arXiv:2611.29337v1 [math.AT] 22 Nov 2026

不稳定凝实化

Shachar Carmeli、Amos Kaminski*

2026年11月24日

摘要

我们通过对固整数链所反演的映射进行局部化，在凝聚 anima 上构造了固化函子 L_{H}。带基点连通幂零凝聚 anima 是 H-局部的，当且仅当其基本群具有一个各因子均为固阿贝尔群的有限中心列，且其高阶同伦群是凝固的。对于单连通凝聚 anima，我们构造了一个自然强收敛谱序列

$$E^2_{p,q} = L_p s(\pi_q X) \Longrightarrow \pi_{p+q} L_{\mathsf{H}} X$$

其中 $L_p s$ 表示阿贝尔固化的第 p 个导出函子。



Joan Miró，《世界的诞生》（1925年）。
纽约现代艺术博物馆。

*魏茨曼科学研究所数学系 shachar.carmeli@weizmann.ac.il amos.kaminski@weizmann.ac.il

引言

凝固性由 Clausen 和 Scholze 提出，是凝缩阿贝尔群的一种非阿基米德完备性概念，其理论也已推广到凝缩谱。固化函子是 s 将凝固阿贝尔群包含到凝聚阿贝尔群中的包含映射的左伴随。它具有良好性质的左导出函子 $\mathbb{L}s$ ，并且在凝缩谱中有一个稳定对应物 [Aok24]。本文旨在为凝聚 anima 构造其不稳定对应物，并对其进行计算。我们将沿用 Bousfield 经典的同调局部化构造：广义同调理论 h_* 确定了空间在诱导同构的映射处的局部化 h_* [Bou75，定理 3。2]。其局部空间的特征是，映入这些空间会将每个 h_*-等价映为映射空间的等价。我们将同一原则应用于凝聚 anima，使用固整数链检测等价（定义2.1）。具体而言，我们将 L_{H} 定义为在固整链函子$\mathrm{Cond}(\mathrm{An})$将其映为等价的映射处，对$\mathsf{H} = \mathbb{L}s\mathbb{Z}[-]$进行局部化。

一般而言，这种局部化对同伦群的作用无法通过逐次数应用 s 来描述。这有两个原因。首先， s 不正合，因此必须考虑其导出函子 $L_p s$。例如，对于 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ，有 $s\mathbb{T} = 0$ ，但 $\mathbb{L}s\mathbb{T} \simeq \mathbb{Z}[1]$；而 $K(\mathbb{T},\ n)$ 的固化结果是 $K(\mathbb{Z},\ n+1)$。其次，同伦型不只是同伦群：这些同伦群由 Postnikov k-不变量组装而成，固化时必须保留这些粘贴映射。

然而，至少在单连通情形下，H-局部凝聚 anima 可以通过其同伦群来刻画。记 $\mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}$ 为带基点的单连通凝聚 anima，记 $\mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}$ ，凝固 为同伦群均为凝固的那些凝聚 anima。

定理 A (定理3.1)。 带基点的单连通凝聚 *anima* H-局部，当且仅当其所有同伦群都是凝固的。此外， L_{H} 保持单连通凝聚 *anima*。因此，将 L_{H} 限制在单连通凝聚 *anima* 上，得到的是到同伦群为凝固的凝聚 *anima* 子范畴中的反射。

在确定了 H-局部的单连通凝聚 anima 后，我们转而考察局部化对同伦群的影响。导出固化给出了 Eilenberg–Mac Lane 情形，并为一般的单连通凝聚 anima 提供谱序列的各项。

定理 B (命题4.2 和定理5.1)。 对于一个 1-连通凝缩谱 E有 $L_{\mathsf{H}}\Omega^\infty E \simeq \Omega^\infty L^{\mathrm{sp}}{}_{\mathsf{H}}E$，其中 $L^{\mathrm{sp}}{}_{\mathsf{H}}$ 是谱的固化 *1.8*。特别地，对于凝缩阿贝尔群 A 和 $n \geq 2$,

$$L_{\mathsf{H}}K(A,n) \simeq \Omega^\infty U_{\mathbb{Z}}\mathbb{L}s(A[n]), \qquad \pi_{n+p}L_{\mathsf{H}}K(A,n) \simeq L_p s(A) \quad (p \geq 0)$$

其中 $U_{\mathbb{Z}}$ 表示从凝缩 $H\mathbb{Z}$ 模到谱的遗忘函子。对于每个$X \in \mathrm{Cond}(\mathrm{An})_*^{\geq 2}$，都有一个自然强收敛谱序列

$$E^2_{p,q} = L_p s(\pi_q X) \Longrightarrow \pi_{p+q}L_{\mathsf{H}}X, \qquad p \geq 0, \quad q \geq 2,$$

其中 $d_r : (p,q) \mapsto (p-r, q+r-1)$，且每个总次数上都有有限滤过。

我们通过固化 Whitehead 塔来构造该谱序列。

超出单连通情形后，必须同时考虑 π_1： $B\pi_1 X$ 以及 $\pi_1 X$ 在高阶同伦群上的作用都会与固化相互影响。不过在幂零情形下，我们仍能得到一个完整的刻画：

定理 C （推论3.8）。 设 X 是一个带基点连通幂零凝聚 *anima*。那么， X是 H-局部的，当且仅当 $\pi_1(X)$ 具有带 *solid* 因子的有限中心列，且 [1] [2] 以及 $\pi_n X$ 对每个 $n \geq 2$都是凝固的。此外， $L_{\mathsf{H}}X$ 仍然是连通且幂零的。

[1]回顾一下， G的有限中心列是由正规子群构成的一个滤过 $1 = G_0 \subseteq \cdots \subseteq G_c = G$，其中每个 G_i/G_{i-1} 都包含在 G/G_{i-1}的中心中。[2]我们只要求 G 存在一个具有 solid 因子的中心列； G 的其他中心列不必满足这一性质。

对 $\pi_1 X$ 的条件不能弱化为其阿贝尔化的固性：海森堡群给出了一个反例（例 6.1）。由于离散阿贝尔群是凝固的，每个幂零常值凝聚 anima 都是 H-局部的。因此，一个具有幂零同伦类型的连通有限 CW 复形，视为凝聚集合（即静态凝聚 anima），会局部化为其同伦类型（视为一个离散但非静态的 凝聚 anima）。例如：

$$L_{\mathsf{H}}\mathbb{T} \simeq K(\mathbb{Z}, 1),$$

其中左侧是静态但非离散的，而右侧是离散但非静态的。

最后需要指出的是，带基点单连通凝固 anima 对余极限并不封闭，这与凝固谱的情形不同。

例 0.1 (带基点单连通凝固 anima 对余极限并不封闭——命题 6.2)。对于 $P = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$，楔和 $Q := K(P, 2) \vee K(P, 2)$ 具有 $\pi_3 Q = P \otimes P$，但它不是凝固的；因此，带基点、凝固且单连通的凝聚 anima 到任意带基点单连通凝聚 anima 的包含映射没有右伴随，尽管其稳定版本有右伴随。凝固范畴中的余积则具有 $\pi_3 Q = P \otimes_{\square} P$（例 6.3）。

致谢

感谢 Dustin Clausen 提出了促成本研究的想法。

资金筹措

本研究部分得到 ISF Beresheet 基金 4093/25、BSF 基金 2024766、Minerva 基金 715294 以及 Azrieli 基金会通过青年研究者奖学金提供的支持。

AI 协助致谢

数学思想和研究方向由作者提出。在作者的指导下，OpenAI 的 Chat-GPT/Codex 和 Anthropic 的 Claude 被用于协助起草和修订、文献检索，以及论证的构建与检查。这些协助包括生成部分技术证明。作者对数学内容承担全部责任。

1 背景

1.1 凝固阿贝尔群

遵循 Clausen 和 Scholze 的工作，我们首先回顾有关凝固阿贝尔群及其导出范畴的一些基本定义和事实。

定义 1.1 （凝固阿贝尔群 [Sch19，定义 5。1]）。对于前有限集 $S = \lim_{\longleftarrow i} S_i$，其中 S_i 有限，置

$$\mathbb{Z}[S]^{\square} := \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i].$$

若凝缩阿贝尔群 A 是凝固的，则典范映射 $\mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[S]^{\square}$ 对每个前有限集诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Ab)}}(\mathbb{Z}[S]^{\square}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Ab)}}(\mathbb{Z}[S], A)$$

。记 Solid(Ab) 为凝固凝缩阿贝尔群的全子范畴。

回顾 Clausen 和 Scholze 关于凝固阿贝尔群的以下结构性结果 ：

定理 引理 1.2 (Clausen–Scholze [Sch19，定理 5。8])。 以下结论适用于 Solid(Ab) .

1. Solid(Ab) 是Cond(Ab) 的阿贝尔子范畴，并且对所有极限、余极限和扩张封闭。*2.* $\mathbb{Z}$ 的多个副本的乘积构成Solid(Ab)的一族紧投射生成元。*3.* 从Solid(Ab) →Cond(Ab) 的包含映射存在一个左伴随

$$s : \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}) \longrightarrow \mathrm{Solid}(\mathrm{Ab})$$

它满足

$$s(\mathbb{Z}[S]) \simeq \mathbb{Z}[S]^{\square}.$$

特别地， $\mathbb{Z}$ 是凝固的，因此每个离散阿贝尔群也是如此，因为它是由 $\mathbb{Z}$的多个副本的直和之间的一个映射的余核。由于 s 是左伴随，它是右正合的；它不正合的情形由其左导出函子度量：

定理 1.3 (导出固化 [Sch19，定理 5。8])。 函子

$$D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab})) \longrightarrow D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$$

是全忠实的。其本质像由同调群为凝固对象的复形构成。等价地， $D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$ 由满足以下映射条件的复形 C 构成

$$R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\square}, C) \to R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], C)$$

对所有前有限 S 都是同构。包含映射

$$D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab})) \hookrightarrow D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$$

具有一个左伴随

$$\mathbb{L}s : D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})) \longrightarrow D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$$

保持连通复形，该左伴随是 s 的左导出函子。

注 1.4. 我们采用同调指标，并记作

$$L_p s(A) := H_p(\mathbb{L}s(A[0])).$$

因此，对于 $p < 0$，有 $L_0 s(A) = sA$，而对于 $p < 0$，有 $L_p s(A) = 0$ 。如果 A 是凝固的，则 $\mathbb{L}s(A[0]) \simeq A[0]$，所以对于 $p > 0$，有 $L_p s(A) = 0$。

定理 1.3 中的包含映射是 t-正合的，因此 $D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$ 从$D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$继承了一个 t-结构。

接下来我们回顾固化如何与张量积相互作用。

定理 1.5 (固张量积 [Sch19，定理 6.2 和命题 6。3])。 在 Solid(Ab) 和 $D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$ 上存在对称幺半结构，使得 s 和 $\mathbb{L}s$ 是对称幺半的，也就是说，它们的张量积满足

$$A \otimes_{\square} B = s(A \otimes B), \qquad M \otimes_{\square}^{\mathbb{L}} N = \mathbb{L}s(M \otimes^{\mathbb{L}} N).$$

此外，

$$\left(\prod_I \mathbb{Z}\right) \otimes_{\square}^{\mathbb{L}} \left(\prod_J \mathbb{Z}\right) \simeq \prod_{I \times J} \mathbb{Z}.$$

由伴随性可知， $\mathbb{L}s$ 的幺半性意味着，凝固复形对任意凝缩复形取内部映射复形后仍是凝固的，即：

引理 1.6。 若 $M \in D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ 是凝固的，且 $A \in D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ 是任意的，则内部映射复形 $R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M)$ 是凝固的。特别地，若 M 是凝实阿贝尔群，且 A 是凝缩阿贝尔群，则 $\underline{\mathrm{Hom}}(A, M)$ 是凝固的。

证明。 $\mathbb{L}s$的幺半性给出同构

$$\mathbb{L}s(\mathbb{Z}[S]^{\square} \otimes^{\mathbb{L}} A) \simeq \mathbb{Z}[S]^{\square} \otimes^{\mathbb{L}}_{\square} \mathbb{L}sA \simeq \mathbb{L}s\mathbb{Z}[S] \otimes^{\mathbb{L}}_{\square} \mathbb{L}sA \simeq \mathbb{L}s(\mathbb{Z}[S] \otimes^{\mathbb{L}} A)$$

对于每个前有限集 S。由于 M是凝固的，对于每个 B， $R\mathrm{Hom}(B, M) \simeq R\mathrm{Hom}(\mathbb{L}sB, M)$。将其应用于 $B = \mathbb{Z}[S] \otimes^{\mathbb{L}} A$，我们得到：

$$\begin{aligned} R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\square}, R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M)) &\simeq R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\square} \otimes^{\mathbb{L}} A, M) \\ &\simeq R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S] \otimes^{\mathbb{L}} A, M) \simeq R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M)). \end{aligned}$$

结论现在由定理 1.3 得出。第二个断言由第一个断言取H_0得到。

□

1.2 凝固谱

类似于导出凝缩阿贝尔群，可以定义凝固凝聚谱的概念。我们将在第 4 节中比较不稳定凝实化及其稳定对应物，因此我们在此回顾这一概念。根据同调刻画凝固复形的方式，便可得到谱的以下等价定义。

定义 1.7 （凝固谱 [Aok24，第 2 节。4]）。 对于一个前有限集 $S = \lim_{\longleftarrow i} S_i$ set

$$\mathbb{S}[S] := \Sigma^{\infty}_{+} S, \qquad \mathbb{S}[S]^{\square} := \varprojlim_{i} \mathbb{S}[S_i].$$

存在一个典范映射 $\mathbb{S}[S] \to \mathbb{S}[S]^{\square}$。

凝缩谱 E 满足以下条件，当且仅当：

1. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$，凝缩阿贝尔群 $\pi_n E$ 都是凝固的。2. 对每个前有限集 S，典范映射诱导出映射谱之间的等价

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Cond(Sp)}}(\mathbb{S}[S]^{\square}, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{map}_{\mathrm{Cond(Sp)}}(\mathbb{S}[S], E).$$

3. 谱 E 属于 Cond(Sp) 中最小的、在余极限下封闭且包含凝缩球谱的所有乘积 $\prod_I \mathbb{S}$ 的全稳定子范畴。

满足这些条件的凝缩谱称为凝固谱。我们用 Solid(Sp) $\subseteq$ Cond(Sp) 表示凝固谱构成的全子范畴。

证明。 （1）和（3）的等价性由 [Aok24，定理 2.19 和定义 2 得出。21],使用 $E \simeq \lim_{\longrightarrow m} \tau_{\geq -m} E$ 处理无界谱。根据 [Sch19，定理 5，4] $C(S, \mathbb{Z})$ 是自由阿贝尔群，因此我们可以选择一个基 $C(S, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_I \mathbb{Z}$。注意，现在典范映射

$$f : \bigoplus_{b \in I} \mathbb{S} \longrightarrow \varinjlim_{i} \mathbb{S}^{S_i}.$$

is an 是等价，因为它在同伦群上是等价的：对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们有 e

$$\begin{aligned}\pi_k\left(\varinjlim_i \mathbb{S}^{S_i}\right) &\cong \varinjlim_i (\pi_k\mathbb{S})^{S_i} \cong \varinjlim_i (\mathbb{Z}^{S_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_k\mathbb{S}) \\ &\cong \left(\varinjlim_i \mathbb{Z}^{S_i}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_k\mathbb{S} \cong C(S,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_k\mathbb{S} \\ &\cong \left(\bigoplus_{b\in I} \mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_k\mathbb{S} \cong \bigoplus_{b\in I} \pi_k\mathbb{S} \\ &\cong \pi_k\left(\bigoplus_{b\in I} \mathbb{S}\right).\end{aligned}$$

对偶化得到

$$\mathbb{S}[S]^{\square} = \varprojlim_i \mathbb{S}[S_i] \simeq \underline{\mathrm{Hom}}\left(\varinjlim_i \mathbb{S}^{S_i}, \mathbb{S}\right) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}\left(\bigoplus_I \mathbb{S}, \mathbb{S}\right) \simeq \prod_I \mathbb{S}.$$

.

现在注意到

$$H\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{S}[S]^{\square} \simeq H\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{S}} \prod_I \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} \prod_I H\mathbb{Z} \simeq H(\mathbb{Z}[S]^{\square}),$$

其中，中间映射是等价，这是由 [Aok24，引理 2。20] 得出的。因此，映射 $\mathbb{S}[S] \to \mathbb{S}[S]^{\square}$诱导出到 HA 任意移位的 A 的映射谱之间的等价，其中 A 是凝固的。Postnikov 归纳并取极限，可将相同结论推广到所有凝固同伦群的谱。这证明了 (1) 蕴含 2。

反过来，考虑满足 (2) 的谱构成的全子范畴。由 [Lur09，§5.5。4]，它是反射的。每个 $\mathbb{S}[S]^{\square}$ 都满足 (1)，因而满足 (2)，而条件 (2) 恰好说明 $\mathbb{S}[S] \to \mathbb{S}[S]^{\square}$ 是它的反射。由于 $\mathbb{S}[S]$ 在 S 极端不连通空间上的移位生成 Cond(Sp) 在余极限下的范畴，因此它们的反射在余极限下生成这个子范畴。

现在，由 [Sch19，定理 5，8]以及同伦正合序列，满足 (1) 的谱对余积和余纤维封闭，因而对所有余极限封闭。由 (1) ⇒ (2)，这些余极限已经满足 (2)。因此，满足 (1) 的谱包含这些生成元，并且在这个子范畴中对余极限封闭，由此证明 (2) ⇒(1)。

□

现在我们汇总下文将用到的 Solid(Sp) 的形式性质。

命题 1.8 （参见 [Aok24，定理 2。19]）。 范畴 Solid(Sp) 是Cond(Sp) 的一个稳定子范畴，其包含映射保持极限和余极限，并且标准的 t-结构限制在其上，心为Solid(Ab)。该包含映射有一个正合且保持连通性的左伴随 L^{sp} н 和一个右伴随 R_{sp}。

证明。 局部性刻画表明，Solid(Sp) 是 Cond(Sp) 的一个可达稳定局部化，而生成刻画则表明其包含映射保持余极限。因此，该包含映射保持极限和余极限，并由伴随函子定理可知它有左右伴随。其左伴随 L^{sp} н 由稳定性可知是正合的。

同伦群刻画表明，截断保持凝固性，因此标准的t-结构限制在其上，心为 Solid(Ab)。由于包含映射是 t-正合的，其左伴随保持连通谱。

□

该类 凝固复形在内部 Hom 下的封闭性对凝固谱也成立 a.

引理 1.9。 若 $Y \in \mathrm{Cond(Sp)}$ 是凝固的，且 $W \in$Cond(Sp)，则内部映射谱$\mathrm{Hom}(W, Y)$ 是凝固的。

证明。 由于凝固谱对极限和移位封闭，且 $\mathrm{Hom}(-, Y)$ 将余极限映为极限，因此只需处理生成元 $W = \mathbb{S}[S]$，其中 S 是前有限的，而它由以下结果可知是凝固的：[Aok24，定理 2.19(2)]。 □

2 不稳定凝实化

固整链

$$\mathsf{H} := \mathbb{L}s\mathbb{Z}[-] : \mathrm{Cond}(\mathrm{An}) \longrightarrow D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab})).$$

确定 凝聚 anima 上的一类等价。我们构造相应的局部化 n:

定义 2.1（同调固化）。 同调固化

$$L_{\mathsf{H}} : \mathrm{Cond}(\mathrm{An}) \to \mathrm{Cond}(\mathrm{An})$$

是 Cond(An) 在固整链函子 H 所逆的映射处的局部化。这类映射称为 H-等价。若对于每个 H-等价 $U \to V$，凝聚 anima $Y \in$ Cond(An) 满足 Map(V， Y) →Map(U， Y) 是一个等价，则称其为 H-局部的。因此， L_{H} 反射到全子范畴 Cond(An)$_{\mathsf{H}}$ ， 该子范畴由 H-局部凝聚 anima 构成。

我们首先验证该局部化存在，且与有限积相容。

命题 2.2。 函子 L_{H} 存在，且保持有限积。

证明。 整链函子和导出固化都是左伴随，因此

$$\mathsf{H} = \mathbb{L}s\mathbb{Z}[-] : \mathrm{Cond}(\mathrm{An}) \longrightarrow D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$$

保持余极限。根据 [Lur09，命题 5.5.4。16], 这表明，H-等价组成的类是强饱和的，并由一组态射生成。因此 [Lur09，命题 5.5.4。15] 给出了可达局部化 L_{H}。

为证明其保持乘积，首先注意到整链函子 $\mathbb{Z}[-]$ 是从笛卡儿积到导出张量积的对称幺半函子。根据定理1.5，导出固化$\mathbb{L}s$ 也是对称幺半的。因此，

$$\mathsf{H}(X \times Y) \simeq \mathbb{L}s(\mathbb{Z}[X] \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[Y]) \simeq \mathsf{H}(X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\square} \mathsf{H}(Y).$$

设 $\eta_X : X \to L_{\mathsf{H}}X$ 和 $\eta_Y : Y \to L_{\mathsf{H}}Y$ 是局部化映射。所示的等价将 H($\eta_X \times \eta_Y$) 与等价 H(η_X) 和 H(η_Y) 的张量积对应起来。因此

$$X \times Y \longrightarrow L_{\mathsf{H}}X \times L_{\mathsf{H}}Y$$

是一个 H-等价。其目标是 H-局部的，因为映射到乘积中的映射空间等于各映射空间的乘积。因此，它将 $L_{\mathsf{H}}X \times L_{\mathsf{H}}Y$表明为 $X \times Y$的局部化，从而证明

$$L_{\mathsf{H}}(X \times Y) \simeq L_{\mathsf{H}}X \times L_{\mathsf{H}}Y.$$

最后，终对象是 H-局部的，因为到它的每个映射空间都是可缩的。因此，L_{H} 保有限积。

□

我们还需要局部化的一个带基点版本，它用约化链来定义 .

定义 2.3. 对于带基点 X 且基点为 x的凝聚 anima，令

$$\widetilde{\mathbb{Z}}[X] := \mathrm{cofib}(\mathbb{Z} \xrightarrow{x_*} \mathbb{Z}[X]), \qquad \widetilde{\mathsf{H}}(X) := \mathbb{L}s\widetilde{\mathbb{Z}}[X].$$

~带基点映射 f 是带基点 H-等价，当且仅当 H(f) 是等价。带基点凝集单纯形 Y是带基点 H-局部的，当且仅当对于每个带基点 H-等价 $A \to B$，$\mathrm{Map}_*(B, Y) \to \mathrm{Map}_*(A, Y)$ 是等价。

带基点版本没有引入任何新内容：它是在底层凝聚 anima 上计算的。

命题 2.4。 带基点H-等价和带基点H-局部凝聚 *anima* 可由遗忘函子 $U\colon \mathrm{Cond}(\mathrm{An})_* \to \mathrm{Cond}(\mathrm{An})$检测。关于带基点带基点H-等价的 带基点局部化存在，并且为

$$L_{\mathsf{H}}^{\mathrm{pt}}(X, x) = (L_{\mathsf{H}}(UX), \eta_{UX} \circ x).$$

特别地，$UL^{\mathrm{pt}}{}_{\mathsf{H}} \simeq L_{\mathsf{H}}U$。

证明。 增广映射 $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ 分裂基点嵌入，从而给出自然分解

$$\mathsf{H}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{\mathsf{H}}(X).$$

因此，带基点 H-等价可由 U 检测。

若 Y 是 H-局部的，那么通过取其基点上的纤维，Y 就是带基点 H-局部的

$$\mathrm{Map}_*(A, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}(UA, UY) \longrightarrow \mathrm{Map}(*, UY).$$

反过来，对于以第二个直和项为基点的 $V_+ = V \amalg *$,

$$\widetilde{\mathsf{H}}(V_+) \simeq \mathsf{H}(V), \qquad \mathrm{Map}_*(V_+, Y) \simeq \mathrm{Map}(V, UY).$$

因此，在映射 $A_+ \to B_+$ 上检验带基点 H-局部性可知，Y 是 H-局部的。

最后，带基点单位 $(X,\ x) \to (L_{\mathsf{H}}(UX)\ \eta_{UX} \circ x)$ 是一个目标为带基点 H-局部对象的带基点 H-等价，因此它给出了所述局部化。 □

今后我们也用 L_{H} 表示 $L^{\mathrm{pt}}{}_{\mathsf{H}}$。链伴随给出了凝聚 anima 为 H-局部的首批例子。对于 $M \in D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$，它给出

$$\mathrm{Map}(X, \Omega^\infty M) \simeq \mathrm{Map}(\mathsf{H}(X), M), \qquad \mathrm{Map}_*(X, \Omega^\infty M) \simeq \mathrm{Map}(\widetilde{\mathsf{H}}(X), M), \tag{2.1}$$

右侧的映射空间取自 $D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$。第一个等价表明，底层单纯形 $\Omega^\infty M$ 是 H-局部的。特别地，对于 A 凝固且 $n \geq 0$的情形，凝聚 anima $K(A,\ n)$ 是 H-局部的。对于单连通凝聚 anima 之间的映射，H-等价可由凝聚 anima $K(A,\ n)$ 检测，其中 A 凝固且 $n \geq 2$。事实上，(2.1) 可写为

$$\mathrm{Map}_*(X, K(A, n)) \simeq \mathrm{Map}_{D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))}(\widetilde{\mathsf{H}}(X), A[n]). \tag{2.2}$$

如果这类链映射的余纤维非零，那么它是 2-连通的，且投影到其首个非零同调群可以检测到它。因此，这些检验恰好检测出被L_{H}求逆的映射。

我们的主要计算工具是以下 Bousfield–Kan 纤维引理的类比。

命题 2.5 (纤维引理)。 如果 $F \to E \to B$ 是凝聚 *anima* 的带基点纤维序列，且 B 是单连通的，那么 $L_{\mathsf{H}}F \to L_{\mathsf{H}}E \to L_{\mathsf{H}}B$ 是一个纤维序列。

证明。 这是 Bousfield–Kan 纤维引理 [BEM25，定理 4。3], 应用于函子H。其假设均成立：$\mathrm{Cond}(\mathrm{An})$ 是一个 ∞-topos，H 是一个具有连通值的对称幺半左伴随，而 $D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab}))$ 是可呈示对称幺半且稳定的，并具有左分离的 t-结构。该 t-结构与张量积相容，因为 $\mathbb{L}s$保留连通复形。该定理要求两者 B 和 $L_{\mathsf{H}}B$ 均为单连通，而第二个条件由下文的定理3.1 给出。

□

3 刻画 H-局部凝聚 anima

现在我们来确定单连通的 H-局部凝聚 anima。

回顾一下，$\mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}$在 $\mathrm{Cond(An)}_*$中对余极限封闭。它是可表的，因为它是保余极限函子 $\tau_{\leq 1}$ 在零对象上的纤维。包含映射的右伴随是单连通覆盖

$$\tau_{\geq 2}Z = \mathrm{fib}(Z \to \tau_{\leq 1}Z).$$

因此，$\mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}$中的极限是 $\mathrm{Cond(An)}_*$中极限的单连通覆盖，而 $\tau_{\geq 2}$不会改变具有 $n \geq 2$ 的 π_n。

定理 3.1. 带基点的单连通凝缩 *anima* 是H-局部的，当且仅当它的所有同伦群都是凝固的。此外，L_{H} 保留单连通凝聚 *anima*。因此，将 L_{H} 限制在单连通凝聚 *anima* 上，便是把它们反射到同伦群凝固的凝聚 *anima* 中。

证明。我们首先证明，同伦群凝固的单连通凝聚 anima 是 H-局部的。令 $Z \in \mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}{}_{,\mathrm{sol}}$。我们对 $n \geq 1$ 进行归纳，证明 $\tau_{\leq n}Z$ 是 H-局部的。

对于 $n = 1$，单连通性给出 $\tau_{\leq 1}Z \simeq *$，它是 H-局部的。现在令 $n \geq 2$ 并假设 $\tau_{\leq n-1}Z$ 是 H-局部的。Postnikov 扩张 $\tau_{\leq n}Z \to \tau_{\leq n-1}Z$ 是一个 gerbe，其带为常值带，值为 $\pi_n Z$，因为它的基底是单连通的。因此，它由一个k-不变量分类

$$\kappa_n : \tau_{\leq n-1}Z \longrightarrow K(\pi_n Z, n+1),$$

with

$$\tau_{\leq n}Z \simeq \tau_{\leq n-1}Z \times_{K(\pi_n Z, n+1)} *$$

[Lur09，第 7.2.2 节。26]。由于 $\pi_n Z$是凝固的，$K(\pi_n Z,\ n+1)$是H-局部2。归纳假设以及 HH-局部凝聚 anima 在拉回下的封闭性表明，$\tau_{\leq n}Z$ 是H-局部的。

因此，Z 的每个 Postnikov 截断都是 H-局部的。$Cond$（An）的 Postnikov 完备性以及 H-局部凝聚 anima 在极限下的封闭性现在表明，$Z \simeq \lim_n \tau_{\leq n}Z$ 是 H-局部的。

现在我们来证明反向命题，即单连通的 H-局部凝聚 anima 具有凝固的同伦群。

设 X 是一个带基点的单连通凝聚 anima，并设 η: $X \to Y$ 是它在具有凝固同伦群的带基点单连通凝聚 anima 全子范畴中的反射。我们断言，η 是一个 H-等价。

固定 $M \in D(\mathrm{Solid(Ab)})$。单连通覆盖 $c_2\Omega^\infty M$ 具有凝固同伦群：在次数 $n \geq 2$，它的同伦群为 $H_n(M)$。由于 X 和 Y 是单连通的，从其中任意一个到 $\Omega^\infty M$ 的带基点映射都会经由其单连通覆盖分解。因此，约化链伴随给出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(\widetilde{\mathsf{H}}(Y), M) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\widetilde{\mathsf{H}}(X), M) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathrm{Map}_*(Y, c_2\Omega^\infty M) & \xrightarrow{\eta^*} & \mathrm{Map}_*(X, c_2\Omega^\infty M). \end{array}$$

根据反射的定义性质，底部映射是一个等价。由于这对˜任意一个 M 都成立，米田引理表明 H(η) 是一个等价。因此，η 是一个 H-等价。

根据上一段，Y 是 H-局部的。因此，η 将 Y 表示为 $L_{\mathsf{H}}X$。特别地，$L_{\mathsf{H}}X$ 是单连通的；并且如果 X 已经是 H-局部的，那么 η 是一个等价，所以 X 具有凝固同伦群。这两个步骤给出等式

$$\mathrm{Cond(An)}_{*,\mathrm{sol}}^{\geq 2} = \mathrm{Cond(An)}_{\mathsf{H},*} \cap \mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}.$$

限制伴随。由于 L_{H} 保留具有凝固同伦群的单连通凝聚 anima，局部化伴随限制在带基点的单连通凝缩 anima 上。前述刻画表明，其局部凝聚 anima 正是具有凝固同伦群的那些对象，从而证明了所述反射。

□

我们将 L_m 记作从带基点、 m-截断且具有凝固同伦群的单连通凝聚 anima 的全子范畴到带基点的单连通凝聚 anima 范畴之包含映射的左伴随。

命题 3.2（Postnikov 构造）。 对于 $m \geq 2$,

$$\tau_{\leq m} L_{\mathsf{H}} X \simeq L_m \tau_{\leq m} X, \qquad L_{\mathsf{H}} X \simeq \lim_m L_m \tau_{\leq m} X. \tag{3.1}$$

如果 X 是（$n-1$）-连通的， $n \geq 2$，那么 $L_{\mathsf{H}} X$ 也是如此，并且 $\pi_n L_{\mathsf{H}} X \simeq s(\pi_n X)$ 。

证明。 对于一个 H-局部单连通的 m-型 Z,

$$\mathrm{Map}_*(\tau_{\leq m} L_{\mathsf{H}} X, Z) \simeq \mathrm{Map}_*(L_{\mathsf{H}} X, Z) \simeq \mathrm{Map}_*(X, Z) \simeq \mathrm{Map}_*(\tau_{\leq m} X, Z),$$

因此 $\tau_{\leq m} L_{\mathsf{H}} X$ 反射 $\tau_{\leq m} X$，这就是第一个公式。它还表明，反射后的各阶段构成一个相容的 Postnikov 塔。Postnikov 完备性随后给出第二个公式，该公式仅由截断反射构造出 $L_{\mathsf{H}} X$ 。

如果 X 是（$n-1$）-连通的，第一个公式给出对于 $n \geq 3$ 有 $\tau_{\leq n-1} L_{\mathsf{H}} X \simeq L_{n-1}(*) \simeq *$, 而对于 $n = 2$, 该断言是自动成立的。因此 $L_{\mathsf{H}} X$ 是（$n-1$）-连通的。对于凝固的 B,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\pi_n L_{\mathsf{H}} X, B) &\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}_*(K(\pi_n L_{\mathsf{H}} X, n), K(B, n)) \\
&\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}_*(\tau_{\leq n} L_{\mathsf{H}} X, K(B, n)) \\
&\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}_*(L_{\mathsf{H}} X, K(B, n)) \\
&\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}_*(X, K(B, n)) \\
&\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}_*(\tau_{\leq n} X, K(B, n)) \\
&\simeq \pi_0 \,\mathrm{Map}_*(K(\pi_n X, n), K(B, n)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(\pi_n X, B).
\end{aligned}$$

由于 $\pi_n L_{\mathsf{H}} X$ 是凝固的，这就将其与 $s(\pi_n X)$ 识别起来。 □

截断反射函子 L_m 在这个公式中至关重要： L_{H} 本身可以在次数 m之上产生同伦，因此 $L_{\mathsf{H}} \tau_{\leq m} X$ 不一定是 m-型（备注4.4）。只有它的 m-截断由 $\tau_{\leq m} X$决定：将第一个公式分别应用于 X 和 $\tau_{\leq m} X$ 可得 $\tau_{\leq m} L_{\mathsf{H}} X \simeq \tau_{\leq m} L_{\mathsf{H}} \tau_{\leq m} X$。

现在我们转而讨论非单连通的凝聚 anima，此时必须考虑基本群。设 G 是一个不一定阿贝尔的凝聚群，并记 BG 为它的分类凝聚 anima。即使 G^{ab} 是凝固的， BG 也不一定是H-局部的（例6.1）。对于幂零凝聚 anima，我们则要求基本群具有一个由固阿贝尔因子组成的有限中心列。

我们将在一般的超完备拓扑斯 $\mathcal{X}$ 中使用以下幂零性的概念；下文中该拓扑斯将是 Cond(An)。

定义 3.3（幂零对象 [Mat24，定义 A.8 和 A.10]）。 带基点的连通对象 $X \in \mathcal{X}$ 是 幂零的 , 如果 $G = \pi_1 X$ 存在有限中心列，并且对于每个 $n \geq 2$，存在一个由 G-稳定子对象

$$\pi_n X = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_r = 0$$

使得 G 在每个 M_i / M_{i+1} 上都平凡作用。长度 r 可能取决于 n。

幂零性给出一个滤过，使得 G 在连续商上平凡作用。对于 Postnikov 论证，我们还需要这些商是凝固的。

引理 3.4。 设 G 是一个作用于凝实阿贝尔群 M上的凝聚群。那么不动点群 M^G 是凝固的。若该作用是幂零的，则上不变滤过定义如下：

$$M^{(0)} = 0 \quad and \quad M^{(i+1)}/M^{(i)} = (M/M^{(i)})^G,$$

是有限的、 G-稳定的，并且穷尽 M。此外，其连续商是凝固的，且带有平凡的G-作用。

证明。 子群 M^G是映射 $M \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M)$的核，该映射将 m映至函数 $g \mapsto gm - m$，其目标由引理 1.6证明是凝固的。凝固阿贝尔群在取核、余核和扩张下封闭，因此通过归纳，所有 $M_{(i)}$以及 $M/M^{(i)}$都是凝固的。为证明 $M^{(i)}$是穷尽的，注意若 $M = M_0 \supseteq \cdots \supseteq M_r = 0$是定义 3.3中的滤过，则归纳可得 $M_{r-i} \subseteq M_{(i)}$，因此 $M^{(r)} = M$。 □

在非单连通情形中，需要考虑单值化。因此，我们在基底上的切片范畴中使用 Eilenberg–Mac Lane 对象。对于凝聚 anima Y上的阿贝尔层 M，记 $K_Y(M, m)$ 为切片范畴中位于 Y 上的相对 Eilenberg–Mac Lane 对象。讨论其 H-局部性时，我们指的是其底层凝聚 anima 的局部性。

引理 3.5。 令 Y 为一个H-局部凝聚 *anima*，并令 M 为 Y 上的阿贝尔层。假设 M 具有一个有限滤过

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

使得

$$M_i/M_{i-1} \simeq Y \times A_i$$

对于凝固凝聚阿贝尔群 A_i，其中 $Y \times A_i$ 表示将 A_i 从点拉回到 Y。则：

1. 对任意 $m \geq 0$， $K_Y(M, m)$ 都是H-局部的。*2.* 对于 $n \geq 1$， Y 上的每个 M-带 n-*gerbe* 都具有H-局部的全空间。

证明。 我们对 r 进行归纳，同时对所有 m 证明第一个断言。对于 $r = 0$，相对 Eilenberg–Mac Lane 对象是切片范畴的终对象，其全空间为 Y。

对于归纳步骤，我们现在知道该断言对 $r - 1$ 成立，并对 r 证明短正合列

$$0 \longrightarrow M_{r-1} \longrightarrow M \longrightarrow Y \times A_r \longrightarrow 0$$

给出了一个拉回

$$K_Y(M, m) \simeq (Y \times K(A_r, m)) \times_{K_Y(M_{r-1}, m+1)} Y$$

其中从 Y 到 $K_Y(M_{r-1}, m + 1)$ 的映射是典范基点截面。右侧的三个项都是 H-局部的（根据归纳假设，$K_Y(M_{r-1}, m + 1)$ 是局部的），因此它们的拉回也是 H-局部的，因为 H-局部凝聚 anima 对极限封闭 ——H- 局部凝聚 anima 的包含映射是右伴随。

对于第二个断言，应用 Y [Lur09，定理 7.2.2.26]中切片范畴上的带标记 gerbe 的分类。一个 M-带标记的 n-gerbe $E \to Y$ 由一个截面分类

$$\kappa : Y \longrightarrow K_Y(M, n + 1),$$

其全空间是该拉回

$$E \simeq Y \times_{K_Y(M, n+1)} Y,$$

利用 κ 和基点截面构造。第一个断言以及 H-局部凝聚 anima 在拉回下的闭性意味着， E 是 H-局部的。 □

现在我们给出一个超越单连通情形的局部性判据。

定理 3.6。 设 X 为带基点连通凝聚 *anima*。假设 $B\pi_1 X$ 是H-局部的，并且对于 $n \geq 2$， $\pi_1 X$ 在每个 $\pi_n X$上的作用都是幂零的。则

$$X \text{ is H-local} \iff \pi_n X \text{ is solid for every } n \geq 2.$$

[3]

证明。 置 $G = \pi_1 X$。首先假设 $\pi_n X$ 对每个 $n \geq 2$都是凝固的。由引理 3.4，每个 $\pi_n X$都具有一个有限的 G-稳定滤过，其商为凝实商，且 G 在其上平凡作用。从 H-局部凝聚 anima $\tau_{\leq 1} X \simeq BG$出发，我们归纳地证明每个 Postnikov 截断$\tau_{\leq n} X$ 都是 H-局部的。事实上，$\tau_{\leq n} X \to \tau_{\leq n-1} X$ 是一个由与 G-模 $\pi_n X$相关联的阿贝尔层作为带的 gerbe，因此引理 3.5 适用。Postnikov 完备性以及 H-局部凝聚 anima 在极限下的闭性蕴含 X 是H-局部的。

反之，如果 X 是 H-局部的，那么其万有覆盖也是如此

$$\widetilde{X} = X \times_{BG} *,$$

~因为 BG 是H-局部的。根据定理3.1， $\pi_n X \simeq \pi_n X$ 对每个 $n \geq 2$都是凝固的。 □

接下来，我们补全上述判据，并给出一个使 $B\pi_1 X$ 成为局部对象的充分条件。回顾一下， G的有限中心列是一个滤过 $1 = G_0 \subseteq \cdots \subseteq G_c = G$，其各项均为正规子群，并且每个 G_i/G_{i-1} 都包含于 G/G_{i-1} 的中心中

Cor推论 3.7。 设 G 是一个幂零凝聚群，且存在 [4] 有限中心列

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_c = G$$

使得每个商群 G_i/G_{i-1} 都是凝实阿贝尔群。那么 BG 是H-局部的。

证明。 一个中心扩张

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

定义了一个以常值阿贝尔层 A为带的 gerbe $BP \to BQ$ 。其扩张类给出一个映射

$$e : BQ \longrightarrow K(A, 2)$$

以及一个拉回

$$BP \simeq BQ \times_{K(A,2)} *.$$

因此， BQ H-局部且 A 凝固意味着 BP 是 H-局部的。现在通过对中心列进行归纳即可得到该结果。

□

综上，前述结果给出了幂零凝聚 anima 具有局部性的一个充分条件。为证明必要性，我们将其 Postnikov 塔的一个主精细化局部化。同一构造也证明了幂零性的保持。

推论 3.8. 设 X 是一个带基点连通幂零凝聚 *anima*。当且仅当 $\pi_1(X)$ 存在一个具有凝固因子的（有限）中心列，且对每个$n \geq 2$， $\pi_n X$ 都是凝固的， X 才是H-局部的。此外， $L_{\mathsf{H}} X$ 仍然是连通且幂零的。

[3]幂零长度可能取决于 n。[4]我们只要求 G 具有一个因子为凝固的中心列； G 的其他中心列不必具有这一性质。

证明。 如果 $\pi_1 X$ 存在一个具有凝固因子的有限中心列，那么 $B\pi_1 X$ 根据推H-局部。根据推论 3.7。如果高阶同伦群也都是凝固的，定理 3.6 便可推出 X 是H-局部的。

对于逆命题和最后的断言，选取 Postnikov 塔的一个主精细化[Mat24，引理 A。15]:

$$X \simeq \varprojlim_i X_i, \qquad X_0 = *, \qquad X_{i+1} \longrightarrow X_i \longrightarrow K(A_i, d_i + 1),$$

其中 $d_i \geq 1$ 且 $d_i \to \infty$。令 $Y_i = L_{\mathsf{H}} X_i$ 且 $Z_i = L_{\mathsf{H}} K(A_i,\ d_i + 1)$。命题 2.5 给出纤维序列

$$Y_{i+1} \longrightarrow Y_i \longrightarrow Z_i$$

由于 L_{H} 保持连通性， $\pi_k Z_i = 0$ 对 $k \leq d_i$。特别地， Z_i 是单连通的，且其所有同伦群都是凝固的。归纳地，每个 Y_i 都是连通且幂零的，因为幂零凝聚 anima 之间映射的连通纤维是幂零的 [Mat24，引理 A。12]。同伦正合序列表明，其高阶同伦群是凝固的。此外，它给出一个中心扩张

$$1 \longrightarrow \operatorname{coker}(\pi_2 Y_i \to \pi_2 Z_i) \longrightarrow \pi_1 Y_{i+1} \longrightarrow \pi_1 Y_i \longrightarrow 1.$$

中心性源于 Z_i的单连通性。核是凝固的，因此归纳也给出 $\pi_1 Y_i$的一个有限中心列，其因子均为凝固的。

令 $Y = \varprojlim_i Y_i$。我们希望将 Y 识别为 $L_{\mathsf{H}} X$。凝聚 anima Y 是 H-局部的，因为它是 H- 局部凝聚 anima 的极限。 $X \to X_i$ 和 $Y \to Y_i$ 都变得任意连通。普通链保持映射的连通性，而 $\mathbb{L}s$ 是正合的，并保持连通复形。因此，对于每个固定的同调次数，当 i充分大时，自然比较给出

$$H_k \mathsf{H}(X) \simeq H_k \mathsf{H}(X_i) \simeq H_k \mathsf{H}(Y_i) \simeq H_k \mathsf{H}(Y).$$

因此， $X \to Y$ 是一个 H-等价，所以 $Y \simeq L_{\mathsf{H}} X$。这证明了对连通幂零凝聚 anima 的保持；当 X 是 H-局部时，等价 $X \simeq Y$ 也证明了所需的必要性。

□

如果基本群是阿贝尔的，中心列条件就简化为群本身的固性。

推论 3.9. 设 X 是一个带基点连通幂零凝聚 *anima*，且 $\pi_1 X$ 是阿贝尔的。那么， X 是H-局部，当且仅当对每个 $n \geq 1$， $\pi_n X$ 都是凝固的。

4 与稳定固化的比较

可以将 $L_{\mathsf{H}} X$ 的计算归结为其 Eilenberg–Mac Lane 层的固化。我们通过稳定固化来识别这些层。记 $U_{\mathbb{Z}}$ 为从 D(Cond(Ab))到 Cond(Sp) 的遗忘函子，

命题 4.1. 存在一个自然等价

$$L^{\mathrm{sp}}_{\mathsf{H}} U_{\mathbb{Z}} M \simeq U_{\mathbb{Z}} \mathbb{L}sM \qquad \forall M \in D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})). \tag{4.1}$$

证明。 设 Y 为一个凝固谱。注意，如果我们证明

$$\mathrm{Map}(U_{\mathbb{Z}} \mathbb{L}sM, Y) \simeq \mathrm{Map}(U_{\mathbb{Z}} M, Y) \tag{4.2}$$

因此，由于 $U_{\mathbb{Z}} \mathbb{L}sM$ 是凝固的，这就是 L^{sp} $\mathsf{H} U_{\mathbb{Z}} M$ 的定义性质，并且我们得到 (4.1)。因此我们只需证明 (4.2)。由引理 1.9 $\mathrm{Hom}(H\underline{\mathbb{Z}}, Y)$ 是凝固的，因此属于

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Solid}(\mathrm{Sp})) \simeq D(\mathrm{Solid}(\mathrm{Ab})).$$

因此，余自由模和导出固化伴随给出

$$\mathrm{Map}(U_{\mathbb{Z}}\mathbb{L}sM, Y) \simeq \mathrm{Map}(\mathbb{L}sM, \underline{\mathrm{Hom}}(H\mathbb{Z}, Y)) \simeq \mathrm{Map}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(H\mathbb{Z}, Y)) \simeq \mathrm{Map}(U_{\mathbb{Z}}M, Y$$

这正是（4.2）。 □

为了计算 Eilenberg–Mac Lane 对象的固化，我们比较无穷循环空间上的不稳定固化与稳定固化。

命题 4.2（Eilenberg–Mac Lane 对象）。对于 $E \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Sp})^{\geq 1}$，存在自然等价

$$L_{\mathsf{H}}\Omega^\infty E \simeq \Omega^\infty L^{\mathrm{sp}}_{\mathsf{H}} E.$$

特别地，对于 $A \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ 和 $n \geq 1$,

$$L_{\mathsf{H}}K(A,n) \simeq \Omega^\infty U_{\mathbb{Z}}\mathbb{L}s(A[n]), \qquad \pi_{n+p}L_{\mathsf{H}}K(A,n) \simeq L_p s(A) \quad (p \geq 0). \tag{4.3}$$

证明。令 $X_j = \Omega^\infty \Sigma^j E$，并令 $Y_j = L_{\mathsf{H}} X_j$ 对于 $j \geq 0$。由于 X_{j+1} 是单连通的，命题 2.5 应用于 $X_j \to * \to X_{j+1}$ 得到

$$Y_j \simeq \Omega Y_{j+1},$$

与映射 $X_j \to Y_j$ 相容。对于 $j \geq 1$，凝聚 anima Y_j 是 $(j+1)$-连通的，并且具有凝固同伦群。通过对 Y_1 循环，同样的结论也适用于 $j = 0$。因此，Y_j 构成一个 1-连通的凝固谱 E'，而映射 $X_j \to Y_j$ 汇集为一个凝聚谱之间的映射 $E \to E'$。

设 N 是一个 1-连通的凝固谱。对于 $j \geq 1$，凝聚 anima $\Omega^\infty \Sigma^j N$ 是单连通的，且具有凝固同伦群，因此是 H-局部的。由于 Ω-谱之间的映射空间可通过取各分量之间映射的极限来计算，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(E', N) &\simeq \lim_{j \geq 1} \mathrm{Map}_*(Y_j, \Omega^\infty \Sigma^j N) \\ &\simeq \lim_{j \geq 1} \mathrm{Map}_*(X_j, \Omega^\infty \Sigma^j N) \\ &\simeq \mathrm{Map}(E, N). \end{aligned}$$

对于任意凝固的 N，将 N 替换为 $\tau_{\geq 1}N$，即可得到相同结论，因为 E 和 E' 都是 1-连通的。因此 $E' \simeq L^{\mathrm{sp}}{}_{\mathsf{H}} E$。取零次空间即可证明第一个断言。将（4.1）应用于 $A[n]$即可证明其余公式。 □

例4.3。设 V 是一个凝固 $\mathbb{R}$-模。则 $\mathbb{L}sV = 0$ [Aok24，例2。22]。事实上，V的恒等映射可分解为 $V \to \mathbb{R} \otimes^{\mathbb{L}} V \to V$，并且 $\mathbb{L}s(\mathbb{R} \otimes^{\mathbb{L}} V) \simeq \mathbb{L}s\mathbb{R} \otimes^{\mathbb{L}}_{\square} \mathbb{L}sV = 0$。因此$L_{\mathsf{H}}K(V, n) \simeq *$ 对所有 $n \geq 1$均成立。

备注 4.4（逐次数固化的失效）。（4.3）中的导出固化是必要的。对于 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，指数正合列和 $\mathbb{L}s\mathbb{R} = 0$ [Sch19，推论6.1(iii)] 给出 $\mathbb{L}s\mathbb{T} = \mathbb{Z}[1]$。因此，对于 $n \geq 1$,

$$s\mathbb{T} = 0 \qquad \text{while} \qquad L_{\mathsf{H}}K(\mathbb{T}, n) \simeq K(\mathbb{Z}, n+1).$$

因此，固化可以将单个 Eilenberg–Mac Lane 对象的同伦移至更高次数。$n = 1$ 的情形表明，分类凝聚 anima $B\mathbb{T}$ 局部化为 $K(\mathbb{Z}, 2)$，因此 L_{H} 可以消去非平凡的 π_1 并产生 π_2。

5 固化谱序列

现在，我们通过沿 Whitehead 塔组装 Eilenberg–Mac Lane 层，构造一个谱序列，用以计算单连通凝聚 anima 固化后的同伦群。设 $X \in \mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}$。其 Whitehead 塔的各项为 $\tau_{\geq q}X = \mathrm{fib}(X \to \tau_{\leq q-1}X)$，其中 $q \geq 2$，且。记

$$F_qX = L_{\mathsf{H}}(\tau_{\geq q}X), \qquad G_qX = \Omega^\infty \mathbb{L}s((\pi_qX)[q]).$$

Whitehead 纤维序列 $\tau_{\geq q+1}X \to \tau_{\geq q}X \to K(\pi_qX,\ q)$ 具有单连通基底。纤维引理和（4.3）将它们转化为

$$F_{q+1}X \longrightarrow F_qX \longrightarrow G_qX. \tag{5.1}$$

这是 $F_2X = L_{\mathsf{H}}X$ 的递减滤子，其中 F_qX 是 $(q-1)$-连通的，见命题 3.2。

定理 5.1 (导出同伦群)。存在一个自然强收敛的凝固阿贝尔群谱序列

$$E^2_{p,q} = L_ps(\pi_qX) \Longrightarrow \pi_{p+q}L_{\mathsf{H}}X, \qquad p \geq 0,\ q \geq 2, \qquad d_r : (p,q) \mapsto (p-r, q+r-1). \tag{5.2}$$

在 $\pi_nL_{\mathsf{H}}X$ 上诱导的滤子是有限的，具体为 $\mathrm{im}(\pi_nF_qX \to \pi_nL_{\mathsf{H}}X)$，其中 $2 \leq q \leq n$。

证明。取（5.1）的同伦正合对：

$$\cdots \longrightarrow \pi_nF_{q+1}X \longrightarrow \pi_nF_qX \longrightarrow \pi_nG_qX \longrightarrow \pi_{n-1}F_{q+1}X \longrightarrow \cdots.$$

在范围 $n \geq 2$ 内，这由阿贝尔群组成，并终止于 $\pi_1F_{q+1}X = 0$。可以在极端不连通集合上逐对象考察，因为取值函子是正合的。因此，它是凝缩阿贝尔群的一个正合对，且其中所有项都是凝固的。层群为$\pi_{p+q}G_qX = L_ps(\pi_qX)$，第一个微分为

$$\pi_{p+q}G_qX \longrightarrow \pi_{p+q-1}F_{q+1}X \longrightarrow \pi_{p+q-1}G_{q+1}X.$$

其双次数为 $(-2,1)$，这解释了初始页标记 E^2；而导出正合对给出了所述的 d_r。每一页都是阿贝尔范畴 Solid(Ab) 中凝固群的子商。

在次数 n 上，滤过从 $q=2$ 处的整个群开始，并在 $q > n$ 处消失，因为 F_qX 是 $(q-1)$-连通的。此外，离开 (p,q) 的 d_r 在 $r > p$ 处消失，而进入 (p,q) 的 d_r 在 $r > q-1$ 处消失，因此每个位置都会在有限页后稳定。这给出强收敛，只有 $2 \leq q \leq n$ 对 $\pi_nL_{\mathsf{H}}X$ 有贡献。 □

注记 5.2。在线 $p=0$ 上，边缘映射 $s(\pi_nX) \simeq \pi_nF_nX \to \pi_nL_{\mathsf{H}}X$ 是 π_n 经由 $s(\pi_nX)$ 对单位进行的分解；这一分解存在是因为 $\pi_nL_{\mathsf{H}}X$ 是凝固的。因此，其核与余核衡量了固化未能逐次数作用的程度。

谱序列还给出了一个判据，用于判断一个映射经固化后是否成为等价。

推论 5.3 (比较)。设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathrm{Cond(An)}_*^{\geq 2}$ 中的一个映射，且对每个 $q \geq 2$，$\mathbb{L}s(\pi_qf)$ 都是等价。那么 $L_{\mathsf{H}}f$ 是等价。特别地，若对每个 q 都有 $\mathbb{L}s(\pi_qX) = 0$，则 $L_{\mathsf{H}}X \simeq *$。

证明。该映射在 E^2上诱导出一个同构，因此在 E^∞上也是如此。由于滤子的有限性，对于每个 n，$\pi_n(L_{\mathsf{H}}f)$都是一个同构。 □

例如，根据 4.3，$L_{\mathsf{H}}X \simeq *$ 只要 X 的所有同伦群都是凝聚的$\mathbb{R}$-模。

—

与稳定固化的比较给出了一个适用于有下界凝聚谱的相应谱序列。

命题5.4 (谱)。 对于 $E \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Sp})^{\geq a}$，存在一个自然强收敛谱序列

$$E^2_{p,q} = L_p s(\pi_q E) \Longrightarrow \pi_{p+q} L^{\mathrm{sp}}_{\mathsf{H}} E, \qquad p \geq 0, \quad q \geq a.$$

其微分为 (5.2)，并且每个次数上都有有限滤过。

证明。 由带基点空间版本应用 Ω^∞ 即得。 □

6 一些反例

设 $P = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$。尽管 P 是凝固的，但它通常意义下的凝聚张量平方 $P \otimes P$ 并非如此。事实上，固化会将其替换为完备张量积（定理1.5）：

$$s(P \otimes P) = P \otimes_{\square} P = \prod_{\mathbb{N}^2} \mathbb{Z}. \tag{6.1}$$

点上的求值保余极限，并将 $\mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T\prime] = \mathbb{Z}[T \times T']$ 送到相应的自由群，因此它计算普通张量积：$(P \otimes P)(*) = P(*) \otimes P(*)$。在这些截面上，单位映射将纯张量的有限和送到有限秩整数矩阵，因此无法得到无限恒等矩阵。

例 6.1 （凝固化阿贝尔化并不蕴含局部性）。 令 $P = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 和 $C = P \otimes P$。考虑凝聚海森堡群

$$H = P \times P \times C, \qquad (a,b,c)(a',b',c') = (a+a',\, b+b',\, c+c'+a \otimes b').$$

它属于一个中心扩张

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow H \longrightarrow P \times P \longrightarrow 1.$$

由于

$$[(a,0,0),(0,b,0)] = (0,0,a \otimes b),$$

其换位子群为 C，因而 $H^{\mathrm{ab}} \simeq P \times P$ 是凝固的。然而，BH 并非 H-局部。事实上，C 并非凝固的，正如命题 6.2的证明所示。纤维序列

$$BC \longrightarrow BH \longrightarrow B(P \times P)$$

具有 H-局部基底。若 BH 是 H-局部的，那么 H-局部凝聚 anima 对拉回封闭，这将推出 BC 是 H-局部的。根据备注 4.2，这将迫使 C 是凝固的，矛盾。

$P \otimes P$ 固性的同样失效也出现在楔和的同伦中。

命题 6.2。包含映射

$$\mathrm{Cond}(\mathrm{An})^{\geq 2}_{*,\mathrm{sol}} \hookrightarrow \mathrm{Cond}(\mathrm{An})^{\geq 2}_{*}$$

没有右伴随。事实上，它不保持余积。

证明。令 $W = K(P,2) \vee K(P,2)$，可以看出

$$\pi_3 W = P \otimes P.$$

因此，固的单连通凝聚动画的楔和未必具有凝固同伦群。在 Cond(An) 中，$K(P,\ 2)$ 的两个副本的余积是 $L_{\mathsf{H}}W$，而 $W \to L_{\mathsf{H}}W$ 不是等价。因此，包含映射不保余积，也没有右伴随。 □

We 现在可以比较这个楔和的同伦群与其固化后的同伦群 .

例 6.3. 由于 P是凝固的，因此对 $p>0$， $L_p s(P\oplus P)=0$，所以

$$\pi_2 L_{\mathsf{H}} W \simeq P\oplus P, \qquad \pi_3 L_{\mathsf{H}} W \simeq s(P\otimes P)\simeq P\otimes_{\square} P.$$

因此，固凝聚 anima 的余积会呈现完备张量积。

注 6.4. 这是一个不稳定现象：根据命题 1.8，凝固谱的包含映射有左右伴随。

参考文献

[Aok24] K. Aoki. 通过固化得到（半）拓扑 K-理论，2024。网址： https://arxiv.org/abs/2409.01462v1, arXiv:2409.01462v1.[BEM25] T. Bachmann、A. Engelmann 和 K. Mattis。广义空间的单子分解，2025。网址： https://arxiv.org/abs/2511.07064v1, arXiv:2511.07064v1.[Bou75] A. K. Bousfield. 关于同调的空间局部化。*Topology*, 14(2):133–150，1975。 doi:10.1016/0040-9383(75)90023-3.[Lur09] Jacob Lurie。高阶拓扑斯理论 *(AM-170)*。Annals of Mathematics Studies。普林斯顿大学出版社，2009。网址： https://books.google.co.il/books?id=CTe68E8wK4QC.[Mat24] Klaus Mattis。动机同伦理论中的不稳定 p-完备化，2024。网址：https://arxiv.org/abs/2401.17848, arXiv:2401.17848.[Sch19] P. Scholze。《凝聚数学讲义》，2019。与 D. Clausen 合作。网址： https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf。