关系。

平衡标量权重。 按照接触高度线性调整旧权重，会使其加权法向量和沿 $-v$方向移动。随后，法向量为 v的新切面可以恢复平衡。John 矩能够精确计算这两个和。选择

$$t = \frac{1+b}{2}, \qquad \alpha_i = \lambda_i(1 - t s_i) \ge \lambda_i(1-t) \ge \frac{\lambda_i}{4}, \qquad \alpha_0 = t. \tag{3.4}$$

John 矩可直接实现归一化和平衡：

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i &= \sum_i \lambda_i - t \sum_i \lambda_i s_i = n, \\ \sum_i \alpha_i u_i + t v &= \sum_i \lambda_i u_i - t \left(\sum_i \lambda_i u_i u_i^T \right) v + t v = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

该切面的右端为零，因此其权重不会出现在第一项求和中。这两个恒等式正是（2.9）中的归一化和平衡条件。界限 $\alpha_i \ge \lambda_i/4$ 确保每个原有接触点都保留，并将在后文的稳定性论证中用于控制支撑松弛量。仅有平衡条件时，t 还可以取其他值；要与等式模型相匹配，就必须取（3.4）中的值，原因将在下文说明。

选取可容许向量方向。 为了满足锥可行性，我们需要单位方向：这样，暂定的选取 $q_i = \alpha_i p_i$ 就位于锥的边界上。在等号成立时，这些方向还必须是 $A_* u_i / \|A_* u_i\|$，才能使支撑柯西–施瓦茨不等式取等号。以下变换在保持单位球面不变的同时改变轴向坐标：

$$a = \frac{b}{2-b}, \qquad k = \sqrt{1-a^2}, \qquad p_i = \frac{(s_i - a)v + k y_i}{1 - a s_i}. \tag{3.6}$$

Since $\|y_i\|^2 = 1 - s_i^2$ 和 $1 - a s_i \geq 1 - a \geq 2/3$，方向定义明确，且

$$\|p_i\|^2 = \frac{(s_i - a)^2 + (1-a^2)(1-s_i^2)}{(1 - a s_i)^2} = 1. \tag{3.7}$$

这是洛伦兹变换的单位方向形式。它固定极点 $-v$。在模型纬度处，所需的轴向坐标为 $b/(2+b)$，因为在那里有 $\|A_* u_i\| = 1 + b/2$。匹配 $(b-a)/(1-ab) = b/(2+b)$ 得到选定的 $a = b/(2-b)$，并确保

$$s_i \in \{-1, b\} \quad \Longrightarrow \quad p_i = \frac{A_* u_i}{\|A_* u_i\|}, \tag{3.8}$$

模型最优点处所需的接触方向。随后，横向约翰矩表明，匹配 M_0 的横向部分需要 $1 - tb = (1-b)(1+b/2)$，由此得到 $t = (1+b)/2$。因此，(3.4) 和 (3.6) 中的参数由精确模型匹配确定，而平衡恒等式和单位范数恒等式对任意标架仍然成立。

接触缺陷 χ。 为将模型匹配推广为适用于任意接触点的定量陈述，引入

$$\chi = \sum_i \lambda_i \frac{(1 + s_i)(s_i - b)^2}{1 - a s_i}. \tag{3.9}$$

因子 $1 + s_i$ 和 $(s_i - b)^2$ 使每一项在模型极点和纬度处都为零。正分母与变换后的方向中出现的分母相同。这一选择使 χ 与第 3.3 节的矩计算相兼容，同时对每个接触点保留 $\chi = 0 \iff s_i \in \{-1, b\}$。

该缺陷仅取决于原始加权接触几何和切割方向。它将控制行列式超额，确定所有等号标架，并界定到这些标架的加权距离。因此，它是锐界、等号和稳定性背后的共同几何量。

聚合矩阵 Q。 将原始法向量及其变换后的方向汇集到一个矩阵中：

$$Q = \sum_i \alpha_i u_i p_i^T + t\, v v^T. \tag{3.10}$$

每一项 $\alpha_i u_i p_i^T$ 记录一个原始约束及其拟定的对偶方向；项 $t v v^T$ 代表新的切面。因此 Q^T 是未旋转的向量乘子的聚合量。与 χ 一样，它不包含重新计算的椭球的未知中心或形状。

下面的定理给出可逆性和行列式下界。随后，第 3.8 节将使用一个共同旋转，把 Q^T 变为行列式相同的正定证书。这就是有限接触构造如何在无需求解新的优化问题的情况下，为每个可行切割椭球给出界。核心估计将其体积证书 $\log(R_n \det Q)$ 与接触缺陷 χ 联系起来。

定理 5 (John 框架证书界)。 矩阵 Q 可逆且行列式为正。对于 $d = 2 - b$,

$$\frac{\chi}{1500} \le \log(R_n \det Q) \le \frac{\chi}{2d}. \tag{3.11}$$

特别地，行列式 $Q \ge R_n^{-1}$。当且仅当每个接触点的高度为 -1 或 b时，这个行列式界取等号；此时 $Q = M_0$。

第 3.3 节中的定理 6 是这一估计的规范化形式。我们先证明该定理，然后再回到第 3.8 节中的共同极分解旋转和几何界。

3.3 因式分解与行列式估计

剩下的工作是对有限接触数据作行列式估计。我们先将证书通过正定对称矩阵进行因式分解。标量插值适用于更高维情形，而横向分块信息则处理二维和三维情形。这三个分支将在第 3.8 节中汇总。

从证书到对称矩阵。 回忆 $b = 1/n$、 $P = I - vv^T$ 和 $u_i = s_i v + y_i$，其中 $s_i = u_i^T v$ 和 $y_i = P u_i$。使用第3节中的参数： $d = 2 - b$、 $a = b/d$、 $t = (1 + b)/2$、$k = 2\sqrt{1 - b/d}$，以及 $f(s) = (1 - ts)/(1 - as)$。这些参数仅取决于维数；接触数据则通过下文的加权二阶矩阵 B 引入。现有证书的有用因式分解为

$$\begin{aligned} B &= \sum_i \lambda_i f(s_i) u_i u_i^T, \quad F = B + \frac{t}{1-a} vv^T, \\ D &= kP + k^2 vv^T, \qquad\quad Q = FD. \end{aligned} \tag{3.12}$$

这里， F 向 B添加一个秩一轴向项，而 D 将横向方向按 k 缩放，并将轴向方向按 k^2缩放。这就将依赖于标架的对称矩阵 F 与行列式已知的固定缩放分离开来。

为检验因式分解，在展开式 (3.10) 中使用 $\sum_i \lambda_i f(s_i) u_i = aBv - tv$。可得$Q = BD + t(1 + a)vv^T = FD$。所有 $f(s_i)$均为正，因此各向同性使 B和 F正定。此外， $D \succ 0$。这已经证明 Q 可逆且行列式为正。

选取等式模型作为参照。 在模型接触点处，证书为$Q = M_0 = A_*^{-1}$。因此，相应的对称因子为 $F_0 = M_0 D^{-1}$。以该参照矩阵为基准对 F 归一化：

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{d^2}{2(1-b)} vv^T + \frac{d}{2} P, \qquad \widehat{F} = F_0^{-1/2} F F_0^{-1/2}, \\ F_0 D &= M_0, \qquad \det \widehat{F} = R_n \det Q. \end{aligned} \tag{3.13}$$

$\widehat{\ }$该合同变换保持正定性，并将 F_0 变为单位矩阵。因此， $F - I$衡量了相对于等式模型的矩阵偏离。最后一个恒等式用到了 $\det D = k^{n+1}$和 $\det(F_0 D) = \det M_0 = R_n^{-1}$。因此，下文的归一化行列式定理正是定理 5 所需的定量断言。

为了衡量 在接触数据中直接记录相同的偏离，回忆一下式 (3.9) 中的标量缺陷 ：

$$\chi = \sum_i \lambda_i \frac{(1 + s_i)(s_i - b)^2}{1 - a s_i} \ge 0. \tag{3.14}$$

因子 $1+s_i$ 和 $(s_i-b)^2$ 分别使每个求和项在模型极点和纬度处为零。分母为正，John 权重保留了每个接触点的贡献。下一个定理将接触几何的这种标量描述与归一化行列式联系起来。

定理 6 （定量 John 标架行列式不等式）。 维数为$n \geq 2$ 的每个 *John* 标架都满足

$$\frac{\chi}{1500} \leq \log\det \widehat{F} \leq \frac{\chi}{2d}, \qquad \det F \geq \det F_0 = \frac{d^{n+1}}{2^n(1-b)}. \tag{3.15}$$

当且仅当 $s_i \in \{-1, b\}$ 对每个接触点都成立时，行列式不等式中的等号成立；在这种情况下，$\widehat{\ } F = F_0$ 且 $F = I$。

证明见第 3.3.1–3.8 节。 各维数下界在第 3.4、3.5 和 3.7 节中建立；第 3.8 节将其汇总，并证明上界和等号陈述。

$\widehat{\ }$上估计将由 $F - I$的迹推出。主要工作在于下估计：仅有正迹并不能给出所需的行列式下界，因此我们必须利用接触点所施加的矩阵元素之间的关系。系数 $1/1500$ 是这些估计给出的显式裕度。尖锐几何常数为 R_n；证明并未声称这一量化裕度具有最优性。

3.3.1 标量矩准备

对于高维论证，所需的接触信息是高度 s_i 和标量缺陷 χ。通过 $\nu_i = \lambda_i/(1 - as_i)$ 重新加权，以吸收 f 中的分母，并记作 $N_r = \sum_i \nu_i s_i^r$。标量 John 矩给出

$$N_0 - aN_1 = n, \qquad N_1 - aN_2 = 0, \qquad N_2 - aN_3 = 1. \tag{3.16}$$

这三个关系用 N_2 表示 N_0、N_1、N_3。展开缺陷可得

$$\chi = N_3 + (1-2b)N_2 + (b^2 - 2b)N_1 + b^2 N_0. \tag{3.17}$$

代换后， B 的轴向元素可表示为

$$\zeta := v^T B v = N_2 - tN_3 = \frac{3d}{4} - \frac{d^2}{4(1-b)(2+b)}\chi. \tag{3.18}$$

以下将使用这个标量输入：偏离模型会使 ζ 降低一个已知的 χ倍。由于 $0 < b \leq 1/2$ 和 $-1 \leq s_i \leq 1$，所有分母均为正。低维论证需要横向信息时，我们再予以引入。

3.4 高维估计

现在我们证明 $n \geq 4$时定理 6 中的下界，因此 $0 < b \leq 1/4$。两个引理将需要比较的量分别提取出来：引理 7 给出行列式增益，并留下一个标量对数差；引理 8 则为该差提供界。随后，引理 9 完成常数比较。

3.4.1 提升行列式界

设 $\ell(s) = \log f(s)$ 和 $\widetilde{u}_i = (u_i, \sqrt{b})$。定义提升矩矩阵和加权对数和如下：

$$\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i f(s_i) \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i^T, \qquad \mathcal{L} = \sum_i \lambda_i \log f(s_i). \tag{3.19}$$

极点-纬度模型对应的值为

$$\mathcal{L}_0 := \frac{\ell(-1)}{1+b} + \frac{\ell(b)}{b(1+b)}. \tag{3.20}$$

这两个系数分别是模型极点和纬度处的 John 权重总和。另定义增益系数

$$\delta_0(b) := \frac{(1+b)(b^2+b+2)}{2d(1-b)(2+b)(3+b)}. \tag{3.21}$$

引理 7 (提升行列式界)。 对于维数为 $n \geq 4$ 的任意 *John* 标架，

$$\log\det \widehat{F} \geq (1+b)(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) + \delta_0(b)\chi. \tag{3.22}$$

因此，矩阵问题归结为求 $\mathcal{L} - \mathcal{L}_0$ 的下界。下一小节将精确估计这一项。

证明。 **将矩编码到提升矩阵中。** 恒定的最后一个坐标使零一阶矩转化为零非对角块，而 $b = 1/n$ 使最后一个对角元素等于一。
John 的一阶和二阶矩结合为 $\sum_i \lambda_i \widetilde{u}_i \widetilde{u}_i^T = I_{n+1}$。我们采用标准的有限框架行列式估计

$$XX^T = I_r, \quad \rho_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log\det\big(X\,\mathrm{diag}(\rho_i)X^T\big) \geq \sum_i \|X_i\|^2 \log\rho_i, \tag{3.23}$$

其中 X_i 是各列。该估计的要点是用加权标量和替代矩阵行列式。在标准的 Cauchy–Binet/Jensen 论证中，[4, 9]，系数 $w_S = (\det X_S)^2$，对应于 r 个列索引中取出的 S 个索引所构成的子集，并形成一个概率分布。所需的行列式恒等式为

$$\sum_S w_S = 1, \qquad \det(X\,\mathrm{diag}(\rho_i)X^T) = \sum_S w_S \prod_{i\in S}\rho_i, \qquad \sum_{S\ni i} w_S = \|X_i\|^2. \tag{3.24}$$

对于边际恒等式，只令第 i 个对角权重为 $1+z$，展开同一个行列式：$\det(I_r + zX_iX_i^T) = 1 + z\|X_i\|^2$。比较 z 的系数即可。现在应用标量 Jensen 不等式，得到

$$\log\left(\sum_S w_S \prod_{i\in S}\rho_i\right) \geq \sum_S w_S \sum_{i\in S}\log\rho_i = \sum_i \|X_i\|^2 \log\rho_i, \tag{3.25}$$

由此证明了 (3.23)。对于 $X_i = \sqrt{\lambda_i}\widetilde{u}_i$，这变为

$$\log\det\mathcal{A} \geq (1+b)\mathcal{L}. \tag{3.26}$$

回到原始行列式。 $\mathcal{A}$ 和 F 都包含 B，因此它们的行列式之比可以约去这个公有矩阵因子。用 $\kappa = t/(1-a)$表示F中已有的轴向系数，用 $\varrho = v^T B^{-1} v$ 表示舒尔补引入的逆轴向矩。由(3.12)中使用的同一组矩恒等式可得

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B & \sqrt{b}(aBv - tv) \\ \sqrt{b}(aBv - tv)^T & 1 - abt + a^2 b\zeta \end{pmatrix}, \qquad \det\mathcal{A} = \frac{\det B}{n}(n + at - t^2\varrho). \tag{3.27}$$

舒尔补为正。缩写 $H_0 = n + at$ 记录了它的常数部分。我们的目标是用直接轴向矩 $\zeta = v^T B v$替换 ϱ，其对 χ 的依赖关系已由(3.18)给出。行列式引理和柯西–施瓦茨不等式给出

$$\det Q = k^{n+1}\det B(1+\kappa\varrho), \qquad \varrho\zeta \geq 1, \qquad H_0 - t^2\varrho > 0. \tag{3.28}$$

因此，交叉相乘并利用正分母可得

$$\frac{\det Q}{\det\mathcal{A}} = nk^{n+1}\frac{1+\kappa\varrho}{H_0 - t^2\varrho} \geq nk^{n+1}\frac{\zeta+\kappa}{H_0\zeta - t^2}. \tag{3.29}$$

取对数并应用(3.26)，得到

$$\log\det Q \geq (n+1)\log k + (1+b)\mathcal{L} + g(\zeta), \quad g(\zeta) = \log\frac{n(\zeta+\kappa)}{(n+at)\zeta - t^2}. \tag{3.30}$$

对数内的所有量均为正：(3.27)给出 $n + at > t^2\varrho \geq t^2/\zeta$。

从轴向修正中提取正增益。随着 χ 增大，(3.18)表明 ζ 会从其模型值 $\zeta_0 = 3d/4$开始减小。下文中的变量 θ_1, θ_2 表示 g内分子和分母的相对降幅。分母降幅更大，因此它们的比值会增大。初等不等式 $\log x \geq 1 - 1/x$ 将用于量化这一增幅。设

$$\Delta_\zeta = \zeta_0 - \zeta = \frac{d^2\chi}{4(1-b)(2+b)}, \qquad \theta_1 = \frac{\Delta_\zeta}{\zeta_0 + \kappa}, \qquad \theta_2 = \frac{H_0\Delta_\zeta}{H_0\zeta_0 - t^2}. \tag{3.31}$$

正分母条件意味着 $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 1$。因此

$$\begin{aligned} g(\zeta) - g(\zeta_0) &= \log\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2} \geq 1 - \frac{1-\theta_2}{1-\theta_1} \\ &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{1-\theta_1} \geq \theta_2 - \theta_1 = \delta_0(b)\chi, \end{aligned} \tag{3.32}$$

最后一个等号是将参数代入 $\delta_0(b)$的定义所得。

减去模型值。 由于 $f(-1) = d(3+b)/4$且 $f(b) = d/2$，式（3.20）中定义的模型和满足

$$(n+1)\log k + (1+b)\mathcal{L}_0 + g(\zeta_0) = \log R_n^{-1}. \tag{3.33}$$

合并 (3.30)、(3.32) 和 (3.33)，并使用 (3.13) 中的对数行列式 $F = \log R_n + \log\det Q$。由此得到 (3.22)，证明完毕。 □

3.4.2 插值损失

保留 $\ell(s) = \log f(s)$ 和 $\mathcal{L} = \sum_i \lambda_i \ell(s_i)$。明确回顾模型值 $\mathcal{L}_0 = \ell(-1)/(1+b) + \ell(b)/[b(1+b)]$，该值来自 (3.20)。定义标量积分

$$I(b) := \int_a^t \frac{z^2}{(1-z^2)(1-bz)^2}\, dz. \tag{3.34}$$

引理 8（插值损失）。 根据这些定义，维数为 $n \geq 4$ 的每个 *John* 标架都满足

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}_0 \geq -(1-a) I(b) \chi. \tag{3.35}$$

这是引理 7 所需的标量估计。其证明还给出了精确的逐点余项（3.38）。

证明。 **选取一个具有正确加权和的二次多项式**。 John 恒等式确定了高度中每个二次多项式的加权平均。因此，我们将 $\ell(s) = \log f(s)$ 替换为一个与等号高度相匹配的二次多项式。在 -1 处匹配函数值，并在 b 处同时匹配函数值和斜率，还会得到与缺陷 χ相同的消失因子。令 H_2 满足 $H_2(-1) = \ell(-1)$、$H_2(b) = \ell(b)$ 以及 $H_2'(b) = \ell'(b)$。明确地，

$$H_2(s) = \ell(b) + \ell'(b)(s-b) + \frac{\ell(-1) - \ell(b) + (1+b)\ell'(b)}{(1+b)^2}(s-b)^2. \tag{3.36}$$

标量 John 矩与位于 -1 处的质量 $1/(1+b)$ 以及位于 b处的质量 $1/[b(1+b)]$ 的标量 John 矩相同。由于 H_2 是二次多项式，

$$\sum_i \lambda_i H_2(s_i) = \mathcal{L}_0. \tag{3.37}$$

因此， $\mathcal{L} - \mathcal{L}_0$ 是余项 $\ell(s_i) - H_2(s_i)$ 的加权和。我们将证明以下精确恒等式，其中 $-1 \leq s \leq 1$,

$$\ell(s) - H_2(s) = -(1+s)(s-b)^2 \int_a^t \frac{z^2\, dz}{(1+z)(1-bz)^2(1-zs)}. \tag{3.38}$$

推导并界定余项。 我们先证明一个有理插值恒等式，再对其积分以还原对数。这样便能明确揭示余项的符号和消失因子。

对有理被积函数进行插值。 令 $r_z(s) = s/(1-zs)$，并设 $H_{2,z}$ 为公式 (3.36) 中的数据为 $r_z(-1)$、$r_z(b)$ 且斜率为 $(1-zb)^{-2}$ 的二次公式。通分后得到精确的有理恒等式

$$r_z(s) - H_{2,z}(s) = \frac{z^2(1+s)(s-b)^2}{(1+z)(1-bz)^2(1-zs)}. \tag{3.39}$$

还原对数插值函数。由于 $\ell(s) = -\int_a^t r_z(s)\, dz$，数值数据积分后得到 $\ell(-1)$ 和 $\ell(b)$。接下来只需检验斜率数据；它们满足以下基本恒等式

$$-\int_a^t \frac{dz}{(1-bz)^2} = -\frac{t-a}{(1-ab)(1-tb)} = \frac{a}{1-ab} - \frac{t}{1-tb} = \ell'(b). \tag{3.40}$$

对三个多项式系数分别积分，即得 (3.38)，无需在积分号下求导。所有被积函数均连续，且分母在紧区间上均为正。

用接触缺陷的单位表示损失。 为了求和余项，我们需要一个与单个高度 s无关的系数。以下比较将定义 χ 的因子置于积分之外：

$$\frac{1-a}{1-z}-\frac{1-as}{1-zs}=\frac{(z-a)(1-s)}{(1-z)(1-zs)}\geq 0 \qquad (a\leq z\leq t,\ -1\leq s\leq 1). \tag{3.41}$$

逐点可得 $\ell(s)-H_2(s)\geq -(1-a)I(b)(1+s)(s-b)^2/(1-as)$。使用权重$\lambda_i$ 求和即可证明（3.35）。 □

结合增益和损失估计。 引理 7 和 8 现在给出了定理 6 的高维部分所需的两个输入。将插值界代入（3.22）得到

$$\log\det\widehat{F}\geq \delta_0(b)[1-\mathcal{R}(b)]\chi, \qquad \mathcal{R}(b)=\frac{4(1-b)^2(2+b)(3+b)}{b^2+b+2}I(b). \tag{3.42}$$

这里 $\mathcal{R}(b)=(1+b)(1-a)I(b)/\delta_0(b)$ 是损失与增益之比。剩下的任务是引理 9 中的标量比较。

3.4.3 精确求值与标量证书

除标量比较外，矩阵论证现已完成： $\mathcal{R}(b)$ 衡量插值损失占增益 $\delta_0(b)\chi$ 的比例。我们需要一个严格低于 1 的一致裕度，以及 δ_0 的正下界。下面给出的便利目标得到 $(1/12)(1-124/125)=1/1500$, 即定理 6 中的系数。

引理 9 （一致标量证书）。 对于 $0<b\leq 1/4,\ \mathcal{R}(b)<124/125$ 且 $\delta_0(b)\geq 1/12$。

证明。 我们先将问题化约到端点 $b=1/4$，用部分分式计算积分，并将其精确值与 $124/125$ 比较。δ_0 的下界则在最后通过单独的多项式比较来证明。

步骤 1：化约到最大的参数。 在原积分中，两个端点和被积函数都依赖于 b。代换 $w=(z-a)/(1-az)$ 将下端点固定为零，并揭示出三个因子，随着 b 变化，每个因子都可以分别进行比较：

$$\mathcal{R}(b)=\frac{4(2+b)(3+b)}{b^2+b+2}\int_0^{(2+b)/(4+b)}\frac{1}{1-w^2}\left(\frac{2w+b(1-w)}{2+b(1-w)}\right)^2 dw. \tag{3.43}$$

暂将外部前因子命名为 π，被积函数中的有理因子命名为 ψ_b，上端点命名为 ℓ_b： $\pi(b)=4(2+b)(3+b)/(b^2+b+2)$, $\psi_b(w)=[2w+b(1-w)]/[2+b(1-w)]$, 和$\ell_b=(2+b)/(4+b)$。最大的端点是 $\ell_{1/4}=9/17$。对于 $0\leq b_1\leq b_2\leq 1/4$ 和 $0\leq w\leq 9/17$,

$$\begin{aligned}
\pi(b_2)-\pi(b_1)&=\frac{16(b_2-b_1)(1-b_1-b_2-b_1b_2)}{(b_1^2+b_1+2)(b_2^2+b_2+2)}\geq 0,\\
\psi_{b_2}(w)-\psi_{b_1}(w)&=\frac{2(b_2-b_1)(1-w)^2}{[2+b_1(1-w)][2+b_2(1-w)]}\geq 0,\\
\ell_{b_2}-\ell_{b_1}&=\frac{2(b_2-b_1)}{(4+b_1)(4+b_2)}\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

这里 $1-b_1-b_2-b_1b_2 \ge 7/16$ 和 $\psi_b(w) \ge 0$。因此，(3.43) 中的被积函数和区间随 b递增，从而得到 $\mathcal{R}(b) \le \mathcal{R}(1/4)$。

步骤 2：用部分分式计算端点积分。将相同的 w-积分 (3.43) 特化到 $b = 1/4$ 可得

$$\mathcal{R}(1/4) = \frac{468}{37}\int_0^{9/17} \frac{(1+7w)^2}{(1-w^2)(9-w)^2}\,dw. \tag{3.45}$$

其被积函数可作如下初等分解

$$\begin{aligned}\frac{(1+7w)^2}{(1-w^2)(9-w)^2} &= \frac{9}{50(1+w)} + \frac{1}{2(1-w)} \\ &\quad - \frac{8}{25(9-w)} - \frac{256}{5(9-w)^2}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

在 $0 \le w \le 9/17$ 上，所有对数真数均为正。对这四项积分并合并端点对数，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(1/4) &= \frac{468}{37}\left(\frac{9}{50}\log 13 - \frac{1}{25}\log 2 - \frac{16}{45}\right) \\ &= \frac{2106\log 13 - 468\log 2 - 4160}{925} < \frac{124}{125}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

为得到 与步骤 1 合并后，这就证明了在所需区间内处处有 $1-\mathcal{R}(b) > 1/125$.

步骤 3：界定增益系数。 现在我们检验 (3.42) 中的另一个输入。将 $\delta_0(b) \ge 1/12$ 中的正分母通分后，得到

$$6(1+b)(b^2+b+2) - d(1-b)(2+b)(3+b) = b(26+19b+4b^2-b^3) \ge 0. \tag{3.48}$$

这就证明了两个断言。 □

定理 6 的高维部分已完成。 结合 (3.42) 与引理 9，可得 ^对数行列式 $F \ge \chi/1500$ 对于 $n \ge 4$。其余维数将在下文讨论；共同上界和等号陈述将在第 3.8 节中完成。

为什么维数为二和三时需要另一个估计。 $\mathcal{R}(b)$ 的标量公式对 $0 < b \le 1/2$ 有定义。前面的上界需要 $\mathcal{R}(b) < 1$；然而，对于 $n = 3$ 和 $n = 2$，这个标量余项大于一。事实上，在 $a \le z \le t$ 上，

$$\frac{1}{1-z^2} \ge 1 + z^2 + z^4, \qquad \frac{1}{(1-bz)^2} \ge 1 + 2bz + 3b^2z^2. \tag{3.49}$$

这些结果可通过乘以正分母得到：这两个乘积分别为 $1 - z^6 \le 1$ and$1-(bz)^3(4-3bz) \le 1$。当 $p(b) = 4(1-b)^2(2+b)(3+b)/(b^2+b+2)$ 时，精确的多项式积分给出

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(b) &\ge p(b)\int_a^t z^2(1+z^2+z^4)(1+2bz+3b^2z^2)\,dz, \\ \mathcal{R}(1/3) &> \frac{16}{15} > 1, \\ \mathcal{R}(1/2) &> \frac{7}{6} > 1.\end{aligned} \tag{3.50}$$

因此，标量估计无法证明这两个维数中存在正行列式亏损。现在我们保留横向分块信息，先解决二维情形，然后推导三维中所需的额外控制。

3.5 横向分块与二维

标量估计已达到其局限。为了处理剩余维数，我们保留 $u_i = s_i v + y_i$ 中垂直于 v的分量。在 $\mathbb{R}v \oplus v^{\perp}$中进行分析，其中 $m = n - 1$。在归一化证书中， x 表示轴向减小量， E 是横向扰动，而 j 耦合这两个子空间。

引理 10（分块恒等式与约束）。 归一化矩阵满足

$$\widehat{F} = \begin{pmatrix} 1 - x & j^{T} \\ j & I_m + E \end{pmatrix}, \quad x = \frac{\chi}{2(2+b)}, \quad \sigma := \operatorname{tr} E = \frac{2\chi}{d(2+b)}, \quad x = \frac{d}{4}\sigma, \tag{3.51}$$

其中

$$E = -\frac{1}{d}\sum_i \nu_i (s_i - b) y_i y_i^{T}, \qquad j = -\frac{\sqrt{1-b}}{b\sqrt{d}} \sum_i \nu_i (s_i - b) y_i. \tag{3.52}$$

标量约束和矩阵约束为

$$0 \le \sigma \le \frac{2(1-b)}{d + b^2}, \qquad 0 \le \chi \le 2, \tag{3.53}$$

$$\begin{pmatrix} x & -j^{T} \\ -j & tI_m - E \end{pmatrix} \succeq 0, \qquad -\frac{1}{2} I_m \prec E \prec t I_m. \tag{3.54}$$

E 的迹非负，但 E 不一定是半正定的。格拉姆约束限制了耦合：对于每个横向向量 q，$(q^{T} j)^{2} \le x\, q^{T}(tI_m - E) q$。在等号接触点处，要么 $y_i = 0$ ，要么 $s_i - b = 0$，因此 $E = j = 0$。

证明。 **恢复各个块**。 投影约翰恒等式为 $\sum_i \lambda_i y_i = \sum_i \lambda_i s_i y_i = 0$ 和$\sum_i \lambda_i y_i y_i^{T} = I_m$。结合重新加权的向量与矩阵矩 $C_r = \sum_i \nu_i s_i^{r} y_i$ 和 $Y_r = \sum_i \nu_i s_i^{r} y_i y_i^{T}$，可得

$$C_0 = a C_1, \qquad C_1 = a C_2, \qquad Y_0 - a Y_1 = I_m. \tag{3.55}$$

恒等式 $f(s) = d/2 - (s-b)/[2(1-as)]$ 给出了 E的横向表达式，或等价地$Y_1 - bY_0 = -dE$。将轴向项 $t/(1-a)$加到 (3.18) 上，并用 F_0 归一化，得到 $1 - x$。对 E取迹，并利用 $\|y_i\|^2 = 1 - s_i^2$，得到 σ。混合项由 $C_1 - tC_2$ 和 (3.55) 得出。这就证明了 (3.51)–(3.52)。

界定标量范围。只需界定 χ。非负和 $\sum_i \nu_i (1 - s_i)(s_i + b)^2$展开为 $-N_3 + (1 - 2b) N_2 + (2b - b^2) N_1 + b^2 N_0$。将其与 (3.16)–(3.17) 结合后，剩余的自由矩便会抵消：

$$\chi + \frac{(1-b)(2+b)^2}{(d + b^2)^2} \sum_i \nu_i (1 - s_i)(s_i + b)^2 = \frac{d(2+b)(1-b)}{d + b^2}. \tag{3.56}$$

非负性通过 (3.51) 给出了关于 σ 的所述界。估计 $\chi \le 2$ 还用到了 $2(d + b^2) - d(2+b)(1-b) = b(2 + 3b - b^2) \ge 0$。

将耦合保留在正定分块矩阵中。所需矩阵的格拉姆表示为

$$\begin{pmatrix} x & -j^T \\ -j & tI_m - E \end{pmatrix} = \sum_i \nu_i (1+s_i) r_i r_i^T, \qquad r_i = \begin{pmatrix} (s_i - b)/\sqrt{2(2+b)} \\ \sqrt{(1-b)(2+b)/(2d)}\, y_i \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

其权重均为非负数，从而证明了 (3.54) 的第一部分。解关于 Y_0, Y_1 的两个关系式可得

$$\begin{aligned} \sum_i \nu_i (1-s_i) y_i y_i^T &= \frac{d}{2+b}(I_m + 2E), \\ \sum_i \nu_i (1+s_i) y_i y_i^T &= \frac{2d}{(1-b)(2+b)}(tI_m - E). \end{aligned} \tag{3.58}$$

两个和都是正定的： $s_i = \pm 1$ 处的接触点具有 $y_i = 0$，而所有其他横向向量根据 John 二阶矩张成 $v^\perp$。因此 $I_m + 2E \succ 0$ 和 $tI_m - E \succ 0$，从而证明了严格谱界。

□

二维。这里 $m = 1$，因此迹决定了横向块： $E = \sigma$、 $x = 3\sigma/8$ 和$t = 3/4$。剩余的耦合损失为 j^2。将格拉姆界 $j^2 \le x(t-\sigma)$ 代入行列式可得

$$\det \widehat{F} \ge (1-x)(1+\sigma) - x(t-\sigma) = 1 + \frac{11}{32}\sigma = 1 + \frac{11}{60}\chi. \tag{3.59}$$

三维情形需要进一步控制，因为仅凭横向迹不再能决定横向行列式。下面我们陈述该情形所需的精确估计。

3.6 一个直接耦合不等式

对于下一小节中的二维横向块，我们需要同时控制其形变及其与轴的耦合。同一界也将用于第 4.4.3 节中的局部稳定性。根据引理 10，矩阵 $K_E = I_m + 2E$ 是正定的。非负量 $A_E = \operatorname{tr}(E^2 K_E^{-1})$ 衡量横向形变： E 的每个特征值 e 都贡献 $e^2/(1+2e)$。

引理 11（直接耦合迹界）。设 $K_E = I_m + 2E$， $A_E = \operatorname{tr}(E^2 K_E^{-1})$，以及 $L = d(1-b)/(d+b^2) - d\sigma/2 \ge 0$。若 $\sigma > 0$，则

$$A_E \le \frac{\sigma}{2}, \qquad \|K_E^{-1} j\|^2 \le L\left(\frac{\sigma}{2} - A_E\right). \tag{3.60}$$

第一个不等式给出了横向形变的界。第二个不等式表明，剩余量$\sigma/2 - A_E$控制着变换后的耦合。系数 L 是式 (3.53) 中迹上界与 $d/2$的乘积之差。

证明。**只计算得出这些结论所需的检验**。我们将取 $Z = E K_E^{-1}$，先令 $q = 0$，然后在 $L > 0$ 时令 $q = K_E^{-1} j / L$。对于这些计算，设

$$\ell = \operatorname{tr}(ZE) + q^T j, \qquad Q_2 = \operatorname{tr}(Z^2 K_E) + 4 q^T Z j + L\|q\|^2. \tag{3.61}$$

要直接利用标架对这个表达式进行界定，令 $\gamma=\sqrt{d(1-b)/(d+b^2)}$。第 3.5 节中的混合矩、横向恒等式和标量关系分别给出

$$\begin{aligned}\sum_i \nu_i(1-s_i)y_i y_i^{T} &= \frac{d}{2+b}K_E,\\ \gamma\sum_i \nu_i(1-s_i)(s_i+b)y_i &= \frac{2d}{2+b}j,\\ \gamma^2\sum_i \nu_i(1-s_i)(s_i+b)^2 &= \frac{d}{2+b}L.\end{aligned}\tag{3.62}$$

结合 E 的表达式，这些恒等式可计算出该线性形式及其对应的平方范数：

$$\begin{aligned}\ell &= -\frac{1}{d}\sum_i \nu_i(s_i-b)y_i^{T}\big(Zy_i+\gamma(s_i+b)q\big),\\ \sum_i \nu_i(1-s_i)\|Zy_i+\gamma(s_i+b)q\|^2 &= \frac{d}{2+b}Q_2.\end{aligned}\tag{3.63}$$

因此，利用加权柯西–施瓦茨不等式及 $\|y_i\|^2=(1-s_i)(1+s_i)$，可得 $\ell^2\le \chi Q_2/[d(2+b)]=(\sigma/2)Q_2$。极点项具有 $y_i=0$，因此此计算无需除以 $1\pm s_i$。配方完成一个标量平方后，得到

$$2\ell-Q_2\le 2\ell-\frac{2\ell^2}{\sigma}=\frac{\sigma}{2}-\frac{2}{\sigma}\Big(\ell-\frac{\sigma}{2}\Big)^2\le\frac{\sigma}{2}.\tag{3.64}$$

导出形变界与耦合界。所选的 $Z=EK_E^{-1}$ 是对称的，并使 $\operatorname{tr}(ZE)=\operatorname{tr}(Z^2K_E)=A_E$。结合 $q=0$，可得 $2\ell-Q_2=A_E$，从而证明第一个界。保持这个 Z，利用 $2EK_E^{-1}=I_m-K_E^{-1}$：依赖于 q 的部分为 $2q^{T}K_E^{-1}j-L\|q\|^2$。对于 $L>0$，其在所选的 $q=K_E^{-1}j/L$ 处取得最大值，因此得到

$$2\ell-Q_2=A_E+\frac{1}{L}\|K_E^{-1}j\|^2\le\frac{\sigma}{2}.\tag{3.65}$$

若 $L=0$，对 $Z=0$ 和 $q=j$ 进行相同的有限柯西–施瓦茨不等式计算，可得 $\|j\|^4\le 0$，因此 $j=0$。这就证明了该端点处的第二个界。由 (3.51)–(3.52)，$\sigma=0$ 的情形有 $E=j=0$，因此估计也可延伸至该处。 $\square$

有用的结果是 (3.60)。第5.3.4节记载了适用于任意测试函数的更一般不等式；这里的证明已经给出了三维估计和局部稳定性论证所需的一切。

3.7 三维估计

现在横向块是二维的，因此其迹不再能确定其行列式。我们必须控制横向行列式及其与 j 的相互作用。证明首先通过两个标量二次型来表示这种相互作用，然后结合 Gram 不等式和变分不等式将其消去。剩下的任务是在一个区间上证明多项式界。

命题12 （三维界）。 在三维中，

$$\det\widehat{F}\ge 1+\frac{2}{11}\sigma=1+\frac{36}{385}\chi.\tag{3.66}$$

证明。 所需的输出是与 σ 成正比的正行列式超额。下面的系数 $2/11$ 是多项式估计所提供的余量。

步骤 1：用标量不变量描述横向块。在三维情形下，定义特化为 $E \in \mathbb{S}^2$, $x = 5\sigma/12$, $t = 2/3$ 和 $0 \le \sigma \le 3/4$。如果 $\sigma = 0$，缺陷便消失，并且 (3.52) 给出 $F = I$。设 $\sigma > 0$，并记

$$p = \det E, \qquad z = \sigma + 4p, \qquad L = \frac{5}{8} - \frac{5}{6}\sigma, \qquad \Delta = \frac{11}{3}(1+\sigma) - z. \tag{3.67}$$

这里， p 是 E 除迹以外的第二不变量。选择组合 $z = \sigma + 4p$，是因为它能用一个简单的分式表示变分余项 $\sigma - 2A_E$。系数 L 恰好是 $n = 3$处引理 11 中的系数。量 Δ 将成为合并两个耦合不等式时的正分母。对于二阶矩阵，凯莱–哈密顿定理给出

$$\det K_E = 1 + \sigma + z, \qquad \sigma - 2A_E = \frac{z}{1+\sigma+z}. \tag{3.68}$$

因此，引理 11 和 $\det E \le \sigma^2/4$ 蕴含

$$0 \le z \le \sigma(1+\sigma), \qquad j^T K_E^{-2} j \le \frac{Lz}{2(1+\sigma+z)}, \qquad \Delta > 0. \tag{3.69}$$

因此，固定 σ 后， z 落在一个明确的区间内。这将在之后使凹性论证成为可能。

步骤 2：精确地界定行列式中的耦合项。对于一个二乘二横向块，该项为 $j^T \operatorname{adj}(I_2 + E) j = (1+\sigma)\|j\|^2 - j^T E j$。用简写 $r = \|j\|^2$ 和$\omega = j^T E j$ 表示这两个二次型，并令 $N = tI_2 - E \succ 0$。格拉姆约束和 (3.69) 分别为，

$$(t - \sigma) r + \omega \le x \det N, \tag{3.70}$$

$$\big[(1+\sigma)(1+4\sigma) - z\big] r - 4(1+\sigma)\omega \le \frac{L}{2} z (1+\sigma+z). \tag{3.71}$$

这两个不等式对于 r， ω 都是线性的。选取一个正线性组合，使其系数恰好与 $(1+\sigma)r - \omega$ 的系数相同。求解这个二元系数匹配问题，得到乘子$[3(1+\sigma) + z]/\Delta$ 和 $5/(3\Delta)$。它们均为正，因此不等式方向保持不变；它们的公分母也说明了 Δ的定义。将两式相加，得到

$$j^T \operatorname{adj}(I_2 + E) j \le \frac{x \det N [3(1+\sigma) + z] + \frac{5}{6} L z (1+\sigma+z)}{\Delta}. \tag{3.72}$$

步骤 3：消去矩阵变量。将此界代入 $\det F = (1-x)(1+\sigma+p) - j^T \operatorname{adj}(I_2 + E) j$，并使用 $p = (z-\sigma)/4$。乘以 108Δ 可消去变量分母，得到一个仅含 σ， z 的多项式；108 是对其有理系数进行归一化的一个方便的正数：

$$108\Delta(\det \widehat{F} - 1) \ge \mathcal{P}_*(\sigma, z), \tag{3.73}$$

$$\mathcal{P}_*(\sigma, z) = 72\sigma(1+\sigma) + \left(\frac{171}{4} - \frac{53}{4}\sigma + 75\sigma^2\right) z + \left(-\frac{333}{4} + 75\sigma\right) z^2. \tag{3.74}$$

第 4 步：利用凹性，只需检查端点。 z^2 的系数在$0 \le \sigma \le 3/4$时为负，因此在允许的 z 区间上，最小值出现在某个端点处。在 $z = 0$ 处，

多项式为 $72\sigma(1+\sigma)$。我们证明另一个端点处的值至少与之相等。在 $z=\sigma(1+\sigma)$ 处，它等于

$$\frac{\sigma(1+\sigma)}{4}\big(300\sigma^3+267\sigma^2-386\sigma+459\big)\ge 72\sigma(1+\sigma), \tag{3.75}$$

因为括号中的三次多项式减去 288 后具有如下非负分解

$$300\sigma^3+267\left(\sigma-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{29}{2}\sigma+\frac{333}{16}. \tag{3.76}$$

因此，在整个可行区间内，$\mathcal{P}_*\ge 72\sigma(1+\sigma)$。代回 (3.73)，界 $\Delta\le 11(1+\sigma)/3$ 抵消了 $1+\sigma$，从而得到 $\det F-1\ge 2\sigma/11$。因此，$2/11=72/[108(11/3)]$ 就是多项式界所留下的最终余量。 □

保留 $L=5/8-5\sigma/6$ 至关重要：更大的系数会削弱第二个约束，并导致单区间多项式证书失效。证明只用到矩恒等式、半正定块、二阶矩阵恒等式，以及具有有理系数的多项式不等式。

3.8 行列式与几何界的完成

现在，三个分支都给出了行列式超额。我们将它们置于相同的对数尺度上，然后恢复上界和等号条件。

得到适用于所有维数的一个下界。对于 $n\ge 4$，引理 9 3 42 $F\ge$ 和（.）给出对数行列式$\chi/1500$。对于 $n=2$，3，方程（3.59）和（3.66）分别给出行列式 $F\ge 1+c\chi$，其中 $c=11/60$ 和 $c=36/385$。由于 $\chi\le 2$ 且当 $u\ge 0$ 时 $\log(1+u)\ge u/(1+u)$，

$$\log\det\widehat{F}\ge\frac{c}{1+2c}\chi\ge\frac{\chi}{1500}. \tag{3.77}$$

利用迹得到上界。这一部分适用于所有维数 s:

$$\log\det\widehat{F}\le\operatorname{tr}\widehat{F}-n=\sigma-x=\frac{\chi}{2d}. \tag{3.78}$$

由零缺陷推出等号。当 $\det F=1$ 时，下界迫使 $\chi=0$。式（3.14）中的每一项都非负，且具有正权重和分母，因此这等价于对所有 i 均有$s_i\in\{-1,b\}$。反过来，由这个接触条件，根据（3.51）–（3.52）可得 $x=j=E=0$。至此，完成第 3.3 节开头所述定理 6 的证明。

根据 (3.13)，这就证明了 (3.11)。取等号时 $F=F_0$，因此 $Q=M_0$；结合上述已证明的正定性，定理 5 得证。

共同极分解旋转。 矩阵 Q^T 不一定是对称的。对所有方向施加同一个旋转，即可得到引理 4 所要求的正定聚合矩阵。根据定理 5，左极分解定义良好：

$$M=(QQ^T)^{1/2},\qquad U=M^{-1}Q,\qquad q_i=\alpha_iUp_i,\qquad q_0=tUv. \tag{3.79}$$

正交性由此得出

$$UU^T=M^{-1}QQ^TM^{-1}=I, \tag{3.80}$$

因此 $\|q_i\| = \alpha_i$、 $\|q_0\| = t$。聚合量为

$$\sum_i q_i u_i^T + q_0 v^T = UQ^T = M^{-1} Q Q^T = M. \tag{3.81}$$

标量权重仍然保持平衡，并且

$$\det M = \sqrt{\det(QQ^T)} = |\det Q| = \det Q \geq R_n^{-1}. \tag{3.82}$$

现在，证书的各个部分都已具备：归一化、平衡、锥可行性、正定性，以及行列式的一个下界。

定理 *1* 的证明完毕。 $K \cap H_v$ 中的每个椭球都满足接触多胞体和切面的可行性条件。引理 4 给出

$$\det A \leq (\det M)^{-1} \leq R_n. \tag{3.83}$$

由于在 John 坐标中， $w(K) = \kappa_n$ ，

$$\frac{w(K \cap H_v)}{w(K)} = \max_{\mathcal{E}(c,A) \subseteq K \cap H_v} \det A \leq R_n. \tag{3.84}$$

该比值是仿射不变量，由此证明了 (1.3)，且单纯形模型能够取到等号。对于 $n = 1$，记作$K = [\ell, r]$; 则 $J(K) = K$, $c(K) = (\ell + r)/2$，且 $w(K \cap H) = (r - \ell)/2 = w(K)/2$。 □

证明还给出了一个定量对象：(3.11) 中的对数行列式超额。接下来我们将证明，这一超额是精确体积亏损的一部分。这是讨论等号与稳定性的起点。

4 等号与稳定性

在建立锐界之后，我们考察其证明中的损失。精确亏量首先给出完整的等号族，随后控制近极值椭球的形状、中心和加权接触点。在本节中，我们始终在维数至少为二的情形下使用 John坐标。

4.1 精确亏量

收缩定理给出了一个上界。为了理解等号与近似等号，我们需要确定证明在哪些环节可能损失体积。证书将这些损失分为三项。

4.1.1 证书不等式中的两项损失

对于第 2 节中的一个可行原始–对偶对，设

$$\tau_r = \beta_r - g_r^T c, \qquad x_r = A g_r, \qquad \gamma_r = \alpha_r \tau_r - q_r^T x_r \geq 0, \qquad Y = M^{1/2} A M^{1/2}. \tag{4.1}$$

每个 γ_r 都是一个锥配对。恒等式 $\operatorname{tr} Y = \operatorname{tr}(AM)$ 和 $\det Y = \det A \det M$给出

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \sum_r \gamma_r = \sum_r \alpha_r \beta_r - c^T \sum_r \alpha_r g_r - \operatorname{tr}(AM) \\ &= n - \operatorname{tr}(AM), \\ \mathcal{D} &:= \operatorname{tr} Y - n - \log\det Y \geq 0, \\ G &:= -\log\det M - \log\det A = \mathcal{C} + \mathcal{D}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

这里 $\mathcal{C}$ 记录了聚合支撑不等式中的松弛项。矩阵散度 $\mathcal{D}$ 记录了谱不等式 $\log\det Y \le \mathrm{tr}\ Y - n$中的松弛项。其非负性由每个正特征值 r对应的 $r - 1 - \log\ r \ge 0$推出。间隙 G 可由一个可行椭球和一个可行证书计算得出。

4.1.2 加入几何损失

对于第3节中的显式证书，定义 $\Delta_{\mathrm{geom}} = \log(R_n \det\ M) = \log(R_n \det\ Q)$。定理 5 证明这一项非负，且能控制 χ。

命题13 (　　精确体积亏损)。 在约翰坐标中，每个可行切割椭球都满足

$$\boxed{\epsilon := \log \frac{R_n}{\det A} = \Delta_{\mathrm{geom}} + \mathcal{C} + \mathcal{D}.} \tag{4.3}$$

这三项均非负。对于实际的新约翰椭球，在原坐标中，同一体积亏损为 $\epsilon = \log(R_n w(K)/w(K \cap H))$ 。

证明。 将几何损失加到原始-对偶间隙上。中间证书行列式抵消后，恰好剩下体积亏损:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{geom}} + \mathcal{C} + \mathcal{D} &= \log(R_n \det M) - \log\det M - \log\det A \\ &= \log \frac{R_n}{\det A} = \epsilon. \end{aligned} \tag{4.4}$$

在新的最优值处，$\det\ A = w(K\cap H_v)/w(K)$。仿射不变性给出了所述解释。 □

这三个项具有彼此不同的零点集:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{geom}} = 0 &\iff \chi = 0 \iff s_i \in \{-1, b\} \quad \forall i, \\ \mathcal{C} = 0 &\iff \gamma_r = 0 \quad \forall r, \\ \mathcal{D} = 0 &\iff Y = I \iff A = M^{-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

因此，零亏损同时施加了模型接触几何、互补性和形状匹配。对于较小的亏损，同样的分解给出了定量控制；特别是，$\chi \le 1500\Delta_{\mathrm{geom}} \le 1500\epsilon$。

4.1.3 小矩阵散度意味着接近的形状匹配

我们用 $\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯矩阵范数；向量范数为欧几里得范数。

引理14 （矩阵匹配）。 对于任意归一化可行对，如果 $G \le 1/4$，则

$$\|M^{1/2} A M^{1/2} - I\|_F \le 2\sqrt{G}. \tag{4.6}$$

证明。 我们首先利用小散度给每个特征值设定上界。在这个有界范围内，同一标量散度可以控制与 1 的平方距离。令 $h(t) = t - 1 - \log t$。在 1 的两侧分别对 $h'(t) = 1 - 1/t$ 积分，得到

$$h(t) \ge \frac{(t-1)^2}{2\max\{1, t\}} \quad (t > 0), \qquad h(2) = 1 - \log 2 > \frac{1}{4}. \tag{4.7}$$

对于 Y 的特征值 $\rho_j > 0$，$\sum_j h(\rho_j) = \mathcal{D} \le G \le 1/4$。由于 h 在 $[1,\infty)$ 上递增，每个 $\rho_j < 2$。因此

$$\|Y - I\|_F^2 = \sum_j (\rho_j - 1)^2 \le 4 \sum_j h(\rho_j) = 4\mathcal{D} \le 4G. \tag{4.8}$$

开平方即可证明该结论。 □

第4.4节还为每个锥配对给出了精确的平方和恒等式，并为乘子方向给出了相应的加权估计。对于下文的几何结论，关键点已然显现：间隙较小会迫使矩阵匹配，而亏损的几何部分则控制着 M 与模型证书的接近程度。

4.2 等号族

4.2.1 完整的等号条件

继续使用 John 坐标，并记

$$\mathcal{Z}_b = \{-v\} \cup \{u \in S^{n-1} : u^T v = b\}. \tag{4.9}$$

该集合由与切割方向相反的极点和一个纬圈球面组成。极值椭球$\mathcal{E}(c_*,\ A_*)$即为式 (3.1) 中定义的椭球。

定理 15 （等号分类）。 归一化体 K 达到 $w(K \cap H_v) = R_n w(K)$ 当且仅当它存在一个由 $\mathcal{Z}_b$ 支撑的 ***John*** 标架，使得

$$\operatorname{conv}\big(B_2^n \cup \mathcal{E}(c_*, A_*)\big) \subseteq K \subseteq P_{\mathcal{U}}. \tag{4.10}$$

此时新的约翰椭球恰为 $\mathcal{E}(c_*,\ A_*)$。若等号成立，则每个支撑 K 的正权 ***John*** 标架都位于 $\mathcal{Z}_b$ 中。对于接触多胞体 $P_{\mathcal{U}}$，等号成立仅当其定义 ***John*** 标架由 $\mathcal{Z}_b$ 支撑。

证明。 对于必要性，亏损为零首先确定接触高度和椭球形状，然后由活跃支撑确定其中心。对于充分性，夹逼关系中的候选椭球已经给出了所需体积。

必要性：先确定形状，再确定中心。 固定任意一个支撑 John 标架，并假设 $\det A = R_n$。亏损恒等式给出

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 \ &\Longrightarrow\ \Delta_{\text{geom}} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = 0 \\ &\Longrightarrow\ \chi = 0, \quad Q = M = M_0, \quad U = I, \quad A = A_*. \end{aligned} \tag{4.11}$$

现在形状已确定。为确定中心，将活跃支撑值与模型的支撑值进行比较。由于 $\alpha_i > 0$ 且 $p_i = A_* u_i / \|A_* u_i\|$，互补性可化简为

$$0 = \gamma_i = \alpha_i\big(1 - u_i^T c - \|A_* u_i\|\big), \qquad u_i^T (c - c_*) = 0 \quad \forall i. \tag{4.12}$$

第二个恒等式使用了模型支撑方程。各向同性现在恢复出中心：

$$\|c - c_*\|^2 = \sum_i \lambda_i \big(u_i^T (c - c_*)\big)^2 = 0. \tag{4.13}$$

因此 $\mathcal{E}(c_*,\ A_*) \subseteq K \cap H_v$，而凸性给出了（4.10）中的左包含关系。右包含关系就是（2.5）。该标架是任意的，从而证明了对每个 John 标架都成立的断言。

充分性：使用包含其中的模型椭球。假设由 $\mathcal{Z}_b$ 支撑的 John 标架满足 (4.10)。根据 John 刻画和模型的可行性，可得

$$w(K) = \kappa_n, \qquad w(K \cap H_v) \geq \kappa_n \det A_* = R_n \kappa_n. \tag{4.14}$$

定理 1 给出了反向不等式。对于 $K = P_{\mathcal{U}}$，根据第 3.1 节中的三个支撑值即可直接得出模型的可行性。

□

等号条件确定了新的椭球及其活跃接触几何。正如 (4.10) 中的两个包含关系所示，它仍允许体的其余部分存在自由度。

4.2.2 超越正则单纯形的极值体

等号标架的纬圈部分可以由低一维空间中的任意 John 标架构造而成。这为定理 15 中的自由度提供了具体描述。

命题 16（横向构造）。设单位向量 $w_i \in v^\perp$ 和正权重 μ_i 满足 $\sum_i \mu_i w_i = 0$ 和 $\sum_i \mu_i w_i w_i^T = P$。则接触点

$$u_i = bv + \sqrt{1-b^2}\, w_i, \qquad \lambda_i = \frac{\mu_i}{1-b^2}, \qquad u_{\text{pole}} = -v, \qquad \lambda_{\text{pole}} = \frac{1}{1+b} \tag{4.15}$$

构成一个由 $\mathcal{Z}_b$ 支撑的 ***John*** 标架。

证明。 权重重标定补偿了横向长度 $\sqrt{1-b^2}$，而极点权重则使轴向一阶矩达到平衡。我们验证相同的选择也能得到轴向二阶矩。由于 $w_i \perp v$ and $\|u_i\|^2 = b^2 + (1-b^2)\|w_i\|^2 = 1$，这些向量的范数均为单位长度。对横向二阶矩取迹，得到

$$\sum_i \mu_i = n - 1 = \frac{1-b}{b}, \qquad S := \sum_i \lambda_i = \frac{1}{b(1+b)}. \tag{4.16}$$

因此，极点项与纬度项满足

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{pole}} u_{\text{pole}} + \sum_i \lambda_i u_i &= \left(-\frac{1}{1+b} + bS \right) v + \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \sum_i \mu_i w_i = 0, \\ \lambda_{\text{pole}} u_{\text{pole}} u_{\text{pole}}^T + \sum_i \lambda_i u_i u_i^T &= \left(\frac{1}{1+b} + b^2 S \right) vv^T + \sum_i \mu_i w_i w_i^T \\ &= vv^T + P = I. \end{aligned} \tag{4.17}$$

第二行中的混合项因 $\sum_i \mu_i w_i = 0$ 而消失。所有权重均为正，且所有高度均位于 $\{-1, b\}$ 中。

□

例如，取 $w_i = \pm e_j$, $j = 1, \ldots, n-1$，其中 $\mu_i = 1/2$。在三维情形下，设 $v = e_3$。四个纬度接触点的 John 权重各为 $9/16$，极点 $-e_3$ 的权重为 $3/4$。它们的接触多胞体是一个四棱锥

$$K = \{(x, y, z) : z \geq -1, \quad 2\sqrt{2}|x| + z \leq 3, \quad 2\sqrt{2}|y| + z \leq 3\}. \tag{4.18}$$

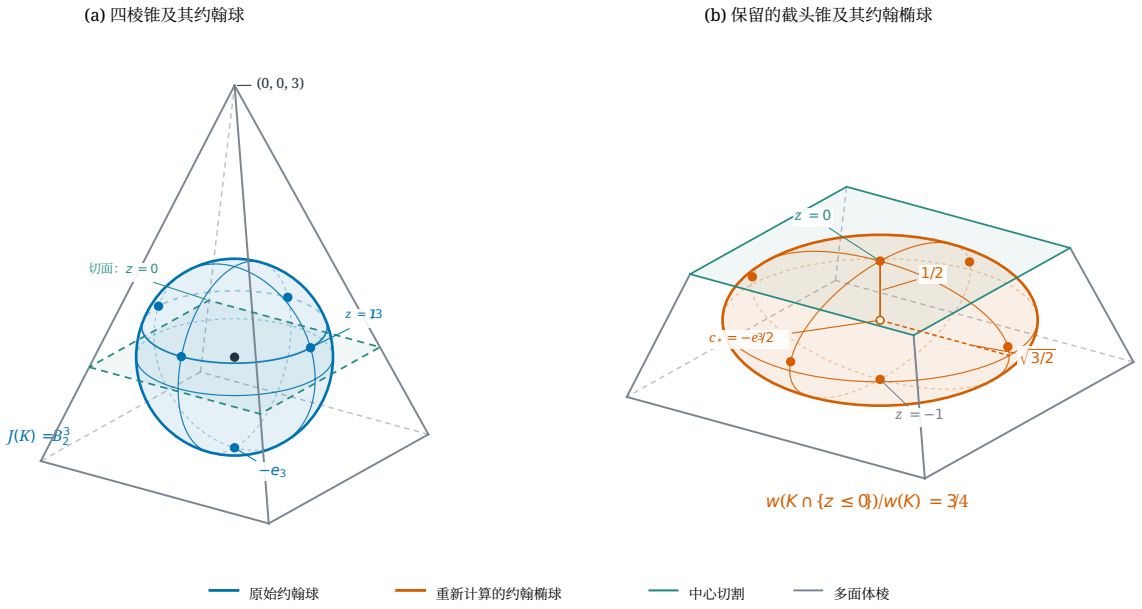

图2：三维中的方锥极值体。(a) 单位球在高度 $z = 1/3$ 处与四个三角形侧面相切，在 $-e_3$ 处与正方形底面相切。(b) 中心切割后留下一个方台。其约翰椭球与四个侧面、底面和切面相切；其半轴为 $\sqrt{3}/2$，$\sqrt{3}/2$，$1/2$。填充的彩色点标示接触点，橙色空心点标示新的中心。两个面板采用相同的正交投影视向，(b) 中的视图有所放大。这个有五个面的极值体展示了图1单纯形模型之外的自由度。

它的底面顶点为 $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -1)$，顶点为 $(0, 0, 3)$。命题 16 和定理 15 给出 $J(K) = B_2^3$ 和

$$\begin{aligned} J(K \cap \{z \le 0\}) &= c_* + A_* B_2^3, \qquad c_* = -\frac{1}{2} e_3, \\ A_* = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right), &\qquad \frac{w(K \cap \{z \le 0\})}{w(K)} = \det A_* = \frac{3}{4} = R_3. \end{aligned} \tag{4.19}$$

因此，正四面体只是三维等式族中的一个成员。(4.10) 中两个集合之间的任何体也都是极值体。

这对稳定性有直接影响。接近等号应当意味着接近共同的极值椭球和接触族，但不能要求每个体都接近某个唯一的单纯形。

4.3 椭球及其接触点的稳定性

亏损恒等式几乎立即给出了定性的等号论证。定量稳定性需要通过估计将其中的三个小项转化为距离。我们先陈述几何估计，再将其与矩阵匹配结合起来。

4.3.1 证明所需的几何估计

引理 17 （几何控制）。 对于显式证书，

$$\|Q - M_0\|_F^2 \le \frac{1-b}{2-b}\chi, \qquad \sum_i \lambda_i \operatorname{dist}(u_i, \mathcal{Z}_b)^2 \le \frac{32}{3}\chi. \tag{4.20}$$

若 $\chi \le 3/2000$，则 $\Delta_{\mathrm{geom}} \ge \chi/32$。

证明见第 4.4.2–4.4.3 节。第 4.4.2 节通过引理 20 证明两个全局估计。第 4.4.3 节通过引理 21 证明局部蕴含，检验两个小量条件之间的转换，并完成引理 17 的证明。

即使没有小缺陷假设，(4.3) 和引理 17 也给出 $\sum_i \lambda_i \operatorname{dist}(u_i,\ \mathcal{Z}_b)^2 \le 16000\epsilon$。因此，接触几何在全局范围内受到控制，且在接近等号时常数更优。

4.3.2 形状、中心和接触点稳定性

定理18 （维数无关稳定性）。设 $\mathcal{E}$（c、 A）是 *John* 坐标下任意一个可行切割椭球，并假设 $0 \le \epsilon = \log(R_n/\det A) \le 10^{-6}$。那么

$$\begin{aligned} \chi \le 32\epsilon, \qquad \|Q - M_0\|_F \le 4\sqrt{\epsilon}, \\ \|A - A_*\|_F \le 30\sqrt{\epsilon}, \qquad \|c - c_*\| \le 50\sqrt{\epsilon}, \end{aligned} \qquad \sum_i \lambda_i \operatorname{dist}(u_i, \mathcal{Z}_b)^2 \le \frac{1024}{3}\epsilon. \tag{4.21}$$

这些常数与 n 无关。阈值 10^{-6} 是进入引理 17 局部区域的充分条件；下文的证明将明确展示这一蕴含关系。数字 30 和 50 是结合形状估计与中心估计后得到的方便上界。

下文的证明使用引理 17，其证明按上文所述留待后续处理。形状和中心步骤中使用的极因子估计与支撑函数失配估计将在第4.4.4节中建立。

证明。我们先从接触缺陷过渡到证书，再过渡到形状和中心 .

接触几何。 首先使用全局上界进入小缺陷区域，然后使用更强的局部上界。这就是设置关于 ϵ 的阈值的目的。由 (4.3) 和引理 17，

$$\chi \le 1500\epsilon \le \frac{3}{2000} \quad \Longrightarrow \quad \chi \le 32\Delta_{\mathrm{geom}} \le 32\epsilon. \tag{4.22}$$

因此，

$$\|Q - M_0\|_F^2 \le \frac{1-b}{2-b}\chi \le \frac{\chi}{2} \le 16\epsilon, \qquad \sum_i \lambda_i \operatorname{dist}(u_i, \mathcal{Z}_b)^2 \le \frac{32}{3}\chi \le \frac{1024}{3}\epsilon. \tag{4.23}$$

形状。 需要合并两项误差：矩阵匹配控制 A 相对于 M^{-1}的误差，几何估计控制 M^{-1}相对于 $A_* = M_0^{-1}$的误差。令 $Y = M^{1/2} A M^{1/2}$。于是 $G \le \epsilon$，由引理14可得 $\|Y - I\|_F \le 2\sqrt{\epsilon}$。第4.4.4节确立了 $\lambda_{\min}(M)\ \lambda_{\min}(M_0) > 7/10$ 和$\|M - M_0\|_F \le 12\sqrt{\epsilon}$。利用 $A_* = M_0^{-1}$，

$$\begin{aligned} \|A - A_*\|_F &\le \|M^{-1/2}(Y - I)M^{-1/2}\|_F + \|M^{-1}(M_0 - M)M_0^{-1}\|_F \\ &\le \frac{\|Y - I\|_F}{\lambda_{\min}(M)} + \frac{\|M - M_0\|_F}{\lambda_{\min}(M)\lambda_{\min}(M_0)} \\ &\le \left(\frac{20}{7} + \frac{1200}{49}\right)\sqrt{\epsilon} \le 30\sqrt{\epsilon}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

逆差恒等式保持乘法顺序，且不要求交换性。

中心。 从物体在接触法向量上的投影恢复位移。每个投影包含三项：支撑松弛量、接触高度与等式模型之间的不匹配，以及已在上文给出界的形状误差。令 $r_i = 1 - c^T u_i - \|Au_i\| \geq 0$。由于 $\gamma_i \geq \alpha_i r_i$ and$\alpha_i \geq \lambda_i/4$,

$$\sum_i \lambda_i r_i \leq 4 \sum_i \alpha_i r_i \leq 4\mathcal{C} \leq 4\epsilon. \tag{4.25}$$

函数 $g_*(s) = \|A_* u\| - 1 - s/2$，对于 $u^T v = s$，度量模型在该接触高度处的支撑不匹配。它在等号接触点处为零。第4.4.4节证明了 $\sum_i \lambda_i g_*(s_i)^2 \leq 8\chi$。相减支撑值并利用各向同性，得到

$$\begin{aligned} c - c_* = & -\sum_i \lambda_i r_i u_i - \sum_i \lambda_i g_*(s_i) u_i \\ & + \sum_i \lambda_i \big(\|A_* u_i\| - \|Au_i\|\big) u_i. \end{aligned} \tag{4.26}$$

对于任意标量 a_i，框架贝塞尔不等式为 $\|\sum_i \lambda_i a_i u_i\|^2 \leq \sum_i \lambda_i a_i^2$。此外,

$$\sum_i \lambda_i \big|\|A_* u_i\| - \|Au_i\|\big|^2 \leq \sum_i \lambda_i \|(A_* - A)u_i\|^2 = \|A_* - A\|_F^2. \tag{4.27}$$

由三角不等式和贝塞尔不等式可得

$$\|c - c_*\| \leq 4\epsilon + \|A - A_*\|_F + \sqrt{8\chi} \leq 50\sqrt{\epsilon}. \tag{4.28}$$

这就证明了（4.21）中的所有估计。 □

这一结论适用于每个近极值可行椭球，包括最优解。其几何解释是，对数体积亏损较小会迫使形状和中心的误差处于平方根尺度。接触估计带有权重，因此无法控制单个 John 权重任意小的接触点。所有距离均在 John 归一化后测量，且不声称整个体与某个唯一极值体之间存在距离控制。

4.4 稳定性的辅助估计

现在我们给出引理 17 的证明，该证明在第4.3.1节中暂缓；同时给出定理18证明中暂缓的辅助形状估计和中心估计。第 4.4.2–4.4.3 节分别证明引理 17 的整体部分和局部部分；第4.4.4节则补充定理18所需的其余输入。这些量有三种不同的作用： ϵ 衡量总的对数体积亏损， χ 衡量接触点偏离等号成立集合的程度，而 $\sigma = 2\chi/[d(2+b)]$ 则是在块归一化下表示同一接触缺陷。我们首先将 χ 转化为矩阵界和接触距离界。随后，我们在等号附近改进行列式下界，并将所得的矩阵控制传递到椭球的形状和中心上。

这些常数记录了这一推导链中依次使用的充分估计。引理 21 中的阈值确保二次对数界适用；第4.4.4节使用固定的谱界来控制求逆。最后的系数 30 和 50 汇总了这些估计，并不声称它们是最优稳定性常数。

4.4.1 互补性与矩阵匹配

使用 (4.1)–(4.2) 中的原始量和对偶量。以下恒等式还给出了第4.1.3节中提到的加权乘子估计。这里，$(\tau,\ x)$ 表示一个一般的标量–向量锥对；带下标的 $(\tau_r,\ x_r)$ 是 (4.1) 中的支撑松弛量和向量。

命题 19 （定量互补性与矩阵匹配）。对于锥可行的 $(\alpha,\ q)$ 和$(\tau,\ x)$，

$$2\alpha\tau(\alpha\tau - q^T x) = \|\alpha x - \tau q\|^2 + \alpha^2(\tau^2 - \|x\|^2) + \tau^2(\alpha^2 - \|q\|^2). \tag{4.29}$$

若 $G \le \epsilon \le 1/4$，则

$$\|Y - I\|_F \le 2\sqrt{\epsilon}, \qquad \sum_{\alpha_r>0} \alpha_r\tau_r \left\| \frac{x_r}{\tau_r} - \frac{q_r}{\alpha_r} \right\|^2 \le 2\epsilon. \tag{4.30}$$

此处已去除零法向冗余不等式。将 Y 替换为 $A^{1/2}MA^{1/2}$ 后，第一个估计仍然成立。

证明。平方和恒等式将较小的锥配对转化为归一化锥方向之间的接近。展开平方即可证明（4.29），而锥可行性使其右侧的每一项都非负。对于非零法向量，$A \succ 0$ 和原始可行性推出 $\tau_r \ge \|Ag_r\| > 0$。当 $\alpha_r > 0$ 时，将（4.29）除以 $\alpha_r\tau_r$ 并求和。总锥差距至多为 ϵ，由此得到第二个界。

矩阵估计见引理14：$\|Y - I\|_F \le 2\sqrt{G} \le 2\sqrt{\epsilon}$。对称正定矩阵 $M^{1/2}AM^{1/2}$ 和 $A^{1/2}MA^{1/2}$ 具有相同的特征值，因此它们到单位矩阵的弗罗贝尼乌斯距离相等。这就证明了最后一个断言。 □

4.4.2 引理 17 的整体部分：几何残差

我们回到第 3.3 节中的分块记号和接触点记号。我们的目标是让标量缺陷 χ发挥两种作用：作为证书的矩阵误差的界，以及作为接触点到等号成立集合距离的界。对于矩阵界，我们要为每个接触点找到一个残差，使其平方范数与该接触点在 χ中的项成正比。然后，各向同性会将这些残差组合起来，而无需维数因子。

引理 20 （几何残差）。对于显式证书，

$$\|Q - M_0\|_F^2 \le \frac{1-b}{d}\chi, \qquad \|\widehat{F} - I\|_F^2 \le \frac{\chi}{d}, \qquad \sum_i \lambda_i \operatorname{dist}(u_i, \mathcal{Z}_b)^2 \le \frac{32}{3}\chi. \tag{4.31}$$

证明。**步骤 1：将证书误差表示为接触点残差**。从 Q 中减去模型证书，并利用零一阶矩加上一个在聚合量中为零的项。这样，每个残差在极点和模型纬度处都为零。对于满足$y \perp v$的 $u = sv + y$，所得残差为

$$\xi(u) = -\frac{s-b}{d(1-as)}\big[(1-b)(s+1)v + \sqrt{1-b}\,y\big]. \tag{4.32}$$

展开 $Q - M_0$，再代入约翰一阶矩和二阶矩，得到

$$Q - M_0 = \sum_i \lambda_i u_i \xi(u_i)^T, \qquad \|\xi(u)\|^2 = \frac{1-b}{d}\frac{(1+s)(s-b)^2}{1-as}. \tag{4.33}$$

为清晰起见，化简前的轴向系数为 $f(s)(s-a)-(2-t)s+b$，横向系数为 $kf(s)-\sqrt{1-b}$。根据平衡，新增的常向量 bv 对聚合量的贡献为零。将它们化简即可得到（4.32），再由正交性得到范数恒等式。

步骤 2：利用各向同性界定矩阵误差总量。以 $\sqrt{\lambda_i}u_i$ 为列的矩阵具有标准正交行。根据贝塞尔不等式，聚合量的弗罗贝尼乌斯范数平方不超过加权残差平方之和。将此结果应用于 (4.33)，即可得出第一个估计。要将其转移到归一化矩阵上，使用 $Q-M_0=F_0^{1/2}(\widehat{F}-I)F_0^{1/2}D$。两个外侧因子的最小奇异值之积为 $\sqrt{1-b}$，由此得到第二个估计。因此，(4.31) 中的两个矩阵常数来自精确的残差恒等式和固定的归一化。

步骤 3：比较标量残差与几何距离。等号成立集合由一个极点和一个纬圈球面组成。我们在这两个部分中选取一个显式的比较点。只需证明

$$\frac{(1+s)(s-b)^2}{1-as}\geq\frac{3}{32}\operatorname{dist}(u,\mathcal{Z}_b)^2. \tag{4.34}$$

在 $s=-1/2$ 处分界，可在两个区域内得到简单的一致界。若 $s\leq-1/2$，则取极点，其平方距离为 $2(1+s)$；于是 $(s-b)^2\geq1/4$ 且 $1-as\leq4/3$。若 $s\geq-1/2$，则选取纬圈上横向方向相同的点；若$y=0$，可任选一个单位横向向量。其平方距离为

$$(s-b)^2+\left(\sqrt{1-s^2}-\sqrt{1-b^2}\right)^2\leq4(s-b)^2. \tag{4.35}$$

事实上，有理化将平方根差的平方界定为 $(s-b)^2(s+b)^2/(1-b^2)\leq3(s-b)^2$。此外，$(1+s)/(1-as)\geq3/8$。这两个比较给出了 (4.34) 中相同的系数 $3/32$；其倒数就是 (4.31) 中的接触距离常数。用 John 权重加权求和，即完成证明。

□

引理 17 的整体部分已证明。(4.31) 中的第一和第三个不等式恰好是 (4.20) 中的两个估计，因为 $d=2-b$。引理 17 的局部蕴含仍有待在第 4.4.3 节证明。

全局估计所提供的内容。结合定理 6、命题13 和引理 20，可得

$$\chi\leq1500\epsilon,\qquad\sum_i\lambda_i\operatorname{dist}(u_i,\mathcal{Z}_b)^2\leq16000\epsilon,\qquad\log\det\widehat{F}\geq\frac{1}{1000}\|\widehat{F}-I\|_F^2. \tag{4.36}$$

4.4.3 引理 17 的局部部分：等号附近的强制性

全局估计足以将近极值椭球置于模型的一个小邻域内。这里，我们将在该邻域内改进其系数。思路是，正的线性项 $\operatorname{tr}(F-I)=\sigma-x$ 应当大于对数行列式 F 中的二次余项。我们需要对整个扰动（包括 j）给出足够精确的界，才能确保这一差值保持为正。

下文的阈值 10^{-3} 是进行该比较的充分大小条件。中间界$1/40$ 和 $1/30$ 规定了证明中使用的小谱区间；有用的结论是最终下界 $\sigma/16$。

引理 21 (局部强制性)。若 $\sigma\leq10^{-3}$，则

$$\log\det\widehat{F}\geq\frac{\sigma}{16}\geq\frac{\chi}{32}. \tag{4.37}$$

^证明。若 $\sigma = 0$，则由 $F = I$ 得证。假设 $\sigma > 0$。

步骤 1：限制横向特征值。我们首先利用引理 11，在由 K_E 确定的度量下控制 E 和 j。根据定义，这里 $0 \le L \le d(1-b)/(d+b^2) < 1$，且 $(d+b^2) - d(1-b) = 2b > 0$。因此，引理 11 给出

$$A_E + \|K_E^{-1} j\|^2 \le \frac{\sigma}{2}. \tag{4.38}$$

E 的每个特征值 $e > -1/2$ 因此都满足 $e^2/(1+2e) \le 1/2000$。这个标量不等式蕴含 $|e| \le 1/40$：当 e 在任一侧远离零时，该商会增大，而且在 $\pm 1/40$ 处的值已经超过 $1/2000$。取 $1/40$ 可得特征值所在的简单区间 $[19/20, 21/20]$，其中的矩阵为 K_E。现在，我们可以比较 (4.38) 中的度量与通常的弗罗贝尼乌斯范数和欧几里得范数：

$$\|E\|_F^2 + \frac{20}{21}\|j\|^2 \le \frac{21}{40}\sigma. \tag{4.39}$$

步骤 2：控制完整的扰动。其平方范数包含 $2\|j\|^2$，因此（4.39）中的估计还需要对耦合再给出一个上界。格拉姆约束给出 $\|j\|^2 \le x(t + 1/40) \le 47\sigma/160$。系数 $47/160$ 结合了 $xt \le 9\sigma/32$ 和 $x/40 \le \sigma/80$。此外，$x^2 \le \sigma/4000$。结合这些估计可得到方便的上界 $5\sigma/6$：

$$\|\widehat{F} - I\|_F^2 = x^2 + 2\|j\|^2 + \|E\|_F^2 \le \frac{5}{6}\sigma, \qquad \|\widehat{F} - I\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{30}. \tag{4.40}$$

步骤 3：让迹增益支配对数余项。大小假设和（4.40）将每个特征值扰动限制在 $[-1/30, 1/30]$ 中。在此区间上，对导数积分得到 $\log(1+z) \ge z - (15/29)z^2$；系数为 $15/29 = 1/[2(1-1/30)]$。二次^项由（4.40）控制，而 $\mathrm{tr}(F - I) = (1 - d/4)\sigma \ge \sigma/2$。它们的差为

$$\log\det \widehat{F} \ge \frac{\sigma}{2} - \frac{15}{29}\frac{5\sigma}{6} = \frac{2\sigma}{29} \ge \frac{\sigma}{16}. \tag{4.41}$$

上界 2　　$\sigma/29$ 向下取整为 $\sigma/16$，以供后续使用。最后，$\sigma = 2\chi/(4 - b^2) \ge \chi/$　　2. □

引理 17 延后证明的完成。引理 17 中的前两个上界属于引理 20。其假设用 χ 表示，而局部引理使用 σ，因此我们明确核对两者之间的转换。对于小缺陷的断言，$\chi \le 3/2000$ 蕴含 $\sigma = 2\chi/(4 - b^2) \le (8/15)\chi \le 1/1250 < 10^{-3}$。因此，由引理 21 和 (3.13) 可得 $\Delta_{\mathrm{geom}} \ge \chi/32$。这证明了剩余的断言，并如第4.3.1节所承诺的，完成了引理 17 的证明。

4.4.4 定理18 的剩余估计：形状与中心

现在我们证明第4.3.2节中延后的极分解因子估计和支撑函数失配估计。我们将在定理18的假设下，完成从证书误差到椭球误差的推导，尤其是$\epsilon \le 10^{-6}$。接触估计 (4.22) 已经给出 $\chi \le 32\epsilon$，_ 因而可得 $\|Q - M_0\|_F \le 4\sqrt{\epsilon}$。剩下的工作是通过极分解因子和矩阵求逆传递这一界，然后根据支撑值恢复中心。下面的常数是这些传递过程的显式上界。

步骤 1：确保极分解因子始终可逆。设 $\delta = \|Q - M_0\|_{\mathrm{op}} \le 4\sqrt{\epsilon} \le 0.004$。由于 $M_0 = 2vv^T + \sqrt{1 - bP}$，根据三角不等式，对每个向量 x，都有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \delta\right)\|x\| \le \|Q^T x\| \le (2 + \delta)\|x\|, \qquad \|Q^T x\|^2 = x^T M^2 x. \tag{4.42}$$

将这些不等式应用于 $M \succ 0$ 的单位特征向量。每个特征值都属于 $[1/\sqrt{2}-\delta,\, 2+\delta]$。在对 δ 的假设界限下，有理数界 $7/10$ 和 $201/100$ 始终位于此区间之外：

$$\lambda_{\min}(M) > \frac{7}{10}, \qquad \lambda_{\max}(M) < \frac{201}{100}, \qquad \|Q\|_{\mathrm{op}} \le 2+\delta < \frac{201}{100}. \tag{4.43}$$

下界可防止矩阵求逆在不受控制的情况下放大小误差。上界将在下一步控制乘积差。

步骤 2：将误差从 Q 转移到其极分解因子。 由于 $M^2 = QQ^T$，差值$X = M - M_0$ 满足一个线性矩阵方程。将其与 X 取弗罗贝尼乌斯内积，利用正谱下界控制 $\|X\|_F$。恒等式 $MX + XM_0 = QQ^T - M_0^2$ 给出

$$\begin{aligned}(\lambda_{\min}(M) + \lambda_{\min}(M_0))\|X\|_F^2 &\le \mathrm{tr}(X^T M X) + \mathrm{tr}(X^T X M_0) \\ &= \langle X, QQ^T - M_0^2\rangle_F \\ &\le \|X\|_F \|QQ^T - M_0^2\|_F.\end{aligned} \tag{4.44}$$

对于 $X = 0$，结论显然成立；否则约去 $\|X\|_F$。由于 $QQ^T - M_0^2 = (Q - M_0)Q^T + M_0(Q^T - M_0)$,

$$\begin{aligned}\|M - M_0\|_F &\le \frac{\|QQ^T - M_0^2\|_F}{\lambda_{\min}(M) + \lambda_{\min}(M_0)} \\ &\le \frac{(\|Q\|_{\mathrm{op}} + \|M_0\|_{\mathrm{op}})\|Q - M_0\|_F}{7/5} \le \frac{401}{35}\sqrt{\epsilon} \le 12\sqrt{\epsilon}.\end{aligned} \tag{4.45}$$

这里， $401/35$ 是代入谱界后得到的系数；12 是一个方便的上界。

步骤 3：将误差转移到椭球形状。 矩阵匹配控制 $A - M^{-1}$，而步骤 2 利用相同的正下界控制 $M^{-1} - M_0^{-1}$。(4.24) 中的逆矩阵差估计给出

$$\|A - A_*\|_F \le \left(\frac{20}{7} + \frac{1200}{49}\right)\sqrt{\epsilon} \le 30\sqrt{\epsilon}. \tag{4.46}$$

系数中的两项分别对应这两种误差，它们的和小于 30。非严格结论包含 $\epsilon = 0$。

步骤 4：通过接触缺陷表示模型的支撑不匹配。为求出中心，我们需要在每个接触点处比较模型的支撑值与原始支撑平面。平方并相减后，极点因子和纬度因子便直接显现出来。对于单位向量 $u = sv + y,\, y \perp v$，计算

$$\|A_* u\|^2 - \left(1 + \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} + \frac{1 - s^2}{1 - b} - \left(1 + \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{(1+s)(b-s)}{1-b}. \tag{4.47}$$

因此，有理化得到

$$g_*(s) := \|A_* u\| - 1 - \frac{s}{2} = \frac{(1+s)(b-s)}{(1-b)(\|A_* u\| + 1 + s/2)}. \tag{4.48}$$

因此，平方失配等于接触缺陷项乘以一个有界因子。界$\|A_*u\|+1+s/2\ge 1$、$(1+s)(1-as)\le 2$和$(1-b)^2\ge 1/4$给出系数 8：

$$g_*(s)^2 \le 8\,\frac{(1+s)(s-b)^2}{1-as}, \qquad \sum_i \lambda_i g_*(s_i)^2 \le 8\chi. \tag{4.49}$$

步骤5：恢复中心并汇总估计。通过相减支撑值，可将 $c-c_*$ 的每个投影表示为松弛项、模型失配和形状误差之和：

$$(c-c_*)^T u_i = -r_i - g_*(s_i) + \|A_*u_i\| - \|Au_i\|. \tag{4.50}$$

乘以 $\lambda_i u_i$ 并求和，利用各向同性恢复 $c-c_*$ 本身。第4.3节中的三角不等式和贝塞尔估计给出

$$\|c-c_*\| \le 4\epsilon + \sqrt{8\chi} + \|A-A_*\|_F \le 50\sqrt{\epsilon}. \tag{4.51}$$

在这个最后的估计中，$\sqrt{8\chi}\le 16\sqrt{\epsilon}$，形状项至多为 $30\sqrt{\epsilon}$，且 $4\epsilon \le 0.004\sqrt{\epsilon}$。系数 50 是它们之和的一个方便上界。结合引理 17 的完整证明，这些估计证实了定理18证明中所有延后的依据。

5 精确对偶性及其进一步推论

几何证明使用了一个可行证书。现在我们将确立精确的原始–对偶解释，并考察其计算和矩阵推论。精确对偶性和迭代适用于所有正维数；后续关于显式框架证书的结果，则在维数至少为二时使用第3节中的定义。

5.1 精确证书与最优接触点

优化有限证书可以恢复椭球最优值。下面的构造使用实际最大化椭球上的约翰接触点，同时还确定从任意最优原始–对偶对中恢复的接触点。

构造一个最优证书。 回到 (2.3) 中的有界满维多面体 $\mathcal{P}$ 。下一命题证明原始值与归一化对偶值均能取到且相等。

命题 22 （来自约翰接触点的最优乘子）。 问题 （2.3）和（2.13）均能取到其最优值。如果 $\mathcal{E}(c,\ A)=J(\mathcal{P})$，则存在聚合量为 $M=A^{-1}$ 且具有零锥配对的归一化对偶乘子。因此，（2.3）和（2.13）的最优值之和为零。

证明。 根据实际最优椭球的接触点构造对偶变量。我们首先确定每个接触点对应的活动面法向量，然后重新缩放约翰权重，使其矩成为对偶约束。

识别活动面。令 $\mathcal{E}(c,\ A)=J(\mathcal{P})$，其存在性是经典结果，并将 John 刻画应用于 $A^{-1}(\mathcal{P}-c)$。单位接触点 p 位于某个定义平面上。对于其指标 r，

$$\|Ag_r\| \le \beta_r - g_r^T c = (Ag_r)^T p \le \|Ag_r\|\|p\| = \|Ag_r\|. \tag{5.1}$$

因此 $p = Ag_r/\|Ag_r\|$，该平面是活动的。将接触点分配给这些指标，并合并其权重。记作 $\ell_r = \|Ag_r\| > 0$，可得

$$p_r = \frac{Ag_r}{\ell_r}, \qquad \sum_r \mu_r p_r = 0, \qquad \sum_r \mu_r p_r p_r^T = I, \qquad \sum_r \mu_r = n. \tag{5.2}$$

将接触权重转化为乘子。这些权重满足 $\mu_r \geq 0$ 和 $\mu_r(\beta_r - g_r^T c - \ell_r) = 0$。除以活跃支撑长度 ℓ_r 后，零一阶矩就变成了对偶平衡。定义$\alpha_r = \mu_r/\ell_r$ 和 $q_r = \alpha_r p_r$。于是

$$\begin{aligned} \sum_r \alpha_r g_r &= A^{-1} \sum_r \mu_r p_r = 0, \\ \sum_r \alpha_r \beta_r &= c^T \sum_r \alpha_r g_r + \sum_r \mu_r = n, \\ \|q_r\| &= \alpha_r, \\ \alpha_r(\beta_r - g_r^T c) - q_r^T A g_r &= \alpha_r(\beta_r - g_r^T c - \ell_r) = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

利用各向同性匹配逆形状。二阶矩给出了剩余的对偶矩阵方程。由于 $g_r = \ell_r A^{-1} p_r$，聚合量为

$$\sum_r q_r g_r^T = \sum_r \mu_r p_r p_r^T A^{-1} = A^{-1}. \tag{5.4}$$

锥约束和零配对立即成立。现在由引理 4可知，该归一化证书是对偶最优的，且间隙为零。

□

从最优对恢复接触点。反向论证确定了活跃支撑，并表明归一化方向能够恢复一个 John 标架。

命题23（最优性与接触点恢复）。对于（2.3）和（2.13）的一个可行对是最优的，当且仅当

$$M = A^{-1}, \qquad \alpha_r(\beta_r - g_r^T c) - q_r^T A g_r = 0 \quad \textit{for every } r. \tag{5.5}$$

对于每个 $\alpha_r > 0$,

$$\beta_r - g_r^T c = \|Ag_r\|, \qquad q_r = \alpha_r \frac{Ag_r}{\|Ag_r\|}. \tag{5.6}$$

*W*对于 $p_r = Ag_r/\|Ag_r\|$ 和 $\mu_r = \alpha_r \|Ag_r\|$，向量与权重满足 (5.2)。

证明。在原始–对偶最优解处，命题 22 给出 $\det A \det M = 1$。于是，迹–算术平均–几何平均链 (2.12) 中处处取等号，这迫使 $Y = M^{1/2} A M^{1/2} = I$ 且 $\operatorname{tr}(AM) = n$。锥配对均为非负，并且根据平衡与归一化，它们的和为 $n - \operatorname{tr}(AM) = 0$。因此，每个配对都为零。反过来，$M = A^{-1}$ 使证书界取等号，从而证明该可行对具有最优性。对于 $\alpha_r > 0$，支撑不等式与柯西–施瓦茨不等式中取等号可得 (5.6)。

剩下的问题是从对称化聚合量中恢复完整的二阶矩。要恢复各向同性，令 $T = \sum_r \alpha_r g_r g_r^T / \|Ag_r\|$。聚合量方程是关于 T 的 Sylvester方程：$AT + TA = 2A^{-1}$。因此，对于 $H = T - A^{-2}$,

$$AH + HA = 0, \qquad 0 = \operatorname{tr}\big(H(AH + HA)\big) = 2\operatorname{tr}(AH^2) \geq 2\lambda_{\min}(A)\|H\|_F^2. \tag{5.7}$$

因此， $H=0$ 和 $T=A^{-2}$。正定性无需交换性假设便确定了非对称化矩矩阵。接触矩如下：

$$\sum_r \mu_r p_r = A\sum_r \alpha_r g_r = 0, \qquad \sum_r \mu_r p_r p_r^T = ATA = I, \qquad \sum_r \mu_r = \operatorname{tr} I = n. \tag{5.8}$$

这就证明了 (5.2)。 □

这些结果阐明了证书在精确优化中的含义。第3节中的通用收缩证明使用了引理 4 和一个明确的可行证书；它不需要求解归一化对偶。第5.3.1节给出了常见的未归一化对偶及其尺度约化。

5.2 迭代、舍入与计算

这两条几何脉络也阐明了该结果对切平面法的贡献。收缩定理给出了精确的势函数下降。证书给出了依赖于实例的界，并为椭球子问题提供了停止准则。舍入则为后续计算提供了受控的坐标系。

5.2.1 精确中心迭代界

推论24 (连续精确中心切割**)。** 假设 $K_{j+1} = K_j \cap H_j$，其中每个切割超平面都经过 $c(K_j)$。那么

$$w(K_k) \le R_n^k w(K_0). \tag{5.9}$$

如果 K_0 包含在半径为 R 的球内，并且所有保留区域都包含半径为 $r>0$的目标球，那么

$$k \le \frac{n\log(R/r)}{-\log R_n}. \tag{5.10}$$

证明。 迭代收缩，然后将所得上界与保留目标球所需的正体积进行比较。运用定理 1 进行归纳可得（5.9）。 w的单调性以及两个球的包含关系意味着

$$\kappa_n r^n \le w(K_k) \le R_n^k w(K_0) \le R_n^k \kappa_n R^n. \tag{5.11}$$

由于 $\kappa_n>0$ 和 $0<R_n<1$,

$$n\log r \le k\log R_n + n\log R \quad\Longrightarrow\quad k(-\log R_n) \le n\log(R/r), \tag{5.12}$$

这就是（5.10）。 □

乘积界将连续切割分别处理。一个自然的方向是研究：在重新确定中心的过程中，近等号几何构型之间的相容性是否能够为连续切割得到更尖锐的界。

因此，满足保留球假设的预言机过程无法在超过此界后继续生成此类切割。对于最小化问题，在将 (5.10) 转化为目标函数精度保证之前，必须先确定适当的目标函数次水平集内半径。这一限定与其他基于体积的定位分析中所采用的限定相同。

精确常数改进了有限维系数，同时保留了内接椭球法已知的$O(n\log(R/r))$阶数。其对维数的依赖关系是显式的：

$$-\log R_n = \log 2 - \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j(j+1)n^j} = \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{24n^3} + O(n^{-4}). \tag{5.13}$$

对于 $n \geq 2$，绝对收敛的对数级数给出

$$\begin{aligned} -\log R_n &= \log 2 + \frac{n-1}{2}\log(1 - 1/n) \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} + \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2j} - \frac{1}{2(j+1)} \right) n^{-j}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

这证明了（5.13）；其中的正级数项随 n 递减，因此 $R_n \uparrow \sqrt{e}/2$。结合 $R_1 < R_2$，单调性在每个正维数中都成立。

5.2.2 舍入还有助于初始化下一个子问题

包含关系（1.4）表明，计算约翰椭球的价值不止于中心选择。在其坐标系中，$B_2^n \subseteq K \subseteq nB_2^n$，因此既有可行内球，也有受控外半径。

经过一次中心切割后，以 $-v/4$ 为中心、半径为 $1/8$ 的球仍然可行。因此，经过平移和缩放可得显式界

$$B_2^n \subseteq 8\big((K \cap H_v) + v/4\big) \subseteq (8n+2)B_2^n. \tag{5.15}$$

对于 $\|z\| \leq 1$，点 $x = -v/4 + z/8$ 满足

$$\|x\| \leq \frac{3}{8} < 1, \qquad v^T x \leq -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} < 0, \tag{5.16}$$

由此证明第一个包含关系。对于 $x \in K \cap H_v$，舍入界给出 $\|8(x+v/4)\| \leq 8\|x\| + 2 \leq 8n+2$，从而证明第二个包含关系。因此，精确的 John 归一化可提供显式的下一子问题初始化，其半径比为 $O(n)$。对于重复计算，自然的扩展包括可行热启动，以及通过近似中心进行经认证的切割。

5.2.3 单个实例的可计算界

普适定理给出了最坏情形的界。对于特定实例，可能存在更强的证书。可以固定式 (3.4) 中的平衡权重，仅优化向量乘子；也可以在归一化对偶中优化所有乘子。显式证书对这两种选择都可行，因此此类优化只能改善其行列式界。

对于任意多面体椭球子问题，若原始–对偶可行对的间隙为 G，则满足

$$\operatorname{vol} \mathcal{E}(c, A) \geq e^{-G} w(\mathcal{P}). \tag{5.17}$$

事实上，对于 $p_* := \log(w(\mathcal{P})/\kappa_n)$，弱对偶给出

$$p_* \leq -\log\det M = \log\det A + G \quad \Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{vol} \mathcal{E}(c, A)}{w(\mathcal{P})} = e^{\log\det A - p_*} \geq e^{-G}. \tag{5.18}$$

这是原始–对偶可行计算的相对体积停止准则。将此间隙与中心误差联系起来，有望为通过计算得到的中心的切面提供可认证的收缩保证。

对于固定的 John 标架和切割方向，令 $\mathfrak{D}(\mathcal{U},\ v)$ 表示归一化对偶中的最大行列式。精确对偶性和接触约化给出

$$\frac{w(P_{\mathcal{U}} \cap H_v)}{\kappa_n} = \mathfrak{D}(\mathcal{U}, v)^{-1}, \qquad C_n = \left(\inf_{\mathcal{U},v} \mathfrak{D}(\mathcal{U}, v) \right)^{-1}, \qquad \inf_{\mathcal{U},v} \mathfrak{D}(\mathcal{U}, v) = R_n^{-1}. \tag{5.19}$$

最后一个下确界由等号模型取到。精确对偶性和接触恢复已在第 5.1 节中证明。第 5.3 节讨论证书的进一步性质及相关矩阵不等式。

5.3 对偶与矩阵的进一步性质

前面各节确立了尖锐收缩、等号和稳定性结果。现在我们讨论优化和矩阵视角的延伸：未归一化对偶、共同旋转的最优性适用范围、另一种亏损恒等式，以及完整的耦合不等式族。这些结果进一步阐述了前面的论证；即使不参照本节内容，核心证明也已完备。

5.3.1 未归一化对偶及其尺度

对于第 2 节中的有界满维多面体 $\mathcal{P}$，保留原始形式 (2.3)。选择归一化证书问题 (2.13) 是为了直接得到迹界。通常的拉格朗日对偶解释了这种归一化；在处理未归一化乘子时也很有用。

这种标准凸形式在 [4, 第 8 节4] 以及最大体积椭球相关文献 [18]中都有讨论。洛伦兹锥的自对偶性和对数行列式共轭给出了对偶问题

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\alpha,q} \quad & \sum_r \alpha_r \beta_r - n - \log\det M \\ \text{subject to} \quad & \sum_r \alpha_r g_r = 0, \quad \|q_r\| \le \alpha_r, \quad M = \sum_r \operatorname{sym}(q_r g_r^T) \succ 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

事实上，取 $s = \sum_r \alpha_r \beta_r$ 拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(A, c) = \log\det A - \operatorname{tr}(AM) - c^T \sum_r \alpha_r g_r + s, \\ &\sup_{A\succ 0, c} \mathcal{L} = \begin{cases} s - n - \log\det M, & \sum_r \alpha_r g_r = 0,\ M \succ 0, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.21}$$

有限上确界在 $A = M^{-1}$处取得。这是标准的对数行列式共轭计算 [4, 第 3 章和 5]。

移除冗余乘子尺度。 正比例缩放不会改变平衡和锥可行性。因此，在考虑其余对偶变量之前，我们可以先优化这一个标量。对于一个对偶可行点，原始可行性意味着 $s \ge \operatorname{tr}(AM) > 0$。将所有乘子缩放 $\rho > 0$，得到 $\Psi(\rho) = \rho s - n - n\log \rho -$ 对数行列式 M。结合 $u = \rho s/n$，

$$\Psi(\rho) - \Psi(n/s) = n(u - 1 - \log u) \ge 0. \tag{5.22}$$

因此，最优尺度满足 $\sum_r \alpha_r\beta_r = n$，从而恰好得到归一化证书问题 (2.13)。根据命题 22，其最优值是原始最优值的相反数，且原始和对偶最优值均可达到。严格可行的小椭球还允许使用 Slater 定理。第 5.1 节中的构造还通过接触几何确定了最优乘子。

5.3.2 共同旋转的最优性

命题 25 （共同压缩下的最优性）。 若 $\|R\|_{\mathrm{op}} \le 1$ 且 $N = \mathrm{sym}(RQ^T) \succ 0$，则 $\det N \le \det Q$。旋转 $R = U$ 在 (3.79) 处取等号。

证明。 我们将行列式与其正对称部分进行比较，然后对 R 使用压缩界。令 $RQ^T = N + K$，其中 $K^T = -K$，并用 $T = N^{-1/2} K N^{-1/2}$ 对反对称部分进行归一化。以下 Gram 行列式恒等式给出了第一个比较:

$$\det(I+T)^2 = \det\big((I+T)^T(I+T)\big) = \det(I + T^T T) \ge 1 \tag{5.23}$$

可得 $|\det(N+K)| \ge \det N$。此外，

$$\|R\|_{\mathrm{op}} \le 1 \quad\Longrightarrow\quad 0 \preceq R^T R \preceq I \quad\Longrightarrow\quad |\det R|^2 = \det(R^T R) \le 1. \tag{5.24}$$

因此 $\det N \le |\det(RQ^T)| = |\det R| \det Q \le \det Q$。在 $R = U$ 处，(3.81) 给出 $N = M$，并取等号。 □

这种受限最优性并不排除通过分别改变乘子方向而获得改进。证明仅使用实半正定矩阵，从而避免了单独讨论反对称矩阵的复特征值。

5.3.3 另一种亏损分解

这种分解通过奇异值估计追踪同一个间隙。各项分别对应支撑松弛量、核范数的三角不等式以及标量对数不等式。第四项则记录所得核范数上界与极分解证书中所用迹之间的差值。令 $\|\cdot\|_*$ 表示奇异值之和，并令

$$\begin{aligned} S &= \sum_i \alpha_i (1 - c^T u_i - \|A u_i\|) + t(-c^T v - \|Av\|), \\ T_{\mathrm{nuc}} &= \sum_i \alpha_i \|A u_i\| + t\|Av\| - \|AQ\|_*, \\ H_{\mathrm{nuc}} &= \|AQ\|_* - n - \log\det(AQ), \\ \mathcal{R}_{\mathrm{pol}} &= \|AQ\|_* - \mathrm{tr}(AM). \end{aligned} \tag{5.25}$$

原始可行性给出 $S \ge 0$。对于其他项，使用核范数的标准秩一界和迹界 [9]。如果 $\rho_j > 0$ 是 AQ 的奇异值，那么

$$\begin{aligned} \|AQ\|_* &\le \sum_i \alpha_i \|A u_i p_i^T\|_* + t\|Avv^T\|_* \\ &= \sum_i \alpha_i \|A u_i\| + t\|Av\|, \\ H_{\mathrm{nuc}} &= \sum_{j=1}^{n} (\rho_j - 1 - \log\rho_j) \ge 0, \\ \mathrm{tr}(AM) &= \mathrm{tr}(AQU^T) \le \|AQ\|_* \|U\|_{\mathrm{op}} = \|AQ\|_*. \end{aligned} \tag{5.26}$$

这里 $\det(AQ) > 0$ 确保 $\sum_j \log\rho_j =$ 对数行列式(AQ)。这四项均为非负。为了将它们与主要亏损恒等式联系起来，保留极分解修正项：它被加到锥差距中，并从矩阵散度中减去，因此在它们的和中相互抵消。直接计算得

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= S + T_{\mathrm{nuc}} + \mathcal{R}_{\mathrm{pol}}, \\ \mathcal{D}(A, M) &= H_{\mathrm{nuc}} - \mathcal{R}_{\mathrm{pol}}, \\ \epsilon &= \log\det \widehat{F} + S + T_{\mathrm{nuc}} + H_{\mathrm{nuc}}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

一般而言， $\mathcal{C} \neq S + T_{\mathrm{nuc}}$，因为乘以 A 会改变极分解因子。当 A 与 M可交换时，修正项为零。基于锥的恒等式 (4.3) 更适用于研究等号与稳定性，因为其中的两个优化项分别衡量互补性和矩阵匹配。

5.3.4 一般与互补耦合不等式

引理 11 提取了主证明中使用的特定耦合估计。同样的有限矩计算还给出了适用于每个对称测试矩阵和每个向量的不等式。我们记录这一完整表述，以及它在迹范围另一端点处的对应结论。

对于这些推广，引入

$$\begin{aligned} h &= d + b^2, \qquad \sigma_* := \frac{2(1-b)}{h}, \qquad \tau = \sigma_* - \sigma, \\ e_* &:= \frac{2b}{h} = \frac{\sigma_*}{m}, \qquad \bar{\chi} = \sum_i \nu_i (1 - s_i)(s_i + b)^2. \end{aligned} \tag{5.28}$$

这里， τ 是允许迹的未使用部分， $e_* = \sigma_*/m$，而 $\bar{\chi}$ 是互补的非负接触和。引理 11 中的系数为 $L = d\tau/2$。标量关系 (3.56) 变为$\chi + (1-b)(2+b)^2\bar{\chi}/h^2 = d(2+b)(1-b)/h$。

引理 26 （耦合柯西不等式）。 对于任意对称的 $Z \in \mathbb{S}^m$ 和 $q \in \mathbb{R}^m$,

$$(\operatorname{tr}(ZE) + q^T j)^2 \le \sigma \left[\operatorname{tr}\big(Z^2(E + \tfrac{1}{2} I_m)\big) + 2q^T Z j + \frac{d}{4}\tau \|q\|^2 \right]. \tag{5.29}$$

证明。 目标是将左侧的线性量表示为一个加权接触和，从而通过一次柯西–施瓦茨不等式应用同时控制两部分。取 $\gamma = \sqrt{d(1-b)/h}$；于是矩恒等式给出

$$\operatorname{tr}(ZE) + q^T j = -\frac{1}{d} \sum_i \nu_i (s_i - b) y_i^T \big(Z y_i + \gamma (s_i + b) q \big). \tag{5.30}$$

选择系数 γ ，使得 q 项恰好为 $q^T j$。对每一项应用 $|y_i^T w| \le \|y_i\| \|w\|$ ，并利用 $\|y_i\|^2 = (1 - s_i)(1 + s_i)$。在加权柯西–施瓦茨不等式中，因子 $\nu_i(1+s_i)(s_i-b)^2$的和为 χ，从而得到如下界

$$\frac{\chi}{d^2} \sum_i \nu_i (1 - s_i) \| Z y_i + \gamma (s_i + b) q \|^2. \tag{5.31}$$

极点处的各项含有 $y_i = 0$，因此无需除以 $1 \pm s_i$。展开剩余的平方范数后，会得到关于 Z 的二次项、关于 Z， q 的混合项，以及关于 q 的二次项。

以下三个恒等式按此顺序对它们求值：

$$\begin{aligned}\sum_i \nu_i(1-s_i)y_i y_i^T &= \frac{2d}{2+b}(E+\tfrac{1}{2}I_m),\\ \gamma\sum_i \nu_i(1-s_i)(s_i+b)y_i &= \frac{2d}{2+b}j,\\ \gamma^2\bar{\chi} &= \frac{d^2}{2(2+b)}\tau.\end{aligned} \tag{5.32}$$

前两项由 (3.55) 和 (3.58) 得出；第三项用到了互补缺陷关系 (3.56)。因此， τ 作为纯 q 项的系数出现。合并这三项可得

$$\begin{aligned}&\sum_i \nu_i(1-s_i)\|Zy_i+\gamma(s_i+b)q\|^2\\ &\quad=\frac{2d}{2+b}\left[\operatorname{tr}\big(Z^2(E+\tfrac{1}{2}I_m)\big)+2q^TZj+\frac{d}{4}\tau\|q\|^2\right].\end{aligned} \tag{5.33}$$

代换和 $\sigma = 2\chi/[d(2+b)]$ 证明了 (5.29)。 □

互补端点。 将横向扰动替换为 $e_*I_m - E$ 后，其迹 σ 也相应变为 τ。相应的估计为

引理 27 (互补柯西不等式)。 采用引理 *10* 中的记号，对于任意对称的 Z 和任意 q，

$$\big(\operatorname{tr}(Z(e_*I_m-E))+q^Tj\big)^2 \le \tau\left[\operatorname{tr}\big(Z^2(tI_m-E)\big)+2q^TZj+\frac{d}{4}\sigma\|q\|^2\right]. \tag{5.34}$$

证明。与引理 26 中的加权柯西–施瓦茨论证一样，使用互补缺陷 $\bar{\chi}$ 。选择 $c_- = (1-ab)/h$ 和 $\gamma_- = \sqrt{d}/[\sqrt{1-b(2+b)}]$ ，使线性接触和能够以所需系数还原平移横向块以及与之的耦合。矩恒等式给出

$$\operatorname{tr}(Z(e_*I_m-E))+q^Tj = c_-\sum_i \nu_i(s_i+b)y_i^T\big(Zy_i-\gamma_-(s_i-b)q\big). \tag{5.35}$$

加权柯西–施瓦茨不等式给出了 (5.35) 平方的上界：

$$c_-^2\bar{\chi}\sum_i \nu_i(1+s_i)\|Zy_i-\gamma_-(s_i-b)q\|^2. \tag{5.36}$$

互补缺陷关系将第一个因子变为 τ 的倍数。展开的平方范数包含相反的横向矩 $tI_m - E$。利用 (3.58) 和矩恒等式可得

$$\begin{aligned}&c_-^2\bar{\chi} = \frac{(1-b)(2+b)}{2d}\tau,\\ &\sum_i \nu_i(1+s_i)\|Zy_i-\gamma_-(s_i-b)q\|^2\\ &\quad=\frac{2d}{(1-b)(2+b)}\left[\operatorname{tr}\big(Z^2(tI_m-E)\big)+2q^TZj+\frac{d}{4}\sigma\|q\|^2\right].\end{aligned} \tag{5.37}$$

前因子相消，得到 (5.34)。与 $s_i = \pm 1$ 接触的点具有 $y_i = 0$，因此该论证涵盖这些极点，且不会出现除零。 □

将 $Z = 0$ 代入 (5.29) 或 (5.34)，即可得到 $\|j\|^2 \le d\sigma\tau/4$。

5.3.5 逆迹解释

引理 28（逆迹解释）。设 $0 < \sigma < \sigma_*$。令 $\eta = d\tau/4$ 和 $x = d\sigma/4$。那么(5.29)对所有 Z、q成立，当且仅当

$$R_+ = E + \frac{1}{2} I_m - \frac{jj^T}{\eta} \succ 0, \qquad \operatorname{tr}(R_+^{-1}) \le 2m. \tag{5.38}$$

类似地，(5.34) 等价于

$$R_- = tI_m - E - \frac{jj^T}{x} \succ 0, \qquad \operatorname{tr}(R_-^{-1}) \le \frac{m}{t - e_*}. \tag{5.39}$$

证明。 首先通过配方吸收混合项。然后确定最佳的柯西–施瓦茨系数，并给出一个能取到该系数的测试向量。这将证明逆迹界的必要性和充分性。

步骤 1：分离矩阵测试和向量测试。令$q = q' - Zj/\eta$，对 (5.29) 配方。此平移消除了混合二次项，并使 R_+ 成为有效矩阵系数。两种形式变为

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(ZE) + q^T j &= \operatorname{tr}\big(Z(R_+ - \tfrac{1}{2} I_m)\big) + q'^T j, \\ \operatorname{tr}\big(Z^2(E + \tfrac{1}{2} I_m)\big) + 2q^T Z j + \eta\|q\|^2 &= \operatorname{tr}(Z^2 R_+) + \eta\|q'\|^2. \end{aligned} \tag{5.40}$$

在使用其逆矩阵之前，先由不等式本身证明严格正性。若 $w^T R_+ w < 0$，取 $Z = ww^T$, $q' = 0$ ，则右侧为负。若 $R_+ w = 0$ 对于 $w \ne 0$，同样的取值使右侧为零，而左侧为 $(-\|w\|^2/2)^2 > 0$ 。因此 $R_+ \succ 0$。

步骤 2：确定每种测试情形所需的系数。将 R_+ 对角化，并对 Z 的对角元素以及 q' 应用加权柯西–施瓦茨不等式；非对角元素在 $\operatorname{tr}(Z^2 R_+)$ 中只贡献非负项。由此得到的系数为

$$\begin{aligned} S_+ &= \operatorname{tr}\big((R_+ - \tfrac{1}{2} I_m)^2 R_+^{-1}\big) + \frac{\|j\|^2}{\eta} \\ &= \operatorname{tr} R_+ - m + \frac{1}{4} \operatorname{tr}(R_+^{-1}) + \frac{\|j\|^2}{\eta} \\ &= \sigma - \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tr}(R_+^{-1}). \end{aligned} \tag{5.41}$$

要证明不存在更小的系数也能满足要求，可采用使这些标量柯西–施瓦茨不等式取等号的测试：

$$Z_+ = I_m - \frac{1}{2} R_+^{-1}, \qquad q'_+ = j/\eta. \tag{5.42}$$

在此测试中，线性形式和二次型都等于 S_+。(5.41) 中的消去只留下需要界定的逆迹。因此，对所有 Z, q 成立的不等式等价于$S_+ \le \sigma$，或 $\operatorname{tr}(R_+^{-1}) \le 2m$。这证明了 (5.38) 的两个方向，包括 $S_+ = 0$ 的情形。

步骤 3：在互补端点处应用相同的论证。 对于 (5.34)，令$q = q' - Zj/x$ 并置 $\beta = t - e_* = (1-b)^2(2+b)/(2h) > 0$。所得的完整形式具有相同的形状，只是将 $(R_+, 1\,2, \eta)$ 替换为 (R_-, β, x)。秩一测试再次给出 $R_- \succeq 0$。加权柯西–施瓦茨不等式在 $Z_- = I_m - \beta R_-^{-1}$, $q'_- = j/x$ 处取等号，其系数为

$$\begin{aligned} S_- &= \operatorname{tr}\big((R_- - \beta I_m)^2 R_-^{-1}\big) + \frac{\|j\|^2}{x} \\ &= (-t + 2e_*)m - \sigma + (t - e_*)^2 \operatorname{tr}(R_-^{-1}). \end{aligned} \tag{5.43}$$

由于 $\tau = me_* - \sigma$,

$$S_- \le \tau \iff (t-e_*)^2 \operatorname{tr}(R_-^{-1}) \le m(t-e_*) \iff \operatorname{tr}(R_-^{-1}) \le \frac{m}{t-e_*}. \tag{5.44}$$

这就是 (5.39)，且两个方向的证明均已给出。 □

5.3.6 更多模型和扩展

对于顶点为 x_0、……、x_n 且质心为 $\bar{x}$ 的单纯形，标准的仿射传输公式为$J(\Delta) = \bar{x} + H_\Delta^{1/2} B_2^n$，其中 $H_\Delta = [n(n+1)]^{-1} \sum_i (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$。该公式可通过传输正则单纯形内切球得到。主要证明只需用到其接触构型以及第 3.1 节中的支撑函数计算。

对于满维偏移切割多面体，同样的对偶构造使用下述经过改变的归一化。对于多个切割，平衡条件包含它们的所有法向量：

$$\sum_i \alpha_i + \eta\alpha_0 = n \quad (v^T x \le \eta), \qquad \sum_i \alpha_i u_i + \sum_\ell \alpha_\ell v_\ell = 0. \tag{5.45}$$

这些表述揭示了附加约束下证书如何变化。偏移切割与连续重心化切割的定量界，以及精确偏移剖面和针对给定同时切割的锐界，都是值得进一步研究的方向。

为完整起见，式（3.6）所依据的洛伦兹变换为

$$\begin{pmatrix} 1 & -av^T \\ -av & vv^T + kP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - as \\ (s-a)v + kPu \end{pmatrix}, \qquad s = u^T v. \tag{5.46}$$

将第二个分量除以为正的第一个分量，即得证书中使用的单位方向 p。这一构造在每个维数下都相同；维数上的区别体现在其行列式证明中。

6 结论

每个正维数下，最优中心切割因子均为 R_n，且等号可以取到。显式证书将原始约翰接触点与新椭球体积的上界联系起来。随后，精确亏损恒等式将接触几何、锥互补性和形状匹配分别揭示出来，从而得到完整的等号族和定量稳定性。

该证书构造适用于任意维数，但其行列式证明仍将二维、三维及至少四维的情形分别处理。统一的证明和更精确的稳定性常数仍是值得研究的问题

。进一步的研究方向包括偏移切割的界、连续切割下的定量收缩，以及通过近似中心进行经认证的切割。精确偏移剖面、尖锐的同时切割界，以及针对计算得到的中心的定量校正成本，仍是开放问题；整体稳定性需要与非唯一的等号族相容的假设。

这些结果还阐明了内接椭球在定位中的作用：收缩控制势，舍入控制坐标归一化，而可行的原始-对偶间隙则能认证椭球计算的质量。这些论述将几何上的进展与中心化的成本和精度区分开来。解析证明还配有一套已完成的 Lean 4 形式化。

形式验证与可复现性。 该形式化使用 Lean v4.35.0-rc2 和提交 0a6c8e0355da0405d616f80b9f8232c4fab2cc5b 上的 mathlib [5, 15]。它涵盖全部 28 项具名结果及其支撑性数学论述，并对全部 198 个编号方程给出了明确对应关系。独立的源代码构建和传递公理审计只接受 propext、Classical.choice 和 Quot.sound。配套的源代码发行包 SharpContractionCutJohnEllipsoid 提供固定版本依赖、命题映射以及可复现的验证脚本。第 1.2 节中关于质心切割和算法复杂度的三项背景断言，不属于约定的形式化范围。

AI 辅助工具的使用

作者使用大型语言模型协助发现研究结果、构建数学证明，并在 Lean 4 中进行形式验证。

参考资料

[1] Kurt M. Anstreicher. 关于凸规划中的 Vaidya 体积切割平面法。《运筹学数学》，22:63–89，1997。[2] Kurt M. Anstreicher. 最大体积内接椭球的复杂性改进。《*SIAM* 优化杂志》，13(2):309–320，2002。[3] D. S. Atkinson 和 P. M. Vaidya. 一种使用解析中心的凸规划切割平面算法。《数学规划》，69:1–43，1995。[4] Stephen Boyd 和 Lieven Vandenberghe. 凸优化. 剑桥大学出版社，2004。[5] Leonardo de Moura 和 Sebastian Ullrich. Lean 4 定理证明器与编程语言。载于自动演绎——*CADE 28*，第 12699 卷《计算机科学讲义》，第 625–635 页。施普林格，2021。doi: 10.1007/978-3-030-79876-5 37。[6] Martin Gr¨otschel、L´aszl´o Lov´asz 和 Alexander Schrijver. 几何算法与组合优化. 施普林格，柏林，1988。[7] Branko Gr¨unbaum. 用超平面划分质量分布和凸体。《太平洋数学杂志》，10(4):1257–1261，1960。doi: 10.2140/pjm.1960.10.1257。[8] Osman G¨uler 和 Filiz G¨urtuna. 凸体的极值体积椭球、其对称性及其在若干特殊情形下的确定。arXiv:0709.0707，2007。URL https://arxiv.org/abs/0709.0707v1。版本 1。[9] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson. 《矩阵分析》. 剑桥大学出版社，1985。

[10] Fritz John. 带不等式附加条件的极值问题。载于为纪念 *R. Courant* 六十寿辰而献上的研究与论文，第 187–204 页。Interscience，纽约，1948。[11] L. G. Khachiyan. 关于内接椭球体积的一个不等式。《离散与计算几何》，5:219–222，1990。doi: 10.1007/BF02187786。[12] Leonid G. Khachiyan 和 Michael J. Todd. 多面体最大内接椭球近似的复杂性。《数学规划》，61:137–159，1993。doi: 10.1007/ BF01582144。[13] Yurii Nesterov 和 Arkadii Nemirovskii. 凸规划中的内点多项式算法. SIAM，费城，1994。[14] S. P. Tarasov、L. G. Khachiyan 和 I. I. Erlikh. 内接椭球法。苏联科学院院刊，298(5):1081–1085，1988。俄文。英文译本：《苏联数学学报》37 (1988)，226–230。[15] mathlib 社区。Lean 数学库。载于第九届 *ACM SIGPLAN* 认证程序与证明国际会议论文集，CPP 2020。ACM，2020。doi: 10.1145/3372885.3373824。[16] Michael J. Todd. 椭球法再探。arXiv:2301.07632，2023。URL https://arxiv. org/abs/2301.07632v2。版本 2。[17] P. M. Vaidya. 一种在凸集上最小化凸函数的新算法。《数学规划》，73:291–341，1996。[18] Yin Zhang 和 Liyan Gao. 最大体积椭球问题的数值解。《*SIAM* 优化杂志》，14(1):53–76，2003。doi: 10.1137/S1052623401397230。[19] Longfei Zhou、Haijun Zou 和 Tianhao Liu. Khachiyan 椭球猜想的谱证明。arXiv:2609.28447，2026。URL https://arxiv.org/abs/2609.28447v1。版本 1，2026年9月23日。