arXiv:2611.29332v1 [cs.DM] 22 Nov 2026

图类的奇色数：界与结构性结果

Musarof Hossain [*1]，Sandeep Kumar [†1]，Vikash Tripathi [‡1]，以及 Mirza Galib Anwarul Husain Baig [§1]

[1]印度理工学院曼迪分校，印度喜马偕尔邦

2026年11月24日

摘要

图 G 的正常着色称为奇着色，如果对于每个非孤立顶点$v \in V(G)$，其开邻域中都存在一种颜色，出现奇数次。对于图 G，这种着色所需的最少颜色数称为奇色数，记作 $\chi_o(G)$。奇色数已从组合和算法视角得到广泛研究，关于 $\chi_o(G)$已知若干界。本文针对若干图类，建立了 $\chi_o(G)$ 的紧界。具体而言，我们得到以下结果：

- 对于每个块仙人掌图 G，我们证明 $\chi_o(G) \leq \max\{5, \omega(G)+1\}$，其中 $\omega(G)$ 表示图 G 的团数。
- 对于块图和真区间图，我们建立了界 $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G)+1$。
- 对于二分圆图，我们证明了 $\chi_o(G) \leq 6$。这解决了 Davis 等人在 2026 年提出的一个未决问题。
- 对于每个双凸二分图 G，我们证明了 $\chi_o(G) \leq 5$。
- 对于 C_4-自由余图 G，我们建立了界 $\chi_o(G) \leq \omega(G)+1$。

此外，我们根据奇色数刻画了块图、真区间图和仙人掌图。

关键词： 奇色数；块仙人掌图；块图；真区间图；二分圆图；双凸二分图；余图。

1 引言

本文始终讨论简单、连通且有限的图。我们用 $[n]$表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$。自图论创立以来，图的着色一直是其基础问题之一

[*]d24174@students.iitmandi.ac.in
[†]d24176@students.iitmandi.ac.in
[‡]vikash@iitmandi.ac.in,[§]mirza@iitmandi.ac.in

。在诸多图着色参数中，图的色数是图论中受到广泛研究的参数，在现实世界中也有广泛应用；参见 [19,21]。图 G 的正常 k-着色是一个映射 f：$V(G) \to [k]$，满足：若 $uv \in E(G)$，则 $f(u) \neq f(v)$。存在正常着色 f：$V(G) \to [k]$ 时所需的最小 k 称为 G的色数，记作 $\chi(G)$。

受各种现实世界应用的启发，人们提出了许多正常着色的变体和推广 [6, 15, 2, 3]。在正常图着色的各种扩展中，正常无冲突着色（PCFC）是一种研究较为充分的变体 [6, 15], ，其中要求每个顶点 v 在其开邻域 v中至少有一种颜色恰好出现一次。沿着类似的思路，Petruševeski 和 Skrekovski [25]将奇着色引入为 PCFC 的进一步推广。

图 G 的一个正常 k-着色称为奇 k-着色，如果对于每个非孤立顶点 $v \in V(G)$，都存在一种颜色，在 v的开邻域中出现奇数次。 G的奇色数记为 $\chi_o(G)$，其定义为使 G 具有奇着色所需的最少颜色数。在相关的判定问题 Odd k-Coloring 中，给定一个图 G 和整数$k > 0$，需要判断 G 是否存在一种至多使用 k种颜色的奇着色。已知，对于二部图 [1]，Odd k-Coloring 是NP难的。随后，Patar 和 Reddy [24] 通过证明该问题即使对于完美消去二部图和星凸二部图仍然困难，进一步加强了这一困难性结果。Bhyravarapu 等人 [4] 研究了奇着色的参数化复杂度，并表明当参数为到簇图的距离、到余簇图的距离以及邻域多样性时，Odd k-Coloring 是固定参数可解的。此外，他们还为余图和分裂图上的 Odd k-Coloring 获得了多项式时间算法。Patar 和 Reddy [24] 研究了链图和凸二部图上的该问题。

在组合界方面，Daniel W. Cranston [9] 确定了圈和树的奇色数。具体而言，他们证明，对于有 n 个顶点的圈 C_n, $\chi_o(C_n) \leq 5$；对于有 n 个顶点的路径 P_n, $\chi_o(P_n) \leq 3$。Caro、Petruševski 和 Škrekovski [7] 证明，当 G 是连通平面图时， $\chi_o(G) \leq 9$。他们还猜想，对于平面图 G, $\chi_o(G) \leq 5$。随后，在 [7], 中，作者将平面图的界降至 8。其他一些界也已得到；参见 [10, 22, 8, 20, 26]。Pang、Miao 和 Fan [23] 研究了图的奇色数与最大度之间的关系，并猜想每个最大度为$\Delta(G) \geq 3$ 的连通图 G 都满足 $\chi_o(G) \leq 2\Delta(G) - 1$。

我们的贡献。本文研究若干已得到充分研究的图类的奇色数，重点考察块仙人掌图、块图、真区间图、双凸二部图、二分圆图、二分距离遗传图以及 C_4-自由余图。我们的目标是利用这些图类的结构，建立紧的下界和上界。我们发现，奇色数与团数非常接近。值得指出的是，对于某些图类，我们建立的界解决了Pang等人在 [23]中提出的猜想。

我们首先研究块仙人掌图，并建立界 $\chi_o(G) \leq \max\{5, \omega(G) + 1\}$，其中$\omega(G)$表示 G的团数。接着，我们证明，如果 G 是块图或真区间图，那么 $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$，并刻画达到下界和上界的图。此外，我们设计了一种高效算法，以最少颜色对真区间图进行奇着色。

Davies 等人 [11] 提出了问题 5.2，询问每个二部圆图的奇色数是否至多为四。我们通过构造一个连通二部距离遗传图（同时也是二部圆图）给出了否定答案：该图的奇色数为五。此外，我们证明每个二部圆图都可以使用至多六种颜色进行正规奇着色

，并证明这一界是紧的。因此，我们的结果将 [11],中推论1.6所确立的此前已知最佳上界98改进为紧上界六。

接下来，我们研究连通双凸二部图，并证明每个此类图都存在一种至多使用五种颜色的奇着色。证明利用了双凸图的多链序。我们已经证明，对于二部双凸图而言，这一界是紧的。对于余图 G，已知 $\chi_o(G) \leq \omega(G) + 2$。我们观察到，这一特定界对于余图确实是紧的。例如，对于 C_4（它是一个余图），$\chi_o(G) = 4 = \omega(G) + 2$。我们研究在不存在 C_4（即 C_4-自由余图）时余图的界，并改进 C_4-自由余图的这一界。特别地，对于 C_4-自由余图，我们证明 $\chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$，并证明这一界确实是紧的。因此，我们解决了 Pang 等人在 [23] 中针对块仙人掌图、块图、真区间图、双凸二部图和 C_4-自由余图提出的猜想。

2 预备知识

对于图 $G = (V, E)$，我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示其顶点集和边集。对于顶点 $u, v \in V(G)$，连接 u 和 v 的边记作 uv。对于子集 $S \subseteq V(G)$，我们用$G[S]$ 表示由 S在 G 中诱导的子图。对于顶点 $v \in V(G)$，v 的开邻域定义为$N_G(v) := \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$，其闭邻域定义为 $N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}$。当上下文已明确底层图时，我们分别简写为 $N(v)$ 和 $N[v]$。如果顶点 $v \in V(G)$ 与 G中的每个其他顶点都相邻，则称其为全邻顶点。顶点的度记作 $\deg_G(v)$，其值为 $N_G(v)$的基数。图 G 中的桥（割边）是指删除后会增加图中连通分支数量的边。

下面介绍本文中将要使用的与着色相关的术语。令 $f\colon V(G) \to [k]$ 为 G的正常着色。对于每个 $i \in [k]$，我们用 $f^{-1}(i) = \{u \in V(G) \mid f(u) = i\}$ 表示在 f下被赋予颜色 i的顶点集合。若顶点 $v \in V(G)$的邻点中恰有奇数个被赋予颜色 c，则称 $c \in [k]$ 是相对于 f 的奇颜色 。等价地，若 $|f^{-1}(c) \cap N_G(v)| \equiv 1 \pmod 2$，则称 c 是 v 相对于 f 的奇颜色。

在图 G中，集合 $S \subseteq V(G)$是一个团，当且仅当任意两个不同的顶点 $u, v \in S$, $uv \in E(G)$。团大小是 G中团的最大基数。我们用 C_n 和 P_n 分别表示阶为 n的圈和路径。若顶点 $v \in V(G)$ 使得 $G[V(G) \setminus \{v\}]$ 不连通，则称其为割点。对于图 G，G 的一个不含割点的极大诱导子图称为 G的一个块。我们用$B, B_1, B_2, \ldots$表示图 G的块。根据块的定义，注意到若 B_1 和 B_2 是两个块，则 $|V(B_1) \cap V(B_2)| \leq 1$。因此，每个块要么是极大的 2-连通子图，要么是一条边，要么是一个孤立顶点。块图是每个块都是团的图；块仙人掌图是每个块都是团或圈的图；仙人掌图则是每个块都是边或圈的连通图。链图是一个二分图$G = (V_1, V_2, E)$，其中一个部集中的顶点的邻域按包含关系线性排序；也就是说，对于任意 $u, v \in V_1$，要么 $N(u) \subseteq N(v)$，要么 $N(v) \subseteq N(u)$。

最后，我们回顾完美图的概念。对于图 G，令 $\chi(G)$ 表示其色数，$\omega(G)$ 表示其团数。若图 G 对其每个诱导子图 H，均满足 $\chi(H) = \omega(H)$，则称其为完美的。特别地，每个块图、每个真区间图以及每个不含 C_4 的余图都是完美图。

3 块仙人掌图

本节中，我们研究块仙人掌图的奇色数。回顾一下，若 G 是块仙人掌图，则 G 有一个块 B，使得 B 恰有一个割点，这样的块称为端块。在证明主要结果之前，我们先陈述以下观察。

观察 1。如果 G 是一个完全图，那么 $\chi_o(G) = \omega(G) = |V(G)|$.

观察 2。对于任意一般图 G，$\chi_o(G) = 2$ 当且仅当 G 是一个奇度图，并且 G 中的每个圈都具有偶数长度。

观察 3。设 B 是块仙人掌图 G的一个团块，且设 $v \in V(G)$ 是一个非割点；也就是说，v 恰属于 G的一个块 B。那么，在对 G进行任意正常着色时，$N(v)$ 中都存在一种颜色出现奇数次。

该　扩展定理给出了块仙人掌图奇色数的界　　hs.

定理 3.1。对于块仙人掌图 G、$2 \leq \chi_o(G) \leq$最大值$\{5, \omega(G)+1\}$。

证明。设 G 是一个块仙人掌图，且 $M = \max\{5, \omega(G)+1\}$。下界显然，这是因为对于任意至少含有两个顶点的连通图 H，$\chi(H) \geq 2$ 且 $\chi_o(H) \geq \chi(H)$。为了建立上界，我们对块仙人掌图 G 中块的数量使用归纳法。

假设 G 只有一个块。在这种情况下，G 要么是一个圈，要么是一个完全图。如果 G 是一个圈，则 $\chi_o(G) \leq 5$；而如果 G 是一个含有 n 个顶点的完全图，则 $\chi_o(G) = n = \omega(G)$。这就证明了基本情形。接下来，我们假设对于任意至多含有 $r-1$ 个块的块仙人掌图 $r \geq 2$，该结果均成立。

现在考虑一个具有 r 个块的块仙人掌图 G。回顾一下，任何块仙人掌图 G 都至少有两个端块。设 B 是一个端块，其割点为 v。值得注意的是，B 是一个团或一个圈。令 $S = (V(G) - V(B)) \cup \{v\}$ 和 $H = G[S]$。注意，图 H 是一个具有 $r-1$ 个块的块仙人掌图。因此，根据归纳假设，H 可以使用至多 $\max\{\omega(H)+1、5\}$ 种颜色进行奇着色 f。由于 $\omega(H) \leq \omega(G)$，$\max\{\omega(H)+1、5\} \leq M$。于是，$H$ 可以使用至多 M 种颜色进行奇着色。由于 f 是图 H 的一种使用至多 M 种颜色的奇着色，因此存在一种颜色 $i \in [M]$，使得 $|f^{-1}(i) \cap N(v)|$ 为奇数。同时，假设 $f(v) = j$。接下来，根据 B 是完全图还是圈，我们将 f 在 H 上的奇着色扩展为 f' 在 G 上的奇着色，使得 f' 至多使用 M 种颜色。

情形 1： B **是一个团**。

在这种情况下，首先注意到 $|V(B)| \leq \omega(G)$，且 $V(B) \setminus \{v\}$ 中的任何顶点都没有邻点属于$V(G) \setminus V(B)$。因此，我们将 f在 H上的着色扩展为 G的奇着色，方法如下：对于每个顶点 $u \in V(G) \setminus (V(B) \setminus \{v\})$，$f'(u) = f(u)$。为 $V(B) \setminus \{v\}$ 中的所有顶点分配集合$[M] \setminus \{i, j\}$中的互不相同的颜色。现在，我们断言着色 f'是 G的奇着色。注意到 $V(B) \setminus \{v\}$ 中的任何顶点都没有邻点属于 $V(G) \setminus V(B)$，且 f 是 H的奇着色。对于任意一对顶点$u, w \in V(G) \setminus V(B)$，若 $uw \in E(G)$，则 $f(u) \neq f(w)$。此外，对于每个顶点 $u \in V(G) \setminus V(B)$，都存在一种颜色 $k \in [M]$，使得 $|f'^{-1}(k) \cap N_G(u)|$是奇数。

接下来注意，在 $V(B) \setminus \{v\}$ 中没有顶点被赋予颜色 i或 j。因此，$|f'^{-1}(i) \cap N_G(v)|$ 仍然是奇的。此外，对于每个顶点 $u \in V(B) \setminus \{v\}$，$|f'^{-1}(j) \cap N_G(u)| = 1$。确切地说，$v$是每个顶点 $u \in V(B) \setminus \{v\}$的邻域中唯一被着色为 j的顶点。这表明，如果 B是一个团，则扩展后的着色 f'是 G 的一个奇着色，且至多使用 M种颜色。

情形2： B **是一个圈**。

令 $B = C_t$ 对某个 $t \geq 3$成立。注意到 $M \geq 5$。由于 B 是 G中的一个圈， $G[V(B) \setminus \{v\}]$ 是一个包含 $t-1$ 个顶点的路径。与前一种情形类似，我们注意到 $V(B) \setminus \{v\}$ 中的任何顶点都没有邻点属于 $V(G) \setminus V(B)$。因此，我们将 f 在 H 上的奇着色扩展为 f' 在 G 上的奇着色，方法如下：对于每个顶点 $u \in V(G) \setminus (V(B) \setminus \{v\})$， $f'(u) = f(u)$。从颜色集 $M \setminus \{i,j\}$ 中为$V(B) \setminus \{v\}$ 中的顶点集分配颜色，使得 f'限制在图 $G[V(B) \setminus \{v\}]$ 上是一个奇着色。由于 $|M \setminus \{i,j\}| \geq 3$ 且任意路径的奇色数至多为3，这确实是可能的。因此， f' 是 G 的一个奇着色，使用的颜色数至多为 M。

至此，定理的证明完成。 □

由于仙人掌图中不存在大小超过 3 的团，因此我们得到仙人掌图的如下界。

推论 3.1. 设 G 为一个仙人掌图。那么 $2 \leq \chi_o(G) \leq 5$。此外，该界是紧的。

证明。 设 G 为一个仙人掌图。注意，仙人掌图 G是一个块仙人掌图，满足 $\omega(G) \leq 3$。因此，由定理3.1可得 $2 \leq \chi_o(G) \leq 5$。

□

接下来，我们根据仙人掌图的奇色数对其进行刻画。设 G为一个连通仙人掌图，并令 $\mathcal{C}(G)$ 表示 G中由圈构成的块的族。此外，令 F 为 G 的生成子图，其边恰好是 G的桥。由于 G 是一个仙人掌图， F 是一个森林。

定理 3.2. 设 G 为一个连通仙人掌图。当且仅当对于每个圈块$C \in \mathcal{C}(G)$ ，存在一个集合 $A_C \subseteq E(C)$ 使得：

(i) *For every* $C \in \mathcal{C}(G)$, $|E(C)| - 2|A_C| \equiv 0 \pmod 3$.

(ii) 对于每个不与任何桥相接的顶点 v ，包含 v 的圈块 C 中，满足以下条件的数量为奇数：与 v 相接的 C 的两条边要么都属于 A_C ，要么都不属于 A_C。

证明。 假设 φ： $V(G) \to \mathbb{Z}_3$ 是一个奇三着色。对于每个圈块 $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$，按此顺序遍历其顶点，并令

$$A_C = \big\{ v_i v_{i+1} \in E(C) : \varphi(v_{i+1}) - \varphi(v_i) \equiv -1 \pmod 3 \big\},$$

其中下标按模 n 读取。由于 φ 是正常的，每条边上的颜色差沿该圈只能是 1 或 -1 （模 3）。沿圈求和可得

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{n} \big(\varphi(v_{i+1}) - \varphi(v_i)\big) \equiv (n - |A_C|) - |A_C| = n - 2|A_C| \pmod 3.$$

因此 (i) 成立。

设 $v \in V(G)$ 不与任何桥关联。由于 G 是仙人掌图， v 处的每条边恰好属于一个圈块，而每个这样的块贡献两条关联边。特别地， $d_G(v)$ 是偶数。对于包含 v 的圈块 C ，当且仅当 C 的两条关联边都在 A_C 中或都在 A_C 外时， v 的两个邻点具有不同的颜色。这样的圈对除 $\varphi(v)$ 之外的两种颜色各贡献一个邻点。否则，这两个邻点具有相同的颜色，并且该圈对任一种颜色贡献零个或两个邻点。因此，模 2 计数时，属于另外两个颜色类中任意一个的邻点数，等于 (ii) 中指定的圈块数。

由于 $d_G(v)$ 是偶数而 φ 是奇数，两个邻色类的大小都是奇数。因此，(ii) 中的数目为奇数，正如所需。

反过来，假设边集 A_C 满足条件 (i) 和 (ii)。对于每个顶点 $v \in V(G)$，用 $t(v)$表示包含 v 且与 v 关联的两条边均被选中或均未被选中的圈块数量。

我们先将每座桥分配给其一个端点。令 $m(v)$表示分配给 v的桥的数量。我们要求

$$t(v) + m(v) \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{whenever } d_G(v) \text{ is even and } d_F(v) > 0. \tag{1}$$

这样的分配总是存在。事实上，

$$d_G(v) = d_F(v) + 2\,|\{C \in \mathcal{C}(G) : v \in V(C)\}|,$$

因此， $d_G(v)$ 和 $d_F(v)$ 具有相同的奇偶性。对于桥森林 F的每个非平凡树分支，选取一个叶子作为根。从叶子开始朝根处理其余顶点。对于 F中度为偶数的每个非根顶点，将其父桥分配给适当的端点，使条件 (1) 成立；对于 F中度为奇数的顶点，则任意选择。根在中的度为 1，因此无需满足奇偶条件。如果 v 在 F中是孤立顶点，那么条件 (ii) 已蕴含 $t(v)$ 为奇数。

接下来，为每一对相邻顶点规定一个差值 $\delta(x,\ y) \in \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}_3$，其中$\delta(y,\ x) = -\delta(x,\ y)$。对于所选取的 $C = v_1 \cdots v_n v_1$ 的循环遍历，令

$$\delta(v_i, v_{i+1}) = \begin{cases} -1, & v_i v_{i+1} \in A_C, \\ 1, & v_i v_{i+1} \notin A_C. \end{cases}$$

若将桥 xy 赋给了 x，则令 $\delta(x,\ y) = 1$。由 (i) 可知，沿每个圈块规定的差值之和模 3 为零。由于仙人掌图的每个圈都是一个圈块，这些差值规定沿所有路径都是一致的。选取一个顶点 r 作为根，令 $\varphi(r) = 0$，并通过对从 r 到 v的任意路径上的 δ 求和来定义 $\varphi(v)$。因此， $\varphi\colon V(G) \to \mathbb{Z}_3$ 是良定义的，并且它是正常的，因为每条边的差值都是 1 或 -1。

对于任意顶点 v，令 $p(v) = \big|\{u \in N_G(v)\colon \varphi(u) - \varphi(v) \equiv 1 \text{ (模 3)}\}\big|$. 由 $t(v)$计数的每个圈块恰好为 $p(v)$贡献一个邻点；每个其他与之关联的圈块贡献零个或两个。每座赋给 v 的桥恰好贡献一个。因此

$$p(v) \equiv t(v) + m(v) \pmod 2. \tag{2}$$

如果 $d_G(v)$ 为偶数且 $d_F(v) > 0$，则 (1) 和 (2) 表明 $p(v)$ 为奇数。如果 $d_G(v)$ 为偶数且 $d_F(v) = 0$，则条件 (ii) 给出相同的结论。无论哪种情况， $d_G(v) - p(v)$ 也为奇数，因此 v 满足奇条件。如果 $d_G(v)$ 为奇数，则 $p(v)$ 和 $d_G(v) - p(v)$ 中至少有一个自动为奇数。因此，每个顶点都满足奇条件，且 φ 是 G的奇三着色。因此， $\chi_o(G) \le 3$。

□

根据观察2，如果 G是一个至少有两个顶点的连通图，那么 $\chi_o(G) = 2$ 当且仅当 G 是二部图且 G 的每个顶点都具有奇度。由此以及定理 3.2，我们得到以下推论：

推论3.2。 设 G 是一个至少有两个顶点的连通仙人掌图。那么， $\chi_o(G) = 3$ 当且仅当定理(i) 和(ii) 中的条件*3.2* 成立，且 G 不是每个顶点都具有奇度的二部图。

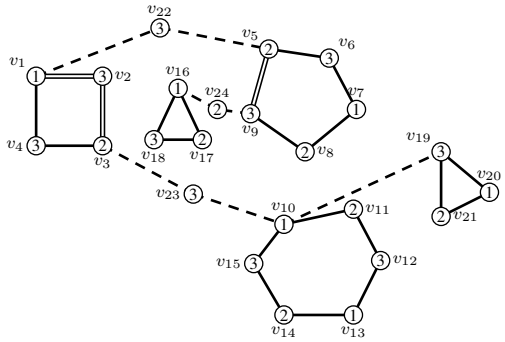
证明。 由定理3.2，可得 $\chi_o(G) \leq 3$当且仅当条件(i)和(ii)成立。此外，根据观察2，附加条件排除了 $\chi_o(G) = 2$。因此， $\chi_o(G) = 3$。 □

推论 3.3. 设 G 是一个至少有两个顶点的连通仙人掌图。那么 $\chi_o(G) = 4$ 当且仅当

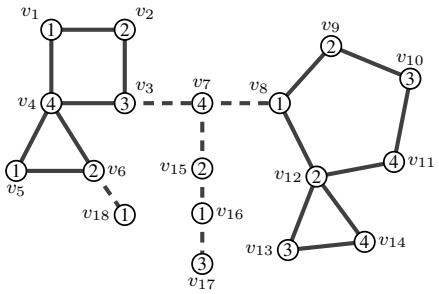
1. G 有一个块不同构于 C_5；并且 *2.* 不存在满足定理$(A_C : C \in \mathcal{C}(G))$ 的条件(i)和(ii) *3.2*的族。

证明。 每个仙人掌图都是外平面图。Kashima 和 Zhu 证明了，一个连通外平面图可奇4着色，当且仅当它有一个块不同构于 C_5 [20]。因此，第一个条件等价于 $\chi_o(G) \leq 4$。根据定理3.2，第二个条件等价于 $\chi_o(G) > 3$。这两个条件合起来给出 $\chi_o(G) = 4$，反向结论可由相同的等价关系得出。 □

接下来，我们给出奇色数为 3 和 4 的仙人掌图的例子。



(a) 奇 3-着色仙人掌图。



(b) 奇 4-着色仙人掌图。

图 1：两个连通仙人掌图。顶点内的数字表示分配给它们的颜色，虚线边表示桥。在 (a) 中，双边表示选定的集合 $A_{C_1} = \{(1, 2), (2, 3)\}$和 $A_{C_2} = \{(5, 9)\}$，而 $A_{C_3} = A_{C_4} = A_{C_5} = \varnothing$。在 (b) 中，对于 4-圈，不存在满足条件 (i) 和 (ii) 的边集 A_C。

观察 4。 设 G 是一个连通仙人掌图。那么 $\chi_o(G) = 5$ 当且仅当 G 的每个块都同构于 C_5。

证明。 由于每个仙人掌图都是外平面图，Petruševski 和 Škrekovski 的结果 [7] 意味着$\chi_o(G) \leq 5$。此外，Kashima 和 Zhu [20]证明了，一个连通外平面图存在奇 4-着色，当且仅当它包含一个不同构于 C_5的块。因此， $\chi_o(G) = 5$ 当且仅当 G的每个块都同构于 C_5。 □

我们通过以下推论总结上述所有已证明的结果：

推论3.4。 设 G 是一个至少有两个顶点的连通仙人掌图。那么， G的奇色数为

$$\chi_o(G) = \begin{cases} 2, & \text{若 } G \text{ 是二部图且每个顶点的度都是奇数；若满足定理 3.2 的条件 (i) 和 (ii)，且 } G \text{ 不} \\ & \text{是所有顶点度均为奇数的二部图，则为 3；若 } G \text{ 有一个不与 } C_5 \text{ 同构的块，且不存在满足定理 3.2} \\ & \text{的条件 (i) 和 (ii) 的族 } (A_C : C \in \mathcal{C}(G)), \text{ 则为 4；若 } G \text{ 的每个块都与 } C_5 \text{同构，则为 5。} \end{cases}$$

4 块图

对于图 G， G 的一个极大诱导子图若不含割点，则称为 G的一个块。我们用B， B_1， B_2，.....表示图 G的各个块。根据块的定义，我们注意到，若 B_1 和 B_2 是两个块，则 $|V（B_1）\cap V（B_2）| \leq 1$。为了建立一个界，我们使用块图 G的块割树。

设 G 是一个块图， $\mathcal{B}（G）$ 表示 G的块集， X 表示 G的割点集。 G的块割树记为 T_G，它是一棵顶点集为 $X \cup \mathcal{B}（G）$ 的树，其中，当且仅当 $x \in V（B）$ 时，割点 $x \in X$ 与块 $B \in \mathcal{B}（G）$ 相邻。注意，树 T_G 的每个叶顶点都对应于 G的一个端块。我们考虑以顶点 r 为根的块树 T_G ，使得 r 对应于 G的一个割点。在证明中，我们按从顶点 r开始的广度优先搜索序考察 T_G 的顶点。图2给出了块图及其对应块树的示意图。图2所示块树 T_G 的广度优先搜索序为 $\{v_5, B_2, B_4, v_3, v_6, v_{13}, B_1, B_3, B_5, B_7, B_6, v_{16}, v_{15}, B_8, B_9, B_{10}\}$。

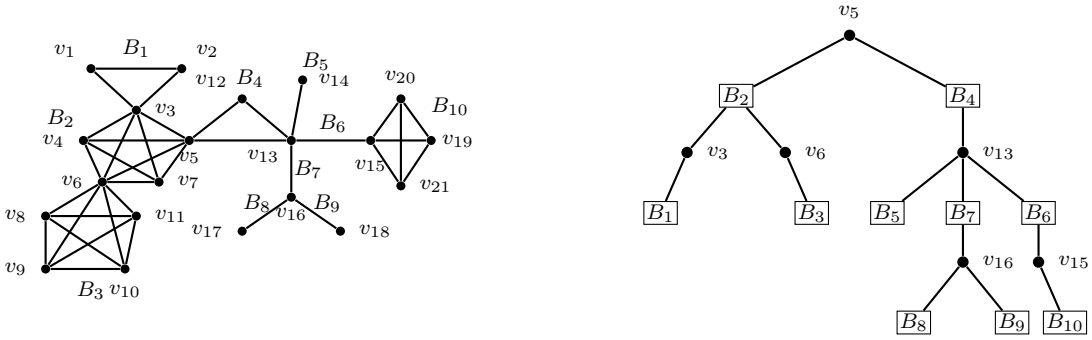


图 2：块图 G 及其对应的根块割树 T_G。

定理 4.1. 设 G 是一个块图。那么 $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$。

证明。 证明与定理 3.1的证明类似。为完整起见，我们再次说明证明过程。设 G 是一个块图。由每个块图 H都是完美图这一事实可知，下界显然成立， $\chi(H) = \omega(H)$ 并且 $\chi_o(H) \geq \chi(H)$。为建立上界，我们对块图 G中的块数进行归纳。

假设 G 只有一个块。因此， G 是一个有 n 个顶点的完全图，于是 $\chi_o(G) = n = \omega(G)$。这就建立了基本情形。接下来，我们假设对于任意至多有 $r-1$ 个块的块图 $r \geq 2$，结论均成立。

现在考虑一个有 r 个块的块图 G。回顾一下，任意块图 G 至少有两个端块。设 B 是一个端块，其割点为 v。值得注意的是， B 是一个团。设 $S=(V(G)-V(B))\cup\{v\}$ 和 $H=G[S]$。注意，图 H 是一个有 $r-1$ 个块的块图。因此，根据归纳假设， H 存在一种奇着色 f，至多使用 $\omega(H)+1$ 种颜色。由于 $\omega(H)\leq\omega(G)$， H 存在一种奇着色，至多使用 $\omega(G)+1$ 种颜色。由于 f 是 H 的一种奇着色，存在一种颜色$i\in[\omega(G)+1]$，使得 $|f^{-1}(i)\cap N(v)|$ 为奇数。此外，假设 $f(v)=j$。接下来，我们将 H 的奇着色 f 扩展为 G 的奇着色 f'，使得 f' 至多使用 $\omega(G)+1$ 种颜色。

我们注意到， $|V(B)|\leq\omega(G)$，且 $V(B)$ 中没有顶点在 $V(G)\setminus V(B)$ 中有邻点。因此，我们将 H 上的着色 f 扩展为 G 上的奇着色 f'，如下所示：对于每个顶点 $u\in V(G)\backslash(V(B)\backslash\{v\})$， $f'(u)=f(u)$。将 $V(B)\backslash\{v\}$ 中的所有顶点赋予集合 $[\omega(G)+1]\backslash\{i,j\}$ 中互不相同的颜色。现在，我们断言着色 f' 是 G 的奇着色。注意到 $V(B)$ 中没有顶点在 $V(G)\backslash V(B)$ 中有邻点，且 f 是 H 的奇着色；对于任意一对顶点 $u,w\in V(G)\backslash V(B)$，若 $uw\in E(G)$，则 $f(u)\neq f(w)$。此外，对于每个顶点 $u\in V(G)\backslash V(B)$，存在一种颜色 $k\in[\omega(G)+1]$，使得 $|f'^{-1}(k)\cap N_G(u)|$ 为奇数。

接下来，注意到 $V(B)\setminus\{v\}$中没有顶点被赋予颜色 i或 j。因此，$|f'^{-1}(i)\cap N_G(v)|$仍然是奇数。此外，对于每个顶点 $u\in V(B)\setminus\{v\}$， $|f'^{-1}(j)\cap N_G(u)|=1$。具体而言， v是每个顶点 $u\in V(B)\setminus\{v\}$的邻域中唯一被染成 j色的顶点。这就证明了 f'是 G的一个奇着色，且使用的颜色不超过 $\omega(G)+1$种。

□

由上述定理可知，对于任意块图 G， $\chi_o(G)\in\{\omega(G)\ \omega(G)+1\}$。此外，所提出的界是紧的。例如，含有 5 个顶点的完全图 K_5 达到下界，而两个恰好共享一个顶点的 K_5 达到上界。接下来，我们根据 G的奇色数刻画块图G。考虑一个块图 G。设 B和 v分别是 G中的一个块和一个割点。若 $v\in V(B)$，我们称 B与 v关联。

定理 4.2。 设 G是一个块图。当且仅当存在一个割点 v满足以下条件时， $\chi_o(G)=\omega(G)+1$：

1. 与 v 关联的每个块的大小都是 $\omega(G)$，并且

2. 与 v 关联的块的数量为偶数。

证明。 设 G是一个块图。根据定理 4.1， $\chi_o(G)\in\{\omega(G)\ \omega(G)+1\}$。首先，假设$\chi_o(G)=\omega(G)+1$。我们需要证明存在一个割点 v满足以下条件：

1. 与 v 关联的每个块的大小都是 $\omega(G)$，并且

2. 与 v 关联的块的数量为偶数。

为了证明这一点，我们断言，如果不存在同时具备这两个性质的割点，那么 $\chi_o(G)=\omega(G)$。为此，我们描述一种至多使用 $\omega(G)$ 种颜色的着色过程。因此，对于每个割点 v，要么与 v 相邻接的某个块的阶小于 ω，要么与 v 相邻接的块的数量为奇数。我们证明， G 具有使用 ω 种颜色的奇着色。

现在，我们构造一棵以割点 r 为根的根块割树 T_G。我们按照广度优先搜索顺序考察 T_G 的顶点，并为 V（G）的顶点分配颜色。直观地说，如果在我们提出的过程中为割点 v 分配颜色，那么与此同时，我们也确定与 v 相邻的每个块 B 中顶点的颜色。着色过程如下：首先为对应于根顶点 r 的割点 v_r 任意分配一种颜色。假设 f（v_r）$=i$。令 t_1， t_2，……， t_k 为与 r 相邻的块顶点，并令 B_{t_1}， B_{t_2}，……， B_{t_k} 为相应的块。

• **如果对每个** $j \in [k]$。 **都有** $|B_{t_j}| = \omega\ (G)$

在这种情况下，根据假设， k 是奇的。因此，对于每个 $j \in [k]$，块 B_j 中的每个未着色顶点都从 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$中被赋予一个不同的颜色。也就是说，对于每个 $j \in [k]$，从集合 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$中为 $V(B_j)$中的未着色顶点分配颜色，使得对于所有边$wu \in E(B_j)$， $f(w) \neq f(u)$。注意，当 f限制在块 $B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_k}$上时，它是一个奇着色。

• **如果存在某个** $j \in [k]$ **，使得** $|B_{t_j}| < \omega(G)$.

在这种情况下，我们首先为该块中除 B_j之外的未着色顶点分配颜色。对于每个$j' \in [k] \setminus \{j\}$，从集合 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$ 中为 $V(B_{j'})$中的未着色顶点分配颜色，使得$f(w) \neq f(u)$。如果存在一个颜色 $i' \in [\omega(G)]$，使得 $|f^{-1}(i') \cap N(v_r)|$是奇的，则从集合 $[\omega(G)] \setminus \{i, i'\}$中为 $V(B_j)$中的未着色顶点分配颜色，使得 $f(w) \neq f(u)$。这是确实可行的，因为 B_j 中的未着色顶点数至多为 $\omega(G) - 2$。否则，从 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$ 中选取任意颜色并将其分配给 $V(B_j)$ 中的未着色顶点，所得结果都是奇的。因此，当f限制在块 B_{t_1}、 B_{t_2}、.. . 、 B_{t_k}上时，它是一个奇着色。

我们注意到，在此过程中，割点的颜色是在为相应块中的顶点着色时确定的。令 t 为任意一个割点。令 t_1 为 t的父节点。注意， t_1 是对应于某个块（记为 B_{t_1}）的块顶点。为 B_{t_1} 中的顶点着色时， v_t 的颜色已确定。假设 $f(v_t) = i$。令 t_2， t_3， ....., t_k 为与 t 相邻、且不同于 t_1 和 B_{t_2} 的块顶点，令 B_{t_3}， B_{t_k} 为相应的块。

• **若对每个** $j \in [k]$**,** $|B_{t_j}| = \omega(G)$

在这种情况下，根据假设， k 是奇数。因此，对于每个 $j \in [k]$，将块 B_j 中的每个未着色顶点赋予 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$ 中一个不同的颜色。也就是说，对于每个 $j \in [k]$，将 $V(B_j)$ 中未着色顶点赋予 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$ 集合中的颜色，使得 $f(w) \neq f(u)$。因此，集合 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$ 中的任意颜色在 $N_G(v_t)$ 中出现奇数次。故 f 是一个奇着色。

• **如果存在一个** $j \in [k]$ **使得** $|B_{t_j}| < \omega\ (G)$ 。

我们取满足 $|B_{t_j}| < \omega(G)$ 的最大索引 j 。假设 $j \geq 2$。也就是说，存在一个大小小于 $\omega(G)$ 的子块。在这种情况下，我们首先为该块中除 B_j 之外的未着色顶点分配颜色。对于每个 $j' \in [k] \setminus \{j\}$，从集合 $[\omega(G)$ 中为 $V(B_{j'})$ 里的未着色顶点分配颜色，使得 $f(w) \neq f(u)$。如果存在一种颜色 $i' \in [\omega(G)]$，使得 $|f^{-1}(i') \cap N(v_t)|$为奇数，则从集合$[\omega(G)] \setminus \{i, i'\}$ 中为 $V(B_j)$ 里的未着色顶点分配颜色，使得 $f(w) \neq f(u)$。这是确实可行的，因为 B_j 中的未着色顶点数至多为 $\omega(G) - 2$。否则，无论从 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$ 中选择哪种颜色分配给 $V(B_j)$ 中的未着色顶点，结果都是奇数。

若 $j = 1$，则所有子块的大小均为 $\omega(G)$。在这种情况下，对于每个 $j' \in [k]$，将 $V(B_{j'})$ 中未着色顶点的颜色赋为集合 $[\omega(G)] \setminus \{i\}$中的颜色，使得 $f(w) \neq f(u)$。我们声称存在一种颜色 $i' \in [\omega(G)]$，使得 $|f^{-1}(i') \cap N(v_t)|$ 为奇数。我们通过考虑以下情形来证明这一点:

– 假设 k 是奇数。因此，与顶点 v_t 相邻的子块数量为偶数。因此，赋给顶点 $V(B_{t_1}) \setminus \{v_t\}$ 的任意颜色，在 $N_G(v_t)$中出现奇数次。– 如果 k 是偶数，则与顶点 v_t 相邻的子块数量为奇数。因此，集合 $[\omega(G)] \setminus f(V(B_{t_1})$中的任意颜色，在 $N_G(v_t)$中出现奇数次，因为 $|V(B_{t_1})| <\omega(G)$。因此， f 是一个奇着色。

反过来，假设存在一个割点 v，使得

1. 与 v 相邻的每个块的大小为 $\omega(G)$，并且

2. 与 v 相邻的块的数量为偶数。

反之，假设存在一个对 G的奇着色 f，其使用至多 $\omega(G)$ 种颜色。令$f(v) = i$，且 B_1、B_2、.....、 B_r 为与顶点 v相邻的块。根据我们的假设，注意到r 为偶数，并且对于每个 $k \in [r]$, $|V(B_k)|$ 为 $\omega(G)$。由于每个奇着色都是正常着色，对于任意两个不同的顶点 u 和 w，在任意块 B_k中都有 $f(u) \neq f(w)$， $k \in [r]$。因此，对于每个 $k \in [r]$， f使用除颜色 i 以外的 $\omega(G) - 1$ 种颜色为 $V(B_k) \setminus \{v\}$ 中的顶点着色。这说明，在 $N(v)$ 中，除 i 以外的所有 $\omega(G) - 1$ 种颜色都出现偶数次。这与 f 是G的奇着色这一事实矛盾。因此，定理得证。

□

5 真区间图

图 G 是真区间图，当且仅当它存在一个区间表示 $\mathcal{I} = \{I_v : v \in V(G)\}$ 位于实数轴上，使得对于每一对不同的顶点 $u, v \in V(G)$ $uv \in E(G) \iff I_u \cap I_v \neq \emptyset$，且没有任何区间 $\mathcal{I}$ 真包含另一个区间。真区间图可由一种称为双兼容序（BCO）的顶点排序来刻画。设 $G = (V, E)$ 是一个图。如果对于每个 $i < k < j$， $i < j$, $v_iv_j \in E(G)$ 蕴含 $v_kv_i, v_kv_j \in E(G)$，则称排序 $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为双兼容序。已知，一个图 G 是真区间图，当且仅当它存在一个 BCO [18]。定义$N^-(v_i) = N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$和 $N^+(v_i) = N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$。

我们对真区间图的最大度作如下重要观察。

观察 5. 真区间图的每个顶点 v G 都满足 $\deg_G(v) \leq 2\omega(G) - 2$.

证明。设 $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 是 G 的一个 BCO，且 $v_i \in V(G)$。根据 BCO 性质， $G[N^-(v_i) \cup \{v_i\}]$和 $G[N^+(v_i) \cup \{v_i\}]$都是团。因此， $|N^-(v_i)| + 1 \leq \omega(G)$，且 $|N^+(v_i)| + 1 \leq \omega(G)$。所以 $\deg_G(v_i) = |N^-(v_i)| + |N^+(v_i)| \leq (\omega(G) - 1) + (\omega(G) - 1) = 2\omega(G) - 2$。由于 v_i 是任意的， $\Delta(G) \leq 2\omega(G) - 2$。

□

接下来，我们为真区间图建立奇色数的界，并根据奇色数给出刻画。

定理 5.1. 设 G 是一个真区间图。那么， $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$.

证明。 设 $G = (V, E)$ 是一个真区间图，其双兼容序（BCO）为 $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$。众所周知，真区间图的双兼容序中的顶点构成一条哈密顿路径。下界显然成立。由于在任何正常着色中， G 的每个团都必须分配不同的颜色，因此我们有 $\chi_o(G) \geq \omega(G)$。接下来需要建立上界。为此，定义着色f: $V(G) \to [\omega + 1]$，使得 $f(v_i) = 1 + ((i - 1) \bmod (\omega + 1))$。因此，颜色按循环方式分配，如下所示：$\{1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$。

我们首先证明 f 是正常着色。反设，对于某个$i < j$，有 $v_iv_j \in E(G)$，且 $f(v_i) = f(v_j)$。根据 f的定义， $j - i \equiv 0$(模 $(\omega + 1)$)，因此 $j - i \geq \omega + 1$。所以，
$|\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j\}| = j - i + 1 \geq \omega + 2$。由于 α是一个 BCO 且 $v_iv_j \in E(G)$，顶点 $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j\}$ 诱导出一个团。因此， $\omega(G) \geq j - i + 1 \geq \omega(G) + 2$，矛盾。因此， f 是正常着色。

下面证明奇着色条件。对于每个 $2 \le i \le n-1$，与 v_i满足 v_i 的前序邻点构成一个团。因此，$|N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}| \le \omega - 1$。类似地，$|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}| \le \omega - 1$。根据 f的定义，$f(v_{i-1}) \equiv f(v_i) - 1 (\text{模 } (\omega+1))$，并且 $f(v_{i+1}) \equiv f(v_i) + 1 (\text{模 } (\omega+1))$。由于 v_i 的每一侧至多包含 $\omega - 1$ 个邻点，且着色以$\omega + 1$为周期，因此颜色 $f(v_{i-1})$ 在 $N(v_i)$ 中恰好出现一次，即出现在 v_{i-1}处。类似地，颜色 $f(v_{i+1})$ 在 $N(v_i)$ 中恰好出现一次，即出现在 v_{i+1}处。因此，$|N(v_i) \cap f^{-1}(f(v_{i-1}))| = 1$，并且 $|N(v_i) \cap f^{-1}(f(v_{i+1}))| = 1$。所以，$N(v_i)$中至少有两种颜色出现奇数次。对于 v_1，其所有邻点都出现在 v_1之后，且 $|N(v_1)| \le \omega - 1$。因此，$|N(v_1) \cap f^{-1}(f(v_2))| = 1$。类似地，对于 v_n，其所有邻点都出现在 v_n之前，且 $|N(v_n)| \le \omega - 1$。因此，$|N(v_n) \cap f^{-1}(f(v_{n-1}))| = 1$。

因此，对于每个 $v \in V(G)$，都存在一种颜色 $c \in [\omega + 1]$，使得 $|N(v) \cap f^{-1}(c)| \equiv 1$（模 2）。于是，$f$ 是 G 的一种奇着色，因此 $\chi_o(G) \le \omega(G) + 1$。结合下界 $\chi_o(G) \ge \omega(G)$，我们得出 $\omega(G) \le \chi_o(G) \le \omega(G) + 1$。 □

根据定理 5.1，我们注意到，真区间图的奇色数介于 $\omega(G)$ 和 $\omega(G) + 1$之间。需要指出的是，这两个界都是紧的。图 3 和图 4分别展示了达到下界和上界的真区间图。

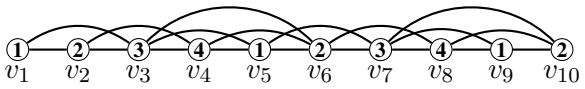


图 3：一个达到定理 5.1中下界的区间图示例。这里，$\chi_o(G) = 4$，而 $\omega(G) = 4$ 且 $\Delta(G) = 5 < 6 = 2\omega(G) - 2$。

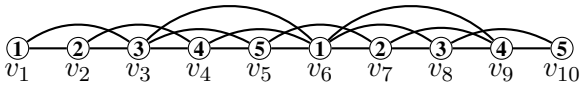


图4：达到定理 5.1 上界的区间图示例。这里，$\chi_o(G) = 5$，而 $\omega(G) = 4$ 且 $\Delta(G) = 2\omega(G) - 2 = 6$。

我们的下一个定理根据奇色数刻画真区间图类。

定理5.2。设 G 是一个真区间图。则 $\chi_o(G) = \omega(G) + 1$ 当且仅当存在一个顶点 $v \in V(G)$ 使得 度 $_G(v) = 2\omega(G) - 2$。否则，$\chi_o(G) = \omega(G)$。

证明。设 $G = (V, E)$ 是一个真区间图，其双兼容序（BCO）为 $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$。设 $\omega = \omega(G)$。根据前面的定理 5.1，我们有 $\omega \le \chi_o(G) \le \omega + 1$。假设 $\chi_o(G) = \omega + 1$。我们声称存在一个顶点 $v \in V(G)$，使得 $\deg_G(v) = 2\omega - 2$。为证明这一点，定义着色 $f\colon V(G) \to [\omega]$，令 $f(v_i) = 1 + ((i-1) \bmod \omega)$。由于 α 是一个 BCO，对于每条满足 $i < j$ 的边 $v_iv_j \in E(G)$，顶点 $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ 诱导一个团。因此 $j - i + 1 \le \omega$，进而 $j - i < \omega$。由于该着色以 ω 为周期，故有 $f(v_i) \ne f(v_j)$。因此，f是一个适当的 ω-着色。

对于任意 $v_i \in V(G)$，令 $p_i = |N^-(v_i)|$和 $q_i = |N^+(v_i)|$，其中 $N^-(v_i) = N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$且 $N^+(v_i) = N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$。根据 BCO 性质，$G[N^-(v_i) \cup v_i]$和 $G[N^+(v_i) \cup v_i]$是团，因此 $p_i,\ q_i \le \omega - 1$，从而 $\deg_G(v_i) \le 2\omega - 2$。此外，在 f 条件下，$N^-(v_i)$ 和 $N^+(v_i)$ 上的颜色分别是 $f(v_i)$ 之前和之后的连续颜色，即 $f(v_i)$ −

$p_i, \ldots, f(v_i) - 1$和 $f(v_i) + 1, \ldots, f(v_i) + q_i$模 ω。因此，$N(v_i)$ 中每种颜色至多出现两次。若 $\deg_G(v_i) \leq 2\omega - 3$，则存在某种颜色 $j \in [\omega]$，使得 $|N(v_i) \cap f^{-1}(j)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$；否则，出现在 $N^-(v_i)$ 上的颜色集合等于出现在$N^+(v_i)$ 上的颜色集合。因此，$\{f(v_i) - p_i, \ldots, f(v_i) - 1\} = \{f(v_i) + 1, \ldots, f(v_i) + q_i\}$模 ω。只有当 $p_i = q_i = \omega - 1$时，这个等式才成立，从而 $\deg_G(v_i) = 2\omega - 2$，矛盾。因此，$\deg_G(v_i) \leq 2\omega - 3$ 意味着 v_i 满足奇着色条件。

假设对于每个 $v \in V(G)$，$\deg_G(v) \leq 2\omega - 3$，则 f 是一个奇 ω-着色。结合 $\chi_o(G) \geq \omega$，我们得到 $\chi_o(G) = \omega$，矛盾。因此，存在 $v \in V(G)$ 使得 $\deg_G(v) = 2\omega - 2$。

反之，假设对于某个 $v \in V(G)$，$\deg_G(v) = 2\omega - 2$。则 $p_v = q_v = \omega - 1$。根据BCO 性质，$G[N^-(v) \cup \{v\}]$ 和 $G[N^+(v) \cup \{v\}]$ 是阶为 ω 的团。对于任意合法的 ω- 着色 g，这些团中的每一个都包含全部 ω 种颜色。因此，$g(N^-(v)) = g(N^+(v)) = [\omega] \setminus g(v)$。所以，对于每个 $j \in [\omega] \setminus g(v)$，$|N(v) \cap g^{-1}(j)| = 2$。于是，$N(v)$中的每种颜色出现的次数都是偶数，因此 v 不满足奇着色条件。故 $\chi_o(G) > \omega$，从而 $\chi_o(G) = \omega + 1$。因此，当且仅当存在 $v \in V(G)$使得$\deg_G(v) = 2\omega - 2$时，$\chi_o(G) = \omega + 1$；否则，$\chi_o(G) = \omega$。

□

5.1 真区间图奇着色的线性时间算法

本节介绍一种线性时间算法：给定一个真区间图 G 及其 BCO$\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 的 G，计算 G 的最少颜色奇着色。值得注意的是，真区间图的团大小可以在线性时间内计算 [12]。算法如下：

算法1 真区间图的奇着色 输入：真区间图 $G = (V, E)$ 及其 BCO $\alpha = (v_1,$
$v_2, \ldots, v_n)$ G 输出： G 的奇着色 f 初始化： $\chi_o(G) = \emptyset$若存在一个顶点，
使得 $\deg_G(v) = 2\omega(G) - 2$ 则 否则$\chi_o(G) = \omega(G)$ 若 $\chi_o(G) = \omega$ 则 对
$i \leftarrow 1$到 n循环$f(v_i) \leftarrow 1 + ((i - 1) \bmod \omega)$ 否则 对 $i \leftarrow 1$到 n循环$f(v_i)$
$\leftarrow 1 + ((i - 1) \bmod (\omega + 1))$ 返回 f

算法 1的正确性由定理 5.1 和定理 5.2得出。接下来，我们分析所提出算法的时间复杂度。我们注意到，真区间图的最大团大小 $\omega(G)$ 可以在线性时间内计算。此外，检查是否存在一个度恰好为 $2\omega(G) - 2$ 的顶点也可以在线性时间内完成。此外，我们的着色过程是线性的。由此可知，所提出的算法具有线性时间复杂度。

6 二分圆图

连通二分距离遗传图是一种连通二分图 G，其中任意两个顶点之间的距离在所有包含这两个顶点的连通诱导子图中均保持不变。等价地，这种图可以从单个顶点出发，通过反复添加悬挂顶点或假孪生点来构造。二部圆图是一种二分图，可以表示为圆的弦的交图；当且仅当对应的弦相交时，两个顶点相邻。每个距离遗传图都是圆图；因此，二分距离遗传图类是二部圆图类的真子类。Davis 等人在 [11] 中研究了圆图及相关图类中的这一问题。他们提出了以下开放问题

问题 [11] 每个二分圆图的奇色数是否至多为4 ?

下面给出一个二分圆图的构造 G，使得 $\chi_o(G) = 6$，从而否定上述论断。

命题 1。 存在一个具有十个顶点的连通二分圆图 G，其 $\chi_o(G) = 5$.

证明。 设 G 为具有二部划分 $X = \{a, a', b, c, d\}$的二分图，且 $Y = \{p, p', q, q', r\}$图 5展示了 G一个适当的奇5-着色。

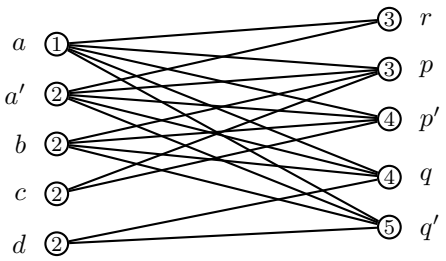


图 5：一个二分圆图 G，其 $\chi_o(G) = 5$。顶点内的数字表示相应顶点的颜色。

要验证 G 是一个圆图，请按循环顺序将以下双出现词放置在圆周上：

$$r,\ a',\ a,\ r,\ b,\ c,\ p',\ p,\ c,\ d,\ q',\ q,\ d,\ b,\ a,\ a',\ q,\ q',\ p,\ p'.$$

用一条弦连接每个符号的两次出现。当且仅当两条弦的端点在圆周上交替出现时，它们相交。直接检查可得，邻接集合恰好如上所述。因此， G 是一个二部圆图。

接下来我们证明 $\chi_o(G) \geq 5$。假设存在矛盾， φ 是G的正规奇着色，且至多使用四种颜色。三个顶点 r、 c、 d的度均为二，其中 $N(r) = \{a, a'\}$、 $N(c) =\{p, p'\}$以及 $dN(d) = \{q, q'\}$. 在一个二度顶点处，奇邻域条件要求它的两个邻点获得不同的颜色。因此，

$$\varphi(a) \neq \varphi(a'), \qquad \varphi(p) \neq \varphi(p'), \qquad \varphi(q) \neq \varphi(q').$$

$\{p, p', q, q'\}$ 的每个顶点都与 a和 a'相邻。因此，正规性禁止这四个顶点使用两个不同的颜色 $\varphi(a)$ $\varphi(a')$中的任意一个。至多还剩两种颜色，记为 α 和 β。由于 p, p' 上的颜色不同， q, q'上的颜色也不同，我们有 $\{\varphi(p)$ $\varphi(p')\} = \{\alpha, \beta\} = \{\varphi(q)$ $\varphi(q')\}$.

但是 $N(b) = \{p, p', q, q'\}$，因此 α和 β各自在 $N(b)$中恰好出现两次，且其中没有其他颜色。这与 b 处的奇邻域条件矛盾。因此 $\chi_o(G) \geq 5$。

对于反向不等式，定义 $\psi: V(G) \to \{1,2,3,4,5\}$ 为

$$\begin{aligned} \psi(a) &= 1, \\ \psi(a') = \psi(b) = \psi(c) = \psi(d) &= 2, \\ \psi(p) = \psi(r) &= 3, \\ \psi(p') = \psi(q) &= 4, \\ \psi(q') &= 5. \end{aligned}$$

这种着色是合法的。a和 a'的邻域中的颜色为 3，3，4，4，5；在 b处，它们为 3，4，4，5；而在 p，p'，q，q'各处，它们为 1，2，2，2。最后，c，d，r各自的两个邻点颜色不同。因此，每个顶点的邻域中都有一种颜色出现奇数次，这证明了$\chi_o(G) \leq 5$。合并这些不等式可得 $\chi_o(G) = 5$。 □

注6.1。事实上，上述图是二分距离遗传图。它可以由圈$a-p-b-q-a$通过在 a，p，q处分别添加悬挂顶点 r，c，d，然后分别为 a，p，q添加假孪生点 a'，p'，q'得到。

定理 6.1。每个二部圆图 G 都满足 $\chi_o(G) \leq 6$.

证明。我们先证明上界。由于不交并的奇色数等于其各连通分量奇色数的最大值，因此只需考虑至少含有一条边的连通二分圆图 G。

根据 De. Fraysseix 的刻画 [13],对于每个连通二部圆图，都存在一个连通平面图 H及其生成树 T，使得$G \cong F(H,T)$，其中 $F(H,T)$是 H相对于 T的基本图。

我们将 G 的二部划分识别为 $X = E(T)$ $Y = E(H) \setminus E(T)$。对于 $e \in X$ 和 $f \in Y$，顶点 e 和 f 在 G 中相邻，当且仅当 e属于 f 相对于 T 的基本圈。由于 G 连通且含有一条边，因此它没有孤立顶点。因此，H 没有环或桥：环对应于 Y 中的孤立顶点，而桥对应于 X 中的孤立顶点。现在我们用六种颜色对 G 进行正规奇着色。

为 X 中的顶点着色。

根据四色定理，存在一个正常顶点着色 $g: V(H) \longrightarrow \mathbb{F}_2^2$，其中 $\mathbb{F}_2^2 = \{00, 01, 10, 11\}$. 对于每条树边 $e = uv \in E(T)$，定义

$$\lambda(e) = g(u) \oplus g(v),$$

其中 $\oplus$表示模 2 分量加法。由于 g 是一个正常着色，$g(u) \neq g(v)$，因此 $\lambda(e) \in \{01, 10, 11\}$（如果 $g(u) = g(v)$，那么 $g(u) \oplus g(v) = 00$）。按照这三个非零向量，为 X 的顶点指定颜色 1，2，3。

我们声称，Y的每个顶点都满足奇着色条件。令 $f = uv \in Y$。由于 f 不是树边，f的基本圈由 f以及唯一的 u–v路径 $P_T(u, v)$ 在T中组成。因此，$N_G(f) = E(P_T(u, v))$。由此，

$$\begin{aligned} \bigoplus_{e \in N_G(f)} \lambda(e) &= \bigoplus_{xy \in E(P_T(u,v))} \big(g(x) \oplus g(y)\big) \\ &= g(u) \oplus g(v). \end{aligned}$$

第二个等式成立，是因为路径上的每个内部顶点在异或和中恰好出现两次。由于 $f = uv$ 是 H 的一条边，且 g 是适当的，$g(u) \oplus g(v) \neq 00$. 因此，$\bigoplus_{e \in N_G(f)} \lambda(e) \neq 00$.

如果在 $N_G(f)$ 中三种颜色各自出现的次数都是偶数，那么 $\{01, 10, 11\}$中的每个向量都会出现偶数次，从而异或和为 00。这就产生了矛盾。

因此，在 $\{1, 2, 3\}$ 中，至少有一种颜色在 $N_G(f)$ 中出现奇数次。由此，Y的每个顶点都满足奇着色条件。

给 Y中的顶点着色。

令 H^* 表示 H 的平面对偶。由于 T 是 H 的生成树，对应于 $E(H) \setminus E(T)$ 的对偶边构成 H^* 的一棵生成树 T^*。由于 H 无桥，其平面对偶 H^* 没有自环。根据四色定理，存在一个正常顶点着色 $h : V(H^*) \longrightarrow \mathbb{F}_2^2$. 等价地说，$h$ 是使用四种颜色对 H 的面进行的正常着色。对于每条非树边 $f \in Y$，令 F_1 和 F_2 表示与 f 相 incident 的 H 的两个面。定义

$$\mu(f) = h(F_1) \oplus h(F_2).$$

由于 H没有桥，F_1和 F_2是不同的相邻面。因此，$\mu(f) \in \{01, 10, 11\}$. 根据这三个非零向量为 Y 的顶点着上颜色 4、5、6。

我们声称 X 的每个顶点都满足奇着色条件。设 $e \in X$，并令 F_1、F_2 为与 e关联的两个面。G 中 e 的邻点恰好是属于删除 e所确定的 T基本割的非树边。根据平面对偶性，这些非树边的对偶构成 T^*中唯一的 F_1–F_2 路径。因此，这条对偶路径上的异或和逐项抵消，得到

$$\bigoplus_{f \in N_G(e)} \mu(f) = h(F_1) \oplus h(F_2).$$

由于 H 没有桥，面 F_1 和 F_2 在 H^*中是不同且相邻的。由于 h 是适当的，$h(F_1) \oplus h(F_2) \neq 00$.因此，

$$\bigoplus_{f \in N_G(e)} \mu(f) \neq 00.$$

与之前一样，如果颜色 4、5、6 在 $N_G(e)$ 中各出现偶数次，那么异或和将为 00，这就产生矛盾。因此，$\{4, 5, 6\}$ 中的至少一种颜色在 $N_G(e)$ 中出现奇数次。由此，X 的每个顶点也都满足奇着色条件。

着色的正规性。

X的顶点只使用 $\{1, 2, 3\}$中的颜色，而 Y的顶点只使用 $\{4, 5, 6\}$中的颜色。由于 G 是二部图，其二部划分为（X，Y），每条边的一个端点都在 X 中，另一个端点在 Y中。因此，该着色是正规的。

由于每个非孤立顶点都满足奇邻域条件，我们可以得到一种至多使用六种颜色的正规奇着色。因此，$\chi_o(G) \leq 6$.

□

推论 6.1. 每个连通二部距离遗传图 G 都满足 $\chi_o(G) \leq 6$. 此外，该界是紧的。

证明。由于每个连通二部距离遗传图都是二部圆图，不等式 $\chi_o(G) \leq 6$ 直接由定理 6.1得出。该界的紧性由定理 6.2证明。

□

6.1 界的紧性

定理 6.2。 存在一个连通二部距离遗传图 G使得 $\chi_o(G) = 6$。因此，存在一个奇色数为 6 的二部圆图。

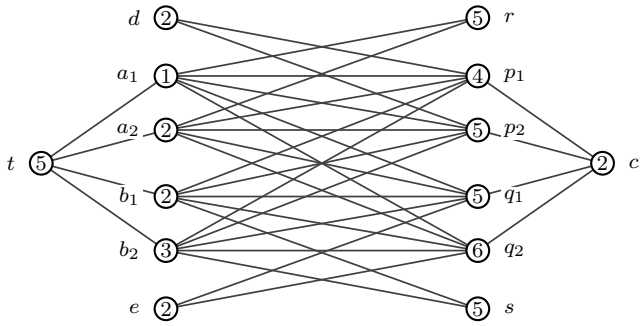


图 6：一个连通二部距离遗传图 G，其具有 $\chi_o(G) = 6$。因此，一个奇色数为 6 的连通二分圆图。顶点内的数字表示相应顶点的颜色。

证明。 设 G 是一个具有二部划分 $X = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c, d, e\}$ 和 $Y = \{p_1, p_2, q_1, q_2, r, s, t\}$. 的图。令 $A = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$， $B = \{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. 我们证明 G 是一个连通二部距离遗传图，且 $\chi_o(G) = 6$。

断言 1。 G 是一个连通二部距离遗传图。

证明。 显然， G 是二部图且连通。回顾一下，若一个连通二分图可以从单个顶点开始，通过依次添加悬挂顶点和假孪生点构造而成，则它是距离遗传图。我们按如下方式构造 G。从边 b_2t 开始，并按给定顺序执行以下操作：

- 将 a_2 添加为 b_2的假孪生点。
- 将 r 添加为与 a_2相邻的悬挂点。
- 将 s 添加为与 b_2相邻的悬挂点。
- 将 q_2 添加为 t的假孪生点。
- 将 c 添加为与 q_2相邻的悬挂点。
- 将 p_2 添加为 q_2的假孪生点。
- 将 e 添加为与 q_2相邻的悬挂点。
- 将 q_1 添加为 q_2的假孪生点。
- 将 d 添加为与 p_2相邻的悬挂点。
- 将 p_1 添加为 p_2的假孪生点。
- 将 a_1 添加为 a_2的假孪生点。
- 添加 b_1 作为 b_2的假孪生点。

每项操作都在当前已构造的图上执行。所得图恰好是 G。由于添加悬挂顶点和假孪生点不会破坏二部距离遗传性，因此 G 是一个连通二部距离遗传图。

□

断言 2. $\chi_o(G) = 6$。

根据推论 6.1，我们有 $\chi_o(G) \leq 6$对每个连通二部距离遗传图 G均成立。要证明等号成立，还需说明 $\chi_o(G) \geq 6$。

反设 G 存在一种使用至多五种颜色的正规奇着色 φ。由于$N(r) = \{a_1, a_2\}$ 且 $d_G(r) = 2$，奇着色条件意味着 $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$。类似地，由于$N(s) = \{b_1, b_2\}$，可得 $\varphi(b_1) \neq \varphi(b_2)$。我们先证明，$A$至少需要三种不同的颜色。

假设 A 至多使用两种颜色，即 α 和 β。前述不等式意味着 $\{\varphi(a_1)\ \varphi(a_2)\}$ =$\{\alpha, \beta\}$ 且 $\{\varphi(b_1)\ \varphi(b_2)\} = \{\alpha, \beta\}$. 然而，$N(t) = \{a_1, a_2, b_1, b_2\} = A$. 因此，$\alpha$和$\beta$在 $N(t)$中均恰好出现两次。于是，没有任何颜色在 $N(t)$中出现奇数次，这与奇着色条件矛盾。因此，$|\varphi(A)| \geq 3$，其中 $\varphi(A)$表示用于 A的不同颜色集合。

同理，由于 $N(d) = \{p_1, p_2\}, N(e) = \{q_1, q_2\}$，奇着色条件意味着 $\varphi(p_1) \neq \varphi(p_2)$ $\varphi(q_1) \neq \varphi(q_2)$。假设 B至多使用两种颜色，分别记为 γ和 δ。那么 $\{\varphi(p_1)\ \varphi(p_2)\}$ =$\{\gamma, \delta\}$，且 $\{\varphi(q_1)\ \varphi(q_2)\} = \{\gamma, \delta\}$.。由于 $N(c) = \{p_1, p_2, q_1, q_2\} = B$，$\gamma$和 δ在 $N(c)$ 中都恰好出现两次。这再次与奇着色条件矛盾。因此，$|\varphi(B)| \geq 3$.。由于 A 的每个顶点都与 B的每个顶点相邻，且 φ 是正常着色，因此用于 A的颜色不能用于 B。于是，$\varphi(A) \cap \varphi(B) = \varnothing$.。因此，$\varphi$ 所用颜色的数量至少为

$$\begin{aligned} |\varphi(A) \cup \varphi(B)| &= |\varphi(A)| + |\varphi(B)| \\ &\geq 3 + 3 \\ &= 6. \end{aligned}$$

这与 φ 最多使用五种颜色的假设相矛盾。因此，$\chi_o(G) \geq 6$. 所以，$\chi_o(G) = 6$.最后，由于每个二分距离遗传图都是二部圆图，G 也是一个奇色数为 6 的二部圆图。

证明完毕。

□

7 双凸二部图

如果存在 X和 Y的线性序，使得对于每个顶点 $v \in X \cup Y$，v 的邻点在与 v所属部集相对的部集的排序中连续出现，则二分图 $G = (X, Y, E)$ 是双凸的。二分图 $G = (X, Y, E)$ 是二部置换图，当且仅当它具有强序。强序由 X 的线性序 $<_X$ 和 Y 的线性序 $<_Y$组成，并满足：对于所有 x，$x' \in X$ 和 y，$y' \in Y$，如果 xy，$x'y' \in E(G)$、$x <_X x'$和 $y <_Y y'$，那么 $xy' \in E(G)$和 $x'y \in E(G)$。

定义 7.1 (多链序 [5, 14])。给定一个连通图 $G = (V, E)$，存在一个顶点$v_0 \in V(G)$，以此构造距离层 $L_0, L_1, \ldots, L_p$。层 L_i（其中 $i \in [p]$）表示与 v_0距离为 i的顶点集合。这里，p 表示使 L_p 非空的最大整数。如果对于任意两个相邻层 L_i和 L_{i+1}（其中 $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$），连接这两层的边构成一个链图，则这些层构成 G 的多链序 。

定理 7.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个连通双凸图，$2 \le \chi_o(G) \le 5$。

证明。由于 G 是连通的且至少有两个顶点，因此 $\chi(G) \ge 2$。此外，每个奇着色都是正常着色，因此 $\chi_o(G) \ge \chi(G) \ge 2$。剩下要证明的是 $\chi_o(G) \le 5$。由于 G是双凸的，它存在一个多链序 $L_0, L_1, \ldots, L_p$，其中 $|L_0| = 1$，且 L_i 由距 L_0中的唯一顶点 i 的顶点组成。注意，每一层 L_i 都是 G中的独立集。此外，任意两个非相邻层中的顶点之间没有边，并且对于每个 $i \in [p]$，$G[L_{i-1} \cup L_i]$ 是一个链图。因此，对于每个 $i \in [p]$，在 L_{i-1} 中存在一个与 L_i的所有顶点都相邻的顶点。我们将 L_{i-1} 中的这个顶点记为 v_{i-1}，并称其为层 L_{i-1}中的特殊顶点。由于 L_p 是最后一个非空层，且后续没有层需要支配，我们任取一个顶点 $v_p \in L_p$，并将其指定为 L_p的特殊顶点。令 $S = \{v_i \mid v_i \text{ 为 } L_i\}$ 的特殊顶点集合。接下来，我们定义一个至多使用 5 种颜色的着色函数 f，即 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$，且 f是 G的奇着色。为此，我们首先在特殊顶点集合 S上定义颜色。

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ 1, & i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3), \\ 2, & i \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$

现在，我们根据每层 L_i 是偶数还是奇数，来定义该层非特殊顶点的颜色。对于每个顶点 $v \in L_i \setminus \{v_i\}$，我们按如下方式定义 v 的颜色：

$$f(v) = \begin{cases} 3, & i \text{ is even}, \\ 4, & i \text{ is odd}. \end{cases}$$

因此，层 L_i 中的每个非特殊顶点在 i 为偶数时着 3 色，i 为奇数时着色为 4。此外，层 L_i 的特殊顶点从集合 $\{0, 1, 2\}$中取一种颜色。我们的着色过程示意见图7。

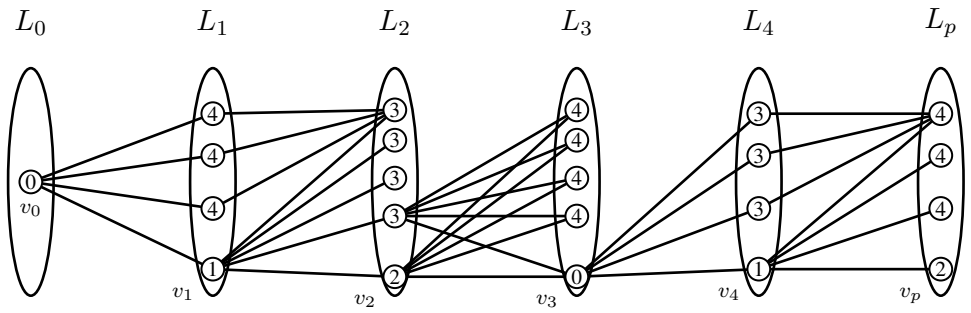


图 7：一个分层图，其排序为 L_0，L_1，……，L_p，适用于 $p = 5$，特殊顶点为 v_0，v_1，……，v_p。顶点内部的数字表示分配的颜色编号，顶点名称则显示在顶点外部。

接下来，我们声称 f 是 G的奇着色。为了证明这一点，我们首先证明 f 是 G中的正常着色。设 $v \in V(G)$ 是任意一个满足 $v \in L_i$的顶点。根据多链序的性质，我们注意到 $N(v) \subseteq L_{i-1} \cup L_{i+1}$。我们通过以下情况分析 $N[v]$ 上的颜色：

- 如果 i是偶数。

  在这种情况下，如果 v 是非特殊顶点，则 $f(v) = 3$。此外，如果 $v = v_i$，则 $f(v) \in \{0, 1, 2\}$。由于 $i - 1$ 和 $i + 1$ 都是奇数，对于每个非特殊顶点 $u \in L_{i-1} \cup L_{i+1}$，$f(u) = 4$。此外，根据我们的着色过程，如果 $f(v_i) \equiv j$（模 3），则 $f(v_{i-1}) \equiv (j-1)$（模 3），且 $f(v_{i+1}) \equiv (j+1)$（模 3）。但是，对于任意三个连续整数 $m-1$、m 和 $m+1$，$(m-1) \bmod 3$、$(m) \bmod 3$ 和 $(m+1) \bmod 3$ 的值都是集合 $\{0, 1, 2\}$ 中彼此不同的值。因此，$f(v_i) \neq f(v_{i-1}) \neq f(v_{i+1})$。这表明，对于任意 $u \in N_G(v)$，$f(v) \neq f(u)$。

- 若 i为奇数。

  这与上面的情形类似。

因此，f 是 G的正常着色。接下来，我们证明，对于每个顶点 $v \in V(G)$，都存在一种颜色 $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$，使得 $|f^{-1}(c) \cap N_G(v)|$ 为奇数。考虑任意两层 L_i、$i \geq 1$中的顶点。注意，v_{i-1} 与层 L_i中的所有顶点都相邻。如上所述，对于任意顶点 $v \in L_i$，$N(v) \subseteq L_{i-1} \cup L_{i+1}$。此外，若 $f(v_{i-1}) = j$，则$f^{-1}(j) \cap (L_i \cup L_{i+1}) = \emptyset$。另外，根据我们的着色过程，$f^{-1}(j) \cap L_{i-1} = \{v_{i-1}\}$。因此，对于每个顶点 $v \in L_i$，$|f^{-1}(j) \cap N(v)| = 1$。

现在，考虑层 $L_0 = \{v_0\}$。注意，$N(v_0) \subseteq L_1$。事实上，v_0 与 L_1 的所有顶点都相邻。令 $f(v_1) = j$。根据我们的着色过程，$f^{-1}(j) \cap L_1 = \{v_1\}$。因此，$|f^{-1}(j) \cap N(v_0)| = 1$。这说明 f 是 G 的一种奇着色，且至多使用 5 种颜色。因此，结论得证。

□

推论 7.1. 对于至少有两个顶点的连通双凸图 G，界 $2 \leq \chi_o(G) \leq 5$ 是紧的。

证明。 下界由完全图 K_2取到，该图是双凸图，并且满足$\chi_o(K_2) = 2$。上界由以下命题 2中构造的连通双凸图取到，对该图有 $\chi_o(G) = 5$。因此，两个界都是紧的。

□

命题 2。 存在一个连通双凸二分图 G，使得 $\chi_o(G) = 5$。

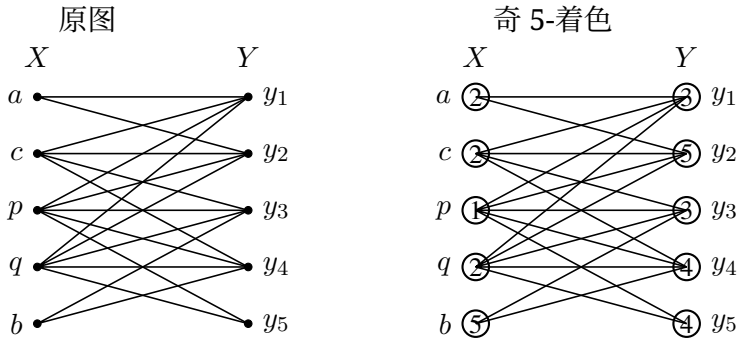


图 8: 一个连通双凸二分图 G 及其奇 5-着色 G。顶点内的数字表示相应顶点的颜色。

证明。 考虑图 $G = (X, Y, E)$ 如图 8所示，其中 $X = \{a, c, p, q, b\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$。显然，$X$ 中每个顶点的邻点在

Y的排序中连续出现。类似地， Y的每个顶点的邻点也在 X的排序中连续出现。因此， G 是双凸的。此外，图 G是连通的。

由定理 7.1，我们有 $\chi_o(G) \leq 5$对每个连通双凸图 G均成立。为了证明等号成立，还需证明 $\chi_o(G) \geq 5$。

反设 G 存在一种至多使用四种颜色的奇着色 f。由于 $N(y_5) = \{p, q\}$， y_5处的奇着色条件意味着 $f(p) \neq f(q)$。不失一般性，设$f(p) = 1$ 且 $f(q) = 2.$。由于 p 和 q 与 Y中的每个顶点都相邻，且 f 是正常着色， Y 中的顶点都不能着色为颜色1或颜色2。因此， Y 中的每个顶点都必须着为剩余两种颜色之一，例如颜色3或颜色4。

现在考虑顶点 a。由于 $N(a) = \{y_1, y_2\}$， a 处的奇着色条件意味着$f(y_1) \neq f(y_2)$。因此，颜色3和颜色4在 $\{y_1, y_2\}$中各恰好出现一次。类似地，由于 $N(b) = \{y_3, y_4\}$， b处的奇着色条件意味着 $f(y_3) \neq f(y_4)$。因此，颜色3和颜色4在 $\{y_3, y_4\}$中各恰好出现一次。

最后，考虑顶点 c。我们有 $N(c) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. 根据上述观察，在 $N(c)$ 中，颜色 3 和 4 各恰好出现两次，而其他所有颜色均未出现。因此，在 $N(c)$ 中，没有颜色出现奇数次。这与假设 f 是 G的一个奇着色相矛盾。因此， $\chi_o(G) \geq 5.$

证明至此完成。 □

8 余图

本节中，我们研究不含 C_4 的余图的奇色数。图 G 是一个余图，当且仅当它不包含与 P_4 同构的诱导子图。不含 C_4 的余图 是指不包含与 C_4 同构的诱导子图的余图。余图的奇色数已为人所知。

定理 8.1。 [4] 设 G 是一个余图。那么 $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G) + 2$。

事实上，我们注意到上述提出的界是紧的。在没有 C_4 的情况下，我们将这个界缩小到了余图。回想一下，无 $\{C_4, P_4\}$ 图也称为平凡完美图 [17, 16]。无 AC_4 的余图 G 可通过反复执行以下操作之一得到:

1. 添加一个孤立顶点,
2. 添加一个全邻顶点,
3. 对两个无 C_4 的余图 G_1 和 G_2取不交并。

接下来，我们陈述以下定理:

定理 8.2。 设 G 是一个无 C_4 的余图。那么 $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$。

证明。 设 G 是一个 C_4-free 余图。每个 C_4-free 余图都是完美图，因此 $\chi(G) = \omega(G)$。由于每个奇着色都是正常着色， $\omega(G) = \chi(G) \leq \chi_o(G)$。接下来只需建立上界。我们对 $|V(G)|$进行归纳。对于 $G = K_1$, $\chi_o(G) = \omega(G) = 1$。现在，假设对于每个 C_4-free 余图 H，若 $|V(H)| < |V(G)|$，则有 $\chi_o(H) \leq \omega(H) + 1$。

- **情况 1：** $G = H \cup \{v\}$。

  设 $G = H \cup \{v\}$，其中 $deg_G(v) = 0$。由于 v 没有邻点，因此它不施加奇着色约束。因此， $\chi_o(G) = \chi_o(H)$。此外， $\omega(G) = \omega(H)$。因此，根据归纳法，$\chi_o(G) = \chi_o(H) \leq \omega(H) + 1 = \omega(G) + 1$。

- **情形2：** G **是两个** C_4**-自由余图** G_1 **和** G_2**的不交并。**

  设 $G = G_1 \cup G_2$。由于 G_1 与 G_2之间没有边，因此 $\omega(G)$ =最大值$\{\omega(G_1)\ \omega(G_2)\}$，且 $\chi_o(G)$ =最大值$\{\chi_o(G_1)\ \chi_o(G_2)\}$。根据归纳假设，$\chi_o(G_i) \leq \omega(G_i) + 1$ 对于$i \in \{1, 2\}$。因此，$\chi_o(G) \leq$最大值$\{\omega(G_1) + 1,\ \omega(G_2) + 1\} = \omega(G) + 1$。

- **情形3：** $G = \{v\} \vee H$。

  设 $G = \{v\} \vee H$，其中 v 是全邻顶点，并令 $k = \omega(H)$。于是 $\omega(G) = k + 1$。由于H 是完美的，$\chi(H) = \omega(H) = k$。令 $c:\ V(H) \to [k]$ 是 H的一个正常 k-着色。任取一个顶点 $x \in V(H)$，并定义 $f:\ V(G) \to [k+2]$，使得 $f(v) = k + 1$，$f(x) = k + 2$，且对于每个 $u \in V(H) \setminus \{x\}$，都有$f(u) = c(u)$。

  显然，f 是正常的。由于 v 是全邻顶点，且 x 是唯一被赋予颜色 $k + 2$的顶点，因此$|N(v) \cap f^{-1}(k + 2)| = 1$。此外，$v$ 是唯一被赋予颜色 $k + 1$ 的顶点，因此对于每个 $u \in V(H)$，都有$|N(u) \cap f^{-1}(k + 1)| = 1$。于是，$\forall\, u \in V(G)\ \exists\, i \in [k + 2]$ 使得$|N(u) \cap f^{-1}(i)| \equiv 1$ (模 2)。因此，f是 G的一个奇着色，且 $\chi_o(G) \leq k + 2 =\omega(G) + 1$。

  因此，上界在三种构造步骤中均成立。由归纳法，$\chi_o(G) \leq\omega(G) + 1$。结合下界可得 $\omega(G) \leq \chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$。

证明至此完成。

□

推论8.1。上述提出的界都是紧的。对于 $G = K_n$, $\chi_o(G) = \omega(G) = n$，而对于$G = P_3$, $\omega(G) = 2$ 以及 $\chi_o(G) = 3 = \omega(G) + 1$。

9 结语

本文给出了若干重要图类的奇色数界，并据此刻画了这些图类。因此，我们还解决了 Pang 等人在 [23] 中关于块仙人掌图、块图、真区间图、双凸二部图和C_4-自由余图提出的猜想。我们通过构造一个奇色数为五的二部圆图，对 Davies 等人提出的问题 5.2 [11] 作出了否定回答。对于真区间图 G，我们证明了$\chi_o(G) \leq \omega(G) + 1$。真区间图是弦图类的一个子类。研究弦图奇色数的界将是一个有趣的问题。为其他重要图类（例如距离遗传图）建立奇色数界，也是一个有前景的研究方向。

参考文献

[1] Jungho Ahn、Seonghyuk Im 和 Sang-il Oum。适当无冲突 k-着色问题和奇数 k-着色问题在二分图上是 NP 完全问题。离散应用数学，377:10–17，2025年。

[2] Dhanyamol Antony、L. Sunil Chandran、Ankit Gayen、Shirish Gosavi和Dalu Jacob。全支配、分离簇、cd-着色：算法与困难性。在José A. Soto和Andreas Wiese编辑的*LATIN 2024*：理论信息学——第*16*届拉丁美洲研讨会，*Puerto*

Varas，智利，2024年3月18日至22日，会议论文集，第一部分，计算机科学讲义第14578卷，第97–113页。施普林格，2024年。doi:10.1007/978-3-031-55598-5_7.[3] Aritra Banik、Prahlad Narasimhan Kasthurirangan和Venkatesh Raman。近簇图中的支配着色与CD着色。计算机与系统科学杂志，150:103633，2025年。URL：https://doi.org/10.1016/j.jcss.2025.103633，doi:10.1016/J.JCSS.2025.103633。[4] Sriram Bhyravarapu、Swati Kumari和I Vinod Reddy。奇着色的参数化复杂度。载于算法与离散应用数学会议，第60–72页。施普林格，2025年。[5] A. Brandstädt和V. V. Lozin。二部排列图的线性结构与团宽度。组合艺术，67:273–281，2003年。[6] Yair Caro、Mirko Petruševski和Riste Škrekovski。关于图的正常无冲突着色的注记。离散数学，346(2):113221，2023年。[7] Yair Caro、Mirko Petruševski和Riste Škrekovski。关于图的奇着色的注记。离散应用数学，321:392–401，2022年。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X22002864，doi:10.1016/j.dam.2022. 07.024。[8] Eun-Kyung Cho、Ilkyoo Choi、Hyemin Kwon和Boram Park。稀疏图和平面图的奇着色。离散数学，346(5):113305，2023年。[9] Daniel W Cranston。稀疏图的奇着色。arXiv预印本arXiv:2201.01455，2022年。[10] Daniel W Cranston、Michael Lafferty和Zi-Xia Song。关于1-平面图奇着色的一则注记。离散应用数学，330:112–117，2023年。[11] James Davies、Meike Hatzel、Kolja Knauer、Rose McCarty和Torsten Ueckerdt。具有线性邻域复杂度的图的奇着色，2025年。第2版，修订于2026年2月12日。URL：https://arxiv.org/abs/2506.08926，arXiv:2506.08926。[12] Celina M. H. de Figueiredo、João Meidanis和Célia Picinin de Mello。正常区间图识别的线性时间算法。信息处理快报，56(3):179–184，1995年。doi: 10.1016/0020-0190(95)00133-W。[13] Hubert De Fraysseix。局部补图与交错图。离散数学，33(1):29–35，1981年。[14] Jessica Enright、Lorna Stewart和Gábor Tardos。排列图和区间图的列表着色与列表同态。SIAM离散数学杂志，28(4):1675–1685，2014年。doi:10. 1137/13090465X。[15] Igor Fabrici、Borut Lužar、Simona Rindošová和Roman Soták。关于邻域的平面图正常无冲突着色与唯一最大着色。离散应用数学，324:80–92，2023年。[16] Martin Charles Golumbic。平凡完美图。离散数学，24(1):105–107，1978年。

[17] Martin Charles Golumbic. 为什么称其为平凡完美图？ Cadernos do IME – Série Informática, 47:40–45, 2022. doi:10.12957/cadinf.2022.70585.[18] Robert E Jamison and Renu Laskar. 弦图的消去序. Combinatorics and Applications, pages 192–200, 1982.[19] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. 图着色问题. Wiley-Interscience 离散数学与优化系列. John Wiley & Sons, 1995.[20] Masaki Kashima and Xuding Zhu. 外平面图的奇 4-着色. Graphs and Combina- torics, 40(6):108, 2024.[21] R. M. R. Lewis. 图着色指南——算法与应用，第二版. 施普林格, 2021.[22] Weichan Liu, Mengke Qi, and Xin Zhang. 2-边界平面图及更一般图的奇着色. 离散应用数学, 380:68–79, 2026.[23] Jing-Ru Pang, Lian-Ying Miao, and Yi-Zheng Fan. 关于图的奇着色与强奇着色. 离散数学, 349(1):114683, 2026.[24] Joydeep Patar and I Vinod Reddy. 关于图的奇着色. 载于：算法与离散应用数学会议, pages 378–391. 施普林格, 2026.[25] Mirko Petruševski and Riste Škrekovski. 满足邻域奇偶条件的着色. 离散应用数学 , 321:385–391, 2022.[26] Dinabandhu Pradhan, Vaishali Sharma, and Riste Škrekovski. 关于平面图奇着色结果的一点说明. 离散数学, 349(6):115014, 2026.