arXiv:2611.29347v1 [math.RA] 22 Nov 2026

凝聚环上的 Gorenstein 单射性与 Ding 单射性

Guocheng Dai 和 Jiangsheng Hu

摘要

对于交换 Ding–Chen 环 B，我们证明，在 $R = B[x,y]/(x,\ y)^2$ 上，Gorenstein 内射性与 Ding 内射性重合，当且仅当内射 B-模生成 B 的无界导出范畴。我们构造了一个交换冯·诺依曼正则环 B，其无界导出范畴不能由其纯内射对象生成。对于这个 B，相干环 R 存在一个强 Gorenstein 单射模 G，但它不是 Ding 内射模。对于 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，$G_{\mathfrak{p}}$ 这个 $R_{\mathfrak{p}}$-模的 Gorenstein 内射维数是无限的。环 R 可以取为基数为 $\aleph_\omega$ 的环；在 Gorenstein 内射性与 Ding 内射性不一致的相干环中，这是基数最小的。

关键词：Gorenstein 内射模；Ding 内射模；相干环；周期复形；导出范畴；纯内射对象*2020* 年数学主题分类：16E05；16E30；18G25；18G80

1. 引言

Gorenstein 内射性是通过内射模的正合复形来定义的；这些复形在从内射模取 Hom 后仍保持正合（见 [6]）。Ding 内射要求对所有绝对纯模都满足相同条件（见 [10, 第 491] 页和 [7, 定义 3.2]）。用 Inj(R)、$\mathcal{GI}(R)$ 和 $\mathcal{DI}(R)$ 分别表示左 R-模中内射模、Gorenstein 内射模和 Ding 内射模组成的类。于是 Inj(R) $\subseteq \mathcal{DI}(R) \subseteq \mathcal{GI}(R)$；而在左诺特环上，$\mathcal{DI}(R) = \mathcal{GI}(R)$。第 2 节回顾这些定义和基本事实。

Gillespie 曾提出，在 Ding–Chen 环上是否有 $\mathcal{DI}(R) = \mathcal{GI}(R)$（见 [7, 第 3] 节）；在这类环上，这两个类相同（见 [8, 推论 4.3]）。Wang、Liu 和 Yang 构造了一个非相干环上的 Gorenstein 内射模，它不是 Gorenstein AC-单射模（见[15, 第 2.3 节和例 24–25]）。在相干环上，Gorenstein AC-单射性与 Ding 内射性一致，但他们的例子不属于这种情形。本文探讨的问题是：相干环上的每个 Gorenstein 内射模是否都必定是 Ding 内射模。

我们针对平方零扩张 $R = B[x,y]/(x,\ y)^2$, 研究这个问题，其中 B 是一个交换 Ding–Chen 环。对于域 k，Zhang 构造了 $k[x,y]/(x,\ y)^2$ 上的一个无环单周期自由复形（见 [16, 引理 2.5]）。我们使用内射 R-模 $\mathrm{Hom}_B(R,\ E)$，其中 E 在 B上是内射模，来改造这一构造。该构造从一个非正合复形开始

U 由内射 B-模组成，并且对于每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E,U)$ 都是正合的。若内射 B-模生成无界导出范畴 $\mathbf{D}(B)$，则这样的复形不可能存在。这引出了对 $\mathcal{DI}(R)$ =$\mathcal{GI}(R)$ 的如下刻画。对于 $\mathbf{D}(B)$ 中对象的一个类 $\mathcal{S}$，记其生成的局部化子范畴为 Loc($\mathcal{S}$)。

定理 1.1。 **</style}设 为交换 Ding–Chen 环，并令 (**$x, y)^2$。以下条件等价:

(i) $\mathcal{DI}(R) = \mathcal{GI}(R)$。(ii) 对于每个内射 B模 E，若$\mathrm{Hom}_B(E, U)$ 正合，则每个由内射 B模构成的复形 U 都是正合的。(iii) $\mathrm{Loc}(\mathrm{Inj}(B))$ $=\mathbf{D}(B)$。

条件（ii）表明，当 E 为内射时，函子 $\mathrm{Hom}_B(E, –)$ 可以检测由内射 B-模构成的复形的正合性。条件（iii）将这一性质置于由内射模生成的研究中（见 [13, 第 3] 节）。通过构造一个使条件（ii）失效的交换冯·诺伊曼正则代数，我们得到两个应用。

第一个应用涉及三角范畴意义下由纯内射对象生成（见 [4, 第 2.3] 节）。Breaz、Hrbek 和 Modoi 讨论了这些对象是否生成每个交换环的导出范畴。在冯·诺伊曼正则环上，这等价于由内射模生成（见 [4, 注 6.12]）。

推论 1.2。 对于任意域 k，存在一个交换冯·诺依曼正则 k-代数 B，其 k-维数为 $\aleph_\omega$，使得 $\mathrm{Loc}(\mathcal{P})$ $\neq\mathbf{D}(B)$，其中 $\mathcal{P}$ 是$\mathbf{D}(B)$的纯内射对象类。

推论 1.2 对上文讨论的生成问题给出了否定的回答。对于可数的k，环 B 在导出范畴不能由纯内射对象生成的交换环中具有最小基数 $\aleph_\omega$。下界由 [4,备注 6.11(iii)]得出。

为陈述第二个应用，记 $\Lambda_k := k[x, y]/(x,\ y)^2$。对于强戈伦斯坦内射模，定义复形可以选为一周期的（见 [3]）。

推论 1.3。 对于任意域 k，存在一个交换相干 k-代数 R，其 k-维数为 $\aleph_\omega$，以及一个不是 ***Ding*** 内射的强戈伦斯坦内射 R-模 G。此外，有 $\mathcal{DI}(R)$ $=\mathrm{Inj}(R)$。对于每个素理想 $\mathfrak{p}$，都有 $R_\mathfrak{p} \cong \Lambda_k$ 且$\mathrm{Gid}_{R_\mathfrak{p}} G_\mathfrak{p} = \infty$。

推论 1.3 表明，仅有相干性不足以使 Gorenstein 内射性与丁格内射性相一致。此例中的所有局部环都是诺特环，因此这两个模类在每个这样的环上都相同，尽管 $G_\mathfrak{p}$ 不属于任一模类。Couchot 的例子还表明，Gorenstein 内射性在对乘法集合进行局部化时可能失效（见 [5, 例1]）；在我们的例子中，对 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，$G_\mathfrak{p}$ 这个 $R_\mathfrak{p}$-模的 Gorenstein 内射维数都是无限的。

对于可数的 k，推论 1.3 中的环具有最小的可能基数 $\aleph_\omega$，在所有相干环中，在该环上 Gorenstein 单射性与 Ding 单射性存在差异。事实上，在基数至多为 $\aleph_n$ 的左相干环上，每个绝对纯模的内射维数至多为 $n + 1$，对于 $n < \omega$（见 [12, 命题 2.3]）。因此，维数平移证明了$\mathcal{GI}(R) = \mathcal{DI}(R)$ 对于每个基数小于 $\aleph_\omega$的左相干环 R 均成立。

这两个应用使用相同的构造。我们构造一个交换 von Neumann 正则 k-代数 B，使得对于每个内射 B-模 E和每个 $m \geq 0$，$\mathrm{Ext}_B^m(E, B) = 0$。$B$ 在非负次数中的一个内射分解 U 具有 $H^0(U) = B \neq 0$，而对于每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E, U)$ 是正合的。因此，U不满足定理 1.1 的条件（ii）。

本文结构如下。第 2 节回顾证明中用到的主要定义和基本事实。第 3 节证明定理 1.1。第 4 节包含两个应用：第 4.1 小节构造两个应用中使用的环，并证明推论 1.2；第 4.2 小节证明推论 1.3，并给出一个同时具有两个严格包含关系的例子 $\mathrm{Inj} \subsetneq \mathcal{DI} \subsetneq \mathcal{GI}$。

2. 预备知识

所有环均为非零含幺结合环。除非另有说明，模均为左模。复形均为上链复形，且可以无界；将模视为集中在零次的复形。我们用 Z^nJ 和 H^nJ 表示复形 J 的圈和上同调。对于复形 P 和 U，我们用 $\mathrm{Hom}_R(P, U)$ 表示阿贝尔群的 Hom 复形，其中 $\mathrm{Hom}_R(P, U)^n = \prod_{a\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(P^a, U^{a+n})$，微分为 $d(f) = d_U f - (-1)^n f d_P$，其中$f$ 的次数为 n。我们分别用 Gid、Did 和 FP-id 表示 Gorenstein 内射维数、Ding 内射维数和 FP-内射维数。

2.1. 戈伦斯坦内射模与丁格内射模。若对每个有限表示左 R-模 F，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(F, N) = 0$，则左 R-模 N 称为绝对纯模，或 FP-内射模（见 [7, 定义 3.1]）。若一个内射 R-模的正合复形 I 满足：对每个内射 R-模 E，$\mathrm{Hom}_R(E, I)$都是正合的，则称其为全正合复形；若对每个绝对纯 R-模 A，$\mathrm{Hom}_R(A, I)$都是正合的，则称其为 Ding 无环复形。若 $M = Z^0 I$，则模 M 称为 Gorenstein 内射模；这样的复形 I称为 M 的完全内射分解（见 [6]）。Ding 无环复形的一个圈称为 Ding 内射模（见 [10, 第 491] 页及 [7, 定义 3.2]）。若一个复形在每个次数上具有相同的模和微分，则称其为一周期复形。若一个模具有一周期完全内射分解，则称其为强戈伦斯坦内射模（见[3]）。由这些定义可得，包含关系 $\mathrm{Inj}(R) \subseteq \mathcal{DI}(R) \subseteq \mathcal{GI}(R)$成立。在左诺特环上，绝对纯模都是内射模，因此 $\mathcal{DI}(R) = \mathcal{GI}(R)$。

对于 Ding 无环复形 J，对每个 FP-内射维数有限的 R-模 L，复形 $\mathrm{Hom}_R(L, J)$ 都是正合的。事实上，若 $\text{FP-id}_R L = d$，则通过对有限表示模进行维数平移可知，L 在内射分解中的第 d 个余轮换是绝对纯的。沿着分解归纳即可证明这一结论，因为对 J的每一项取 Hom 都会将短正合列映为正合列。

如果一个环是双侧相干的，且两侧的自FP-内射维数都有限，则称其为 *Ding–Chen* 环（见 [7, 定义 4.1]）。根据 [8, 推论 4.3],，Ding–Chen 环上的每个内射模正合复形都是 Ding 无环的。

对于一类 $\mathcal{C}$ R-模，我们用 ${}^{\perp}\mathcal{C}$ 表示满足以下条件的模 L：对每个 $C \in \mathcal{C}$，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(L, C) = 0$。

2.2. **导出范畴**。 我们用 $\mathbf{D}(R)$ 表示左 R-模的无界导出范畴。若对每个正合复形 A, $\mathrm{Hom}_R(A, I)$ 都是正合的，则称复形 I 为K-内射 （见 [14]）。对于 $\mathbf{D}(R)$ 中一类对象 $\mathcal{S}$, $\mathrm{Loc}(\mathcal{S})$ 表示包含 $\mathcal{S}$ 且对任意余积封闭的最小满三角子范畴。其右正交由满足以下条件的对象 X 组成：对所有 $S \in \mathcal{S}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(R)}(S, X[n]) = 0$ 。对于阿贝尔群 M, 记 $M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。

态射 $f\colon X \to Y$在 $\mathbf{D}(R)$ 中称为纯单同态 , 如果对于每个紧对象 C, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(R)}(C, f)$ 都是内射的。对象 P 称为纯内射 , 如果每个纯单同态 $P \to Y$都分裂。我们使用这种三角范畴中的纯性概念（见 [4, 第 2 节。3]）。

2.3. 平方零扩张。记 $\Lambda_k = k[x, y]/(x, y)^2$ 为域 k。对于交换环 B, 置 $R = B[x, y]/(x, y)^2$, 并记 $\mathfrak{r} = (x, y)$, $\mathrm{Cof}_B(L) = \mathrm{Hom}_B(R, L)$ $F_B = \mathrm{Cof}_B(B)$。对于环映射 $B \to A$ 和一个 A-模 N, 记号 N_B 表示将标量限制到B; 同样的约定逐次适用于复形。通过商映射 $R \to B = R/\mathfrak{r}$, 将一个 B-模膨胀为 R。$\mathrm{Cof}_B(L)$ 上的 R-作用定义为 $(rf)(s) = f(sr)$。函子 Cof_B 是标量限制的右伴随，并保持内射对象。它是正合的，因为 R 在 B上是自由的。如果 B 是域 k上的代数，那么 $R = B \otimes_k \Lambda_k$ 和$F_B \cong B \otimes_k \mathrm{Hom}_k(\Lambda_k, k)$。这里 Λ_k 是如下箭图的路径代数：该箭图有一个顶点和两条环，并模去所有长度为二的路径。

利用 R 的 B-基 $1, x, y$，我们将 $\mathrm{Cof}_B(L)$ 识别为 L^3。对于对偶基 $\lambda_0, \lambda_x, \lambda_y$, x 和 y 的作用分别为 $x(a, b, c) = (b, 0, 0)$ $y(a, b, c) = (c, 0, 0)$。特别地，作为 B-模， $R/\mathfrak{r} \cong B$ 和 $\mathfrak{r} \cong B^2$, 而 $F_B/\mathfrak{r}F_B \cong B^2$ 和 $\mathfrak{r}F_B \cong B$。

引理 2.1. 设 B 是交换环，令 $R = B[x, y]/(x, y)^2,$，并记 $F_B = \mathrm{Hom}_B(R, B)$。 R-模 F_B 是有限表示的，且 FP-内射维数$_R F_B$ = FP-内射维数$_B B$。若 B 是相干的，则 R 也是相干的。若 B 是冯·诺依曼正则的，则 F_B 是绝对纯的。在此情形下，对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$ 和 $k(\mathfrak{q}) = B/\mathfrak{q}$，有

$$R_{\mathfrak{p}} \cong \Lambda_{k(\mathfrak{q})},\ (F_B)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Hom}_{k(\mathfrak{q})}(\Lambda_{k(\mathfrak{q})}, k(\mathfrak{q})).$$

特别地，$(F_B)_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$上是内射的。

证明。 假设 B 是相干的。环 R 是 B上的有限自由模。因此，有限生成自由 R-模之间的映射的核在 B上有限生成，进而在 R上有限生成。这就证明了相干性。对于任意的 B，坐标作用给出了有限表示

$$R^3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} y & 0 & x \\ 0 & x & -y \end{smallmatrix}\right)} R^2 \longrightarrow F_B \longrightarrow 0.$$

映射 $R^2 \to F_B$ 将标准基映射到 λ_x, λ_y。事实上，其核由 $(y, 0)$, $(0, x)$, $(x, -y)$ 生成。函子 Cof_B 是正合的，并保持内射对象。根据伴随，对于左 R-模 M，我们有 $\mathrm{Ext}^q_R(M, F_B) \cong \mathrm{Ext}^q_B(M_B, B)$。限制将有限表示$R$-模映为有限表示 B-模。反过来，对于有限表示 B-模 L, 诱导模 $R \otimes_B L$ 是 R 上的有限表示模，且限制后为 L^3。这就证明了 FP-内射维数相等。

现在假设 B 是冯·诺依曼正则的。它的有限表示模都是投射模，因此 F_B 是绝对纯的。 R 的每个素理想都包含 $\mathfrak{r}$。由于 B 是交换冯·诺依曼正则的， $B_{\mathfrak{q}} \cong B/\mathfrak{q}$。对三个基元素及 x 和 y 的作用进行局部化，即可得到文中展示的两个同一关系。根据同一伴随，域上的有限维代数的向量空间对偶是内射的。□

3. 定理 1.1 的证明

本节中，令 B 为交换环，并设 $R = B[x, y]/(x,\ y)^2$。我们首先比较由内射 R-模构成的复形 J 的上同调与 $\mathrm{Hom}_R(B,\ J)$ 的上同调。然后我们改写 [16, 引理 2.5]，构造一个由内射 R-模构成的周期复形，从而完成定理 1.1 的证明。

接下来，我们描述内射 R-模及其相关的两个短正合列。对于一个 R-模 N，记 $S(N) = \{z \in N\colon\ xz = yz = 0\}$。在 1 处求值可将 $\mathrm{Hom}_R(B,\ N)$ 与 $S(N)$ 等同。对于复形， S 逐次应用。

引理 3.1. </style}每个内射 -模都具有形式 $\mathbf{Cof}_B(E)$，其中 B-模 E 是内射模。若 J 是由内射 R-模构成的复形，且 $U = S(J)$，则 U 的各项都是内射 B-模，并且存在一个 B-模复形的短正合列，且在每个次数上都分裂，

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow J_B \longrightarrow U \oplus U \longrightarrow 0.$$

对于每个 B-模 L，令 $C_L = \mathrm{Hom}_B(L, U)$ 以及 $Y_L = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Cof}_B(L)\ J)$。此外，还有一个由 B-模复形构成的短正合列，且在每个次数上均分裂，

$$0 \longrightarrow C_L \oplus C_L \longrightarrow Y_L \longrightarrow C_L \longrightarrow 0.$$

将 $\mathrm{Hom}_B(L, -)$ 作用于第一个序列后，这些序列的连接映射分别为

$$(v_x, v_y) : H^n(C_L)^2 \longrightarrow H^{n+1}(C_L),\ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} : H^n(C_L) \longrightarrow H^{n+1}(C_L)^2,$$

对 同样的两个映射 v_x, v_y。若 U 可缩，则 J 在 R 上可缩 .

证明。对于一个内射的 R-模 Q，由沿商映射 $R \to B$ 的标量限制伴随可知，模 $S(Q)$ 在 B 上是内射的。子模 $S(Q)$ 是本质的：任何未被 $\mathfrak{r}$ 消灭的元素都会生成一个非零且被 $\mathfrak{r}$ 消灭的元素，因为 $\mathfrak{r}^2 = 0$。内射模 $\mathbf{Cof}_B(S(Q))$ 中 $S(Q)$ 的副本也同样如此。根据内射包的唯一性，存在一个同构 $Q \cong \mathbf{Cof}_B(S(Q))$，它固定该子模。

在每个次数中选择这些同一。坐标作用表明，每个 R-线性微分 J 都具有如下形式

$$d_J^n = \begin{pmatrix} u^n & v_x^n & v_y^n \\ 0 & u^n & 0 \\ 0 & 0 & u^n \end{pmatrix},\ u^{n+1}v_i^n + v_i^{n+1}u^n = 0.$$

这里 u 是 U的微分。第一个坐标的包含映射以及到后两个坐标的投影给出了第一个短正合列。一个 R-线性映射 $\mathrm{Cof}_B(L) \to \mathrm{Cof}_B(U^n)$具有相同的上三角形式，由三个映射 α、β_x、β_y确定。Hom 微分为

$$(\alpha, \beta_x, \beta_y) \longmapsto (u\alpha, u\beta_x + v_x\alpha, u\beta_y + v_y\alpha).$$

包含两个 β-坐标并投影到 α，得到第二个短正合序列。这两个序列的连接映射分别是所述的行和列。

最后，如果 h 收缩 U，令 $a_i^n = h^{n+1}v_i^n$。则 $v_i^n = u^n a_i^n - a_i^{n+1}u^n$。坐标变换 $(a, b, c) \mapsto (a + a_x^n b + a_y^n c, b, c)$ 将 J同构于 $\mathrm{Cof}_B(U)$，后者被 $\mathrm{Cof}_B(h)$ 收缩。□

命题 3.2。设 J 是一个由内射 R-模组成的正合复形，并记 $U = S(J)$。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，存在一个 R-模同构 $H^n \mathrm{Hom}_R(F_B, J) \cong H^{n-1}(U)^3$,，其中右侧的作用通过 $R \to B$因子化。若 B 是冯·诺依曼正则的，则 J 是 ***Ding*** 无环的，当且仅当 U 是正合的。这些条件等价于 J的可缩性，并且$\mathcal{DI}(R)$ =内射(R)。

证明。利用引理 3.1 中的 $L = B$，写作 $V^n = H^n(U)$。由于 J_B 正合，每个行映射$(V^{n-1})^2 \to V^n$ 都是同构，因此每个列映射都是单射。引理 3.1 中第二个短正合列的上同调序列将 $H^n \mathrm{Hom}_R(F_B, J)$识别为 $V^{n-1} \to (V^n)^2$的余核。在由行同构的逆映射给出的坐标下，此列映射将 z 映为$(z, 0, 0, z)$，属于$(V^{n-1})^4$。其余核通过映射$(V^{n-1})^3$ 中的$(a, b, c, d) \mapsto (b, c, d - a)$得到识别。来自两个 β-坐标的映射，其像包含于 $S(J)$中，而 x 和 y 在其上均作用为零。因此，当 R 通过 $R \to B$作用于其右端时，此同构是 R-线性的。由于每个次数上的行映射都是同构，对于某个 n，若$H^n \mathrm{Hom}_R(F_B, J)$为零，则必有 U正合。

现在假设 B 是冯·诺依曼正则的。由引理 2.1，模 F_B 是绝对纯的。因此，若 J 是 Ding 无环的，则 U 是正合的。反过来，若 U 是正合的，由于每个 B-模都是绝对纯的，根据 [2, 定理 4.1(1)], ，它是可缩的。因此，根据引理 3.1， J 是可缩的。可缩复形是 Ding 无环的，所以这些条件等价。特别地，每个 Ding 内射模都是内射模。根据定义，反向包含也成立，因此 $\mathcal{DI}(R) =$ 内射模类(R)。□

引理 3.3。设 B 是交换 ***Ding–Chen*** 环，设 $R = B[x, y]/(x, y)^2$,，并设 J 是由内射 R-模组成的正合复形。那么， J 是 ***Ding*** 无环的，当且仅当 $S(J)$ 是正合的。

证明。记 $U = S(J)$。若 J是 Ding 无环的，则 $\mathrm{Hom}_R(F_B, J)$是正合的：由引理 2.1， F_B在 R 上的 FP-内射维数有限，因此第 2.1 小节中的维数平移论证适用。由命题 3.2， U 是正合的。

反过来，假设 U 是正合的。设 A 是 R 上的绝对纯模，并令 $L = S(A)$。由引理 2.1，环 $R = B \ltimes B^2$ 是相干的，且 B^2 在 B上有限表示。由 [9,引理 3.1(1)]， L是 B 上的绝对纯模，并且存在一个正合列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow A \xrightarrow{a \mapsto (xa, ya)} L^2 \longrightarrow 0,$$

其中端项是从 B膨胀得到的。复形 U 是正合的，其 B项均为内射。由于 L是绝对纯的，根据 [8,推论 4.3]，$\mathrm{Hom}_B(L,\ U)$是正合的。将 $\mathrm{Hom}_R(-,\ J)$作用于所示正合列，可得 $\mathrm{Hom}_R(A,\ J)$的正合性：端项上的复形分别同构于 $\mathrm{Hom}_B(L,\ U)$及其与自身的直和。□

注记 3.4。当 B 是 Ding–Chen 时，命题 3.2 和引理 3.3 表明，R-内射模的正合复形中的圈 G 是 Ding 内射，当且仅当对某个 $m \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}^m_R(F_B, G) = 0$。

下面的构造通过逆否命题证明定理 1.1 中的 (i)⇒(ii)，并给出第 4.2 小节中使用的 Ext 类。

命题 3.5。设 B 是一个交换环，令 $R = B[x,y]/(x,y)^2$, ，并记 $F_B = \mathrm{Hom}_B(R, B)$。假设 U是一个由 B-内射模组成的复形，并且对每个 B-内射模 E，$\mathrm{Hom}_B(E, U)$ 都是正合的。存在一个强戈伦斯坦内射 R-模 G以及一个正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

其中 I 是内射的，并且对每个 R-内射模 Q，$\mathrm{Ext}^1_R(Q, G) = 0$ 。对于这个 G，存在一个 B-线性单射 $H^0(U) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(F_B, G)$，其像被 (x, y) 消去。若 FP-内射维数$_B\, B < \infty$ 且 $H^0(U) \neq 0$，则 G 不是 Ding 内射。更确切地，令 $W = \prod_{j\in\mathbb{Z},\, r\geq 0} H^j(U)$。存在 R-模同构 $\mathrm{Ext}^n_R(F_B, G) \cong W^3 (n \geq 1)$，其中 R通过 $R \to B$作用于 W^3 。在 $n = 1$对应的同构下，该单射是 $H^0(U)$-坐标到第一份 W 中的包含映射，且 $r = 0$位于其中。

证明。我们首先构造一个由内射 R-模组成的正合一周期复形。整数指标记录 U 的次数，而额外的可数份副本使我们能够将 M^2 与 M 识别。定义

$$M = \prod_{n\in\mathbb{Z},\ r\geq 0} U^n,\ (um)_{n,r} = d_U^{n-1} m_{n-1,r},\ (\tau m)_{n,r} = (-1)^n m_{n,r}.$$

定义 s_x，s_y：$M \to M$，方法是分别将 $m \in M$ 的坐标插入第二个指标的偶数位置和奇数位置：

$$\begin{aligned} (s_x m)_{n,2r} &= m_{n,r}, \quad (s_x m)_{n,2r+1} = 0, \\ (s_y m)_{n,2r} &= 0, \qquad (s_y m)_{n,2r+1} = m_{n,r}. \end{aligned}$$

令 $v_x = \tau s_x$和 $v_y = \tau s_y$。这些符号确保 u与 v_x和 v_y反对易。行映射 $(v_x,\ v_y)$：$M^2 \to M$是一个同构，其逆映射 $(p_x,\ p_y)$ 可通过应用 τ并提取偶坐标和奇坐标得到。我们有

$$\begin{gathered} u^2 = 0,\ uv_i + v_i u = 0,\ p_i u = -u p_i, \\ p_i v_j = \delta_{ij},\ v_x p_x + v_y p_y = 1. \end{gathered}$$

模 M是内射的，因为它是内射 B-模的直积，因此 $I = \mathrm{Cof}_B(M) = M^3$在 R上是内射的。定义

$$D = \begin{pmatrix} u & v_x & v_y \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

坐标作用表明 D 是 R-线性的，而上述恒等式推出 $D^2 = 0$。B-线性映射 $H(a,\ b,\ c) = (0,\ p_x a,\ p_y a)$ 满足 $DH + HD = 1$。因此，复形 J（每个次数中均为$J^n = I$ 和 $d_J^n = D$）作为 B-模的复形是可缩的，故作为 R-模的复形是正合的。令 $G = Z^0 J$。由周期性可得正合列$0 \to G \to I \to G \to 0$，而 J 的非负部分是 G的内射分解。

记 $V = S(J)$ 为一周期复形，其项为 M，微分为 u。对于内射B-模 E，同一 $\mathrm{Hom}_B(E,\ M) \cong \prod_{j\in\mathbb{Z},\ r\geq 0} \mathrm{Hom}_B(E,\ U^j)$ 以及乘积的正合性表明 $\mathrm{Hom}_B(E,\ V)$ 是正合的。由引理 3.1 的第二个短正合列可知，$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Cof}_B(E)\ J)$ 是正合的。根据同一引理，每个内射 R-模都具有这种形式。因此，J 是全无挠的，所以 G 是强戈伦斯坦内射的。

乘积的正合性还表明，对每个次数 q，$H^q(V)$ 与 W 同构。由于 J 的非负部分是 G 的一个内射分解，由命题 3.2 可得所述 Ext同构，其中包括所述的 R-作用。将第一份 W 中第二个指标为零的 $H^0(U)$坐标包含进去，会诱导出所述单射。若 $\text{FP-id}_B\, B < \infty$，则根据引理 2.1，$F_B$ 在 R 上的 FP-内射维数有限。此时，G的 Ding 内射性将迫使 $\mathrm{Ext}^1_R(F_B,\ G) = 0$，这与 $H^0(U) \neq 0$时的 Ext同构矛盾。□

现在我们可以证明引言中的定理 1.1。

定理 1.1 的证明。(i)⇒(ii)。假设 $\mathcal{DI}(R) = \mathcal{GI}(R)$，并设 U 是一个由内射 B-模构成的复形，使得对于每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E, U)$ 都是正合的。假设 U不正合。取 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $H^t(U) \neq 0$。复形 $U[t]$的项都是内射的，满足相同的 Hom正合条件，并且有 $H^0(U[t]) = H^t(U) \neq 0$。由于 B 是 Ding–Chen 环，$\text{FP-id}_B\, B < \infty$。由命题 3.5 应用于 $U[t]$，可得一个强戈伦斯坦内射 R-模，它不是 Ding 内射。这与 (i) 矛盾。因此 U 是正合的。

(ii)⇒(i)。令 $G \in \mathcal{GI}(R)$，并选取一个全正合复形 J，使得 $G = Z^0 J$。记$U = S(J)$。由引理 3.1，U的项是内射 B。我们证明，对每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E, U)$ 都是正合的。对于这样的模 E，模 $\mathrm{Cof}_B(E)$ 在 R 上是内射的，因此 $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Cof}_B(E)\ J)$ 是正合的。此外，J_B是由内射 B-模组成的正合复形。由于 B 是 Ding–Chen，[8, 推论 4.3] 表明 $\mathrm{Hom}_B(E, J_B)$ 是正合的。引理 3.1 中两个短正合列所对应的长正合上同调序列表明，当 $L = E$ 时，两个连接映射都是同构。记 $V_E^n = H^n \mathrm{Hom}_B(E, U)$。该行的内射性蕴含 v_y: $V_E^n \to V_E^{n+1}$ 是单射。该列的满射性表明，每个 $(w, 0) \in (V_E^{n+1})^2$ 都可写成 $(v_x z, v_y z)$。于是 $z = 0$，因此 $w = 0$。所以 $\mathrm{Hom}_B(E, U)$ 是正合的。由于 E 任意，(ii) 蕴含 U 是正合的。由引理 3.3，J 是 Ding 无环的，因而 G 是 Ding 内射的。由于 G 任意，$\mathcal{GI}(R) \subseteq \mathcal{DI}(R)$。反向包含总是成立，因此 (i) 得证。

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)。令 U 为由内射 B-模组成的复形。由 [14, 命题 3.11], ，取一个拟同构 $U \to U'$，其中 U' 是项为内射模的 K-内射复形。该拟同构的锥 C 是项为内射模的正合复形。由 [8, 推论 4.3], ，对每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E,C)$ 都是正合的。因此 $\mathrm{Hom}_B(E,U) \to \mathrm{Hom}_B(E,U')$ 是一个拟同构，而 $\mathrm{Hom}_B(E,U)$ 计算 $\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_B(E,U)$。于是，若复形 U 的项均为内射模，且对于每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E,U)$ 都是正合的，则它表示 $\mathrm{Inj}(B)$ 的右正交中的一个对象。反之，该右正交中的每个对象都有一个 K-内射代表元 V，其项均为内射模，并且对于每个内射B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E,V)$ 都是正合的。因此，当且仅当这个右正交为零时，(ii) 成立。

为将这一消失性与生成联系起来，我们证明 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Inj}(B))$ 由单个模生成。设 $Q = B^{++}$。模 B^+ 是内射的，且由 [7,定理 4.2]可知其具有有限平坦维数；对有限平坦分解取对偶可知，Q 具有有限内射维数。由于 B 是相干的，特征对偶还表明 Q 是平坦的（见 [7, 命题 3.14] 的证明）。求值映射 $B \to Q$ 是纯的，因此每个内射的 B-模 E 都是 $Q \otimes_B E$的一个直和项。与平坦模 Q 张量保持三角和余积；由于 $\mathrm{Loc}(B) = \mathrm{D}(B)$，可得 $Q \otimes_B E \in \mathrm{Loc}(Q)$。反过来，$Q$ 的有限内射分解表明 Q 属于 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Inj}(B))$。因此，$\mathrm{Loc}(\mathrm{Inj}(B)) = \mathrm{Loc}(Q)$。根据 [13, 定理 4.4], 的证明中的 Bousfield 局部化论证，$\mathrm{D}(B)$ 中的每个对象都可以嵌入一个三角，其中首项属于 $\mathrm{Loc}(Q)$，末项属于其右正交。该右正交为零，当且仅当 $\mathrm{Loc}(Q) = \mathrm{D}(B)$。由于 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Inj}(B)) = \mathrm{Loc}(Q)$，这就证明了 (ii)$\Longleftrightarrow$(iii)。□

4. 定理 1.1 的应用

在第 4.1 小节中，我们构造代数 B ，并利用其内射分解证明推论 1.2。在第 4.2 小节中，我们使用同一个代数及其分解证明推论 1.3。

4.1. 由纯内射对象生成。 我们先记录两个下文构造所需的 Ext 计算。

引理 *4.1.* 设 k 是一个域， A、C 是 k-代数，并令 $S = A \otimes_k C$。设 M 是一个 A-模， L 是一个 C-模， N 是一个 S-模。假设对某个整数 $n \geqslant 0$，有 $\mathrm{Ext}^q_A(M,N) = 0\,(0 \leqslant q < n)$。那么 $\mathrm{Ext}^m_S(M \otimes_k L, N) = 0\,(0 \leqslant m < n)$，且 $\mathrm{Ext}^n_S(M \otimes_k L, N) \cong \mathrm{Hom}_C\big(L,\ \mathrm{Ext}^n_A(M,N)\big)$。$\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$ 上的 C-作用由其在 N 上的作用所诱导。

证明。 取一个内射 S-分解 $N \to I^\bullet$，并记 $W^\bullet = \mathrm{Hom}_A(M, I^\bullet)$。由于 S作为右 A-模是自由的，限制保内射对象，因此 $H^q(W) = \mathrm{Ext}^q_A(M,N)$。每个$W^j$都是 C上的内射模：伴随 $\mathrm{Hom}_C\big(L', \mathrm{Hom}_A(M, I^j)\big) \cong \mathrm{Hom}_S(M \otimes_k L', I^j)$ 以及 $M \otimes_k -$ 的正合性证明了这一断言。

令 $K^j = \mathrm{im}\ d_W^{j-1}$，其中 $K^0 = 0$。由于对 $j < n$， $H^j(W) = 0$，这些序列

$$0 \longrightarrow K^j \longrightarrow W^j \longrightarrow K^{j+1} \longrightarrow 0 \ (0 \leqslant j < n)$$

是正合的。它们依次分裂：从 $K^0 = 0$开始， K^j 的内射性使其包含映射分裂，而 K^{j+1} 是 W^j的内射直和项。因此，所有满足 $j \leqslant n$ 的 K^j 都是

内射的。应用 $\mathrm{Hom}_C(L,\ -)$ 后，次数小于 n的部分仍保持正合。此外，$K^n \subseteq Z^n(W)$分裂，并且当 $n>0$时，$W^{n-1}\to K^n$也分裂。因此，$H^n\mathrm{Hom}_C(L,\ W^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_C(L,\ H^n(W))$。对于 $n=0$，同一个同构可由 Hom 保持核得到。最后，$\mathrm{Hom}_C(L,\ W^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_S(M\otimes_k L,\ I^\bullet)$，这证明了两个断言。□

引理 4.2. 设 $B\to T$ 是一个环同态，且 N 是一个 B-模。若 $\mathrm{Ext}^r_B(T,N)=0\,(r\geqslant 0)$，则对每个 T-模 M 及每个 $r\geqslant 0$，都有 $\mathrm{Ext}^r_B(M,N)=0$，其中 M 限制在 B 上。

证明. 取一个 T-模的正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow F\longrightarrow M\longrightarrow 0$，使得 $F\cong T_{(I)}$ 是自由的。对每个 $r\geqslant 0$，$\mathrm{Ext}^r_B(F,N)\cong\prod_I \mathrm{Ext}^r_B(T,N)=0$。$\mathrm{Hom}_B(M,N)\hookrightarrow \mathrm{Hom}_B(F,N)$ 的包含映射证明了对所有 T-模，零次情形的结论成立。对于 $r>0$，对 r 进行归纳，并同时考虑所有 T-模。正合列

$$\mathrm{Ext}^{r-1}_B(K,N)\longrightarrow \mathrm{Ext}^r_B(M,N)\longrightarrow \mathrm{Ext}^r_B(F,N)$$

两端项均为零，因此其中间项也为零。 □

命题 4.3。对于每个域 k，存在一个忠实平坦包含映射 $B\to T$，其为交换冯·诺依曼正则 k-代数，二者均具有 k-维数 $\aleph_\omega$，使得 $\mathrm{Ext}^m_B(T,B)=0$ 对每个$m\geqslant 0$都成立。此外，$\mathrm{Ext}^m_B(E,B)=0$ 对每个内射 B-模 E 及每个 $m\geqslant 0$都成立。

证明。我们构造 $B\subseteq T=\bigcup_{n<\omega}T_n$，使得 $\mathrm{Ext}^m_B(T_n,B)=0$ 对 $0\leqslant m<n$成立。于是，望远镜正合列证明了 $\mathrm{Ext}^m_B(T,B)=0$ 对每个 $m\geqslant 0$都成立。令 $\kappa_n=\aleph_n$。对于每个 $n\geqslant 0$，取一个集合 $I_n=I_n^+\sqcup I_n^-$，其两部分的基数均为 κ_n。令 C_n 为 k- 代数，即定义在 I_n 上的、在有限集之外为常值的函数所成的代数。在 k^{I_n} 中，令 q_n 为 I_n^+的特征函数，并令 $C_n'=C_n[q_n]$。对于 $i\in I_n$，记 $e_i\in C_n$ 为 $\{i\}$的特征函数。因此，当 $i\in I_n^+$时 $e_iq_n=e_i$，而当 $i\in I_n^-$时 $e_iq_n=0$。取一个基数为 κ_n的集合 K_n，并令

$$B_n=\bigotimes_{t\in K_n} C_n,\ D_n=\bigotimes_{t\in K_n} C_n',\ B=\bigotimes_{n<\omega} B_n,\ T=\bigotimes_{n<\omega} D_n.$$

本构造中的所有张量积均取自 k。无限张量积是沿单位映射取有限张量积的直接极限。映射 $B_n\to D_n$ and$B\to T$ 是单射：这对域上的有限张量积成立，并且可传递到直接极限。每个环都是由 k 上的幂等元生成的，因此是 k 的有限直积的有向并，且为冯·诺依曼正则环。由于每个 B-模都是平坦的，商 T/B 是平坦的，因此 $B\to T$ 是纯的。B-模 T 也同样是平坦的；纯性使得对每个 B-模 M，$M\to T\otimes_B M$ 都是单射，因此该扩张是忠实平坦的。取每个因子的一个包含其单位元的基，即可得到每个张量积的一个基，其中的元素是仅有有限个因子不同于 1 的张量。由于 $\dim_k C_n=\dim_k C_n'=\kappa_n$，我们有 $\dim_k B_n=\dim_k D_n=\kappa_n$，且 $\dim_k B=\dim_k T=\aleph_\omega$。

记作 $A_n=\bigotimes_{j<n}B_j$ 和 $F_n=\bigotimes_{j<n}D_j$，其中 $A_0=F_0=k$。设 $T_n=B\otimes_{A_n}F_n=F_n\otimes_k\bigotimes_{j\geqslant n}B_j$。这些子代数满足 $T_n\subseteq T_{n+1}$ 和 $T=\bigcup_{n<\omega}T_n$。记作 $N=B$。对于$n>0$，不等式 $\kappa_{n-1}<\kappa_n$ 确保所选自由分解上的给定上循环

在下文中，在层级 n处使用的张量因子少于 κ_n。因此，我们可以选择一个指标 $t \in K_n$，其因子未被该上循环使用，并比较 I_n^+和 I_n^-中的点处的求值。

我们首先证明，对于每个 $q \geqslant 0$，$\mathrm{Hom}_{B_n}\big(D_n,\ \mathrm{Ext}^q_{A_n}(F_n,\ N)\big) = 0$。对于 $n > 0$、A_n 和 F_n，其 k-维数至多为 κ_{n-1}。取一个在 A_n 上的自由分解 $P_\bullet \to F_n$，其中每个自由基的基数至多为 κ_{n-1}。这是可能的，因为可以取各个后继核的 k-基作为模生成元。对于 $n = 0$，对 $q > 0$ 使用分解 $P_0 = k$、$P_q = 0$。在这两种情况下，P_q 的基的基数都小于 κ_n，而这么多个有限集合的并集的基数小于 κ_n。

令 $V = \mathrm{Ext}^q_{A_n}(F_n, N)$，并假设 $f\colon\ D_n \to V$ 是一个非零的 B_n-线性映射。取 $d \in D_n$ 使得 $f(d) \neq 0$。将 f 替换为映射 $z \mapsto f(dz)$ 后，不妨设 $u = f(1) \neq 0$。在 $\mathrm{Hom}_{A_n}(P_q, N)$ 中为 u 取一个上循环。每个自由基元素上的取值都是 B 中纯张量的有限和，其中只有有限个因子不同于 1。由这些取值所使用的 K_n 中的因子组成的并集，其基数小于 κ_n。取并集之外的 $t \in K_n$。将定义 B 的张量积中省略这一份 C_n 的张量积记为 $B_{\widehat{t}}$。对于 $i \in I_n$，在 i 处对该因子求值给出一个 A_n-代数收缩 $\pi_i : B \to B_{\widehat{t}}$。令 $\pi_{i,*}\colon V \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{A_n}(F_n, B_{\widehat{t}})$ 为由 π_i 诱导的映射。由于 u 的上循环不使用第 t 个因子，所有 $\pi_{i,*}(u)$ 都是同一个类 u_0。由 $B_{\widehat{t}} \hookrightarrow B$ 诱导的 Ext 上的映射将 u_0 送到 u，因此 $u_0 \neq 0$。

令 q_t 表示 D_n中第 t 个因子里的 q_n 副本，并令 $v = f(q_t)$。为v选取一个上循环。将其在自由基上的取值表示为有限个纯张量之和。第 t 个因子中出现的函数在 I_n的有限子集之外均为常值。这些例外子集的并集的基数仍小于 κ_n。在该并集之外选取 $i \in I_n^+$ 和 $j \in I_n^-$。为 v 选取的上链在 i 和 j处求值所得的像相同，因此 $\pi_{i,*}(v) = \pi_{j,*}(v)$。另一方面，$e_i v = e_i u$ 和 $e_j v = 0$，其中幂等元位于B_n的第 t 个因子中。在 i 处求值会将 e_i 映为 1，而在 j 处求值会将 e_j 映为 1。因此 $\pi_{i,*}(v) = u_0$ 且$\pi_{j,*}(v) = 0$，矛盾。由此证明了所述的 Hom 消失。

我们断言，对于 $0 \leqslant m < n$，$\mathrm{Ext}^m_B(T_n,\ N) = 0$。从 A_n到 B的归纳是正合的，并且保持自由模，因此 $\mathrm{Ext}^m_B(T_n,\ N) \cong \mathrm{Ext}^m_{A_n}(F_n,\ N)$。$n = 0$的情形是平凡的。假设该断言对 n成立。归纳步骤中，应用引理 4.1，其中 $A = A_n$，$C = B_n$，$M = F_n$，$L = D_n$。由于 $A_{n+1} = A_n \otimes_k B_n$ 且 $F_{n+1} = F_n \otimes_k D_n$，所需的 Ext群在小于 n的次数上消失。在 n次时，我们得到

$$\mathrm{Ext}^n_{A_{n+1}}(F_{n+1}, N) \cong \mathrm{Hom}_{B_n}\big(D_n, \mathrm{Ext}^n_{A_n}(F_n, N)\big) = 0$$

由上文证明的 Hom 消失可得。归纳法证明了该断言。

现在我们转到 T。对于任意固定的 $m \geqslant 0$，删去序列 T_n的前 $m+1$ 项。剩余序列具有相同的直接极限。其望远镜正合列为

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \geqslant m+1} T_n \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{n \geqslant m+1} T_n \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

这里的移位通过包含映射将每个直和项 T_n 发送到 T_{n+1}。从任一和到 N 的 Ext群在 m 和 $m-1$度上均消失，其中将 -1 度解释为零。这里 Ext

在其第一个变量中将直和映射为直积。因此，长正合 Ext 序列推出 $\mathrm{Ext}^m_B(T,\ N) = 0$。

由引理 4.2，对于每个 T-模 M 及每个 $m \geqslant 0$，$\mathrm{Ext}^m_B(M,\ N) = 0$。若 E 在 B 上是内射的，则纯性使 $E \to T \otimes_B E$ 成为单射，且该单射在 B 上分裂。由于 $T \otimes_B E$ 是一个 T-模，对于每个 $m \geqslant 0$，$\mathrm{Ext}^m_B(E,\ B) = 0$。□

推论 1.2 的证明。取自命题 4.3 的 B，以及 B 的内射分解 U，并将其置于非负次数。于是，对 $j \neq 0$，$H^0(U) = B \neq 0$ 且 $H^j(U) = 0$。对于每个内射 B-模 E，对所有 $m \geq 0$，$\mathrm{Ext}^m_B(E,\ B)$ 的消失意味着 $\mathrm{Hom}_B(E,\ U)$ 是正合的。因此，U 违背了定理 1.1 的条件（ii）。由于 B 是冯·诺依曼正则的，它是 Ding–Chen 的。因此，该定理推出 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Inj}(B)) \neq \mathbf{D}(B)$。根据 [4, 注记 6.12]，在 $\mathbf{D}(B)$ 中，由内射模生成等价于由纯内射对象生成，因为 B 是冯·诺依曼正则的。因此 $\mathrm{Loc}(\mathcal{P}) \neq \mathbf{D}(B)$。□

注4.4。设 $B \to T$ 是命题 4.3 中的忠实平坦扩张。对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(B)}(T,\ B[n]) = 0$。满足对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(B)}(X,\ B[n]) = 0$ 的对象 $X \in \mathbf{D}(B)$ 构成一个局部化子范畴，它包含 T，但不包含 B。因此 $B \notin \mathrm{Loc}(T)$。推论 1.2 也可由这一事实和 [4, 定理 6.10], 得出，因为 $B \to T$ 是忠实平坦的。

扩张 $B \to T$ 也不是可下降的。否则，B 就属于由 T 生成的厚张量理想（见 [11, 定义 3.18]），进而属于 $\mathrm{Loc}(T)$，因为后者是张量理想，这与前述观察矛盾。Aoki 构造了布尔环之间一个不可下降的忠实平坦映射（见 [1,定理 D]）。

4.2. **Gorenstein 单射性与 Ding 单射性不同的相干环**。为证明推论 1.3 中的局部断言，我们选取一个 Ext 类，使其在 R 的每个素理想处的局部化都非零。

命题 4.5。设 B 是一个交换冯·诺依曼正则环，并记 $R = B[x,y]/(x,y)^2$ 和 $\mathfrak{r} = (x,y)$。假设 U 是一个由内射 B-模组成的复形，并且对每个内射 B-模 E，$\mathrm{Hom}_B(E,U)$ 均正合；此外，$[w] \in H^0(U)$ 满足 $\mathrm{ann}_B[w] = 0$。对于命题 3.5 中的周期模 G，存在一个类 $\xi \in \mathrm{Ext}^1_R(F_B,G)$，使得

$$\mathrm{ann}_R\,\xi = \mathfrak{r},\ B = R/\mathfrak{r} \longhookrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(F_B,G),\ b \longmapsto b\xi.$$

此外，对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$，${}_R G = \infty$ 的Did和 ${}_{R_\mathfrak{p}} G_\mathfrak{p} = \infty$ 的Gid。

证明。令 ξ 为命题 3.5 中单射下 $[w]$ 的像。此映射是B-线性且为单射，其像被 $\mathfrak{r}$湮灭。因此 $\mathrm{ann}_R\,\xi = \mathfrak{r} + \mathrm{ann}_B[w] = \mathfrak{r}$。对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$，$\mathrm{ann}_R\,\xi = \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}$，所以 $\xi_\mathfrak{p} \neq 0$。周期性内射序列诱导出R-线性的维数平移同构 $\mathrm{Ext}^n_R(F_B,\ G) \cong \mathrm{Ext}^1_R(F_B,\ G)$ $(n \geq 1)$。环 R 是相干的，且由引理 2.1 可知 F_B 是有限表示的。因此 F_B 有一个由有限生成自由模构成的分解。将该分解局部化后，我们得到

$$\mathrm{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}((F_B)_\mathfrak{p}, G_\mathfrak{p}) \cong \mathrm{Ext}^n_R(F_B,G)_\mathfrak{p} \neq 0\ (n \geq 1).$$

由同一个引理，模$(F_B)_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 上是内射的。若 $G_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 上有有限戈伦斯坦内射余分解，则这些 Ext 群在所有充分大的次数上都为零，这与上述结论矛盾。同理，若 G在 R 上有有限 Ding 内射余分解，则对所有充分大的 n，$\mathrm{Ext}^n_R(F_B,\ G)$都为零，因为 F_B 是绝对纯的。因此，对每个 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$，$\operatorname{Did}_R G=\infty$ 且 $\operatorname{Gid}_{R_{\mathfrak{p}}} G_{\mathfrak{p}}=\infty$。□

推论 1.3 的证明。取推论 1.2 证明中使用的代数 B 及其内射分解 U。令 $R=B\otimes_k \Lambda_k$。则 $\dim_k R=\aleph_\omega$。由引理 2.1，R 是相干的，且 $F_B=\operatorname{Hom}_B(R,\ B)$ 是有限表示的且绝对纯的。由命题 3.2，$\mathcal{DI}(R)$ =内射模类(R)。

由于 B 是冯·诺依曼正则的，因此它是 Ding–Chen 的。复形 U 不满足定理 1.1 的条件（ii），所以 $\mathcal{DI}(R)\subsetneq\mathcal{GI}(R)$。令 G 为命题 3.5 中由 U 构造的模。则 G 是强戈伦斯坦内射的，但不是 Ding 内射的。在 $H^0(U)\cong B$ 下，类 1 对应的元素在 B 中的湮灭子为零。由命题 4.5 可知，对于 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，$\operatorname{Did}_R G=\infty$ 且 $\operatorname{Gid}_{R_{\mathfrak{p}}} G_{\mathfrak{p}}=\infty$。由于对于 $j\neq 0$，$H^0(U)\cong B$ 且 $H^j(U)=0$，命题 3.5 中的模 W 同构于 $B^{\mathbb{N}}$。因此 $\mathrm{Ext}^n_R(F_B,\ G)\cong(B^{\mathbb{N}})^3$ $(n\geq 1)$，其中右侧的 R-作用经由 $R\to B$ 分解。

B 中的每个有限系数集合都包含在一个 k子代数中，而该子代数是若干个 k的有限直积。将这些子代数与 Λ_k 张量，可将 R 表示为若干个 Λ_k的有限直积所构成的有向并。B 的每个剩余域都是 k，因为生成幂等元在域中的取值只能是零或一。因此，引理 2.1 将每个 $R_{\mathfrak{p}}$ 都识别为 Λ_k。□

注4.6。设 $R=B\otimes_k\Lambda_k$ 和 G 如推论 1.3 的证明中所述。环 R 是若干个 Λ_k的有限直积所构成的有向并。这些有限阶段都是诺特环，因此戈伦斯坦内射模与丁格内射模在每个这样的环上重合。因此，等式 $\mathcal{GI}=\mathcal{DI}$ 在环的有向并下未必保持成立。

限制到 Λ_k 未必保持 Gorenstein 内射性，尽管 R 是 Λ_k上的自由模。事实上，$E_0=\operatorname{Hom}_k($ $\Lambda_k,\ k)$是 Λ_k 和 $R\otimes_{\Lambda_k}E_0\cong F_B$上的内射模。Ext 伴随给出 $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_k}(E_0,\ G_{\Lambda_k})\cong\mathrm{Ext}^1_R(F_B,\ G)\neq 0$。

同样的 Ext 计算表明，${}^{\perp}\mathcal{GI}(R)$ 在纯子模下不封闭。将 F_B 嵌入其内射包 I 的映射是纯的，因为 F_B 是绝对纯的。于是有$I\in{}^{\perp}\mathcal{GI}(R)$ 以及 $F_B\notin{}^{\perp}\mathcal{GI}(R)$。

推论 4.7。存在一个基数为 $\aleph_\omega$ 的交换凝聚环 R'，使得 内射模类$(R')\subsetneq\mathcal{DI}(R')\subsetneq\mathcal{GI}($ $R')$。

证明。我们首先证明，对于每个非零交换环 A，都有内射模类$(S)\subsetneq\mathcal{DI}(S)$，其中$S=($ $A[x,y]/(x,\ y)^2)[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。令 $L=S/\varepsilon S$。由于 $\operatorname{ann}_S(\varepsilon)=\varepsilon S$，模 L 具有一个自由分解

$$\cdots\xrightarrow{\varepsilon}S\xrightarrow{\varepsilon}S\longrightarrow L\longrightarrow 0.$$

因此，对于每个 S-模 Q，$\mathrm{Ext}^1_S(L,\ Q)\cong\ker(\varepsilon:\ Q\to Q)/\varepsilon Q$。取一个非零内射 S-模 I。项为 I、微分为 ε 的一周期复形 J 是正合的，因为 $\mathrm{Ext}^1_S(L,\ I)=0$。若 Q 是绝对纯的，则 $\mathrm{Ext}^1_S(L,\ Q)$ 为零，因为 L 是有限表示

的。因此，项为 Q 、微分为 ε的一周期复形是正合的。应用正合函子 $\mathrm{Hom}_S(-,\ I)$，可证明 $\mathrm{Hom}_S(Q,\ J)$ 是正合的：在 Q上与 ε 复合，等同于在 I上与 ε 复合。因此，$N=\varepsilon I=\ker(\varepsilon:\ I\to I)$ 是 Ding 内射的。它非零，否则 J 的正合性将推出 $I=0$。由于 $\varepsilon N=0$，同一分解给出 $\mathrm{Ext}^1_S(L,\ N)\cong N\neq 0$。因此 N 不是内射的。

取一个有限域 k，并令 $R=B[x,y]/(x,\ y)^2$ 和 G 如推论 1.3 的证明中所述。记 $F_B=\mathrm{Hom}_B(R,\ B)$。令

$$R'=R[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\cong\big(B[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\big)[x,y]/(x,y)^2.$$

取 G 的一个完全内射分解 J。由伴随性，函子 $\mathrm{Hom}_R(R',\ -)$ 保持内射对象；又因为 R' 在 R 上是自由的，所以该函子是正合的。对于每个内射 R'- 模 Q，自由性也使得 Q_R 在 R 上是内射的。由伴随性，$\mathrm{Hom}_{R'}(Q,\ \mathrm{Hom}_R(R',\ J))\cong\mathrm{Hom}_R(Q_R,\ J)$ 是正合的。因此，$\mathrm{Hom}_R(R',\ J)$ 是全无挠的，而 $G'=\mathrm{Hom}_R(R',\ G)$ 是 R' 上的 Gorenstein 内射模。

令 $F'=\mathrm{Hom}_R(R',\ F_B)$。$R'$-模 F' 是绝对纯的：限制函子将有限表示的 R'-模映为有限表示的 R-模，因此由 Ext 伴随以及 F_B 在 R 上的绝对纯性可得此结论。由于 $(F')_R\cong F_B^2$，同一伴随性给出

$$\mathrm{Ext}^1_{R'}(F',G')\cong\mathrm{Ext}^1_R((F')_R,G)\cong\mathrm{Ext}^1_R(F_B,G)^2\neq 0.$$

因此，G' 不是 Ding 内射。将 $A=B$ 代入上述构造可得 $\mathrm{Inj}(R')\subsetneq\mathcal{DI}(R')$。最后，$R'$ 是 R 上的有限自由模，因此根据引理 2.1 的核论证，它是相干的，并且 $|R'|=\aleph_\omega$。□

致谢。第一作者得到国家自然科学基金（项目编号：11901412）的资助。第二作者得到国家自然科学基金（项目编号：12571035）的资助。

人工智能的使用。使用了生成式人工智能工具协助检索文献、构建和检查数学论证、修改语言和结构，以及准备 LaTeX。作者对数学内容、参考文献和最终文本负责。

参考文献

[1] K. Aoki，《局部仿紧集的上同调》，Proc. Lond. Math. Soc. (3)**132**（2026年），第 5 期，e70159。[2] S. Bazzoni、M. Cort´es-Izurdiaga 和 S. Estrada，《周期模与无环复形》，Algebr. Rep- resent. Theory **23**（2020），第 5 期，1861–1883。[3] D. Bennis 和 N. Mahdou，《强 Gorenstein 投射、内射和平坦模》，J. Pure Appl. Algebra**210**（2007），第 2 期，437–445。[4] S. Breaz、M.Hrbek 和 G. C. Modoi，《交换环的 silting、cosilting 与扩张》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.**180**（2026年），第 2 期，363–388。[5] F. Couchot，《赋值环上内射模的局部化》，Proc. Amer. Math. Soc. **134**（2006），第 4 期，1013–1017。

[6] *E. E. Enochs* 和 *O. M. G. Jenda*，*Gorenstein* 内射模与投射模，《数学杂志》*220*（*1995*），*611–633*。[7] *J. Gillespie*，*Ding–Chen* 环上模的模型结构，《同调、同伦与应用》*12*（*2010*），第 *1* 期，*61–73*。[8] *J. Gillespie*，关于 *Ding* 内射、*Ding* 投射和 *Ding* 平坦模与复形，《落基山数学杂志》*47*（*2017*），第 *8* 期，*2641–2673*。[9] *L. Mao*，平凡环扩张上的 *Ding* 投射模与 *Ding* 内射模，《捷克斯洛伐克数学杂志》*73*（*2023*），第 *3* 期，*903–919*。[10] *L. Mao* 和 *N. Ding*，*Gorenstein FP*-内射模与 *Gorenstein* 平坦模，《代数与应用杂志》*7*（*2008*），第 *4* 期，*491–506*。[11] *A. Mathew*，稳定同伦论的伽罗瓦群，《数学进展》*291*（*2016*），*403–541*。[12]*L. Positselski*，相干环、*fp*-内射模、对偶化复形与协变 *Serre–Grothendieck* 对偶，《数学精选》（新系列）*23*（*2017*），第 *2* 期，*1279–1307*。[13] *J. Rickard*，无界导出范畴与有限维数猜想，《数学进展》*354*（*2019*），*106735*。[14] *N. Spaltenstein*，无界复形的分解，《数学汇编》*65*（*1988*），第 *2* 期，*121–154*。[15] *J. Wang*、*Z. Liu* 和 *G. Yang*，*Gillespie* 问题与 *Grothendieck* 对偶，《数学报告》*359*（*2021*），第 *5* 期，*593–607*。[16] *C. Zhang*，具有 $\mathcal{GP} \subsetneq \mathcal{GF}$ 的交换相干环，预印本，*arXiv:2608.17748v3*（*2026*年）。

Guocheng Dai
中国四川省成都市610066，四川师范大学数学科学学院。电子邮箱：ggcdai@163.com

Jiangsheng Hu中国浙江省杭州市311121，杭州师范大学数学学院。电子邮箱：hujs@hznu.edu.cn