单连通平面 Hölder 域上的严格热点与内部临界点的不存在性

YUTIAN LI

摘要。对于有界单连通平面霍尔德域上第一个正 Neumann 特征值对应的任意非零实特征函数，都不存在内部临界点。霍尔德条件是拟双曲的；等价地，黎曼映射的导数属于 L^{2p}，其对应的 $p > 1$。这涵盖 Lipschitz 域和带有凹角的多边形。允许重特征值和非若尔当边界。证明运用了边界原函数、一致乘子估计，以及对整个极限特征子空间的逼近。当该特征子空间为二维时，任意实基都给出到一个关于原点呈星形的域上的全局坐标。流函数证明了单射性，并导出了边界角导数的泊松公式。保形边界映射具有利普希茨逆映射，且其像是可求长若尔当曲线；其边界角是一个导数不为零且导数霍尔德连续的圆周微分同胚。即使源域光滑且严格凸，像也可能是非凸的。

arXiv:2611.29324v2 [math.AP] 24 Nov 2026

目录

1. 引言与主要结果 2
2. Hölder 域与保形可积性 5
3. 第一正 Neumann 特征子空间 7
4. 弱散度–旋度形式 10
5. 可积次临界势的边界核 11
6. Neumann 梯度的边界迹 15
7. 第一正特征子空间的光滑逼近 18
8. 高斯乘子估计 22
9. 内部临界点与全局坐标 25
附录 A. 倒数正性与希尔伯特空间实现 32
AI 辅助致谢 37
参考文献 37

日期：2026年11月24日。2020 数学主题分类。主要分类35P05；次要分类35B38、35J25、30C20。关键词与短语。严格热点、诺伊曼特征函数、内部临界点、霍尔德 域、保形映射。

1. 引言与主要结果

热点猜想探讨的是，第一个正 Neumann 特征函数是否会在边界上取得其最大值和最小值。这个问题源于具有绝热边界条件的热流的长期行为 [5, 第 1] 节。其严格形式排除了所有内部全局极值。我们在有界单连通平面 Hölder 域上证明了一个更强的结论：每个这样的特征函数都没有内部临界点。特别地，内部鞍点也被排除。

OpenAI 的光滑域定理 [27] 在光滑有界单连通平面域上给出了这一更强的结论，并允许第一个正特征值具有重数。我们将这一结论推广到拟双曲 Hölder 类。这包括所有多边形 Jordan 域，即使有凹角也适用；还包括边界不必是 Jordan 曲线的粗糙域。对于后者，严格热点是通过连续保角拉回来表述的。

设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个有界单连通域。我们将 Neumann 拉普拉斯算子定义为 $L^2(\Omega)$ 中与二次型 $\int_\Omega |\nabla u|^2$ 相对应的非负自伴算子，其型定义域为 $H^1(\Omega)$。当嵌入 $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 紧致时，我们将其特征值按重数列为 $0 = \mu_1 < \mu_2 \le \mu_3 \le \cdots$。此时，对于其第一个正特征值 $\mu = \mu_2$，记

$$E_\mu = \left\{ u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}) : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta = \mu \int_\Omega u\eta \quad \text{for every } \eta \in H^1(\Omega) \right\}.$$

以下所有陈述均涉及非零实特征函数。

对于 $d_\Omega(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$，令 k_Ω 表示拟双曲距离：即在 Ω 中连接这两点的可求长曲线上 $\int_\gamma |d\xi|/d_\Omega(\xi)$ 的下确界。若存在某个 $x_0 \in \Omega$ 以及常数 $C_1, C_2 > 0$，则称 Ω 为霍尔德域，

$$k_\Omega(x_0, x) \le C_1 \log \frac{d_\Omega(x_0)}{d_\Omega(x)} + C_2 \qquad (x \in \Omega). \tag{1.1}$$

因此，此处采用的霍尔德条件涉及拟双曲距离，并不要求边界是一个局部图。我们记 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，$\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$，以及 $\delta(z) = 1 - |z|$。测度 dA 是平面 Lebesgue 测度。对于 $0 < s < \infty$，A^s 表示在 $\mathbb{D}$ 上属于 $L^s(\mathbb{D}, dA)$ 的全纯函数所构成的 Bergman 空间。

定理 1.1 (无内部临界点与严格热点)。 设 Ω 是一个有界单连通平面霍尔德域。则型定义域为 $H^1(\Omega)$的诺伊曼拉普拉斯算子具有紧预解算子。记其第一个正特征值为 $\mu = \mu_2(\Omega)$。每个非零 $u \in E_\mu$都没有内部临界点：

$$\nabla u(x) \neq 0 \qquad (x \in \Omega). \tag{1.2}$$

因此，严格热点性质成立：若 $\Phi : \mathbb{D} \to \Omega$ 是一个共形双射，则$v = u \circ \Phi$ 可连续延拓至 $\mathbb{D}$，并且

$$\min_{\mathbb{S}^1} v < v(z) < \max_{\mathbb{S}^1} v \qquad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.3}$$

既不要求特征值是单特征值，也不要求边界是 *Jordan* 边界。

对于共形双射 $\Phi : \mathbb{D} \to \Omega$，命题 2.1 表明，霍尔德域假设等价于 $\Phi' \in A^{2p}$ 对某个 $p > 1$成立。该可积性意味着 Ω 有界，且$H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 紧；根据引理 3.1，后者给出定理 1.1的紧预解结论。

对于 Jordan 域，这些共形边界值就是 u 的通常边界值。对于非 Jordan 域，（1.3）是在共形边界上表述的；趋近同一个欧氏边界点的不同方式可能对应不同的值。特别是，裂缝的两侧对应不同的边界趋近方式。

定理 1.1 适用于每个有界单连通平面利普希茨域，包括每个带有凹角的多边形 Jordan 域。因此，它回答了 [6,第 6], 节中的问题 1：该问题询问在不假设简单性的情况下，这类域是否具有非严格热点；定理还证明了更强的结论，即不存在任何内部临界点。它也适用于所有有界凸平面域、有界单连通 John 域和拟圆盘。第 2 节定义了

John 条件，并解释了这些包含关系。第2.1节还给出了冯·科赫雪花和一个非 Jordan 裂缝域作为具体例子。

当 E_μ 是二维时，其特征函数给出具有以下边界行为的全局坐标。

推论1.2 (全局特征函数坐标)。 设 Ω 满足定理 *1.1*的假设，并且 维数$_{\mathbb{R}}$ $E_\mu = 2$。对于任意实基 u_1，u_2 属于 E_μ，定义

$$\mathcal{U}(x) = (u_1(x), u_2(x)), \qquad \Sigma = \mathcal{U}(\Omega).$$

于是，U 是到有界 *Jordan* 域 Σ上的实解析微分同胚，该域关于原点呈星形。特征函数 u_1、u_2 在Ω中恰有一个公共零点。对于任意共形双射 $\Phi:\ \mathbb{D} \to \Omega$，映射 $U \circ \Phi$ 可延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 Σ 的同胚，且逆边界映射 $\partial\Sigma \to \mathbb{S}^1$ 是利普希茨的。从原点出发的每条射线都与 $\partial\Sigma$ 恰好相交一次，相交距离是其角度的连续正函数。边界 $\partial\Sigma$ 可求长，并且对于某个 $\beta > 0$，映射 $\zeta \mapsto (U \circ \Phi)(\zeta)/|(U \circ \Phi)(\zeta)|$ 是一个 $C^{1,\,\beta}$ 从 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{R}^2$中单位圆的微分同胚。

对于每个非零的 $w \in E_\mu$，$w \circ \Phi$ 的边界迹在 $\mathbb{S}^1$上恰有两个零点，且它们在共形参数下均为简单零点。$w \circ \Phi$ 在 $\mathbb{D}$ 中的闭节点集是一条弧，$C^{1,\,\beta}$ 除两个端点外，并与 $\mathbb{S}^1$ 正交相交。若 Ω 是 *Jordan* 域，则 U 可延拓为从 Ω 到 Σ的同胚。

证明见推论9.4 和命题 9.5，节点集与径向正则性见推论9.6 和 9.7。这些结论根据 Φ'的可积性给出了明确的正则性指数。

1.1. 背景与早期结果。 Rauch 于 1974 年在杜兰大学提出了这个问题；相关记述见 [5, 第 1]节。在光滑、有界、连通的区域上，诺伊曼热流的首个衰减项是初始温度在首个正特征空间上的投影乘以其指数衰减因子，前提是该投影非零 [5,命题 2.1]。因此，初始温度会选出该特征子空间中的一个特征函数，这也说明了为何需要处理重数问题。

对于在闭包上连续的特征函数，非严格热点性质要求每个内点处的函数值都介于边界最小值和最大值之间。严格热点性质则要求每个内点处的这两个不等式都严格成立。还必须区分两种表述：对每个首个正特征值对应的特征函数都成立，以及存在一个具有该性质的特征函数。这是 [5,Section 1]中讨论的两个不同表述。

无约束平面猜想是错误的。Burdzy 和 Werner [11] 构造了一个有界平面域，其中有两个孔，且第一正 Neumann 特征值为单重；其对应特征函数具有严格内部极大值。Burdzy [12, Theorem 1.1]给出了一个有一个孔的域，其中两个极值都严格超出边界值的范围。单连通平面版本见 [12, 猜想 1.2(ii)]。高维情形也存在障碍：de Dios Pont [15]构造了维数足够高时的光滑凸反例。

Jerison 和 Nadirashvili [23, 定理 1.4] 证明了具有两条对称轴的有界凸平面域上的严格热点结论，包括重特征值的情形。Atar 和 Burdzy [3,定理 1] 证明了 lip 域上的严格热点结论：这类有界利普希茨平面域由两条图形围成，图形的 Lipschitz 常数均不超过一，并在公共区间的两个端点相交。这是利普希茨域中的一个特殊类。Judge 和 Mondal 证明了三角形上不存在内部临界点；阅读他们的原论文时应同时参阅其修正项 [25, 26]。Chen、Gui 和 Yao 对非顶点临界点及方向单调性得出了更精细的结论 [14], ，而 Hatcher 研究了 L 形域及其他非凸多边形族 [22]。Deng、Gui、Jiang、Yang、Yao 和 Zou [16, 定理 1.3]证明了等腰梯形和风筝形上不存在内部临界点，其中包括第一正特征空间为二维的情形。他们还对这些域上的对称性转变和边界临界点进行了分类。

Burdzy [13] 推导出有界单连通域上的非严格热点结论，这些域具有紧 Neumann 预解式，且第一个正特征值为单重。Bañuelos [6] 研究了满足紧性和单重性条件的有限面积单连通域，其极值可在任意薄的边界层中逼近。这些结果使用光滑定理，适用于本文未能全部涵盖的几何类别。Deng、Jiang 和 Yang [17] 证明了每个有界凸平面域上都成立严格的边界模最大值原理，无须假设光滑性或单重性。定理 1.1 排除了这一类域中的所有内部临界点；他们关于高阶特征值的结果探讨的是不同问题。

Pineda Montoya、Gallego González、Porras Barrera 和 Rúa Muñoz [28] 证明了：在角点角度属于 $(0,\ \pi)$ 的分段光滑 Jordan 域上，即使允许特征值重数，梯度也不会处处为零。他们所研究的域不必是全局凸的。本文定理允许存在凹角，并允许在拟双曲条件下出现非 Jordan 边界。

Rohleder 的变分方法通过向量值极小化原理刻画诺伊曼特征函数的梯度 [29]。在 [27], 的光滑域证明中，我们采用了倒数格林核方法、其标量乘子恒等式以及边界支撑论证。希尔伯特空间实现和正高斯核采用 Schoenberg 的经典构造[31]。附录 A 给出了有界势函数倒数定理及其矩阵证明，证明取自[27], 并包含本文所需的取极限步骤。额外的估计构造了诺伊曼梯度的边界原函数，并控制了具有较小正能量的乘积场。对整个首个正特征空间进行逼近，随后即可处理特征值分裂。

特征函数也被用于构造局部坐标。Jones、Maggioni 和 Schul [24, 定理 2.1。1] 通过选取适当的拉普拉斯特征函数，得到具有定量畸变界的局部参数化。推论 1.2 当首个正特征空间的维数为二时，适用于该空间的每一组实基。雅可比不为零保证了局部可逆性。随后，借助一个正流函数验证 Gorni 和 Zampieri 的全局反演判据 [21, 定理 1.1 和命题 1。2], 从而证明单射性和星形性。边界椭圆正则性与泊松公式表明，选定方向后角导数严格为正。这给出了边界同胚、利普希茨逆映射以及节点端点的正则性。

星形性并不意味着像具有凸性。Bérard 和 Helffer 的反例 [8, 定理 1.2 和命题 3。5]给出了具有非凸特征函数坐标像的光滑严格凸源域。Bakry 和 Zribi 所描述的三尖瓣映射以等边三角形为例 [4, 第 3]。我们利用这一已确立的映射，展示角点处径向和角向正则性的丧失，以及唯一星形中心为原点的像；参见第 9.5节。

1.2. 定量乘子估计。 当光滑穷竭逼近粗糙区域时，会出现两个困难。梯度不消失这一性质在 C^1_{loc} 收敛下并不保持，而且第一个正特征值若具有重数，可能会分裂为若干个彼此接近的特征值。我们通过估计乘后向量场的能量，并逼近整个极限特征子空间，来解决这两个困难。

我们在光滑逼近区域上陈述该估计。设 $\Phi:\mathbb{D}\to\Omega$ 是一个共形双射，假设 $F=\Phi'\in A^{2p}$ 对某个 $p>1$ 成立，并令 $r=2p/(p+1)>1$。当 $\rho<1$ 接近 1 时，令

$$\Phi_\rho(z)=\Phi(\rho z),\quad \Omega_\rho=\Phi(\rho\mathbb{D}),\quad \mu_\rho=\mu_2(\Omega_\rho),\quad q_\rho=\mu_\rho|\Phi'_\rho|^2.$$

令 A 表示圆盘上的泊松延拓，并令 $G=(-\Delta_{\mathbb{D},\ D})^{-1}$ 表示狄利克雷格林算子。在 $L^2(\mathbb{D},\ q_\rho\,dA)$ 上，令 Gq_ρ 表示 $f\mapsto G(q_\rho f)$，并令 I 为恒等算子。对于 $g\in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$，令

$$S_\rho=(I-Gq_\rho)^{-1},\qquad V_{\rho,g}=S_\rho Ag.$$

根据引理 3.3，逆运算是有依据的。我们将平面向量 (X_1,X_2) 与 X_1+iX_2 对应，并使用 Wirtinger 导数 $\partial_z=(\partial_x-i\partial_y)/2$ 和 $\partial_{\bar z}=(\partial_x+i\partial_y)/2$。对于 $V\in H^1(\mathbb{D};\mathbb{C})$，定义

$$\mathcal{E}_\rho(V)=\int_{\mathbb{D}}\left(4|V_z|^2-q_\rho|V|^2\right)dA.$$

对于实希尔伯特空间值乘子，按坐标进行延拓，并将所得复向量场的能量相加。引理4.1 和（4.3）表明，当相应的向量场与 $\partial\Omega_\rho$相切时，它是非负的。

固定 $z_0 \in \mathbb{D}$。令 $K_\rho = K_{q_\rho}$ 和 $N_\rho = N_{q_\rho}$ 分别为 (5.2) 和 (5.3) 中定义的核。命题 A.4 构造了一个映射 b_ρ，从 $\mathbb{S}^1$ 映入实希尔伯特空间$\mathcal{H}_\rho$，使得

$$\|b_\rho(s) - b_\rho(t)\|^2 = \frac{K_\rho(z_0,s)K_\rho(z_0,t)}{N_\rho(s,t)} \qquad (s,t \in \mathbb{S}^1,\ s \neq t).$$

我们将 b_ρ 规范化，使其在 $\mathbb{S}^1$的一个固定点处取值为零。命题 5.2 证明了其 $C^{1,\beta}$ 对$0 < \beta < \min\{1/2,\ 1 - 1/p\}$具有正则性。

定理 1.3 (一致乘子估计**)**。沿用前述记号，存在 $\rho_0 \in (0,1)$及 $C > 0$，它们仅依赖于 Φ、p 和 z_0，并具有如下性质。设 $\rho \in (\rho_0,1)$，且令 $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$ 满足 $g(s)/(is\Phi'_\rho(s)) \in \mathbb{R}$ 对每个 $s \in \mathbb{S}^1$均成立。这就是$\partial\Omega_\rho$上的相切条件。记 θ 为 $\mathbb{S}^1$上的角坐标，假设在分布的意义下，

$$g = g_0 + \partial_\theta g_1, \qquad g_0, g_1 \in L^r(\mathbb{S}^1;\mathbb{C}), \qquad M = \|g_0\|_{L^r(\mathbb{S}^1)} + \|g_1\|_{L^r(\mathbb{S}^1)}.$$

对于 $0 < t \leq 1$，令 $d_{\rho,\,t} = \exp(-t\|b_\rho\|^2/2)$。那么

$$\mathcal{E}_\rho(V_{\rho,d_{\rho,t}b_\rho g}) \leq C\left(\frac{\mathcal{E}_\rho(V_{\rho,g})}{t} + |V_{\rho,g}(z_0)|^2 + tM^2\right). \tag{1.4}$$

常数 C 与 ρ、g、t 及希尔伯特空间维数无关。

证明见定理 8.4。尽管该估计使用了 g的分布表示，但陈述中的迹是光滑的。任意具有所示形式的分布未必存在有限能量延拓。粗糙区域上的极限场通过第 7 节中的谱紧性得到。

对于诺伊曼梯度，特征函数方程给出了这类表示，并具有一致的 L^r 界。如果梯度在 $\Phi($$z_0)$处消失，则其逼近的能量 $e_\rho \to 0$以及在 z_0 处的值都趋于零。选取 $t_\rho \downarrow 0$ 使得 $e_\rho/t_\rho \to 0$，则 (1.4) 右侧趋于零。对整个极限特征子空间进行逼近，便可得出乘积极限仍是特征函数梯度。

1.3. **证明思路**。令 λ_1^D**(**Ω**)** 表示第一狄利克雷特征值，并令 $q = \mu|F|^2$。严格不等式 $\mu < \lambda_1^D$ **(**Ω**)** 使得 $(I - Gq)^{-1}$ 保正且有界。第 3 节和 4 节证明谱逼近和弱散度–旋度陈述，包括 $\dim$ $_{\mathbb{R}} E_\mu \leq 2$，且不使用倒数核。第 5 节证明边界核正则性，以及势强 L^p 收敛时的收敛性，并使用 ter Elst–Ouhabaz 的格林函数估计[19]。

第 6 节利用式（6.1）中的倒数导数估计构造边界原函数。这一结果由第 2.3 节式（27）中证明的非严格积分均值界推出 [9,]；这里没有使用该界的严格改进。第 7 节和第 8 节将谱逼近与乘子估计结合起来。随后，第 9.2 节利用 Sawyer 唯一延拓定理，根据调和边界迹的支集导出矛盾 [30]。第 9.3 节构造流函数并应用全局反演判据。第 9.4 节证明边界角公式，利用边界 Schauder 估计获得其正则性，并推导边界和节点推论。第 9.5 节讨论星形中心、凸性和等边三角形。命题 2.1 中对 Hölder 域的刻画使用了 Smith–Stegenga [32]。

端点 $\Phi' \in A^2$ 尚未涵盖。边界原函数估计中的常数可能会随着 $p \downarrow 1$ 而恶化。该论证并未涵盖所有具有紧 Neumann 预解式的有界单连通域，也未涵盖 [6, 第6节问题 2] 中更广泛的有限面积类。

2. Hölder 域与共形可积性

我们首先将拟双曲边界条件（1.1）与共形导数的可积性联系起来。

有界域 Ω 是 John 域，当且仅当存在 $x_0 \in \Omega$ 和 $c > 0$，使得每个 $x \in \Omega$ 都可以通过弧长参数化曲线 γ 与 x_0 相连，其中：$[0, L] \to \Omega$ 满足 $\gamma(0) = x$、$\gamma(L) = x_0$，并且对于 $0 \le s \le L$，有 $d_\Omega(\gamma(s)) \ge cs$。

命题 2.1。设Ω 是一个有界单连通平面域，且 $\Phi\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 是一个共形双射。以下条件等价：

(1) $\Phi' \in L^{2p}(\mathbb{D})$ 对某个 $p > 1$；*(2)* Ω满足拟双曲边界条件 (1.1)。

每个有界单连通平面 *John* 域都满足这些条件。

证明。在前面复合一个固定的圆盘自同构不会影响 Φ' 属于 $L^{2p}(\mathbb{D})$，因此将 $\Phi(0) = x_0$ 归一化。令 λ_Ω 和 h_Ω 分别表示曲率归一化为 -1时的双曲密度和双曲距离。由密度的单调性和科比四分之一定理可得

$$\frac{1}{2d_\Omega(x)} \le \lambda_\Omega(x) \le \frac{2}{d_\Omega(x)}, \qquad \frac{1}{2}k_\Omega(x,y) \le h_\Omega(x,y) \le 2k_\Omega(x,y). \tag{2.1}$$

先设 (1.1) 成立。Smith–Stegenga 定理 [32, 定理 A 和定理2] 给出某个 $c_0 > 0$ 使得

$$\int_\Omega e^{c_0 k_\Omega(x_0,x)}\, dA(x) < \infty. \tag{2.2}$$

该定理不要求 Jordan、可求长性或边界光滑性假设。固定$0 < \varepsilon \le c_0/2$。对于 $x = \Phi(z)$，双曲距离的共形不变性和 (2.1) 推出

$$\delta(z)^{-\varepsilon} \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\varepsilon} = e^{\varepsilon h_\Omega(x_0,x)} \le e^{2\varepsilon k_\Omega(x_0,x)}.$$

由于 Φ 有界，柯西导数估计给出 $|\Phi'(z)| \le C\delta(z)^{-1}$。因此，共形变量替换得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |\Phi'|^{2+\varepsilon}\, dA &\le C^\varepsilon \int_{\mathbb{D}} \delta^{-\varepsilon}|\Phi'|^2\, dA \\ &= C^\varepsilon \int_\Omega \delta(\Phi^{-1}(x))^{-\varepsilon}\, dA(x) \\ &\le C^\varepsilon \int_\Omega e^{2\varepsilon k_\Omega(x_0,x)}\, dA(x) < \infty.\end{aligned}$$

反过来，若对某个 $p > 1$ 有 $\Phi' \in L^{2p}(\mathbb{D})$，则圆盘上的莫雷不等式给出连续延拓 $\Phi \in C^{0,\beta}(\overline{\mathbb{D}})$，其中 $\beta = 1 - 1/p > 0$。其在单位圆上的取值属于 $\partial\Omega$。对于 $z \ne 0$，与径向端点比较可得

$$d_\Omega(\Phi(z)) \le |\Phi(z) - \Phi(z/|z|)| \le C\delta(z)^\beta.$$

由此可得

$$h_\Omega(x_0, \Phi(z)) = \log\frac{1+|z|}{1-|z|} \le \log 2 + \frac{1}{\beta}\log\frac{C}{d_\Omega(\Phi(z))}.$$

利用 $k_\Omega \le 2h_\Omega$，调整加性常数后即可证明 (1.1)。

对于 John 域，取一条如上文定义所述的曲线。在端点处，$L \le d_\Omega(x_0)/c$。对于 $s \le d_\Omega(x)/2$，d_Ω 的一-Lipschitz性质给出 $d_\Omega(\gamma(s)) \ge d_\Omega(x)/2$。在此处分割曲线积分，得到

$$k_\Omega(x, x_0) \le 1 + \frac{1}{c}\max\left\{0, \log\frac{2d_\Omega(x_0)}{c\, d_\Omega(x)}\right\},$$

这意味着（1.1）。 □

2.1. **示例**。 以下示例中的所有域都是有界的、平面的且单连通的。

• Lipschitz 域与多边形。如果经过刚性坐标变换后，在每个边界点附近，域的边界都是某个 Lipschitz 函数的图像，且域位于该图像的一侧，则称该域为 Lipschitz 域。每个有界 Lipschitz 域都是 John 域 [10, 第 582 页，定义 3 之后。1]。命题2.1 因此适用。这包括所有有界单连通 C^1 域以及所有多边形 Jordan 域。允许存在凹角，因此多边形不需要满足凸性假设。

• 凸域。每个有界凸域都是 John 域。事实上，取 $B(x_0, r_0) \subset\Omega$。由凸性可得 $B((1-t)x + tx_0, tr_0) \subset \Omega$，对任意 $x \in \Omega$ 和 $0 < t \leq 1$均成立。因此，从x 到 x_0的线段按弧长 s参数化后，始终与边界保持至少 $r_0 s/\operatorname{diam}\Omega$ 的距离。

• 拟圆盘与一个分形例子。拟圆盘是平面上的拟共形同胚将圆盘映射所得的像。一个黎曼映射 $\Phi : \mathbb{D} \to \Omega$ 到有界拟圆盘的映射，可通过反射 [1]拟共形地延拓到圆的另一侧。该延拓的导数具有局部高阶可积性 [2, 推论 2.2] 给出 $\Phi\prime \in L^{2+\eta}$ 对某个 $\eta > 0$成立。该指数可能取决于域；不假设拟共形畸变存在固定上界。由冯·科赫雪花围成的域给出了一个具有分形边界的具体例子：它是一个 John 域 [10, p。 578]。

• 一个非 Jordan 域。令 $\Omega = \mathbb{D}\setminus [0, 1)$，并令 $D_+ = \{w : |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$。域 D_+有界且凸，因此根据命题 2.1，共形映射 $\Psi : \mathbb{D} \to D_+$ 满足 $\Psi' \in A^{2p}$ 对某个 $p > 1$ 成立。平方映射将 D_+ 共形地映到 Ω。因此， $\Phi = \Psi^2$ 是到 Ω 的共形双射，并且 $|\Phi'| \leq 2|\Psi'|$。定理 1.1 适用，其中裂缝的两侧由不同的共形边界趋近表示。

3. 第一个正 Neumann 特征空间

在本节中，设 $\Phi\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 是一个共形双射，并假设对某个 $p > 1$，有 $F = \Phi' \in L^{2p}(\mathbb{D})$。令 $J = |F|^2$。Dirichlet 拉普拉斯算子由与 Neumann 拉普拉斯算子相同的二次型定义，但定义域改为 $H_0^1(\Omega)$，而非 $H^1(\Omega)$。以下论证既不需要 Ω 上的边界迹，也不需要 Φ到边界的同胚延拓。

3.1. **索伯列夫空间与特征函数的正则性**。

引理 3.1. 在本节的共形假设下，Ω 有界。与Φ 复合可在 $H^1(\Omega)$ 与 $H^1(\mathbb{D})$之间，以及在 $H_0^1(\Omega)$ 与 $H_0^1(\mathbb{D})$之间给出有界同构。变分诺伊曼预解式和狄利克雷预解算子均为紧算子。若 u 是特征值为 λ的实诺伊曼特征函数，则 $v = u \circ \Phi$ 满足

$$\int_{\mathbb{D}} \nabla v \cdot \nabla \eta = \lambda \int_{\mathbb{D}} Jv\eta \qquad (\eta \in H^1(\mathbb{D})), \tag{3.1}$$

以及 $v \in W^{2,\,p}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$。

证明。 全纯函数的次平均值不等式给出

$$|F(z)| \leq C_p \|F\|_{2p} \delta(z)^{-1/p}.$$

由于 $1/p < 1$，径向积分对 Φ 给出一致界。

内部变量替换保持狄利克雷能量不变：

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\mathbb{D}} |\nabla(u \circ \Phi)|^2. \tag{3.2}$$

对于 $u \in H^1(\Omega)$，拉回局部属于 H^1，且其全局梯度范数有限。取一个内部圆盘 $B \Subset \mathbb{D}$。函数 $|F|$ 在 B 上有上界且远离零，因此 $L^2(\Omega)$ 范数控制拉回的 $L^2(B)$ 范数。带有内部 L^2 项的庞加莱不等式，

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq C_B \big(\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{D})} + \|w\|_{L^2(B)}\big)$$

将其应用于有界截断后，再使用法图引理，可得拉回属于 $H^1(\mathbb{D})$，并得到一个有界复合算子。反过来，设 $p' = p/(p-1)$。对圆盘应用霍尔德不等式和 Sobolev 嵌入，可得

$$\int_\Omega |v \circ \Phi^{-1}|^2 = \int_{\mathbb{D}} J|v|^2 \le \|J\|_p \|v\|_{2p'}^2 \le C\|v\|_{H^1(\mathbb{D})}^2.$$

结合（3.2），这就证明了 H^1 同构。光滑紧支撑函数变换后仍为光滑紧支撑函数；由密度性和相同的界可得 H_0^1对应关系。

圆盘上的紧嵌入 $H^1(\mathbb{D}) \Subset L^{2p'}(\mathbb{D})$ 在 $L^2(\mathbb{D},\ J\,dA)$ 中给出紧性，因而 $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 也是紧的。由于 Ω 是连通的，诺伊曼核由常数组成，并且 $\mu_2(\Omega) > 0$。狄利克雷断言既可通过限制得到，也可通过将函数零延拓到一个包含矩形中得到。

两个 H^1 空间之间的对应关系证明了（3.1）。起初，对于每个有限p_1，都有 $v \in L^{p_1}$。选择足够大的 p_1，使得对于某个 $p_0 > 1$ 有 $Jv \in L^{p_0}$。光滑圆盘上的诺伊曼估计给出 $v \in W^{2,\,p_0}$，因此 $v \in L^\infty$。现在 $Jv \in L^p$，同一估计给出$_{v \in W^{2,\,p} \subset C(\mathbb{D})}$。□

3.2. **严格狄利克雷谱隙**。

引理3.2。对于 $\mu = \mu_2(\Omega)$，有

$$0 < \mu < \lambda_1^D(\Omega). \tag{3.3}$$

证明。令 $\lambda = \lambda_1^D(\Omega)$，并取正的狄利克雷基态 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$。对于任意满足 $|k|^2 = \lambda$ 的 $k \in \mathbb{R}^2$，令

$$w_k = e^{ik\cdot x} - \frac{\int_\Omega e^{ik\cdot x}}{\int_\Omega \phi_1}\,\phi_1.$$

它具有零均值且不为零。定义

$$Q(f,h) = \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla h} - \lambda \int_\Omega f\bar{h}.$$

特征函数方程给出 $Q(\phi_1,\phi_1) = 0$，并且 $Q(e^{ik\cdot x}, e^{ik\cdot x}) = 0$ 逐点成立。将平面波方程与 $\phi_1 \in H_0^1$ 作测试，得到 $Q(e^{ik\cdot x},\phi_1) = 0$。因此 $Q(w_k,w_k) = 0$，由诺伊曼变分原理可得 $\mu \le \lambda$。

若等号成立，则每个 w_k 都是零均值子空间上的极小化子，因而属于 E_μ 的复化。所有满足 $|k|^2 = \lambda$ 的平面波都将属于 E_μ 和 ϕ_1 的复线性张成空间，这是一个有限维空间。然而，任意非空开集上，任意大的有限组互异平面波都线性无关：将解析关系限制到一个方向能区分其频率的直线上，并利用范德蒙德行列式即可。这就导致矛盾。□

3.3. **正预解算子与边界泛函**。令 $q = \mu J$，并令 $G = (-\Delta_{\mathbb{D},D})^{-1}$。使用实或复加权空间 $L^2(q) = L^2(\mathbb{D}, q\,dA)$。定义 $T = G(q\,\cdot)$。间隙与 H_0^1 对应关系给出

$$\int_{\mathbb{D}} q|w|^2 \le d\int_{\mathbb{D}} |\nabla w|^2, \qquad d = \frac{\mu}{\lambda_1^D(\Omega)} < 1, \qquad w \in H_0^1(\mathbb{D}). \tag{3.4}$$

引理 3.3。算子 T 在 $L^2(q)$上是自伴、非负、保正的，且其范数至多为 d。因此，$S = (I-T)^{-1} = \sum_{j\ge 0} T^j$有界且保正。令 A表示普通圆盘泊松延拓。于是

$$L(h) := \int_{\mathbb{D}} q\,SAh\,dA, \qquad h \in C(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}), \tag{3.5}$$

定义了一个满足以下条件的连续实线性泛函

$$h \ge 0,\ h \not\equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad L(h) > 0.$$

对于每个 $u \in E_\mu$，若 $v = u \circ \Phi$ 且 $h = v|_{\mathbb{S}^1}$，则有 $v = SAh$ 且 $L(h) = 0$。

证明。令 $B\colon H_0^1(\mathbb{D}) \to L^2(q)$ 为包含映射，并在 H_0^1 上取 Dirichlet 内积。形式界给出 $\|B\| \le \sqrt{d}$，而 $T = BB^*$ 证明了自伴性、非负性以及 $\|T\| \le d$。正性保持可由正的 Dirichlet Green 函数推出。因此，S的级数在算子范数下收敛且保持正性。

由于$\|Ah\|_{L^2(q)} \le \|q\|_1^{1/2}\|h\|_\infty$,

$$|L(h)| \le \frac{\|q\|_1}{1-d}\|h\|_\infty.$$

若 $h \ge 0$ 连续且非零，则普通 Poisson 延拓在整个圆盘内严格为正。由于 $SAh \ge Ah$ 和 $q = \mu|F|^2 > 0$ 位于圆盘内，$L(h) > 0$。

对于特征函数，$h \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1) \cap C(\mathbb{S}^1)$，且 $v - Ah \in H_0^1$。其狄利克雷方程给出$v - Ah = Tv$，因此 $v = SAh$。最后，$L(h) = \int qv = \mu \int_\Omega u = 0$。□

3.4. **由边界符号确定重数**。

引理 3.4. 第一个正 *Neumann* 特征值对应的实特征空间满足 s

$$\dim_{\mathbb{R}} E_\mu \le 2. \tag{3.6}$$

证明。边界迹在 E_μ上是单射：若迹为零，则拉回属于 H_0^1，此时（3.4）迫使其恒为零。由于 L 和 $L(h) = 0$ 严格为正，其非零迹取正、负两种符号。

E_μ 中的每个非零特征函数恰有两个节点域，即使 μ 是重特征值也如此。直接证明如下：若存在三个节点域，则在其中两个节点域上的限制分别取非零常数，使它们的线性组合均值为零。将每个限制零延拓后，所得函数属于 $H^1(\Omega)$，且 Rayleigh 商为 μ。为说明无需边界正则性即可进行零延拓，取一个正节点分支 D。函数 $(u-\epsilon)_+\mathbf{1}_D$（其中 $\mathbf{1}_D$是 D的示性函数）局部属于 H^1：在 D内部边界的每个紧子集附近，由连续性和 $u = 0$ 可知，它在足够小的邻域内为零。其整体梯度为 $\mathbf{1}_{D\cap\{u>\epsilon\}}\nabla u$，函数范数和梯度范数均由 u的相应范数控制。令 $\epsilon \downarrow 0$ 在 H^1 中趋近于零，得到梯度为$\mathbf{1}_D\nabla u$ 的 $u\mathbf{1}_D \in H^1$。负分支的处理类似，只需使用 $-u$。用此限制作为检验函数代入弱特征函数方程，即得其 Rayleigh 商。因此，该线性组合是一个诺伊曼极小函数，也是一特征函数，但它在第三个开节点域上为零。方程 $-\Delta u = \mu u$ 解的内部解析性迫使它处处为零，矛盾。因此，正、负号集合均连通。等价地，也可以在圆盘上取节点限制，此时拉回函数连续，且能量与加权质量恒等式保持不变。

连续圆盘边界迹上不可能出现四个循环交替的严格符号。事实上，边界连续性使每个这样的点都能通过一个同号的小半圆盘连接到相应的内部符号集。连通的正负集合分别包含连接两个正点和两个负点的路径。去掉环路后，这些路径可以取为内部位于圆盘中的简单弧。根据 Jordan 分离定理，连接交替边界点对的两条弧必相交，而符号集彼此不相交。此论证在圆盘上进行，不要求 $\partial\Omega$具有任何正则性。

假设 $\dim E_\mu \ge 3$。在其单射迹空间中选取一个非零的 h，使得

$$L(h\cos\theta) = L(h\sin\theta) = 0.$$

我们已经有 $L(h) = 0$。在一个负区间处切开圆，并令 θ_-，θ_+ 分别为$\{\theta : h(\theta) > 0\}$ 在 $(0, 2\pi)$ 中的下确界和上确界。于是 $0 < \theta_- < \theta_+ < 2\pi$。没有四个交替符号意味着在 (θ_-, θ_+) 上有 $h \ge 0$，而在其补集上有 $h \le 0$。三角多项式

$$\varphi(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\theta_- + \theta_+}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right)$$

具有相同的弱符号模式，并且在 $h > 0$ 处严格为正。因此 $h\varphi$ 连续、非负且不恒为零，所以 $L(h\varphi) > 0$。但是 φ 属于 1、$\cos\theta$、$\sin\theta$ 的实线性张成空间，且这三个矩均为零。矛盾由此证明了 (3.6)。□

4. 弱散度–旋度 M

我们保留第 3 节的共形假设，并记 $\mu = \mu_2(\Omega)$。我们采用 Rohleder 关于诺伊曼梯度的变分方法 [29]。下文的分解以弱法向迹表述，因此适用于边界不具有经典法向的情形。

对于实向量场 $X = (X_1, X_2)$，定义旋度 $X = \partial_x X_2 - \partial_y X_1$。令 $\mathcal{X}(\Omega)$ 由 $L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ 中散度和旋度属于 L^2 且具有弱零法向迹的场组成，这意味着

$$\int_\Omega X \cdot \nabla\eta + \int_\Omega (\operatorname{div} X)\eta = 0 \qquad (\eta \in H^1(\Omega)). \tag{4.1}$$

对于 $X, Y \in \mathcal{X}(\Omega)$，令

$$\mathcal{E}_\mu(X,Y) = \int_\Omega \big(\operatorname{div} X \operatorname{div} Y + \operatorname{curl} X \operatorname{curl} Y - \mu X \cdot Y\big).$$

引理 4.1。 每个 $X \in \mathcal{X}(\Omega)$ 都有一个关于 $L^2(\Omega;\,\mathbb{R}^2)$ 的正交分解

$$X = \nabla f + \nabla^\perp h, \qquad \nabla^\perp h = (-h_y, h_x),$$

其中 f 属于诺伊曼算子定义域，具有零均值，并满足 $\Delta f =$ 散度 X；而 $h \in H^1_0(\Omega)$ 属于狄利克雷算子定义域，并满足 $\Delta h =$ 旋度 X。记作$\nabla E_\mu = \{\nabla u : u \in E_\mu\}$。则

$$\mathcal{E}_\mu(X,X) \ge 0, \qquad \mathcal{E}_\mu(X,X) = 0 \iff X \in \nabla E_\mu. \tag{4.2}$$

证明。 取 $\eta = 1$ 于（4.1）得到诺伊曼相容条件。因此，Ω 上的庞加莱不等式和 Lax–Milgram定理给出 f；狄利克雷问题给出 h。场 $\nabla^\perp h$ 具有弱零法向迹，因为这对 h 的紧支撑光滑逼近函数成立，并可由其梯度的收敛推广到所有 H^1 测试函数。余项

$$Z = X - \nabla f - \nabla^\perp h$$

具有零散度、零旋度和弱零法向迹。其分量在分布意义下调和，因此在内部光滑。单连通性给出一个实值光滑势 P，满足 $\nabla P = Z$。

为在（4.1）中使用 P，固定一个内部球，并从 P 中减去该球上的平均值。利用这个固定平均值对 $P_M = \max\{-M,\ \min\{P,\ M\}\}$应用庞加莱不等式。当 M足够大时，截断函数在该球上与 P一致，且在球上的平均值为零。因此 $\|P_M\|_2 \le C\|Z\|_2$。法图引理给出 $P \in H^1$（Ω），并且用 P对（4.1）进行测试，得到 $\int_\Omega |Z|^2 = 0$。

测试方程 对 $\nabla^\perp h$ with f 使用零法向迹恒等式可证明正交性。在诺伊曼和狄利克雷特征函数中展开，得到

$$\|\Delta f\|_2^2 \ge \mu \|\nabla f\|_2^2, \qquad \|\Delta h\|_2^2 \ge \lambda_1^D \|\nabla h\|_2^2.$$

严格不等式 (3.3) 证明了非负性。等号成立迫使 $h = 0$ 和 $f \in E_\mu$，从而证明零空间结论。 □

4.1. **共形坐标中的能量**。对于 $X = (X_1, X_2)$ 和 $Y = (Y_1, Y_2)$ 属于 $\mathcal{X}(\Omega)$，令 $U = (X_1 + iX_2) \circ \Phi$ 和 $V = (Y_1 + iY_2) \circ \Phi$。则

$$2U_z = F\big(\operatorname{div} X + i \operatorname{curl} X\big) \circ \Phi.$$

变量替换后可得

$$\mathcal{E}_\mu(X,Y) = \mathfrak{h}_q(U,V) := \operatorname{Re} \int_{\mathbb{D}} (4U_z \overline{V_z} - qU\overline{V}). \tag{4.3}$$

对于 $\mathcal{X}(\Omega)$ 中的场，分布意义下的微分和变量替换可证明这一恒等式。对于实特征函数 $u \in E_\mu$，其中 $v = u \circ \Phi$,

$$W = (u_x + iu_y) \circ \Phi = \frac{2v_{\bar z}}{\overline{F}}, \qquad W_z = -\frac{\mu}{2} F v, \qquad \int_{\mathbb{D}} q|W|^2 = \mu \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

弱诺伊曼方程表明， ∇u满足（4.1）。

注 4.2（边界乘法）。在光滑域 $\Phi(\rho\mathbb{D})$ 中，$0<\rho<1$，切向边界向量乘以实标量后仍为切向量。预解式中的狄利克雷修正项的迹为零，因此在 $(-\Delta-q_\rho)\,U=0$ 上求解 $\mathbb{D}$ 并使用乘后的数据，仍能保持切向性。这里，$q_\rho=\mu_\rho|\Phi_\rho'|^2$ 是引言中定义的势。在极限域上，乘后的分布迹未必定义了一个属于 $\mathcal{X}(\Omega)$ 的场。第 7 节将光滑场投影到所有特征值趋于 μ 的特征函数的梯度上；这些梯度中能量趋于零者的极限于是属于 ∇E_μ。

5. 可积次临界势的边界核

在本节中，令 $q\ge 0$ 属于 $L^p(\mathbb{D})$，其中某个 $p>1$，并假设

$$\int_{\mathbb{D}} q|w|^2\,dA\le d\int_{\mathbb{D}}|\nabla w|^2\,dA,\qquad w\in H_0^1(\mathbb{D}),\qquad 0\le d<1. \tag{5.1}$$

当 p、$d<1$ 和 $\|q\|_p$ 的上界固定时，所有常数均一致。霍尔德估计中的常数还可能取决于所选指数；对于固定内点的常数可能取决于它到 $\mathbb{S}^1$ 的距离。

令 $G=(-\Delta_{\mathbb{D},D})^{-1}$、$Tf=G(qf)$ 和 $S=(I-T)^{-1}$ 位于 $L^2(q)=L^2(\mathbb{D},q\,dA)$ 上。对于 $x,y\in\mathbb{D}$、$x\ne y$ 和 $s\in\mathbb{S}^1$，通常的圆盘格林核与泊松核为

$$\mathcal{G}_0(x,y)=\frac{1}{4\pi}\log\left(1+\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\right),\qquad P_s(x)=\frac{1-|x|^2}{2\pi|x-s|^2}.$$

边界积分使用弧长测度。对于 $x\in\mathbb{D}$ 和互异的 $s,t\in\mathbb{S}^1$，定义

$$K_q(x,s)=P_s(x)+\sum_{j\ge1}(T^jP_s)(x), \tag{5.2}$$

$$R_q(s,t)=\sum_{j\ge0}\int_{\mathbb{D}}P_s(z)(T^jP_t)(z)q(z)\,dA(z),\qquad N_q(s,t)=\frac{1}{\pi|s-t|^2}+R_q(s,t). \tag{5.3}$$

对 $s\ne t$，记 $N_0(s,t)=1/(\pi|s-t|^2)$。每一项都是非负核的迭代积分。这种解释不要求 $P_s\in L^2(q)$。

定理 5.1 (核估计)。 *(5.2)*–(5.3) 中的核对每个 $x\in\mathbb{D}$、$s\in\mathbb{S}^1$ 以及每一对不同的 s、$t\in\mathbb{S}^1$ 均为有限值。它们满足

$$P_s(x)\le K_q(x,s)\le CP_s(x), \tag{5.4}$$

$$0\le R_q(s,t)\le C\|q\|_p|s-t|^{-2/p}\quad(s\ne t), \tag{5.5}$$

$$\iint_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}R_q(s,t)\,ds\,dt\le\frac{\int_{\mathbb{D}}q\,dA}{1-d}. \tag{5.6}$$

The 修正项 R_q 关于对角线对称，且在对角线之外连续。对每个固定的 $z_0\in\mathbb{D}$，

$$K_q(z_0,\cdot)\in C^{0,\beta}(\mathbb{S}^1),\qquad 0<\beta<\min\{1,2-2/p\}. \tag{5.7}$$

区域 $-\Delta-q$ 的 ***Dirichlet Green*** 函数 G_q 对互不相同的 x、$y\in\mathbb{D}$，以及与 z_0 分离的边界邻域中的 z，满足以下界：

$$0\le\mathcal{G}_q(x,y)\le C\log(1+|x-y|^{-1}),\qquad \mathcal{G}_q(z_0,z)\le C_{z_0}(1-|z|). \tag{5.8}$$

5.1. 正解与格林函数。 针对 Tf 测试 Tf 的变分方程，得到

$$\|Tf\|_{L^2(q)}^2\le d\|\nabla Tf\|_2^2=d\langle f,Tf\rangle_{L^2(q)}.$$

因此，T 是一个正自伴收缩算子，满足 $\|T\|\le d$；由 $\mathcal{G}_0\ge0$ 也可得出正性保持。令 $r=2p/(p+1)>1$。由霍尔德不等式及圆盘上的狄利克雷估计可得

$$\|qf\|_r\le\|q\|_p^{1/2}\|f\|_{L^2(q)},\qquad T:L^2(q)\longrightarrow W^{2,r}\cap H_0^1\longrightarrow C(\overline{\mathbb{D}}). \tag{5.9}$$

所得的连续函数在 $\mathbb{S}^1$上取值为零。对于 $q=0$，所述核就是普通圆盘核。以下假设 $q\neq 0$ 成立，并定义

$$\phi = S1 = 1 + T\phi.$$

预解式级数和 (5.9) 表明

$$1 \le \phi \le C, \qquad \phi|_{\mathbb{S}^1} = 1, \qquad -\Delta\phi = q\phi, \qquad \phi - 1 \in W^{2,p} \cap H^1_0. \tag{5.10}$$

$W^{2,p}$ 正则性可通过对 $q\phi \in L^p$应用狄利克雷估计得到。令 I_2 表示2×2 单位矩阵，并设 $\mathsf{A} = \phi^2 I_2$。对于每个 $0<\beta<\min\{1, 2-2/p\}$，

$$\mathsf{A} \in C^{0,\beta}(\overline{\mathbb{D}}), \qquad I_2 \le \mathsf{A} \le C I_2, \qquad \mathsf{A}|_{\mathbb{S}^1} = I_2.$$

此外 $\nabla\phi \in L^{p_0}$ 对于某个 $p_0>2$成立。因此，乘以 ϕ 和乘以 $1/\phi$ 在$H^1(\mathbb{D})$ 上均为有界算子，并保持 $H^1_0(\mathbb{D})$：对于与 $\nabla\phi$ 的乘积，使用 $H^1(\mathbb{D}) \to L^{2p_0/(p_0-2)}$。

对于光滑且紧支撑的 $u, v,$ ϕ 的方程给出

$$\int_{\mathbb{D}} \phi^2 \nabla(u/\phi)\cdot\nabla(v/\phi) = \int_{\mathbb{D}} \nabla u\cdot\nabla v - \int_{\mathbb{D}} quv. \tag{5.11}$$

由密度性、乘法有界性和霍尔德不等式，该恒等式可推广到所有 $u, v \in H^1_0(\mathbb{D})$。令 $\mathcal{G}_{\mathsf{A}}$ 为 $-\operatorname{div}(\mathsf{A}\nabla)$ 的狄利克雷格林核。将 (5.11) 中的逆算子依次作用于光滑源项，得到

$$\mathcal{G}_q(x,y) = \phi(x)\phi(y)\mathcal{G}_{\mathsf{A}}(x,y). \tag{5.12}$$

该恒等式最初几乎处处成立。为了使其对每一对不同的内点都成立，我们将核取为连续代表元。

固定 $x\in\mathbb{D}$。普通格林截面 $\mathcal{G}_0(x,\cdot)$ 由对数可积性可知属于 $L^2(q)$。因此

$$S\mathcal{G}_0(x,\cdot) = \mathcal{G}_0(x,\cdot) + TS\mathcal{G}_0(x,\cdot)$$

根据 (5.9)，其修正项在闭圆盘上连续。普通预解式恒等式表明它与 (5.12) 中的弱逆核相同。其非负迭代格林积分级数逐点收敛，而修正项级数一致收敛。该级数在每一对不同的内点处都给出相同的代表元。

5.2. 泊松核估计。 ter Elst–Ouhabaz 的定理4.1 中的公式 (27)–(28) [19]适用于圆盘上零零阶势的 A。该定理所要求的系数类别包括一致椭圆性、有界系数以及有界的 $C^{0,\beta}$ 半范数；不要求系数的导数。其定理在二维情形下给出

$$|\nabla_y \mathcal{G}_{\mathsf{A}}(x,y)| \le C|x-y|^{-1}, \qquad |\nabla_x\nabla_y \mathcal{G}_{\mathsf{A}}(x,y)| \le C|x-y|^{-2}, \tag{5.13}$$

以及格林函数的对数估计。这些导数在对角线以外局部延拓为 β-Hölder 连续函数 $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$。这些常数在上述系数类中是一致的。(5.8) 中的边界邻域估计可通过从最近边界点对 $\nabla_y\mathcal{G}_{\mathsf{A}}(z_0,y)$ 积分，再利用 (5.12) 和 (5.10) 得到。对数估计可直接由 (5.12) 得出。

令 $\nu(s)$ 为 $\mathbb{S}^1$ 的外单位法向量。[19] 的命题 5.5 给出了 $-\operatorname{div}(\mathsf{A}\nabla)$ 的泊松核，形式如下：

$$P_{\mathsf{A}}(x,s) = -\nu(s)\cdot\mathsf{A}(s)\nabla_y\mathcal{G}_{\mathsf{A}}(x,s) = -\partial_{\nu_s}\mathcal{G}_{\mathsf{A}}(x,s).$$

根据弱最大值原理，它是非负的。若 $\delta(x) \ge |x-s|/2$，则 (5.13) 中的第一个估计给出 $P_{\mathsf{A}}(x,s) \le C\delta(x)/|x-s|^2$。否则，令 $x_\partial = x/|x|$ 为最近边界点。从 x_∂ 到 x 的线段与 s 的距离始终至少为 $|x-s|/2$。此外，$\nabla_y \mathsf{G}_{\mathsf{A}}(x_\partial, s) = 0$：先对内部的 y 求 $\mathsf{G}_{\mathsf{A}}(x_\partial, y) = 0$ 的导数，再利用其在对角线之外的连续延拓。因此，沿该线段应用混合导数估计可得相同的界。故

$$0 \le P_{\mathsf{A}}(x,s) \le C\frac{\delta(x)}{|x-s|^2} \le C P_s(x). \tag{5.14}$$

对于 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，令 Af 为其普通 Poisson 延拓。则 SAf 的迹为 f，并且弱意义下满足 $(-\Delta - q)(SAf) = 0$。商 $(SAf)/\phi$ 满足 $-\operatorname{div}(A\nabla((SAf)/\phi)) = 0$，且具有相同的迹。因此，

$$K_q(x,s) = \phi(x) P_A(x,s) \tag{5.15}$$

对几乎处处的 s，将（5.2）中的迭代格林积分次序互换，得到

$$K_q(x,s) = P_s(x) + \int_{\mathbb{D}} \mathcal{G}_q(x,z) q(z) P_s(z)\, dA(z). \tag{5.16}$$

在边界邻域内，（5.8）以及 $\delta(z)P_s(z) \le 1/\pi$ 可将被积函数一致地控制在 $C_x q(z)$ 之下，其中一致性对 s 成立。在互补紧圆盘上，$P_s(z)$ 一致有界，而根据霍尔德不等式和对数估计，$q(z)G_q(x,z)$ 可积。因此，由控制收敛定理可知，（5.16）有限，且关于 s 连续。（5.15）的右端也连续，因此该等式对每个边界点都成立。

方程（5.14）–（5.15）证明了（5.4）中的上界；（P_s 在（5.2）中的项给出了下界。$G_A(z_0,s)$ 的边界 Hölder 连续性证明了（5.7）。

5.3. **边界修正项的界**。Tonelli 定理给出

$$R_q(s,t) = \int_{\mathbb{D}} P_s(z) K_q(z,t) q(z)\, dA(z). \tag{5.17}$$

设 $p' = p/(p-1)$。在由 $|z-s| \le |z-t|$ 定义的圆盘部分上，使用 $\delta(z) \le |z-s|$ 和 $|z-t| \ge \max\{|z-s|, |s-t|/2\}$ 得到 $P_s(z)P_t(z) \le C(|s-t| + |z-s|)^{-2}$。极坐标积分给出

$$\int_{\mathbb{D}} |P_s P_t|^{p'}\, dA \le C_p |s-t|^{2-2p'}, \qquad \|P_s P_t\|_{p'} \le C_p |s-t|^{-2/p}.$$

另一部分也有相同的估计。霍尔德不等式和（5.4）现在给出（5.5）。对于与对角线相距正距离的边界点对，$P_s P_t$ 逐点一致有界。因此，（5.17）和控制收敛证明了非对角连续性。交换迭代格林积分的顺序即可得到对称性。

当 $p \le 2$ 时，逐点界在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 上不一定可积。为得到 L^1估计，对定义级数积分：

$$\iint R_q(s,t)\, ds\, dt = \sum_{j \ge 0} \langle 1, T^j 1 \rangle_{L^2(q)} = \int_{\mathbb{D}} q\phi\, dA \le \frac{\int_{\mathbb{D}} q\, dA}{1-d}.$$

这证明了（5.6），并完成了定理5.1的证明。

5.4. **希尔伯特空间曲线的正则性**。 推论A.3中的倒数核不等式，结合 Schoenberg 的构造 [31], ，将归一化倒数核表示为希尔伯特空间距离的平方。该构造见命题 A.4。上述估计蕴含了边界迹相乘所需的正则性。

命题 5.2. 固定 $z_0 \in \mathbb{D}$。设 H 是一个实希尔伯特空间，并假设 $b\colon\ \mathbb{S}^1 \to H$ 满足

$$\|b(s) - b(t)\|^2 = D_q(s,t) := \frac{K_q(z_0,s) K_q(z_0,t)}{N_q(s,t)}, \quad s \ne t, \qquad D_q(s,s) = 0.$$

那么 b 是单射，并且属于 $C^{1,\beta}(\mathbb{S}^1; H)$，对每个

$$0 < \beta < \min\{\tfrac{1}{2}, 1 - 1/p\}. \tag{5.18}$$

若 $b(s_*) = 0$ 在某个固定的 $s_* \in \mathbb{S}^1$处，其 $C^{1,\beta}$ 范数一致有界。在圆的弧长坐标下，

$$\left\| \frac{d}{d\theta} b(e^{i\theta}) \right\|^2 = \pi K_q(z_0, e^{i\theta})^2 > 0. \tag{5.19}$$

证明。 N_q 的有限性和 K_q 的正性保证了单射性，而 $N_q \geq 1/(\pi|s-t|^2)$ 给出了一致 Lipschitz 界。写作 $\kappa(\theta) = K_q(z_0, e^{i\theta})$。逐点修正界给出

$$D_q(e^{i\theta}, e^{i\eta}) = \frac{\pi\kappa(\theta)\kappa(\eta)|e^{i\theta} - e^{i\eta}|^2}{1 + \pi|e^{i\theta} - e^{i\eta}|^2 R_q(e^{i\theta}, e^{i\eta})}$$

$$= \pi\kappa(\theta)\kappa(\eta)(\theta-\eta)^2 + O(|\theta-\eta|^{4-2/p}). \tag{5.20}$$

弦误差为 $O(|\theta-\eta|^4)$，由于 $p < \infty$，它包含在所示余项中。固定 β在范围 (5.18) 内。由 (5.7)， κ 是 2β-Hölder 连续。令 $\widetilde{b}(\theta) = b(e^{i\theta})$。我们使用恒等式

$$\|\widetilde{b}(\theta+h) - 2\widetilde{b}(\theta) + \widetilde{b}(\theta-h)\|^2 = 2D_q(e^{i(\theta+h)}, e^{i\theta}) + 2D_q(e^{i\theta}, e^{i(\theta-h)}) - D_q(e^{i(\theta+h)}, e^{i(\theta-h)}).$$

由 (5.20)，可得

$$\|\widetilde{b}(\theta+h) - 2\widetilde{b}(\theta) + \widetilde{b}(\theta-h)\| \leq C|h|^{1+\beta}. \tag{5.21}$$

事实上，将三个 κ 值的乘积替换为 $\kappa(\theta)^2$, ，代价为 $O(|h|^{2+2\beta})$。这样二次项便恰好抵消，剩余的度量误差具有更高阶。

接下来，我们由 (5.21) 推导出连续可微性。周期磨光给出光滑的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$Hilbert 值函数 b_ϵ，它们满足相同的估计。定义 $v_h^\epsilon(\theta) = [b_\epsilon(\theta+h) - b_\epsilon(\theta)]/h$。以 5.21 为中心的方程 ($\theta + h/2$) 给出

$$\|v_h^\epsilon - v_{h/2}^\epsilon\|_\infty \leq C|h|^\beta.$$

对光滑函数的导数进行二进求和，得到 $\|(\widetilde{b}_\epsilon)' - v_h^\epsilon\|_\infty \leq C_\beta|h|^\beta$。对于两个磨光尺度,

$$\|(\widetilde{b}_\epsilon)' - (\widetilde{b}_{\epsilon'})'\|_\infty \leq 2C_\beta|h|^\beta + \frac{2}{|h|}\|\widetilde{b}_\epsilon - \widetilde{b}_{\epsilon'}\|_\infty.$$

先取 h 足够小，可知当磨光尺度$\widetilde{\ }$趋于零时，导数一致地构成柯西列。根据 b' 微积分基本定理,其连续极限为$v_h(\theta) = [\widetilde{b}(\theta+h) - \widetilde{b}(\theta)]/h$，由此得到 $\|\widetilde{b}' - v_h\|_\infty \leq C_\beta|h|^\beta$。此外，由（5.21）可得 $\|v_h(\theta+h) - v_h(\theta)\| \leq C|h|^\beta$。结合这两个不等式，证明 $\widetilde{b}'$ 是 β-霍尔德连续的。将（5.20）除以（$\theta-\eta$）^{2}并令导数趋于其极限，即可证明（5.19）。□

5.5. **核的收敛**。

命题 5.3. 设 $q_n \geq 0$， $q_n \to q$ 在 $L^p(\mathbb{D})$中强收敛，且所有势函数均满足 (5.1) 且具有相同的 $d < 1$。对每个固定的 $z_0 \in \mathbb{D}$， $K_{q_n}(z_0, \cdot) \to K_q(z_0, \cdot)$ 一致收敛。此外， $N_{q_n} \to N_q$在紧致非对角集上一致收敛，且 $D_{q_n} \to D_q$ 在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$上一致收敛。

设 b_n、b 是 D_{q_n}、D_q 的 ***Hilbert*** 空间实现，且 $b_n(s_*) = b(s_*) = 0$ 在同一点处成立$s_* \in \mathbb{S}^1$。则

$$c_{n,\xi}(s) := \langle b_n(s), b_n(\xi)\rangle \longrightarrow c_\xi(s) := \langle b(s), b(\xi)\rangle \quad in\ C^{1,\beta'}(\mathbb{S}^1)$$

对每个固定的 $\xi \in \mathbb{S}^1$ 以及任意 $0 < \beta' < \beta < \min\{1/2, 1-1/p\}$ 均成立。无需共同的环境 ***Hilbert*** 空间。

证明。 前述估计对 n 一致。对光滑边界数据应用预解恒等式，再利用 Fubini 定理，可得

$$K_{q_n}(z_0, s) - K_q(z_0, s) = \int_{\mathbb{D}} \mathcal{G}_{q_n}(z_0, z)(q_n - q)(z)K_q(z, s)\, dA(z). \tag{5.22}$$

此公式首先确定边界密度几乎处处相等。在边界邻域中，乘积 $\mathcal{G}_{q_n}(z_0, z)K_q(z, s)$ 由 (5.8) 和 (5.4) 可知一致有界。在互补紧圆盘上，它由某个常数乘以 $1 + |\log|z - z_0||$所控制。因此，它在 $L^{p'}$中一致有界，而控制收敛定理表明所示积分关于 s连续。因此，该公式对每个 s都成立，并且

$$\sup_s |K_{q_n}(z_0, s) - K_q(z_0, s)| \leq C_{z_0}\|q_n - q\|_p.$$

相应的边界核恒等式为

$$N_{q_n}(s,t)-N_q(s,t)=\int_{\mathbb{D}} K_{q_n}(z,s)(q_n-q)(z)K_q(z,t)\,dA(z),\qquad s\neq t. \tag{5.23}$$

设 Λ_q 为 $-\Delta-q$的弱 Dirichlet-to-Neumann 映射。对于光滑边界数据 f，g，与调和延拓 Ag 积分可得

$$\langle(\Lambda_q-\Lambda_0)f,g\rangle=-\int_{\mathbb{D}} q(SAf)(Ag)\,dA=-\iint_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} R_q(s,t)f(s)g(t)\,ds\,dt.$$

第一个等式用到了 $SAf-Af\in H_0^1$ 以及 Ag的调和性。这证明 Λ_q 的非对角核为 $-N_q$。记 $S_n=(I-Gq_n)^{-1}$。将两个 Dirichlet-to-Neumann 型相减，得到 $-\int(q_n-q)(S_nAf)(SAg)$。Fubini 定理适用于该核：它在两个边界变量上的绝对积分有界于 $\int|q_n-q|(S_n1)\phi<\infty$。这些核在对角线之外连续，因此它们几乎处处相等可推出在该处处处相等。

由初等估计 $P_s(z)P_t(z)\le C|s-t|^{-2}$ 可得

$$|N_{q_n}(s,t)-N_q(s,t)|\le C|s-t|^{-2}\|q_n-q\|_1.$$

结合 N_{q_n}，$N_q\ge 1/(\pi|s-t|^2)$以及前面对 $K_{q_n}(z_0,\cdot)$ 的估计 $-K_q(z_0,\cdot)$，可得

$$|D_{q_n}(s,t)-D_q(s,t)|\le C_{z_0}|s-t|^2\|q_n-q\|_p,$$

通过连续性包括对角线上为零的情形。

最后，Gram 公式为

$$c_{n,\xi}(s)=\tfrac12\big(D_{q_n}(s,s_*)+D_{q_n}(\xi,s_*)-D_{q_n}(s,\xi)\big).$$

这给出了 $c_{n,\,\xi}$ 到 c_ξ的一致收敛。命题 5.2 给出了标量 $C^{1,\,\beta}$ 界。嵌入到 $C^{1,\,\beta'}$的紧嵌入，加上一致极限的唯一性，证明了整个序列具有所断言的收敛性。□

6. Neumann 梯度的边界迹

对于一个 Neumann 梯度，我们将其调和余项的边界迹表示为$g_0+\partial_\theta g_1$，其中对于某个 $r>1$，有 g_0，$g_1\in L^r(\mathbb{S}^1)$。该表示控制了与实 C^1 函数的乘法以及在紧子圆盘上的泊松延拓。对于满足假设 $F\in A^{2p}$的每个 $p>1$，该表示均成立。

6.1. 导数的倒数的可积性估计。 我们使用 Binder–Ivrii–Prause–Smirnov 的非严格积分平均估计 [9, 第 2.3 节，公式 (27)]的如下推论：对于一个有界单叶映射，其导数为 F，

$$I_\varepsilon(F):=\int_{\mathbb{D}}\delta^\varepsilon|F|^{-2}\,dA<\infty\qquad(\varepsilon>0). \tag{6.1}$$

取指数为 -2、辅助参数为 $1+\varepsilon/4$，应用他们的估计。相应的两个参数为 $2-(-2)=4$ 和 $((1+\varepsilon/4)-1)4=\varepsilon$；所需的不等式为 $1+\varepsilon/4>4/4$。他们的估计给出了 $(1-\rho)^\varepsilon\int_0^{2\pi}|F(\rho e^{i\theta})|^{-2}\,d\theta$ 在 $\rho=1$附近的径向积分上界。由于 F无零点，且 $1/F$ 在紧子圆盘上有界，极坐标积分便得到 (6.1)。下文只需对某个 $0\le\varepsilon<1-1/p$有 $I_\varepsilon(F)<\infty$；(6.1) 对每个$p>1$都给出了这样的指数。

6.2. 解析分子的一个估计。设 $p>1$，设 $F=\Phi'\in A^{2p}$，并设 v 为特征值为 λ的实诺伊曼特征函数的拉回，于是

$$-\Delta v=\lambda|F|^2v,\qquad \partial_\nu v=0,\qquad v\in W^{2,p}(\mathbb{D})\cap L^\infty.$$

Set

$$W=\frac{2v_{\bar z}}{\overline{F}},\qquad T_\lambda=G(\lambda|F|^2\,\cdot),\qquad H=(I-T_\lambda)W.$$

由于 $-\Delta W=\lambda|F|^2W$，函数 H是调和的。写作 $H=H_+ +f$，其中 H_+和 f是解析的，且 $H_+(0)=0$。以下估计在特征值、$W^{2,\,p}$ 范数

和 $\|F\|_{2p}$ 有界时成立。引理 7.1 给出了逼近中所用的$\Phi(\rho\mathbb{D})$归一化特征函数的这些界。

引理 6.1（关于解析分子的估计）。 解析函数 $h = Ff$ 属于A^{2p}。此外，在上述一致假设下，$T_\lambda W$ 和 H_+ 在圆盘上有一致界。对于满足相同假设的三元组（F_n、 v_n、 λ_n），用下标 n 表示相应的对象。若 $F_n \to F$ 在 L^{2p}中强收敛， $v_n \to v$ 在 W^2中强收敛，^{p}，且 $\lambda_n \to \lambda$，则 $T_{\lambda_n} W_n \to T_\lambda W$在 W^2中强收敛，^{p}和$H_{+,\,n} \to H_+$在 W^1中强收敛，^{2p}，因此在闭圆盘上一致收敛。此外， $h_n \to h$ 在 L^{2p}中强收敛。

证明。 对任意 $p > 1$，圆盘上的 Sobolev 嵌入给出

$$W^{2,p}(\mathbb{D}) \hookrightarrow W^{1,2p}(\mathbb{D}), \qquad \nabla v \in L^{2p}.$$

当 $1 < p < 2$时，通常的一阶导数指数为 $2p/(2-p) > 2p$；当 $p = 2$ 时，任意有限指数均可取；当 $p > 2$ 时，一阶导数有界。约去 F 得

$$\lambda |F|^2 W = 2\lambda F v_{\bar{z}} \in L^p.$$

因此，圆盘狄利克雷估计给出

$$T_\lambda W \in W^{2,p} \cap H_0^1 \subset C^0, \qquad \nabla T_\lambda W \in L^{2p}.$$

由于

$$H'_+ = W_z - (T_\lambda W)_z = -\frac{\lambda}{2} F v - (T_\lambda W)_z,$$

我们有 $H'_+ \in A^{2p}$。归一化条件 $H_+(0) = 0$ 和 $2p > 2$ 通过莫雷嵌入为 H_+ 给出一致界。最后，

$$h = Ff = 2v_z - F\overline{T_\lambda W + H_+}. \tag{6.2}$$

第一项属于 L^{2p}，第二项是 F 乘以一个有界函数。这证明了其归属关系和一致界。

对于收敛性结论，同一嵌入给出 $\nabla v_n \to \nabla v$ 在 L^{2p}中，而 $v_n \to v$一致收敛。因此

$$2\lambda_n F_n (v_n)_{\bar{z}} \longrightarrow 2\lambda F v_{\bar{z}} \quad \text{in } L^p,$$

因此，零狄利克雷修正项在 W^2 中收敛，^{p}。关于 H'_+ 的恒等式继而给出其导数在 L^{2p} 中收敛。解析归一化条件 $H_+(0) = 0$ 固定了常数，因此 $H_{+,\,n} \to H_+$在 W^1中，^{2p} 且一致收敛。最后，式（6.2）给出 $h_n \to h$ 在 L^{2p}中。 □

6.3. **加权可积性估计**。固定

$$r = \frac{2p}{p+1} \in (1,2), \qquad \varepsilon = \frac{p-1}{2p} > 0, \qquad \sigma = \frac{\varepsilon r}{2} = \frac{r-1}{2}.$$

估计式（6.1）对 $F_\rho(z) = \rho F(\rho z)$一致成立，因为 $|1/F|^2$的圆周平均值单调不减：

$$I_\varepsilon(F_\rho) \le \rho^{-2} I_\varepsilon(F) \le 4 I_\varepsilon(F), \qquad 1/2 \le \rho < 1.$$

引理 6.2 (加权 L^r 估计)。 取上述指数，

$$\left(\int_{\mathbb{D}} \delta^\sigma |f|^r \, dA \right)^{1/r} \le \|h\|_{L^{2p}} I_\varepsilon(F)^{1/2}. \tag{6.3}$$

特别地，引理 7.1中梯度的调和余项的加权范数是一致有界的。

证明。 由于 $f = h/F$ 和 $r = 2p/(p+1)$，

$$\delta^\sigma |f|^r = \big(|h|^{2p}\big)^{1/(p+1)} \big(\delta^\varepsilon |F|^{-2}\big)^{p/(p+1)}.$$

应用霍尔德不等式，取共轭指数 $p+1$ 和 $(p+1)/p$，然后开 r次方 t. □

6.4. **原函数的边界值。**

引理 6.3 (一个 L^r 边界原函数)。 设 $1 < r < \infty$、 $0 \le \sigma < r-1$，且 f 在 $\mathbb{D}$ 中解析

$$M^r = \int_{\mathbb{D}} \delta^\sigma |f|^r \, dA < \infty.$$

设 Q 为解析原函数 $Q' = f$, $Q(0) = 0$。那么存在 $Q^* \in L^r(\mathbb{S}^1)$ 使得

$$\|Q^* - Q(\rho\,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{S}^1)} \le C_{r,\sigma} M (1-\rho)^{(r-1-\sigma)/r}, \qquad 1/2 \le \rho < 1. \tag{6.4}$$

此外 $\|Q^*\|_r \le C_{r,\sigma} M$。

若解析函数 f_n 在 $\mathbb{D}$ 中局部一致收敛于 f，且其加权范数一致有界，则相应的原函数在 $L^r(\mathbb{S}^1)$中强收敛至 $Q_n^* \to Q^*$ 。

证明。 对于 $1/2 \le \rho < R < 1$，由径向积分和 Minkowski 不等式可得

$$\|Q(R\,\cdot) - Q(\rho\,\cdot)\|_r \le \int_\rho^R \|f(t\,\cdot)\|_r \, dt.$$

利用 $r' = r/(r-1)$，霍尔德不等式可将最后一个表达式估计为

$$\left(\int_\rho^R (1-t)^\sigma \|f(t\,\cdot)\|_r^r t \, dt \right)^{1/r} \left(\int_\rho^R (1-t)^{-\sigma/(r-1)} t^{-1/(r-1)} \, dt \right)^{1/r'}$$
$$\le C_{r,\sigma} M (1-\rho)^{(r-1-\sigma)/r}.$$

第二个积分恰好在 $R \uparrow 1$ 时仍然有限，即 $\sigma < r-1$。这证明径向原函数在 L^r中是柯西列，并得到（6.4）。解析内部估计将 $Q(\,_{12}\cdot)$ 控制在 M 之下，从而得到完整的范数估计。

为证明收敛性，固定 $\rho < 1$。局部一致收敛给出 $Q_n(\rho\cdot)$ 和 $\to Q(\rho\cdot)$ 一致收敛。两个径向尾项均一致有界于 $C(1-\rho)^{(r-1-\sigma)/r}$。先令 $n \to \infty$，再令 $\rho \uparrow 1$。这证明了强 L^r 收敛。□

对于上面选取的指数，

$$\frac{r-1-\sigma}{r} = \frac{p-1}{4p} > 0.$$

根据引理 6.1， H_+ 可连续延拓至 $\mathbb{D}$；其边界值仍记作同一符号。记 $W^{-1,r}(\mathbb{S}^1) = (W^{1,r'}(\mathbb{S}^1))^*$，其中 $r' = r/(r-1)$。对原函数求导，并利用 $\zeta = e^{i\theta}$，得

$$\partial_\theta \overline{Q(\rho\zeta)} = -i\rho\bar{\zeta}\,\overline{f(\rho\zeta)}.$$

取 $\rho \uparrow 1$ 于 $W^{-1,\,r}$，我们得到 g的分布迹 $H = H_+ + f$:

$$g = H_+ + i\zeta\partial_\theta \overline{Q^*} \in W^{-1,r}(\mathbb{S}^1;\mathbb{C}). \tag{6.5}$$

E等价地，它具有如下显式表示 tion

$$g = g_0 + \partial_\theta g_1, \qquad g_0 = H_+ + \zeta\overline{Q^*}, \qquad g_1 = i\zeta\overline{Q^*}, \qquad g_0, g_1 \in L^r(\mathbb{S}^1). \tag{6.6}$$

事实上， $\partial_\theta\,(i\zeta) = -\zeta$。逼近族中的两个 L^r 范数均一致有界。这也给出了强 $W^{-1,\,r}$ 收敛：当调和余项局部一致收敛并满足上述一致界时，便可得到该结论。事实上，引理6.3给出了原函数的强 L^r 收敛。解析部分的导数 H_+ 在 A^{2p}中一致有界，因此这些部分具有一致的 Hölder 连续边界值；局部收敛确定了它们的一致极限。

调和余项可由其迹恢复：

$$H = Ag.$$

事实上， $H(\rho z) = A[H(\rho\,\cdot)](z)$，且径向迹在 g in $W^{-1,r}$ 中收敛。泊松核关于边界变量在每个紧子圆盘上都是光滑的，因此取极限即可证明该恒等式。泊松延拓在边界分布上是单射：半径为 ρ 时的第 j 个傅里叶系数等于边界系数乘以 $\rho^{|j|}$ 。

6.5. **边界分布的乘法。** 使用表示式 $g = g_0 + \partial_\theta g_1$（见6.6）。以下所有估计均针对 $\|g_0\|_{L^r} + \|g_1\|_{L^r}$ 这些选定的代表元。两个代表元都不必是切向的。能量的非负性仅应用于光滑逼近区域上完整切向迹的实数倍。

引理 6.4（乘法与泊松延拓）。 设 $\mathcal{H}$ 为实希尔伯特空间，且 $c \in C^1(\mathbb{S}^1;\ \mathcal{H})$。则

$$cg = (cg_0 - (\partial_\theta c)g_1) + \partial_\theta(cg_1). \tag{6.7}$$

因此，乘以 c 是从 $W^{-1,\,r}(\mathbb{S}^1;\ \mathbb{C})$ 到 $W^{-1,\,r}(\mathbb{S}^1;\ H \otimes \mathbb{R}^2)$ 的连续映射。对于每个 $B \Subset \mathbb{D}$，

$$\|A(cg)\|_{L^2(B;\mathcal{H}\otimes\mathbb{R}^2)} \le C_{B,r}\|c\|_{C^1(\mathcal{H})}\big(\|g_0\|_{L^r} + \|g_1\|_{L^r}\big). \tag{6.8}$$

该常数与希尔伯特空间维数无关。如果 $g_{j,\,n} \to g_j$ 属于 L^r，对于 $j = 0、1$、$g_n = g_{0,\,n} + \partial_\theta g_{1,\,n}$，且 $c_n \to c$ 属于 C^1，那么 $c_n g_n \to cg$ 属于 $W^{-1,\,r}(\mathbb{S}^1;\ H \otimes \mathbb{R}^2)$，并且它们的泊松延拓在每个紧子圆盘上都在 L^2 中强收敛。

证明。分布乘积法则证明了（6.7）。等价地，对于一个取值于希尔伯特空间的测试函数 ψ，

$$\|\langle c, \psi\rangle\|_{W^{1,r'}} \le C\|c\|_{C^1}\|\psi\|_{W^{1,r'}(\mathcal{H})},$$

这就证明了对偶空间中的结论。更直接地，

$$A(cg)(z) = \int_{\mathbb{S}^1} P_s(z)c(s)g_0(s)\,ds - \int_{\mathbb{S}^1} \partial_\theta\big(P_s(z)c(s)\big)g_1(s)\,ds.$$

对于 $z \in B$，泊松核及其一阶角导数一致有界。对博赫纳积分应用霍尔德不等式可得（6.8），且常数与维数$\mathcal{H}$无关。将该公式应用于差值即可证明收敛。□

注6.5（局部求逆）。对于实标量 $c \in C^1$，恒等式 $cg = 0$ 蕴含 $\operatorname{supp} g \subset \{c = 0\}$。在任意满足 $c \neq 0$的开区间上，取一个光滑紧支撑截断函数 χ。此时，将 χ/c延拓为零后，得到 C^1；对偶乘法算子的结合律给出$\chi g = (\chi/c)(cg) = 0$。

7. 首个正特征空间的光滑逼近

对于 $0 < \rho < 1$，令

$$\Phi_\rho(z) = \Phi(\rho z), \quad F_\rho = \rho F(\rho z), \quad J_\rho = |F_\rho|^2, \quad \Omega_\rho = \Phi(\rho\mathbb{D}), \quad \mu_\rho = \mu_2(\Omega_\rho), \quad q_\rho = \mu_\rho J_\rho.$$

每个Ω_ρ 都有解析若尔当边界。如引理3.3中所述，令 $T_\rho = Gq_\rho$ 且 $S_\rho = (I - T_\rho)^{-1}$。二次型（4.3）化为

$$\mathcal{E}_\rho(U) = \int_{\mathbb{D}} (4|U_z|^2 - q_\rho|U|^2).$$

令 $m =$ 维 E_μ。我们将所有 m 特征函数一并近似，因为它们的特征值在 Ω_ρ 上可能会分裂。

7.1. 标量谱与特征函数的收敛。

引理 7.1（首个正特征子空间的收敛）。 当 $\rho \uparrow 1$ 时，权重在 L^p 中强收敛于$J_\rho \to J = |F|^2$。Ω_ρ 上的标量诺伊曼和狄利克雷特征值（按重数计）收敛至Ω 上相应的特征值。特别地，当 ρ 充分接近 *1* 时，

$$\mu_{m+2}(\Omega_\rho) - \mu_\rho \ge c_*, \qquad \lambda_1^D(\Omega_\rho) - \mu_\rho \ge c_*, \qquad \int q_\rho|w|^2 \le d_* \int |\nabla w|^2 \quad (w \in H_0^1), \tag{7.1}$$

其中 $c_* > 0$ 和 $d_* < 1$ 不依赖于 ρ。

沿任意序列 $\rho \uparrow 1$，取一个子序列，并选取实特征函数 $u_{k,\rho}$, $1 \le k \le m$，其对应特征值为 $\mu_{k+1}(\Omega_\rho)$，它们在 $L^2(\Omega_\rho)$ 中正交归一，使得 $v_{k,\rho} = u_{k,\rho} \circ \Phi_\rho$ 在 $H^1(\mathbb{D})$ 和 $W^{2,p}(\mathbb{D})$ 中强收敛，在闭圆盘上一致收敛，并在紧子圆盘上光滑收敛至 $v_k = u_k \circ \Phi$，其中 $u_1, \dots, u_m$ 构成 E_μ 的实 $L^2(\Omega)$-正交归一基。拉回具有一致的 $L^\infty(\mathbb{D})$ 和 $W^{2,p}(\mathbb{D})$ 界。

证明。解析膨胀在每个有限 Bergman 范数下都强收敛，因此 $F_\rho \to F$ 属于 L^{2p}，而 $J_\rho \to J$ 属于 L^p。在固定的希尔伯特空间 $H^1(\mathbb{D})$ 上，令 D 和 M_ρ 为表示 ..... 的有界自伴算子

$$(v,w) \longmapsto \int \nabla v \cdot \nabla w, \qquad (v,w) \longmapsto \int J_\rho v w,$$

分别。霍尔德不等式和紧嵌入 $H^1(\mathbb{D}) \to L^{2p'}(\mathbb{D})$ 意味着 M_ρ 是紧算子，并且在算子范数下收敛到由 J 定义的算子。算子 $\mathsf{D} + \mathsf{M}_\rho$ 一致正定： J_ρ 在固定紧圆盘上有一致下界，而庞加莱不等式控制其余的常数模态。因此，紧正算子

$$(\mathsf{D}+\mathsf{M}_\rho)^{-1/2}\mathsf{M}_\rho(\mathsf{D}+\mathsf{M}_\rho)^{-1/2}$$

在算子范数下收敛。它们的非零特征值为 $(1+\mu_j(\Omega_\rho))^{-1}$。对狄利克雷问题，在 H_0^1 上也适用同样的论证。极小极大原理和谱投影的收敛性保证了特征值及其对应子空间的收敛。由于极限子空间是有限维的，正交归一特征基的一个子序列收敛。当 $m > 1$ 时，这并不能保证某个给定的极限特征函数可由精确的第一特征函数逼近。

固定圆盘方程为

$$-\Delta v_{k,\rho} = \mu_{k+1}(\Omega_\rho) J_\rho v_{k,\rho}, \qquad \partial_\nu v_{k,\rho} = 0.$$

一致 H^1 有界性给出一致的 L^{p_1} 界，对于每个有限的 p_1。取 p_1 足够大，使得右侧在某个 L^{p_0}中有界， $p_0 > 1$。圆盘诺伊曼正则性给出 $W^{2,\,p_0}$ 从而得到一致的 L^∞ 界。再次应用该结果，得到一致的 $W^{2,\,p}$。紧嵌入将一致收敛与已知的 H^1 极限对应起来。因此，右侧在 L^p中强收敛，而诺伊曼正则性（包括圆盘平均值的收敛）给出强$W^{2,\,p}$ 收敛。在紧子圆盘上一致收敛于 F_ρ 的解析收敛以及局部椭圆正则性的作用下，可得内部光滑收敛。极限的严格间隔给出（7.1）。□

7.2. **梯度迹的收敛**。对于 $1 \le k \le m$，令

$$\lambda_{k,\rho} = \mu_{k+1}(\Omega_\rho), \quad W_{k,\rho} = \frac{2(v_{k,\rho})_{\bar z}}{\overline{F_\rho}}, \quad T_{k,\rho} = G(\lambda_{k,\rho} J_\rho), \quad H_{k,\rho} = (I - T_{k,\rho})W_{k,\rho} = A g_{k,\rho}.$$

对于极限基，记为

$$W_k = \frac{2(v_k)_{\bar z}}{\overline{F}}, \qquad H_k = (I-T)W_k = A g_k.$$

这里，$g_{k,\,\rho}$ 和 g_k 是调和函数 $H_{k,\,\rho}$ 和H_k在分布意义下的边界迹。算子$T_{k,\,\rho}$ 使用相应特征函数的特征值 $\lambda_{k,\,\rho}$。引理 6.1和 6.3，连同（6.1），给出表示式 $g_k = g_{k,\,0} + \partial_\theta g_{k,\,1}$ 以及

$$g_{k,\rho} = g_{k,\rho,0} + \partial_\theta g_{k,\rho,1}, \qquad g_{k,\rho,j} \longrightarrow g_{k,j} \quad \text{in } L^{2p/(p+1)}(\mathbb{S}^1), \qquad j = 0,1. \tag{7.2}$$

因此，完整的迹 $g_{k,\,\rho}$（包括其正、负傅里叶模态）在$W^{-1,\,2p/(p+1)}(\mathbb{S}^1)$ 中收敛至 g_k。

7.3. **边界核的收敛**。势函数q_ρ 强收敛至 q 于 L^p，且满足一个严格的形式界。由此，命题5.3 推出平方距离核的一致收敛，以及 C^1 函数的收敛

$$c_{\rho,\xi}(s) = \langle b_\rho(s), b_\rho(\xi)\rangle \longrightarrow c_\xi(s) = \langle b(s), b(\xi)\rangle.$$

我们在一个固定的 $s_0 \in \mathbb{S}^1$ 处选取 $b_\rho(s_0) = b(s_0) = 0$。这里只比较内积；这些曲线的取值可以属于不同的希尔伯特空间。无需要求势函数具有单调性。

7.4. 由调和余项得到的点值估计。考虑与收敛到 μ 的 m Neumann 特征值相对应的梯度场。它们的 $L^2(\Omega_\rho)$ 归一化及相应的余项为

$$e_{k,\rho} = \frac{\nabla u_{k,\rho}}{\sqrt{\lambda_{k,\rho}}}, \qquad L_{k,\rho} = (I - T_\rho)(e_{k,\rho} \circ \Phi_\rho).$$

当 $\lambda_{k,\rho} \neq \mu_\rho$ 时，$L_{k,\rho}$ 不必是调和的。它们在局部收敛于

$$L_k = \frac{H_k}{\sqrt{\mu}},$$

它们是调和的，并且在实数域上线性无关。

为证明这一收敛性，注意到

$$q_\rho W_{k,\rho} = 2\mu_\rho F_\rho(v_{k,\rho})_{\bar z} \longrightarrow 2\mu F(v_k)_{\bar z} = qW_k \quad \text{in } L^{2p/(p+1)}(\mathbb{D}).$$

这里，$F_\rho \to F$ 属于 L^{2p}，而 $v_{k,\rho} \to v_k$ 属于 H^1。圆盘狄利克雷估计给出 $T_\rho W_{k,\rho} \to TW_k$ 属于 $W^{2,2p/(p+1)}$，且一致有界。梯度的内部收敛以及 $\lambda_{k,\rho} \to \mu$，进而推出归一化余项 $L_{k,\rho}$ 在局部收敛到所述极限。

引理 7.2 (一致范数与点态估计)。 固定 $z_0 \in \mathbb{D}$ 以及一个非空圆盘 $B \Subset \mathbb{D}$。存在常数 C，该常数与 ρ 接近 *1* 时的取值以及实希尔伯特系数空间无关，使得第 *4* 节中 Ω_ρ上的型定义域内任意具有零法向迹且拉回为 $U = X \circ \Phi_\rho$ 的场均满足

$$\|X\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} \le C\big(\|(I - T_\rho)U\|^2_{L^2(B)} + \mathcal{E}_\rho(U)\big). \tag{7.3}$$

此外，若逐分量满足 $(-\Delta - q_\rho)U = 0$，则

$$\|U(z_0)\|^2 \le C\big(\|(I - T_\rho)U\|^2_{L^2(B)} + \mathcal{E}_\rho(U)\big). \tag{7.4}$$

证明。 霍奇谱分解给出

$$X = \sum_{k=1}^{m} a_k e_{k,\rho} + Y, \qquad Y \perp e_{k,\rho} \quad (1 \le k \le m).$$

对于希尔伯特空间值场，系数 a_k 是希尔伯特向量。(7.1) 中的诺伊曼和狄利克雷谱隙，结合簇本身能量的非负性，可推出

$$\|Y\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} \le C\mathcal{E}_\rho(U). \tag{7.5}$$

事实上，该二次型在梯度场上的特征值为 $\mu_j(\Omega_\rho) - \mu_\rho$，在旋转狄利克雷梯度上的特征值为 $\lambda_j^D(\Omega_\rho) - \mu_\rho$。

若 $\widehat{Y} = Y \circ \Phi_\rho$，则 $\|\widehat{Y}\|^2_{L^2(q_\rho)} = \mu_\rho \|Y\|^2_2$。在 B 上，q_ρ 有一致正下界，while

$$\|T_\rho \widehat{Y}\|_{C^0} \le C\|\widehat{Y}\|_{L^2(q_\rho)}.$$

希尔伯特空间值版本可直接由正圆盘格林核和柯西–施瓦茨不等式得出：

$$\|T_\rho \widehat{Y}(z)\| \le \left(\int \mathcal{G}_0(z,w)^2 q_\rho(w)\, dA(w) \right)^{1/2} \|\widehat{Y}\|_{L^2(q_\rho)}.$$

第一个因子一致有界，因为对数型格林奇点的 $L^{2p'}$ 范数一致有界，且 q_ρ 在 L^p中有界。结合（7.5），可得 $\|(I - T_\rho)\widehat{Y}\|_{L^2(B)}$由 $C\sqrt{\mathcal{E}_\rho(U)}$ 有界。

极限 L_k 在每个非空的 B上都线性无关。如果某个实系数组合在该处为零，那么调和函数唯一延拓会使相应的 H 在整个圆盘上为零。相应的梯度将在 $L^2(q)$中满足 $W = TW$，除非特征函数为零，否则这与 $\|T\| < 1$ 矛盾。因此，实格拉姆矩阵

$$\left(\operatorname{Re} \int_B L_k \overline{L_\ell} \right)_{k,\ell=1}^{m}$$

是正定的。相应格拉姆矩阵的最小特征值$L_{k,\ \rho}$ 在 ρ 接近 1 时有一致正下界。否则，某个违反条件的序列会有一个子序列，如引理7.1所述，其极限格拉姆矩阵正定，从而产生矛盾。由

$$(I-T_\rho)U=\sum_k a_kL_{k,\rho}+(I-T_\rho)\widehat{Y}$$

我们得到

$$\sum_k\|a_k\|^2\le C(\|(I-T_\rho)U\|^2_{L^2(B)}+\mathcal{E}_\rho(U)).$$

正交 lity and (7.5) 证明 (7.3). Th常数 tants do not depend on the Hilbert空间 dimensi 。对于最后一个断言，取一个包含 z_0 的内部圆盘。势函数 q_ρ 及其所有导数在那里均一致有界。对于亥姆霍兹解的内部椭圆点估计给出 $\|U(z_0)\|$ 可由其局部 L^2 范数控制。该圆盘上 J_ρ 的正下界可将该局部范数控制为$\|X\|_{L^2(\Omega_\rho)}$。对正交归一基上的标量平方估计求和，即得具有相同常数的向量值估计。这就证明了（7.4）。□

7.5. **给定特征函数的逼近**。固定 $u=\sum_{k=1}^m a_ku_k\in E_\mu$，并令$W=(u_x+iu_y)\circ\Phi$。定义

$$W_\rho^{\mathrm{cl}}=\sum_k a_kW_{k,\rho},\qquad g_\rho=\sum_k a_kg_{k,\rho},\qquad \widehat{W}_\rho=S_\rho Ag_\rho.$$

场 $\widehat{W}_\rho$ 满足 $(-\Delta-q_\rho)\ \widehat{W}_\rho=0$。其差 $Z_\rho=\widehat{W}_\rho-W_\rho^{\mathrm{cl}}$满足

$$\begin{cases}(-\Delta-q_\rho)Z_\rho=-\sum_k a_k(\lambda_{k,\rho}-\mu_\rho)J_\rho W_{k,\rho}, & \text{in } \mathbb{D},\\ Z_\rho=0, & \text{on } \mathbb{S}^1.\end{cases}\tag{7.6}$$

对于 $r=2p/(p+1)>1$，加权 Hölder 不等式给出

$$\|J_\rho W_{k,\rho}\|_r\le\|F_\rho\|_{2p}\|F_\rho W_{k,\rho}\|_2=\|F_\rho\|_{2p}\sqrt{\lambda_{k,\rho}}.$$

由于 $\lambda_{k,\ \rho}-\mu_\rho\to0$，(7.6) 的右侧在 L^r 中趋于零。统一的狄利克雷间隙和圆盘正则性给出 $Z_\rho\to0$ 属于 $H_0^1(\mathbb{D})$，以及 $W^{2,\ r}(\mathbb{D})$，并且在 $\mathbb{D}$ 上一致成立。事实上，在 H_0^1估计之后，剩余源项满足 $\|q_\rho Z_\rho\|_{2p/(p+1)}\le\|q_\rho\|_p\|Z_\rho\|_{2p/(p-1)}=o(1)$，由此得到所述的狄利克雷正则性。由于在 $\mathbb{S}^1$ 上 $Z_\rho=0$，场 $\widehat{W}_\rho$ 与 W_ρ^{cl}具有相同的边界值，因此与边界相切。

修正项在二次型范数中也趋于零，因为

$$4\|(Z_\rho)_z\|_2^2+\int_{\mathbb{D}}q_\rho|Z_\rho|^2\le4\|\nabla Z_\rho\|_2^2+\|q_\rho\|_p\|Z_\rho\|_{2p'}^2\longrightarrow0.$$

场 $Z_\rho\circ\Phi_\rho^{-1}$的边界值为零，并且属于具有零法向迹的型定义域。标量特征函数的正交性给出

$$\mathcal{E}_\rho(W_\rho^{\mathrm{cl}})=\sum_k a_k^2\lambda_{k,\rho}(\lambda_{k,\rho}-\mu_\rho)\longrightarrow0.$$

由该型的非负性和柯西–施瓦茨不等式可知，对于每个固定的 $z_0\in\mathbb{D}$，

$$e_\rho:=\mathcal{E}_\rho(\widehat{W}_\rho)\longrightarrow0,\qquad \widehat{W}_\rho(z_0)\longrightarrow W(z_0).\tag{7.7}$$

通过（7.2），g_ρ 的两个 L^r 代表强收敛。这可以逼近每个 $u\in E_\mu$，即使特征值$\lambda_{k,\ \rho}$ 彼此不同也是如此。之所以需要修正项，是因为 $(I-T_\rho)\ W_\rho^{\mathrm{cl}}$不一定是调和的。

8. 高斯乘子估计

我们先在一个光滑域 Ω_ρ 上进行讨论，并在记号中省略 ρ。对于 $f \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\ \mathbb{C})$，令

$$V_f = SAf, \qquad \mathcal{E}(U,V) = \mathfrak{h}_q(U,V), \qquad \mathcal{E}(U) = \mathfrak{h}_q(U,U),$$

其中 $\mathfrak{h}_q$ 定义于（4.3）。若 f 是切向量场的迹，则 $\mathcal{E}(V_f) \geq 0$。乘以实函数仍保持这种切向性。对于实希尔伯特空间复化后的数据，逐分量应用 SA，并对正交归一基上的能量求和。所得形式与基的选取无关，且以下所有估计均与希尔伯特空间维数无关。

固定 $z_0 \in \mathbb{D}$。令 $b\colon \mathbb{S}^1 \to \mathcal{H}$ 为命题 5.2中的嵌入，其中 $b(s_0) = 0$ 取在一个固定的$s_0 \in \mathbb{S}^1$。记 $K = K_q$，$N = N_q$，并且

$$D_q(s,t) = \|b(s) - b(t)\|^2, \qquad N(s,t)D_q(s,t) = K(z_0,s)K(z_0,t).$$

8.1. 标量交换子及其归一化。 回忆一下，A 是关于 $d\theta$的泊松延拓。对于 f，$g \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1;\mathbb{C})$，定义

$$\mathcal{F}_q(V_f, V_g) = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{D}} (\nabla V_f \cdot \overline{\nabla V_g} - q V_f \overline{V_g}).$$

取 R_q 如（5.3）所示，预解式展开给出：对于有界边界数据，

$$\langle Af, SAg\rangle_{L^2(q)} = \iint_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} R_q(s,t) f(s)\overline{g(t)}\, ds\, dt. \tag{8.1}$$

对于非负数据，该公式可由 Tonelli 定理逐项得出；对于一般的有界数据，则可由绝对支配得出。事实上，

$$\iint R_q(s,t)\, ds\, dt = \langle 1, S1\rangle_{L^2(q)} < \infty.$$

自伴性使 R_q 具有对称性，并且 $N = N_0 + R_q$。

引理 8.1。 对于实数 $c \in C^1(\mathbb{S}^1)$ 和光滑复数 f，

$$\begin{aligned} &\mathfrak{h}_q(V_{cf}, V_{cf}) - \mathfrak{h}_q(V_f, V_{c^2 f}) \\ &\quad = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} N(s,t)(c(s)-c(t))^2 \operatorname{Re}\big(f(s)\overline{f(t)}\big)\, ds\, dt. \end{aligned} \tag{8.2}$$

证明。 将亥姆霍兹方程中的 V_f 与 $V_g - Ag \in H^1_0$作测试函数，并利用调和正交性，可得

$$\mathcal{F}_q(V_f, V_g) = \operatorname{Re}\int \nabla Af \cdot \overline{\nabla Ag} - \operatorname{Re}\langle Af, SAg\rangle_{L^2(q)}.$$

调和能量等于

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\iint N_0(s,t)(f(s)-f(t))\overline{(g(s)-g(t))}\, ds\, dt.$$

可通过考察 $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$来验证归一化：两个表达式都等于 2π。结合（8.1）并展开两个二次项，即可证明（8.2），其中以 $\mathcal{F}_q$ 代替 $\mathfrak{h}_q$。

对于 $U = X + iY$，有如下逐点恒等式

$$4|U_z|^2 = |\nabla U|^2 + 2(X_x Y_y - X_y Y_x).$$

格林公式和极化给出

$$\mathfrak{h}_q(V_f, V_g) = \mathcal{F}_q(V_f, V_g) + \operatorname{Im}\int_{\mathbb{S}^1} \bar{f}\,\partial_\theta g.$$

根据分部积分，边界项是实对称的。通过光滑逼近和 $H^{1/2}$ 边界配对，该公式可推广到 H^1 提升。对于实数 c，它在 $(cf,\ cf)$ 和 $(f,\ c^2 f)$ 处的值均为

$$\int_{\mathbb{S}^1} c^2 \operatorname{Im}(\bar{f}\,\partial_\theta f).$$

因此边界项相互抵消，从而证明了（8.2）。 □

对于取值于实希尔伯特空间的 C^1 乘子，将该恒等式对其各个坐标求和。有限维正交投影在该乘子及其导数的紧值域上一致收敛，因此在 C^1 中也收敛。对于每个固定的光滑逼近，相应的提升在 H^1 中收敛。在核一侧，利普希茨差的平方抵消了 N_0 的奇性，而剩余部分则由可积核 R_q 控制。因此所得恒等式在该希尔伯特空间中成立，且不存在依赖于其维数的常数。

8.2. **归一化指数曲线**。 考虑实对称福克空间 $\bigoplus_{n\ge 0}\mathcal{H}^{\otimes_s n}$，其中 $\mathcal{H}^{\otimes_s n}$ 是对称的 n 次张量幂，$\mathcal{H}^{\otimes_s 0}=\mathbb{R}$，且 $x^{\otimes 0}=1$。设 e_0 为零次单位向量。对于 $x\in\mathcal{H}$ 和 $\tau\ge 0$，定义

$$C_\tau(x)=e^{-\tau\|x\|^2/2}\bigoplus_{n\ge 0}\frac{\tau^{n/2}}{\sqrt{n!}}x^{\otimes n},\qquad \mathcal{B}_\tau(s)=C_\tau(b(s)).$$

我们也记 $d_\tau(s)=e^{-\tau\|b(s)\|^2/2}$。张量范数的约定为 $\|x^{\otimes n}\|=\|x\|^n$。直接求和可得

$$\|C_\tau(x)\|=1,\qquad \langle C_\tau(x),C_\tau(y)\rangle=e^{-\tau\|x-y\|^2/2}. \tag{8.3}$$

特别地，$C_\tau(0)=e_0$ 且 $\|C_\tau(x)-e_0\|\le\sqrt{\tau}\|x\|$。

引理 8.2（指数曲线的一致估计）**.** 若 $b\in C^{1,\beta}(\mathbb{S}^1;\mathcal{H})$，$0<\beta<1$，则

$$\|\mathcal{B}_\tau-e_0\|_{C^{1,\beta}}\le C_b\sqrt{\tau},\qquad 0\le\tau\le 1,$$

其中，C_b 仅取决于 β 和 $\|b\|_{C^1}$ 的一个上界，β，而与维数 H 无关。对于相同的范围 $0\le\tau\le 1$，

$$\|d_\tau b-b\|_{C^{1,\beta}}\le C_b\tau.$$

证明。定义级数及其前两阶导数在 $\mathcal{H}$ 的每个有界球上都一致收敛。对 8.3 求导可得

$$\|DC_\tau(x)h\|^2=\tau\|h\|^2,$$
$$\|D^2C_\tau(x)[h,k]\|^2=\tau^2\big(\|h\|^2\|k\|^2+2\langle h,k\rangle^2\big)\le 3\tau^2\|h\|^2\|k\|^2.$$

因此，$\|\mathcal{B}'_\tau\|_\infty\le\sqrt{\tau}\|b'\|_\infty$，并且

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}'_\tau(s)-\mathcal{B}'_\tau(t)\|&\le\sqrt{\tau}\|b'(s)-b'(t)\|\\&\quad+\sqrt{3}\tau\|b(s)-b(t)\|\|b'\|_\infty.\end{aligned}$$

这证明了第一个断言。第二个断言由 $C^{1,\beta}$ 中的乘积与复合估计得出，因为 $\|b\|^2$ 的 $C^{1,\beta}$ 范数一致有界。□

8.3. **高斯乘子恒等式**。

命题 8.3（高斯乘子恒等式）。对于任意光滑切向迹 f 以及任意 $t\ge 0$，

$$\mathcal{E}(V_{\mathcal{B}_t f},V_{\mathcal{B}_t f})-\mathcal{E}(V_f,V_f)=\frac{1}{2}\int_0^t\|V_{\mathcal{B}_\tau f}(z_0)\|^2\,d\tau. \tag{8.4}$$

特别地，左侧是非负的。

证明。对8.2式按 $\mathcal{B}_t$ 的坐标求和。由于 $\|\mathcal{B}_t(s)\|^2=1$，混合项等于 $\mathcal{E}(V_f,V_f)$。剩余项为

$$\frac{1}{2}\iint N(s,t')\|\mathcal{B}_t(s)-\mathcal{B}_t(t')\|^2\,\mathrm{Re}(f(s)\overline{f(t')})\,ds\,dt'.$$

由（8.3），

$$\frac{1}{2}N(s,t')\|\mathcal{B}_t(s)-\mathcal{B}_t(t')\|^2=N(s,t')(1-e^{-tD_q(s,t')/2})=\frac{1}{2}K(z_0,s)K(z_0,t')\int_0^t e^{-\tau D_q(s,t')/2}\,d\tau.$$

式（8.3）中的内积随后将该积分与式（8.4）对应起来。

引理 8.1 的希尔伯特值扩展为坐标求和提供了依据。对于处于有界区间内的 τ，其界是一致的：平方利普希茨差抵消了N_0的奇异性，而 $R_q = N - N_0$ 是可积的。它们还为 τ中的积分提供了依据。□

8.4. **具有一个原函数时的估计**。

定理 *8.4*（高斯乘子估计）。在第 7 节的光滑逼近上，固定$r > 1$。存在 $\rho_0 \in (0, 1)$和 $C > 0$，它们仅取决于 Φ、 p、 z_0和 r，并具有以下性质。对于 $\rho \in (\rho_0, 1)$，设 g 是一个光滑切向迹，满足分布意义下的 $g = g_0 + \partial_\theta g_1$，其中 g_0、 $g_1 \in L^r(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$。令

$$e = \mathcal{E}(V_g), \qquad M = \|g_0\|_r + \|g_1\|_r.$$

Then

$$\mathcal{E}(V_{d_t bg}) \le C\left(\frac{e}{t} + |V_g(z_0)|^2 + tM^2\right), \qquad 0 < t \le 1. \tag{8.5}$$

常数 C 与 ρ、 g、 t及希尔伯特空间维数无关。

证明。对于上面定义的曲线$\mathcal{B}_t$，令

$$y(t) = \mathcal{E}(V_{\mathcal{B}_t g}), \qquad Z_t = V_{(\mathcal{B}_t - e_0)g}.$$

命题 8.3 给出 $y(0) = e$ 以及 $y'(t) = \frac{1}{2}\|V_{\mathcal{B}_t g}(z_0)\|^2$。取一个非空圆盘 $B \Subset \mathbb{D}$。引理 8.2给出 $\|\mathcal{B}_t - e_0\|_{C^1} \le C\sqrt{t}$，因此引理 6.4 推出

$$\|(I - T)Z_t\|_{L^2(B)} = \|A((\mathcal{B}_t - e_0)g)\|_{L^2(B)} \le C\sqrt{t}\, M.$$

因此，逐点估计（7.4）给出

$$\|Z_t(z_0)\|^2 \le C(\mathcal{E}(Z_t) + tM^2).$$

该形式的非负性意味着 $\mathcal{E}(Z_t) \le 2y(t) + 2e$。由于 $V_{\mathcal{B}_t g}(z_0) = e_0 V_g(z_0) + Z_t(z_0)$，我们得到

$$y'(t) \le C(|V_g(z_0)|^2 + y(t) + e + tM^2).$$

在 $[0, 1]$ 上应用格朗沃尔不等式，得到 $y(t) \le C(e + t|V_g(z_0)|^2 + t^2M^2)$。$\mathcal{B}_t g$ 的一次张量分量为 $\sqrt{t}\, d_t bg$。所有坐标场都是切向的，且其能量均为非负，因此 $t\mathcal{E}(V_{d_t bg}) \le y(t)$，从而证明了该断言。□

指数范围。对于每个固定的 $p > 1$，原函数指数为 $r = 2p/(p+1) > 1$，而引理 6.3 中的径向收敛指数为 $(p-1)/(4p) > 0$。结合 C^1 对 b_ρ 的一致上界，这些估计适用于每个 $p > 1$。

8.5. 乘积场的极限。在极限域 Ω 上，使用 $T = G(\mu|F|^2 \cdot)$。令$u \in E_\mu$ 非零，设 $W = (u_x + iu_y) \circ \Phi$，并令 $g = g_u$ 为 (6.5) 中 $(I - T)W$ 的边界迹。假设 $W(z_0) = 0$，并设 $r = 2p/(p+1)$。取 $\rho_n \uparrow 1$，并用下标n 表示相应的量。第 7.5 节中构造的场满足 $e_n \to 0$ 且$\curvearrowleft W_n(z_0) \to 0$，其两个 L^r 迹代表元一致有界。设

$$t_n = \max\{\sqrt{e_n}, 1/n\}.$$

则 $t_n \to 0$ 且 $e_n/t_n \le \sqrt{e_n}$，包括 $e_n = 0$ 时。舍去有限项后，$t_n \le 1$。令 $V_h = S_n A h$ 位于第 n 次逼近上，定理 8.4 给出

$$\mathcal{E}_n(V_{e^{-t_n\|b_n\|^2/2} b_n g_n}) \longrightarrow 0. \tag{8.6}$$

选取一个可数稠密集 $\xi \in \mathbb{S}^1$。根据命题 5.3，函数

$$c_{n,\xi}(s) = \langle b_n(s), b_n(\xi)\rangle \longrightarrow c_\xi(s) = \langle b(s), b(\xi)\rangle \quad \text{in } C^1.$$

方向 $b_n(\xi)$ 的范数一致有界。将（8.6）投影到这些方向上，得到能量趋于零的标量切向亥姆霍兹场。它们的调和迹

$$h_{n,\xi} = e^{-t_n\|b_n\|^2/2} c_{n,\xi} g_n \longrightarrow c_\xi g \quad \text{in } W^{-1,r}$$

具有一致有界的 L^r 代表元，并且根据引理 6.4，其泊松延拓在紧子圆盘上一致收敛。

为确定极限，将 Ω_{ρ_n} 上的场分解为其在 m梯度∇u_k张成空间ρ_n 上的投影与正交余项。根据 (7.5)，余项在 L^2 中趋于零，而引理 7.2 给出了投影系数的界。取一个子列，使这些有限个系数收敛。于是，在每个紧子圆盘上，调和余项收敛到来自 E_μ 的某个梯度的调和余项。Ah_n的局部收敛ξ 确定了其分布迹。此论证构造出极限场；它并未假设任意 W^{-1}迹^r 都存在有限能量延拓。因此，存在一个实数 $u_\xi \in E_\mu$，使得

$$g_{u_\xi} = c_\xi g. \tag{8.7}$$

不同的子序列分别处理 ξ 不会造成歧义，因为映射 $u \mapsto g_u$ 根据引理 9.3 是单射的。

函数 c_ξ 将 $\mathbb{S}^1$中的点区分开来。如果它们在 s处 t的取值相同，那么，$b(s)-b(t)$ 与针对所选稠密集的 $b(\xi)$ 的闭线性张成正交。由连续性，该差也属于该闭线性张成，因此必为零。b 的单射性给出 $s=t$。

9. 内部临界点和全局坐标

9.1. 边界弧上的零迹。 我们首先在有限面积条件 $F \in A^2$下证明一个径向估计。它将表明，在调和梯度迹为零的任意边界弧上，拉回特征函数是常数。

引理 9.1（径向乘积估计）。设 $F \in A^2(\mathbb{D})$ 以及 $Z \in H^1_0(\mathbb{D})$。对于 $\rho \in (1/2,\ 1)$，置为 $A_\rho = \{z :\ \rho < |z| < 1\}$。那么，当 $\rho \uparrow 1$时，

$$\|F(\rho\,\cdot)Z(\rho\,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \le \left(\frac{2\log(1/\rho)}{1-\rho^2}\right)^{1/2} \|F\|_{L^2(A_\rho)} \|\nabla Z\|_{L^2(A_\rho)} \longrightarrow 0. \tag{9.1}$$

Z 的径向截面在每个闭外环域上均取其连续 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 代表。

证明。由于 F是解析的，$t \mapsto \|F(t\,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}$ 是单调不减的。因此

$$\|F\|^2_{L^2(A_\rho)} = \int_\rho^1 \|F(t\,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}\, t\,dt \ge \frac{1-\rho^2}{2}\|F(\rho\,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

在该环域上，映射 $\rho \mapsto Z(\rho\,\cdot)$属于 $H^1((1/2,1);\ L^2(\mathbb{S}^1))$，且在 $\rho = 1$处的迹为零。因此，由希尔伯特空间值微积分基本定理和柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} \|Z(\rho\,\cdot)\|_2 &\le \int_\rho^1 \|\partial_t[Z(t\,\cdot)]\|_2\, dt \\ &\le \left(\int_\rho^1 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \left(\int_\rho^1 t\|\partial_t[Z(t\,\cdot)]\|_2^2\, dt\right)^{1/2} \\ &\le \sqrt{\log(1/\rho)}\, \|\nabla Z\|_{L^2(A_\rho)}. \end{aligned}$$

将这些估计相乘，并在 $\mathbb{S}^1$上应用柯西–施瓦茨不等式。(9.1)中的前因子在 $\rho \uparrow 1$ 时仍有界（事实上趋于 1）。关于 A_ρ 的两个范数都由其积分的绝对连续性趋于零。□

引理 9.2（弧上的迹消失）。设 F 无零点且属于 $A^2(\mathbb{D})$，设 $v \in H^1(\mathbb{D};\mathbb{R})$，并假设

$$W = \frac{2v_{\bar z}}{\overline{F}} = H + Z, \qquad Z \in H^1_0(\mathbb{D}), \qquad H = Ag, \qquad g \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1;\mathbb{C}),$$

其中 A 是圆盘泊松延拓。若 g 在开连通圆弧 I上消失，则 v 的索伯列夫迹在 I上为常数。若 v 在闭圆盘上连续，则边界值在 I上逐点为常数。

证明。 固定一个紧致子弧 $I' \Subset I$。取一个支集包含于 I 且在 I'附近恒等于一的光滑截断函数。它与 g 的乘积为零。将其互补截断函数代入分布意义下的泊松表示，可知 H 在 I' 上光滑且在那里消失。事实上，源的支集与 I'保持正距离，因此泊松核关于源变量的所有导数都含有因子$1-|z|^2$，且分母有正下界。因此

$$\sup_{e^{i\theta}\in I'} |H(\rho e^{i\theta})| \le C_{I'}(1-\rho)$$

当 ρ 充分接近 1 时。

对于几乎所有的 ρ，链式法则给出

$$|\partial_\theta v(\rho e^{i\theta})| \le \rho|\nabla v(\rho e^{i\theta})| = \rho|F(\rho e^{i\theta})|\,|H(\rho e^{i\theta}) + Z(\rho e^{i\theta})|.$$

该 $F(\rho\cdot)Z(\rho\cdot)$ 项在 $L^1(\mathbb{S}^1)$ 中趋于零，这是由引理 9.1得到的。对于另一项，

$$\begin{aligned}\|F(\rho\cdot)H(\rho\cdot)\|_{L^1(I')} &\le C_{I'}(1-\rho)\|F(\rho\cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\\ &\le C_{I'}\sqrt{1-\rho}\,\|F\|_{L^2(A_\rho)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

因此

$$\|\partial_\theta v(\rho\cdot)\|_{L^1(I')} \longrightarrow 0 \tag{9.2}$$

沿着满测度的可容许半径集合。

的环域正则性给出 $v(\rho\cdot) \to \operatorname{Tr} v$ 在 $L^2(\mathbb{S}^1)$ 中满足 $\rho\uparrow 1$。对于每个 $\psi \in C_c^\infty(I')$,

$$\int_{I'} (\operatorname{Tr} v)\psi' = \lim_{\rho\uparrow 1}\int_{I'} v(\rho\cdot)\psi' = -\lim_{\rho\uparrow 1}\int_{I'} (\partial_\theta v(\rho\cdot))\psi = 0.$$

因此，迹的分布意义下的切向导数在 I 上为零。由于 I 连通，其迹在该处为常数。若具有连续性，则可得逐点成立的结论。□

9.2. **梯度迹的支集**。

引理 9.3. 在第 *3* 节的共形假设下，对于每个非零实数 $u \in E_\mu$，第 g_u 节定义的调和梯度迹 *8.5* 非零，且其支集不能是单点。作用于 E_μ 上的线性映射 $u \mapsto g_u$ 是单射。

证明。 令 $v = u\circ\Phi$并令 $W = 2v_{\bar z}/F$，记 $H = (I-T)W = Ag_u$为调和余项。若 $g_u = 0$，则 $H = 0$，因此 $W = TW$ 属于 $L^2(q)$。严格狄利克雷型界给出 $\|T\| < 1$，于是 $W = 0$ 且 $u = 0$，矛盾。对两者作差，也可证明单射性。

恒等式 $W_z = -\mu F v/2 \in L^2$ 和 $TW \in H_0^1$ 推出 $H_z \in L^2$。调和函数的傅里叶正交性给出

$$\sum_{n\ge 1} n|\widehat{g_u}(n)|^2 < \infty.$$

因此，正傅里叶系数趋于零。支集仅含一个点的分布是狄拉克质量的各阶导数的有限和；其正傅里叶系数是一个指数因子乘以多项式。除非该分布为零，否则这些系数不可能趋于零。这里关于W_z 的恒等式至关重要：仅仅属于 $W^{-1,\,r}$ 并不能排除狄拉克质量。□

定理 *1.1* 的证明。 假设一个非零实 $u \in E_\mu$ 有一个内部临界点，并令 $g = g_u$。第 8.5 节给出了能够分离 c_ξ 中各点的函数 $\mathbb{S}^1$ 以及满足条件（8.7）的特征函数 u_ξ。由线性性，任意 $c \in$ 张成$_{\mathbb{R}}\{1, c_\xi\}$ 都给出某个特征函数的迹 cg，该特征函数属于 E_μ。根据引理9.3，该特征函数是唯一的。

若 $\operatorname{supp} g = \mathbb{S}^1$，第 6.5 节 中的局部反演论证 $cg = 0$ 推出 $c = 0$。因此，这一对应是单射，而引理 3.4 给出$\dim \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{1, c_\xi\} \le 2$。至少有一个$c_\xi$ 非常值，因为这些函数能区分不同的点。其余函数都是它的仿射函数。因此，它将定义一个从圆到 $\mathbb{R}$的连续单射，这是不可能的。

否则， g 在一个非空开弧 I上消失。存在一个 ξ 使得 u，u_ξ 线性无关。否则，对每个 $u_\xi = \lambda_\xi u$，写作 ξ。那么$(c_\xi - \lambda_\xi)g = 0$ 对每个 ξ都成立，而局部求逆表明 g 的支集包含于所有c_ξ的公共水平集中。这样的集合至多包含一个点，这与引理9.3矛盾。

两个迹 g 和$^{c}\xi g$ 都在 I上消失。第 C^{1} 6.5 节中的乘法的局部性 W^{1}、$^{2p/(p-1)}$ 测试函数可通过在较小弧上用光滑测试函数逼近紧支集，由此得到。引理9.2 适用于 $F\in A^{2}$和 $Z=TW\in H^{1}_{0}$；因此，两个拉回特征函数在 I上为常数。一个非零实线性组合 w 在该处的狄利克雷迹为零，其弱诺伊曼数据也为零。

将 w 和 q 沿较小圆弧跨弧延拓为零。零狄利克雷迹给出一个 H^{1}_{loc}延拓，而弱诺伊曼方程给出

$$-\Delta\widetilde{w}=\widetilde{q}\,\widetilde{w}$$

且边界弧上没有支集为该弧的分布。由于 w 有界且 $q\in L^{p}$, $p>1$，内部椭圆正则性给出 $\widetilde{w}\in W^{2,\,p}$局部。此外，

$$\sup_{x}\int_{|x-y|<R}|\log|x-y||\,|\widetilde{q}(y)|\,dy\le\|\widetilde{q}\|_{p}\left(\int_{|z|<R}|\log|z||^{p'}\,dA(z)\right)^{1/p'}\longrightarrow 0\qquad(R\downarrow 0).$$

因此，Sawyer 平面唯一延拓定理 [30]适用于这个局部 Kato 势。该延拓在外侧开集上为零，因此 w 在弧附近为零，继而在整个连通圆盘上为零。这与 $u,^{u}\xi$的线性无关性矛盾，由此证明 u 没有内部临界点。

引理 3.1 给出 $v=u\circ\Phi\in C(\overline{\mathbb{D}})$。由于 Φ 是保角的，链式法则表明 ∇v 在 $\mathbb{D}$中处处非零。v 在 $\mathbb{D}$ 上的两个极值均能取到，而内部极值点的梯度必为零。因此，两个极值只能在 $\mathbb{S}^{1}$ 上取到，这就证明了 (1.3)。紧性以及域的假设之间的等价性由引理 3.1 和命题 2.1得出。 □

9.3. **全局坐标与流函数。**

推论 9.4 (全局特征函数坐标)。 设 Ω 满足定理 *1.1*的假设。若 $\dim_{\mathbb{R}}E_{\mu}=2$ 且 u_{1}, u_{2} 构成一个实基，则

$$\mathcal{U}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{2},\qquad\mathcal{U}(x)=(u_{1}(x),u_{2}(x)),$$

是一个实解析微分同胚，将其映到关于0星形的有界域 Σ 。其雅可比具有恒定的非零符号，并且恰有一个 $x_{*}\in\Omega$ 满足 $u_{1}(x_{*})=u_{2}(x_{*})=0$。

证明。 若两个梯度在某点线性相关，则存在一个非零实线性组合在该点有临界点，这与定理 1.1矛盾。因此 $\det D\mathcal{U}$ 处处非零且符号恒定。

固定一个共形双射 $\Phi:\mathbb{D}\to\Omega$，满足 $F=\Phi'\in L^{2p}(\mathbb{D})$、 $p>1$，并令 $v_{k}=u_{k}\circ\Phi$对于 $k=1,\ 2$ 以及 $\mathcal{U}=(v_{1},\ v_{2})$。必要时交换基元素后，我们可以假设 $j=\det D\mathcal{U}>0$ 在 $\mathbb{D}$中。各分量在$\mathbb{D}$中实解析。引理 3.1 给出$v_{k}\in W^{2,\,p}(\mathbb{D})\cap C(\mathbb{D})$，以及满足齐次诺伊曼数据的 $-\Delta v_{k}=\mu|F|^{2}v_{k}$。特别地，$\nabla v_{k}\in L^{2p}(\mathbb{D})$ 且 $j\in L^{p}(\mathbb{D})$。

共同方程使该系统

$$\psi_{x}=v_{2}(v_{1})_{y}-v_{1}(v_{2})_{y},\qquad\psi_{y}=v_{1}(v_{2})_{x}-v_{2}(v_{1})_{x}$$

相容。其右端属于 $W^{1,\,p}$，因此圆盘上的庞加莱引理给出 $\psi\in W^{2,\,p}(\mathbb{D})$，且解在相差一个常数的意义下唯一。其沿边界的切向导数为 $v_{1}\partial_{\nu}v_{2}-v_{2}\partial_{\nu}v_{1}=0$，其中 ν是 $\mathbb{S}^{1}$的外单位法向量。这些乘积迹可通过在 $W^{2,\,p}$中的逼近得到，其中未求导因子一致收敛。因此， ψ 的边界值为常数；将其归一化为零。直接求导可得

$$-\Delta\psi=2j,\qquad D\widehat{\mathcal{U}}\,\nabla\psi=-j\widehat{\mathcal{U}},\qquad\psi|_{\mathbb{S}^{1}}=0.\tag{9.3}$$

最大值原理给出 $\psi>0$ 属于 $\mathbb{D}$。由于 ψ 在闭圆盘上连续，每个闭超水平集 $\{\psi\ge c\}$， $c>0$，都是 $\mathbb{D}$中的紧集。

选取一个最大值点 $z_{*}\in\mathbb{D}$ 属于 ψ。方程（9.3）给出$\mathcal{U}(z_{*})=0$。我们应用 Gorni 和 Zampieri 的提升射线判据 [21, 定理 1.1 和命题 1。2]。函数 $k=-\log\psi$

在 $\mathbb{D}$ 上光滑且适当，并且有下界：它的闭次水平集是 ψ 的紧致正超水平集，而 ψ 有上界。此外，

$$\nabla k \cdot [D\widehat{\mathcal{U}}]^{-1}\widehat{\mathcal{U}} = \frac{|\nabla\psi|^2}{j\psi} \geq 0.$$

$\widehat{\ }$由于 $\mathbb{D}$ 是开且连通的，并且$\mathcal{U}$ 是局部微分同胚，因此该判据保证了单射性，且其像是关于$\mathcal{U}(z_*)$ 的星形区域 $= 0$。局部解析逆映射给出全局解析逆映射，而在闭圆盘上的连续性则保证像有界。其唯一零点对应于 Ω 中的 $x_* = \Phi(z_*)$。□

一旦 j 具有固定的非零符号，圆盘上的论证只用到内部光滑性、共同的标量方程、齐次诺伊曼数据以及 $W^{2,\ p}$ 正则性和 $p > 1$；节点连通性并非独立的前提。

对于 $z_0 \in \mathbb{D}$，令 $z(t)$ 满足方程 $\dot{z} = \nabla\psi(z)/j(z)$，其中 $z(0) = z_0$。流函数恒等式给出

$$\widehat{\mathcal{U}}(z(t)) = e^{-t}\widehat{\mathcal{U}}(z_0), \qquad \frac{d}{dt}\psi(z(t)) = \frac{|\nabla\psi(z(t))|^2}{j(z(t))} \geq 0. \tag{9.4}$$

该轨线始终位于 $\{\psi \geq \psi(z_0)\} \Subset \mathbb{D}$ 中，因此对所有 $t \geq 0$ 都存在。方程 (9.3) 还表明， z_* 是 ψ 的唯一临界点。在 z_* 处求导可知， ψ 在该点的赫essian 矩阵为$-j(z_*)$ 乘以单位矩阵。除 z_* 外，梯度轨线映射为径向线段。沿着每条从 0 出发的射线的原像，随着半径增大， ψ 严格递减，并在像的边界处趋于零：逆映射对应的点离开圆盘内的每个紧子集，而ψ 在圆周上趋于零。因此，对于 $0 < c < \psi(z_*)$，水平集 $\{\psi = c\}$ 是一条简单闭曲线，与每条这样的原像相交一次且相交正交。简单曲线这一结论由隐函数定理得出，将其应用于半径关于目标角度的函数即可。

9.4. **边界角与坐标像**。

命题 *9.5*（共形边界坐标）。在推论 *9.4* 的假设下，固定一个共形双射 $\Phi: \mathbb{D} \to \Omega$，使其满足 $\Phi' \in L^{2p}(\mathbb{D})$， $p > 1$。令 $\widehat{\ }U = U \circ \Phi$，并排列基底$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，使得 $j = \det DU > 0$。映射 U 可延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 Σ 的同胚。将目标 $\mathbb{R}^2$ 视为 $\mathbb{C}$。边界迹 $\gamma(t) = \widehat{\ }U(e^{it})$，$t \in \mathbb{R}$，绝对连续且处处非零，并存在其辐角提升 α，满足

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\alpha(t)}, \qquad \alpha(t + 2\pi) = \alpha(t) + 2\pi.$$

诱导的角映射是圆的 $C^{1,\ \beta}$ 微分同胚，其中可取

$$\beta = 2 - \frac{2}{p} \quad (1 < p < 2), \qquad 0 < \beta < 1 \quad (p \geq 2). \tag{9.5}$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$，

$$|\gamma(t)|^2\alpha'(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\, j(z)\, dA(z). \tag{9.6}$$

该连续乘积几乎处处等于 $\det(\gamma(t)\ \ \gamma'(t))$ 。此外，

$$\alpha'(t) \geq \frac{1}{3\pi\|\gamma\|_\infty^2}\int_{|z|\leq 1/2} j(z)\, dA(z) > 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{9.7}$$

逆边界映射 $\partial\Sigma \to \mathbb{S}^1$ 关于欧氏距离是利普希茨连续的。存在连续的正 2π-周期函数 $R: \mathbb{R} \to (0, \infty)$，使得

$$\Sigma = \{\rho(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq \rho < R(\theta)\}. \tag{9.8}$$

对于 *Jordan* 域 Ω，U 可延拓为欧氏闭包之间的同胚；一般而言，源域的闭包是共形紧化，也称素端紧化。

$\widehat{}$证明。 引理 3.1 说明 $\mathcal{U}$ 在闭圆盘上连续。没有边界值落在 Σ 中：否则，趋近该边界点的内点序列的像将收敛于 Σ 中的某点，这与推论 9.4中逆映射的连续性矛盾。由紧性可得 $\widehat{\mathcal{U}}(\mathbb{S}^1) = \partial\Sigma$，因此不包含 0。唯一的内点零点以及 $j > 0$ 意味着 0 处的次数为一，从而得到所述辐角提升 α。迹定理给出 $\gamma \in W^{2-1/p,\,p}(\mathbb{S}^1)$，因此 γ 及其局部辐角提升均绝对连续。

令 ψ 为推论 9.4 的证明中构造的归一化流函数。由其定义可知，几乎处处在 $\mathbb{S}^1$上，

$$-\partial_\nu \psi = \det(\gamma, \gamma') = |\gamma|^2 \alpha'.$$

对于 $\mathbb{S}^1$上的光滑实函数 h，其泊松延拓 Ah 根据格林公式和 $\psi|_{\mathbb{S}^1} = 0$满足，

$$\int_0^{2\pi} h(e^{it}) |\gamma(t)|^2 \alpha'(t)\, dt = 2 \int_{\mathbb{D}} (Ah)(z) j(z)\, dA(z).$$

代入圆盘上的泊松公式，即可证明（9.6）几乎处处成立。Fubini 定理适用，因为 $j \in L^1$，且在归一化之前，泊松核关于 2π 的积分为 dt。

为获得边界正则性，选取 $\mathbb{S}^1$ 的一个闭领圈，在该领圈上 $|\widehat{\mathcal{U}}|$ 与零保持正距离。Sobolev 嵌入给出 $|\widehat{\mathcal{U}}|^{-2} \in C^{0,\,\beta}$ 对（9.5）中的每个指数，该结论在领圈上成立。对于局部 $\widehat{}$ 分支 ϑ 的 $\arg\mathcal{U}$，流函数恒等式给出

$$\nabla\vartheta = |\widehat{\mathcal{U}}|^{-2}(\psi_y, -\psi_x), \qquad \operatorname{div}(|\widehat{\mathcal{U}}|^{-2}\nabla\psi) = 0.$$

这是关于 $\psi \in H^1$ 的一致椭圆散度型方程，在光滑外边界上的迹为零。弱解的边界 Schauder 估计 [20, 推论 8.36]给出$\psi \in C^{1,\,\beta}$ 在较小的领圈上直至 $\mathbb{S}^1$ 均成立。第一个恒等式给出了 ϑ 的相同正则性。特别是，α' 是 $C^{0,\,\beta}$。由于 ψ 在 $\mathbb{S}^1$ 上为常数，同一恒等式也给出 $\partial_\nu\vartheta = 0$ 在该处的正则性。

（9.6）中的积分关于 t连续。事实上，在领圈中，$\nabla|\widehat{\mathcal{U}}| \in L^{2p}$，而 $\nabla\vartheta$ 有界，因此

$$j = |\widehat{\mathcal{U}}| \det(\nabla|\widehat{\mathcal{U}}|, \nabla\vartheta) \in L^{2p}$$

在领圈上。内部光滑性继而给出 $j \in L^{2p}(\mathbb{D})$。（9.6）中的核由$2/|e^{it} - z|$控制，因此属于 $L^{2p/(2p-1)}(\mathbb{D})$。由旋转的连续性可知，它在该空间中关于 t 连续变化。因此，根据霍尔德不等式，积分是连续的，从而恒等式对每个 t都成立。在 $|z| \le 1/2$ 上，核至少为 $1/3$，由此得到（9.7）。

正导数和次数一使角映射成为一个 $C^{1,\,\beta}$ 圆周微分同胚。因此，γ 是单射的极坐标参数化，并定义了连续半径 R。其逆映射是径向投影与角映射的逆映射的复合。半径有正下界时，径向投影是利普希茨的；角映射的逆映射在紧圆上是 C^1，因此对于弦距离也是利普希茨的。内部像与边界像互不相交，且两处的限制映射均为双射；由紧性可知闭包之间存在同胚。对于 Jordan 源域，Carathéodory 定理表明，共形闭圆盘与其欧氏闭包相同。□

推论 9.6 (边界零点和节点端点**)**。在命题 *9.5* 的假设下，每个非零的 $w \in E_\mu$ 恰有两个素端边界零点。以共形参数计，这两个零点都是单零点：在每个零点处，$t \mapsto (w \circ \Phi)(e^{it})$ 的导数存在且非零。$w \circ \Phi$ 的闭节点集在 $\mathbb{D}$ 中是一条单独的弧。对于满足 (9.5) 的每个 β，这条弧除两个端点外均为 $C^{1,\,\beta}$，并与 $\mathbb{S}^1$ 正交相交。

证明。 将 w 乘以一个非零常数后，其边界迹具有如下形式：$|\gamma(t)|\sin(\alpha(t)-\theta_0)$，其中 $\theta_0 \in \mathbb{R}$ 为某个值。角向微分同胚在圆上恰好产生两个零点。在任一零点 t_0 处，由 $|\gamma|$ 的连续性和 α 的可微性可得

$$\lim_{t\to t_0} \frac{|\gamma(t)|\sin(\alpha(t)-\theta_0)}{t - t_0} = |\gamma(t_0)|\cos(\alpha(t_0)-\theta_0)\alpha'(t_0) \neq 0.$$

余弦等于1或 -1，且（9.7）使最后一个因子为正。

命题 9.5 中的同胚将闭节点集与一条经过 $\widehat{0}$ 且位于 Σ中的线段对应起来。在任一端点附近，它是 $\arg \mathcal{U}$的一个局部分支 ϑ 的水平集。该命题的证明给出 $\vartheta \in C^{1,\beta}$ 直到圆，且

$$\nabla \psi = |\widehat{\mathcal{U}}|^2(-\partial_y \vartheta, \partial_x \vartheta).$$

由于 ψ 在 $\mathbb{S}^1$上为常数，因此有 $\partial_\nu \vartheta = 0$，其中 ν 为外单位法向量。切向导数为 $\alpha' > 0$。因此，隐函数定理给出一条 $C^{1,\beta}$ 节点弧，其端点处的切线垂直于 $\mathbb{S}^1$。□

推论 9.7（径向函数的正则性）。 在命题 9.5的假设和记号下，设 R 为 $\partial\Sigma$的正周期径向函数。

$$\begin{aligned} &R \in W^{1,p/(2-p)}(\mathbb{S}^1), && 1 < p < 2, \\ &R \in W^{1,r}(\mathbb{S}^1) \text{ for every } 1 \le r < \infty, && p = 2, \\ &R \in C^{1,1-2/p}(\mathbb{S}^1), && p > 2. \end{aligned}$$

在所有情况下， $\partial\Sigma$都是可求长的。

Proof. 对于 $1 < p < 2$，由迹定理和一维索伯列夫嵌入可得

$$\gamma' \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{S}^1) \subset L^{p/(2-p)}(\mathbb{S}^1).$$

当 $p = 2$时，同一迹空间嵌入到每个有限的 $L^r(\mathbb{S}^1)$中。函数 $|\gamma|$ 绝对连续，且几乎处处有 $|(|\gamma|)'| \le |\gamma'|$。由于 α^{-1} 递增且为利普希茨函数，$R = |\gamma| \circ \alpha^{-1}$ 绝对连续。当 $1 < p < 2$时，取 $r = p/(2-p)$；当 $p = 2$时，取任意 $1 \le r < \infty$。由周期性和变量替换可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |R'(\theta)|^r \, d\theta &= \int_0^{2\pi} |(|\gamma|)'(t)|^r \alpha'(t)^{1-r} \, dt \\ &\le \left(\min_{\mathbb{R}} \alpha'\right)^{1-r} \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^r \, dt < \infty. \end{aligned}$$

由（9.7），最小值为正。

若 $p > 2$，莫雷不等式给出 $\gamma \in C^{1,1-2/p}$。由（9.5）和（9.7）可知，角映射及其逆映射至少具有这一正则性。因此， $R = |\gamma| \circ \alpha^{-1}$ 属于 $C^{1,1-2/p}$。在所有情况下， $R \in W^{1,1}(\mathbb{S}^1)$，所以参数化 $\theta \mapsto R(\theta)e^{i\theta}$ 绝对连续且具有有限长度。□

注 9.8（光滑源区域）。 在命题 9.5的设定下，进一步假设 $\partial\Omega$ 是 C^∞。此时，相同的结论也可以用物理弧长来表述。选取基底定向，使得 $\det D\mathcal{U} > 0$，令 s 沿 $\partial\Omega$逆时针递增，并令 ν 为外单位法向量。流函数构造和保角性给出

$$\begin{aligned} -\Delta(\psi \circ \Phi^{-1}) &= 2 \det D\mathcal{U}, \\ \nabla(\psi \circ \Phi^{-1}) &= u_1 \nabla^\perp u_2 - u_2 \nabla^\perp u_1. \end{aligned}$$

这里 $\nabla^\perp h = (-h_y, h_x)$，如引理 4.1中所示。函数 $\psi \circ \Phi^{-1}$ 在 Ω 内为正，并在$\partial\Omega$上取零值。因此，霍普夫边界引理给出

$$\det(\mathcal{U}, \partial_s \mathcal{U}) = -\partial_\nu(\psi \circ \Phi^{-1}) > 0 \qquad \text{on } \partial\Omega.$$

边界特征函数是光滑的，因此弧长参数下的角映射是光滑微分同胚，且 R 是光滑的。推论 9.6 中的两个零点在物理弧长参数下都是单零点。在任一零点处，非零切向导数和诺伊曼条件表明，节点弧与 $\partial\Omega$ 正交相交。

9.5. 凸性与星形中心。若点 ξ 是 Σ 的星形中心，则对每个 $z \in \Sigma$，都有 $\xi \in \Sigma$ 和 $[\xi, z] \subset \Sigma$。若对某个 $p > 2$ 有 $\Phi' \in A^{2p}$，则星形中心包含 0 的一个邻域。事实上，推论 9.7 和角向正则性给出 $\gamma \in C^1$，而 (9.6) 和 (9.7) 给出 $\min_t \det(\gamma(t)\ \gamma'(t)) > 0$。对所有充分小的 $|\xi|$，我们有 $\xi \in \Sigma$，并且

$$\det(\gamma(t) - \xi, \gamma'(t)) \geq \min_t \det(\gamma(t), \gamma'(t)) - |\xi|\|\gamma'\|_\infty > 0.$$

论证表明，ξ 因此严格递增，且次数为一。从 ξ 出发的每条射线都恰好与边界相交一次，因此 ξ 是一个星形中心。对于光滑源域，同一证明使用物理弧长，以及由上文的 Hopf 引理得到的严格角导数。

命题 9.9. 在推论*9.4*的 Σ 为凸当且仅当

$\Omega| \{w = c\}$ 至多有两个连通分支 $(0 \neq w \in E_\mu,\ c \in \mathbb{R})$。

存在光滑的严格凸源域，其第一个正 *Neumann* 特征值为二重特征值，并且对于任意实基，Σ 均为非凸。

证明。仿射直线的每个严格侧与凸开集的交集都是连通集或空集。对 $\mathcal{U}$ 取拉回即可证明其中一个方向。

如果 Σ 是非凸的，那么存在一条直线与之相交，且交集至少包含两个互不相连的开区间。每个区间都是拓扑圆盘 Σ 中的一条适当嵌入的直线。根据 Jordan–Schoenflies 定理，对 Σ 作一点紧化后，第一条直线将 Σ 分成两个开圆盘。第二条直线适当地嵌入其中一个圆盘，并再次将其分开。由此得到的三个开区域各自都包含不在该仿射直线上的点；移除其余区间也无法将它们重新连通。映回原处，便得到至少三个移位水平集补集的连通分支。

Bérard 和 Helffer [8, 定理 1.2 和命题 3。5]构造了光滑且严格凸的域，其第一正 Neumann 特征子空间为二维，并且对于某个 $w - c$，其中 $w \in E_\mu$，恰有三个节点域。结合他们的结果、推论 9.4 以及刚刚证明的判据，可得非凸的坐标像。可逆实线性基变换保持凸性，从而证明了最后一个断言。□

等边三角形。在顶点为 0、1 和 $e^{i\pi/3}$ 的三角形上，函数的实部和虚部

$$Z(x, y) = \frac{1}{3}\left(e^{-4\pi i x/3} + 2e^{2\pi i x/3}\cos(2\pi y/\sqrt{3})\right)$$

构成第一个正 Neumann 特征空间的一组基。特征值为 $16\pi^2/9$，且为二重特征值[7, 第 3.1 节和附录 A。2]。取 $\mathcal{U} = (\mathrm{Re}\ Z,\ \mathrm{Im}\ Z)$。这是 Bakry 和 Zribi 所描述的三角形到三尖瓣线的微分同胚 [4, 第 3], ，经过对源域重新缩放并取复共轭后得到。因此，该例独立于定理 1.1。在底边上设 $t = 2\pi x/3$。旋转即可得到其他边以及完整的边界参数化

$$d(t) = \frac{2e^{it} + e^{-2it}}{3}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{9.9}$$

它满足

$$|d(t)|^2 = \frac{5 + 4\cos 3t}{9}, \qquad \frac{d}{dt}\arg d(t) = \frac{2(1 - \cos 3t)}{5 + 4\cos 3t}. \tag{9.10}$$

除了三个尖点外，辐角导数均为正，并且 $d(0) = e^{it}(2 + e^{-3it})/3$ 的绕数为一。这些恒等式还直接验证了三尖瓣线关于 0 是星形的。令 $\omega = e^{2\pi i/3}$。中点 $(1+\omega)/2$ 的半径为 $1/2$，角度为 $\pi/3$，而 $d(\pi/3) = e^{i\pi/3}/3$。它位于闭像之外。由于凸集的闭包是凸的，该像是非凸的。

在尖点 $d(0) = 1$ 处，采用在该点取值为零的辐角分支，

$$|d(t)| = 1 - t^2 + O(t^4), \qquad (|d|)'(t) = -2t + O(t^3), \qquad \arg d(t) = t^3/3 + O(t^5).$$

结合（9.10），可得

$$1 - R(\theta) = 3^{2/3}|\theta|^{2/3} + O(|\theta|^{4/3}) \qquad (\theta \to 0).$$

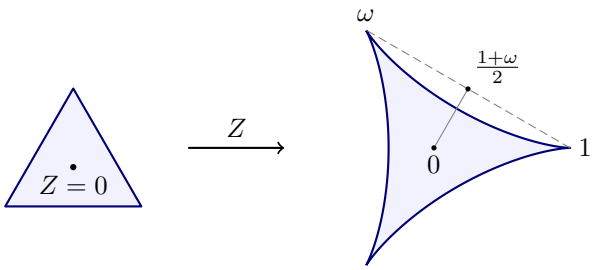

图 1。 已建立的三角形到三尖瓣形坐标 [4, 第 3], 节，其边界由（9.9）给出。虚线线段的中点位于闭像之外。

对于非零且接近零的 θ， $|R'(\theta)|$ 被正数倍的 $|\theta|^{-1/3}$从上方和下方夹住。其他尖点都是这一尖点的旋转像，而 R 在其他地方解析。因此，对于 $1 \le r < 3$，有 $R \in W^{1,r}$，但 $R \notin W^{1,3}$。若 $\zeta \in \mathbb{S}^1$ 映射到三角形的一个顶点，则施瓦茨–克里斯托费尔公式 [18, 第 2.2 节和第 4.1] 节给出 $|\Phi'(z)|$ 在 ζ 附近被正数倍的 $|z-\zeta|^{-2/3}$从上方和下方夹住。在指数 $p > 1$中，当且仅当 $p < 3/2$时，恰有 $|\Phi'|^2 \in L^p$；面积积分在 $p = 3/2$处对数发散。令 p 递增至 $3/2$，推论 9.7 可得到每个 $r < 3$。

对于角度端点，选择 Φ，使得三个顶点的原像是单位根的立方根，并令 $\Phi(1)$ 为三角形顶点 0。对于非零复常数 C,

$$\Phi'(z) = C(1 - z^3)^{-2/3},$$

在 $\mathbb{D}$ 中取解析分支。令 τ 为 1 附近的源圆角度，并使用 d 在尖点 1 附近的有符号参数 t。在每条相邻边上，$|t|$ 是从顶点到该点距离的 $2\pi/3$ 倍。因此，对 $|\Phi'(e^{i\tau})| = |C||1 - e^{3i\tau}|^{-2/3}$ 积分可得对于常数 $k > 0$ 的以下展开式:

$$t = k\,\mathrm{sgn}(\tau)|\tau|^{1/3}(1 + O(\tau^2)), \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{k}{3}|\tau|^{-2/3}(1 + O(\tau^2)).$$

精确公式（9.10）给出 $(\arg d)' = t^2 + \frac{5}{4}t^4 + O(t^6)$，因此

$$\alpha'(\tau) = \frac{k^3}{3} + \frac{5k^5}{12}|\tau|^{2/3} + O(|\tau|^{4/3}).$$

因此，对于每个 $\beta > 2/3$，共形边界角都不满足 $C^{1,\beta}$。尽管它在尖点处的导数为正。阈值 $r = 3$ 和 $\beta = 2/3$ 描述了这个例子；这些计算并未证明对于每个固定的 p，一般估计是最优的。

原点是三尖瓣线唯一的星形中心。在正则边界点，星形中心 ξ 必须满足 $\det(d(t) - \xi, d'(t)) \ge 0$: 指向 ξ 的线段在一阶意义上位于切线的内侧。在尖点 1 处，

$$\det(d(t) - \xi, d'(t)) = -2t\,\mathrm{Im}\,\xi + O(t^2).$$

取 取 t 的两个符号会迫使 $\mathrm{Im}\,\xi = 0$。随后，在 ω 和 ω^2 处旋转后的条件会迫使 $\xi = 0$.

附录 A. 倒数正性与希尔伯特空间实现

我们给出 [27, 第 5], 节中倒数核不等式的矩阵证明，其中包含正则化和取极限步骤。在本附录中，矩阵或核的倒数均指其逐元素倒数。

令 ds 表示 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上的普通弧长。对于 $x, y, z_0 \in \mathbb{D}$ 和$s, t \in \mathbb{S}^1$，我们对格林核和泊松核采用以下归一化：

$$\mathcal{G}_0(x,y) = \frac{1}{4\pi}\log\left(1 + \frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\right), \tag{A.1}$$

$$P_s(x) = \frac{1-|x|^2}{2\pi|x-s|^2}, \qquad N_0(s,t) = \frac{1}{\pi|s-t|^2}. \tag{A.2}$$

格林算子 G 对 $\mathcal{G}_0$, 进行积分，其对角线上的值为 $+\infty$。设 $q \geq 0$ 为有界可测函数，使得

$$\int_{\mathbb{D}} q|\psi|^2\,dA \leq d\int_{\mathbb{D}} |\nabla\psi|^2\,dA \qquad (\psi \in H^1_0(\mathbb{D})), \qquad d < 1. \tag{A.3}$$

我们可以取 $0 < d < 1$，包括 $q = 0$的情形。在 $L^2(q) = L^2(\mathbb{D}, q\,dA)$ 上定义 T为 $Tf = G(qf)$。通过非负链积分定义边界核：

$$K(z_0,s) = P_s(z_0) + \sum_{n\geq 1}(T^nP_s)(z_0), \tag{A.4}$$

$$R_q(s,t) = \sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{D}} P_s(x)(T^nP_t)(x)\,q(x)\,dA(x), \qquad N = N_0 + R_q. \tag{A.5}$$

这些公式并不表示 $P_s \in L^2(q)$。

定理 A.1。 对于每个 $z_0 \in \mathbb{D}$，当 s 遍历 $\mathbb{S}^1$ 时， $K(z_0, s)$ 为正且有界，并且对于 $s \neq t$，$N(s, t)$ 有限且为正。该核

$$D_q(s,t) = \frac{K(z_0,s)K(z_0,t)}{N(s,t)} \quad (s \neq t), \qquad D_q(s,s) = 0, \tag{A.6}$$

是条件负半定的：对于任意有限族 $s_i \in \mathbb{S}^1$ 及满足 $\sum_i a_i = 0$的实数 a_i ，

$$\sum_{i,j} a_i a_j D_q(s_i, s_j) \leq 0.$$

A.1. **算子界与有限边界值**。 对于 $f \in L^2(q)$， q 的有界性给出$qf \in L^2(dA)$。狄利克雷解 Tf 属于 H^1_0，对其方程进行测试，再应用（A.3）即可得到

$$\|Tf\|^2_{L^2(q)} \leq d\|\nabla Tf\|_2^2 = d\langle f, Tf\rangle_{L^2(q)} \leq d\|f\|_{L^2(q)}\|Tf\|_{L^2(q)}.$$

因此， T是自伴的、保正的，且 $\|T\| \leq d$。由能量恒等式可知，其二次型也为正。任何更小的非负势都满足相同的结论，且具有相同的形式界常数 d。

初等界$\mathcal{G}_0(x, y) \leq C\log(2/|x-y|)$ 和 $P_s(y) \leq C|y-s|^{-1}$ 为 $L^3(dA)$中的格林截面以及 $L^{3/2}(dA)$中的泊松截面给出了一致界。因此

$$\sup_s \|TP_s\|_\infty < \infty.$$

特别地， $TP_s \in L^2(q)$。对于 $n \geq 2$,

$$(T^nP_s)(z_0) = \langle \mathcal{G}_0(z_0,\cdot), T^{n-2}(TP_s)\rangle_{L^2(q)},$$

其绝对值一致地以 $C_{z_0}d^{n-2}$为界，其中 s。这证明了关于K的断言。对于不同的 s, t， $n = 0$ 项 R_q 有限，因为 P_s 和 P_t 的极点彼此分离。 $n = 1$ 项有限，因为 TP_t 有界且 $P_s \in L^1(q)$。对于 $n \geq 2$，由对称性和Tonelli定理可得

$$\int P_s T^n P_t\,q\,dA = \langle TP_s, T^{n-2}(TP_t)\rangle_{L^2(q)} \leq d^{n-2}\|TP_s\|_{L^2(q)}\|TP_t\|_{L^2(q)}.$$

因此收敛。反转链条可证明对称性，并且 $\int_{\mathbb{S}^1} P_s(x)\,ds = 1$ 得级数

$$\iint_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1} R_q(s,t)\,ds\,dt = \sum_{n\geq 0}\langle 1, T^n 1\rangle_{L^2(q)} \leq \frac{\int_{\mathbb{D}} q\,dA}{1-d}. \tag{A.7}$$

A.2. **格林核的正则化**。 我们将用到以下事实：下面每个倒数矩阵至多有一个严格正特征值。该条件在合同变换、限制到主子矩阵、减去半正定矩阵以及固定大小矩阵的极限下均保持不变。

Set

$$h(x,y)=\frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)},\qquad \mathcal{L}(t)=\frac{1}{\log(1+1/t)}\ (t>0),\qquad \mathcal{L}(0)=0,$$

以及 $f(t)=t+\frac{1}{2}-\mathcal{L}(t)$。我们首先证明 $f(h(x,y))$ 是半正定的。

对于 $0<\sigma<1$，令 $\mathbb{E}_\sigma$ 表示相对于 $(0,\infty)$ 上某个密度与 $v^{\sigma-1}(1+v)^{-1}$ 成正比的概率测度的期望，并设 $\eta=(1+v)^{-1}$。分部积分得 $\mathbb{E}_\sigma(1-\eta)=\sigma$。对于 $t>0$，对同一积分重新缩放可得

$$t^{1-\sigma}(t+1)^\sigma=\mathbb{E}_\sigma\frac{t(t+1)}{t+\eta}=\mathbb{E}_\sigma\left(t+1-\eta-\frac{\eta(1-\eta)}{t+\eta}\right).$$

最后一个表达式可连续延拓至 $t=0$。由于 $\mathcal{L}(t)=\int_0^1 t^{1-\sigma}(t+1)^\sigma\,d\sigma$，我们得到

$$f(t)=\int_0^1\mathbb{E}_\sigma\frac{\eta(1-\eta)}{t+\eta}\,d\sigma,\qquad 0\le f(t)\le f(0)=\tfrac{1}{2}. \tag{A.8}$$

核

$$\frac{1}{1+h(x,y)}=\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|1-x\overline{y}|^2}$$

是半正定的：$(1-xy)^{-1}$ 的幂级数是一个格拉姆展开，而它与其共轭的乘积是在张量积上的格拉姆展开。正对角因子保持这一性质。对于 $0<\eta<1$,

$$\frac{1}{h+\eta}=\sum_{n\ge0}\frac{(1-\eta)^n}{(1+h)^{n+1}},$$

其中幂是逐项计算的。根据舒尔乘积定理，每一项都是半正定的，并且该级数在每一对点（包括对角线上的点）处都收敛。因此，方程（A.8）证明了所断言的 $f(h)$ 的正性。

通过因子 $1-|x|^2$ 进行正对角合同变换，将 $h(x,y)+\frac{1}{2}$ 变为

$$\frac{1}{2}(1+|x|^2)(1+|y|^2)-2x\cdot y,$$

一个正的秩一核减去一个半正定核。其有限矩阵至多有一个正特征值。由于 $f(h)$ 是半正定的，核的倒数也具有相同性质

$$C_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{4\pi[\mathcal{L}(h(x,y))+\varepsilon f(h(x,y))]},\qquad 0<\varepsilon\le1, \tag{A.9}$$

对每个有限点集均成立。分母至少为 $2\pi\varepsilon$，因为 $\mathcal{L}+\varepsilon f=\varepsilon(h+\frac{1}{2})+(1-\varepsilon)\mathcal{L}$。因此，$C_\varepsilon$ 为正、有界且连续，并且

$$0<C_\varepsilon\le\mathcal{G}_0,\qquad C_\varepsilon\uparrow\mathcal{G}_0,\qquad C_\varepsilon(x,x)=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\quad(\varepsilon\downarrow0).$$

无需对 C_ε 本身的二次型作任何正性断言。

A.3. **秩一扰动**。

引理 A.2. 设 M 是一个元素严格为正的实对称矩阵，其倒数至多有一个正特征值。对于每个指标 k 和 $c\ge0$，元素为 $M_{ij}+cM_{ik}M_{kj}$ 的矩阵的倒数也至多有一个正特征值。

证明。对 M 的倒数进行对角合同变换，可得到矩阵 $H_{ij} = M_{ik}M_{kj}/M_{ij}$。$H$ 的第 k 行和第 k 列的元素恒为 M_{kk}。这个正对角元素对应的舒尔补非正，因此元素为 $U_{ij} = M_{kk} - H_{ij}$ 的矩阵是半正定的。此外，$0 \le U_{ii} < M_{kk}$，由半正定矩阵 U 的柯西–施瓦茨不等式可得 $|U_{ij}| < M_{kk}$。

取相同的对角因子，新倒数矩阵的元素为 $H_{ij}/(1 + cH_{ij})$。恒等式

$$\frac{M_{kk}}{1 + cM_{kk}} - \frac{H_{ij}}{1 + cH_{ij}} = \sum_{n\ge 0} \frac{c^n U_{ij}^{n+1}}{(1 + cM_{kk})^{n+2}}$$

是一个绝对收敛的几何级数。右侧的每个矩阵都是半正定的，即使 U 的某些元素为负数也是如此。因此，经过对角合同变换后的倒数矩阵是一个正的秩一矩阵减去一个半正定矩阵。它至多有一个正特征值，符合要求。□

A.4. 逼近与边界极限。首先假设 q 具有紧支撑。对于互异的内点，格林核可表示为

$$\mathcal{G}_q(x, y) = \mathcal{G}_0(x, y) + \langle \mathcal{G}_0(x, \cdot), (I - T)^{-1}\mathcal{G}_0(y, \cdot)\rangle_{L^2(q)}.$$

由于格林截面属于 $L^2(q)$，修正项是有限的。我们断言，在任意有限个互异内点上，将对角线元素设为零后得到的倒数矩阵至多有一个正特征值。

首先固定 $\varepsilon > 0$，并将 $\mathcal{G}_0$ 替换为 C_ε。令 T_ε 为在 $L^2(q)$ 上以 C_ε 为核的积分算子。那么 $|T_\varepsilon f| \le T|f|$，因此 $\|T_\varepsilon\| \le d < 1$。将紧支撑划分为直径一致趋于零的单元。在每个具有正 $q\,dA$-质量的单元 w_i 中，选取一点 z_i。由 C_ε 的一致连续性，得到相应阶梯核在算子范数下收敛到 T_ε，且其端点截面收敛于 $L^2(q)$。对于足够精细的划分，矩阵

$$\big(\sqrt{w_i}C_\varepsilon(z_i, z_j)\sqrt{w_j}\big)_{i,j}$$

其范数小于一。因此，它们的预解式取值收敛到积分算子的预解式取值。

对于每个有限逼近，从 C_ε 在求值点与积分节点的并集上开始。根据（A.9），其倒数至多有一个正特征值。依次将积分节点作为链的内部点纳入考察。若此前纳入考察的链的和为 M，纳入索引为 k、权重为 w 的节点会使其增加

$$M_{ij} \longmapsto M_{ij} + \frac{w}{1 - wM_{kk}} M_{ik}M_{kj}.$$

内部包含该节点 $n \ge 1$ 的链的总权重为 $w^n M_{ik}M_{kk}^{n-1}M_{kj}$。每个受限级数都是有限正预解式的子级数，因此有限性迫使 $wM_{kk} < 1$。所以引理A.2 适用于每一步。端点处的出现不带积分权重，因此该论证也适用于恰为求积节点的求值点。重合的积分节点可以合并。

首先取求积极限。然后令 $\varepsilon \downarrow 0$。非负链积分单调递增，其和收敛到$\mathcal{G}_q$。预解式修正项有限，且其绝对值满足以下上界

$$\frac{\|\mathcal{G}_0(x, \cdot)\|_{L^2(q)}\|\mathcal{G}_0(y, \cdot)\|_{L^2(q)}}{1 - d}.$$

直接对角项趋于无穷大，因此其倒数趋于零。在这些有限矩阵极限中，正特征值的数量条件得以保持，从而证明了该结论。

接下来，固定互不相同的 $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{S}^1$ 和 $z_0 \in \mathbb{D}$。当 $\rho > |z_0|$ 趋近于 1 时，显式 Green公式给出

$$\frac{\mathcal{G}_0(\rho s, x)}{1 - \rho} \longrightarrow P_s(x), \qquad \frac{\mathcal{G}_0(\rho s, \rho t)}{(1 - \rho)^2} \longrightarrow N_0(s, t) \quad (s \ne t).$$

第一个收敛在紧积分支集上一致。第二个由$\mathcal{G}_0(\rho s,\rho t) = (4\pi)^{-1}\log(1+(1-\rho^2)^2/(\rho^2|s-t|^2))$得出。因此，有界预解式给出

$$\frac{\mathcal{G}_q(z_0,\rho s_i)}{1-\rho} \longrightarrow K(z_0,s_i), \qquad \frac{\mathcal{G}_q(\rho s_i,\rho s_j)}{(1-\rho)^2} \longrightarrow N(s_i,s_j) \quad (i\neq j).$$

对倒数矩阵在 $\rho s_1,\dots,\rho s_m,z_0$处施以因子为 $1-\rho,\dots,1-\rho,1$的对角合同变换，并取极限。所得矩阵

$$\begin{pmatrix} B & \ell \\ \ell^T & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{ii}=0, \quad B_{ij}=\frac{1}{N(s_i,s_j)}\ (i\neq j), \quad \ell_i=\frac{1}{K(z_0,s_i)}, \tag{A.10}$$

至多有一个正特征值。

对于一般的有界势函数，将此论证应用于 $q_n = q\mathbf{1}_{\{|z|\le 1-1/n\}}$ 当 $n\ge 2$时，从而 $q_n\uparrow q$。单调收敛可应用于每条有限的非负链，继而应用于级数。根据初始的核估计，极限 K,N 均为有限值。因此，对于原势函数 q，矩阵 (A.10也至多有一个正特征值。极限按以下顺序取：求积、正则化、趋近边界，以及移除紧支撑截断。在边界极限中，积分支集是紧的，因此无需要求泊松截面属于 $L^2(q)$。

A.5. 条件负性与希尔伯特曲线。式 (A.10) 中的向量 ℓ 具有严格为正的元素。更一般地，如果一个实对称加边矩阵 $\begin{pmatrix} B & \ell \\ \ell^T & 0 \end{pmatrix}$ 至多有一个正特征值，并且 $\ell\neq 0$，那么 $x^TBx\le 0$只要 $\ell^Tx=0$。事实上，如果 $x^TBx>0$，取 y使得 $\ell^Ty\neq 0$，并从 y中减去 $(x^TBy)/(x^TBx)$ 倍的 x。于是 $(x,0)$ 与 (y,c) 关于加边二次型正交，而适当的 c 可使二者的值都为正，这与正特征值数量的上界相矛盾。对于 $\sum_i a_i=0$，将 $x_i=K(z_0,s_i)a_i$ 代入这一结论中。这给出 $\sum_{i,j} a_ia_jD_q(s_i,s_j)\le 0$。重复的边界点预先合并。这就证明了定理 A.1。

推论 *A.3*。设 $q\ge 0$ 可测且满足 *(A.3)*。通过非负链定义 K、N。固定 $z_0\in\mathbb{D}$。若在每个边界点都有 $K(z_0,s)<\infty$，且只要 $s\neq t$ 就有 $N(s,t)<\infty$，则 *(A.6)* 是条件负半定的。特别地，一旦定理 *5.1* 中分别给出的边界估计证明了 $q\in L^p$、$p>1$ 的这些有限性结论，本推论便适用。

证明。取 $q_m=\min(q,m)$。同一常数 d 适用于所有截断。它们的非负链递增至对应于 q 的链，而假设中的有限正极限给出：对每一对点都有 $D_{q_m}(s,t)\to D_q(s,t)$。对每个有限边界点集合，将条件负不等式取极限。□

命题 *A.4*（希尔伯特空间实现）。在推论 *A.3* 的假设下，再假设 $K(z_0,\cdot)$ 有界。则存在单射利普希茨映射 $b:\mathbb{S}^1\to H$ 到一个实可分希尔伯特空间，使得 $D_q(s,t)=\|b(s)-b(t)\|^2$。对于任意给定的 $s_*\in\mathbb{S}^1$，可以选择该映射使得 $b(s_*)=0$。

证明。核

$$\tfrac{1}{2}\big(D_q(s,s_*)+D_q(t,s_*)-D_q(s,t)\big)$$

是半正定的：在 s_* 处附加任意有限系数族的负和，并应用条件负性。将边界点的形式实线性张成空间对该格拉姆型的零空间取商后再完备化，得到向量 $b(s)$，它们具有所述的平方距离，并且 $b(s_*)=0$。由于 $N\ge N_0$,

$$\|b(s)-b(t)\|^2\le \pi\|K(z_0,\cdot)\|_\infty^2|s-t|^2.$$

这证明了利普希茨连续性。N 在对角线以外的有限性和正性意味着 $D_q(s,t)>0$对 $s\neq t$成立，因此具有单射性。圆的紧像的闭线性张成是可分的。□

归一化与极限。在 $q=0$处，

$$\begin{aligned} D_0(s,t) &= \pi P_s(z_0)P_t(z_0)|s-t|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi}\left|\frac{s-z_0}{1-\overline{z_0}s}-\frac{t-z_0}{1-\overline{z_0}t}\right|^2 . \end{aligned}$$

当 $z_0=0$ 时，这化简为 $D_0(s,t)=|s-t|^2/(4\pi)$。因子 $N_0=1/(\pi|s-t|^2)$ 也由调和能量恒等式确定：对于每个傅里叶模 s^m, $m\in\mathbb{Z}$, $\int_{\mathbb{D}}|\nabla A(s^m)|^2$ 和$\frac{1}{2}\iint N_0|s^m-t^m|^2$ 都等于 $2\pi|m|$。因此，该归一化与标量交换子和高斯恒等式中的因子 $1/2$ 一致。

条件负性在有限核的逐点极限下得以保留。因此，一旦核的收敛得到证明，逼近势函数无需单调。此外，若 $q\in L^p(\mathbb{D})$ 对某个 $p>1$成立，命题 $C^{1,\beta}$ 则对每个 β，在 (5.18) 中给出正则性。

AI 协助致谢

OpenAI 的 ChatGPT 参与了本文的数学推导与撰写准备工作，包括边界原函数估计、高斯乘子论证、谱簇逼近、流函数证明、第 9.3–9.5 节中的边界角估计及几何推论。它还协助进行了证明核查、文献比较和文字表述。作者对本文的数学正确性及归属承担全部责任。

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, 《拟共形反射》, 《数学学报》109 (1963), 291–301。doi: 10.1007/BF02391816。[2] K. Astala, 《拟共形性的解析方面》, 《1998年国际数学家大会论文集》, 柏林, 第二卷, 617–626。ICM 论文集。[3] R. Atar 和 K. Burdzy, 《lip 域上的纽曼特征函数》, 《美国数学会杂志》17 2, 243 2004 265 10 1090 0894 0347 04 00453 9 ( ), no. – . doi: . /S - - - - . [4] D. Bakry 和 O. Zribi, 《三尖瓣线模型上的曲率维数界》, 《图卢兹数学学院年刊》(6) 25 (2016), 第1期, 65–90。doi: 10.5802/afst.1487。[5] R. Bañuelos 和 K. Burdzy, 《论 J. Rauch 的“热点”猜想》, 《函数分析杂志》164 1, 1 1999 33 10 1006 1999 3397 ( ), no. – . doi: . /jfan. . . [6] R. Bañuelos, 《热点：从光滑到非光滑的单连通平面域》, arXiv:2610 1, 23 32920 2026 . v October .[7] P. Bérard 和 B. Helffer, 《关于特征函数线性组合的 Courant 节点域性质。第一部分》, Doc. Math. 23 (2018), 1561–1585。doi: 10.4171/DM/652。[8] P. Bérard 和 B. Helffer, 《利普希茨域变形下某些纽曼特征函数的水平集：扩展 Courant 性质的应用》, 《图卢兹数学学院年刊》(6 3, 429 30 2021 462 10 5802 1680) ( ), no. – . doi: . /afst. . [9] I. Binder、O. Ivrii、I. Prause 和 S. Smirnov, 《Brennan 猜想与普适积分均值谱》, arXiv:2610.23853v1, 2026年10月16日。[10] S. Buckley 和 P. Koskela, 《Sobolev–Poincaré 蕴含 John》, Math. Res. Lett. 2 (1995), 第5期, 577–593。doi: 10.4310/MRL.1995.v2.n5.a5。[11] K. Burdzy 和 W. Werner, 《“热点”猜想的一个反例》, 《数学年刊》(2) 149 (1999), 第1期, 309–317。doi: 10.2307/121027。[12] K. Burdzy, 《有一个孔的平面域中的热点问题》, Duke Math. J. 129 (2005), 第3期, 481–502。doi: 10.1215/S0012-7094-05-12932-5。arXiv:math/0405472。[13] K. Burdzy, 《在单特征值情形下从热点结论中去除边界光滑性》, arXiv:2610.12622, 2026年10月8日。[14] H. Chen、C. Gui 和 R. Yao, 《三角形上第二纽曼特征函数临界点的唯一性》, Invent. Math. 244 (2026), 第1期, 299–353。doi: 10.1007/s00222-025-01398-x。[15] J. de Dios Pont, 《凸集可能存在内部热点》, arXiv:2412.06344v1, 2024年12月9日。[16] H. Deng、C. Gui、X. Jiang、X. Yang、R. Yao 和 J. Zou, 《等腰梯形和风筝形上第二纽曼特征函数的对称性与临界点》, arXiv:2604.19003v4, 2026年10月11日。[17] H. Deng、X. Jiang 和 X. Yang, 《凸平面域上纽曼特征函数的近边界刚性与严格最大模》, arXiv:2610.18546v2, 2026年11月2日。[18] T. A. Driscoll 和 L. N. Trefethen, 《施瓦茨–克里斯托费尔映射》, 应用与计算数学剑桥专著, 第8卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002。doi: 10.1017/CBO9780511546808。

[19] A. F. M. ter Elst 和 E. M. Ouhabaz，《 $C^{1+\kappa}$-域上的狄利克雷到诺伊曼映射与椭圆算子：泊松界与高斯界》，《微分方程杂志》267 (2019)，4224–4273。doi: 10.1016/j.jde.2019.04.034。arXiv: 1705.10158。[20] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger，《二阶椭圆偏微分方程》，数学经典丛书，施普林格，柏林，2001。doi: 10.1007/978-3-642-61798-0。[21] G. Gorni 和 G. Zampieri，《在 n-空间中局部同胚到星形集的单射性》，《波兰数学年刊》59 (1994)，第2期，171–196。doi: 10.4064/ap-59-2-171-196。[22] L. Hatcher，《某些非凸多边形的热点猜想》，SIAM 数学分析杂志 57 4, 4588 2025 4608 10 1137 24 170702 ( ), no. – . doi: . / M X. [23] D. J erison 和 N. Nadirashvili，《关于具有两条对称轴的域的“热点”猜想》，《美国数学会杂志》13 (2000)，第4期，741–772。doi: 10.1090/S0894-0347-00-00346-5。[24] P. W. Jones、M. Maggioni 和 R. Schul，《通过热核与拉普拉斯算子的特征函数实现的普适局部参数化》，《芬兰科学院数学年刊》35 (2010)，131–174。doi: 10.5186/aasfm.2010.3508。[25] C. Judge 和 S. Mondal，《欧几里得三角形没有热点》，《数学年刊》(2) 191 (2020)，167–211。10.4007/annals.2020.191.1.3。arXiv: 1802.01800v5。[26] C. Judge 和 S. Mondal，《勘误：欧几里得三角形没有热点》，《数学年刊》(2) 195 (2022)，337–362。doi: 10.4007/annals.2022.195.1.5。[27] OpenAI，《光滑单连通平面域上的严格热点与内部临界点的不存在性》，预印本，2026年9月24日。官方来源和预印本。[28] S. Pineda Montoya、E. Gallego González、J. Porras Barrera 和 J. H. Rúa Muñoz，《具有凸角的分段光滑Jordan域上的第一纽曼特征函数》，arXiv:2611.26403v1，2026年11月19日。[29] J. Rohleder，《热点猜想的新方法》，arXiv:2106.05224v4，2023年3月14日。[30] E. T. Sawyer，《三维或更低维空间中薛定谔算子的唯一延拓》，《傅里叶研究所年刊》34 (1984)，第3期，189–200。doi: 10.5802/aif.982。[31] I. J. Schoenberg，《度量空间与正定函数》，《美国数学会汇刊》44 3, 522 1938 536 10 1090 0002 9947 1938 1501980 0 ( ), no. – . doi: . /S - - - - . [32] W. Smith 和 D. A. Stegenga，《霍尔德域上拟双曲度量的指数可积性》，《芬兰科学院数学年刊》A I 数学辑 16 (1991)，345–360。doi: 10.5186/aasfm.1991.1625。

南方学院数学与统计学院，广州 510970，广东，中国电子邮件地址： yutianlee@gmail.com