arXiv:2611.29351v1 [math-ph] 22 Nov 2026

一种新颖的代数方法：中程可解模型

Yuan Miao[1] 和 Kohei Fukai[2]

[1] *Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure, ENS, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université Paris Cité, Paris, France*
[2] *RIKEN iTHEMS, Wako, Saitama 351-0198, Japan*（日期：2026年11月24日）

我们将 Jones 的 Baxter 化扩展到具有中程相互作用的量子自旋链。Jones 的 Baxter 化可直接从代数的生成元构造杨-巴克斯特方程的解。其关键在于为 R矩阵引入扩展杨-巴克斯特方程，这些 R矩阵由附属于两个相邻格点的生成元构成。结合相应的 Lax 算符，它会产生一组传递矩阵；与 Jones 的构造完全相同，这些传递矩阵在边界项之外彼此对合。我们利用三着色色多项式代数的生成元，找到了一个非差分形式的扩展杨-巴克斯特方程解，并由此得到两族中程晶格哈密顿量。因此，该代数的每一种表示都对应一个中程可解模型。利用三着色色多项式代数与融合范畴 Rep(S_3) 之间的关系，我们构造了四种这样的表示。它们分别再现了折叠XXZ模型和硬杆变形 XXZ 模型，并给出了三态反铁磁体和里德堡阻塞梯子的新中程模型。这四个模型中有两个具有不可逆对称性。

I. 引言

可积量子自旋链是一类定义在一维量子自旋阵列上的精确可解模型 [1–5]。其历史可追溯至贝特对自旋-$\frac{1}{2}$ 海森堡链的求解 [6], ，随后杨与杨分析了各向异性XXZ链 [7, 8] ，Baxter则求解了完全各向异性XYZ链 [9–13]。这些模型之所以可解，根源在于杨-巴克斯特方程 [14, 15]。该方程的解，即R矩阵，是一系列彼此对易的传递矩阵的基本构件，而这正是量子反散射方法和代数贝特拟设的出发点 [3, 16–18]。传递矩阵的对数导数可导出大量局域守恒荷 [18]。

可积模型不仅具有数学上的意义。可积自旋链可以描述准一维磁性材料，例如，人们通过中子散射观测到了海森堡链中的分数自旋子激发 [19, 20]。可积模型也已在超冷原子系统中实现 [21, 22]。过去二十年来，可积模型在研究孤立量子多体系统的非平衡性质方面发挥了重要作用 [23, 24]。由于存在大量守恒荷，可积系统在量子淬火后不会热化，而是弛豫至广义吉布斯系综 [25–27], ；对于相互作用的自旋链，该系综还必须包含准局域 [28–31] 和非对易的 [32] 守恒荷。弛豫动力学可以通过精确方法研究，例如淬火作用量 [33–35]。在更大尺度上，可积系统的动力学由广义流体力学描述 [36–38], ，其预测已得到实验验证 [39, 40]。除凝聚态物理之外，可积自旋链的能谱对于研究反德西特/共形场论对应也至关重要 [41, 42]。

由于 R 矩阵是传递矩阵的基本构件，构造可积量子自旋链就等同于寻找杨-巴克斯特方程的解。通过量子群 [43, 44],这一视角，只需指定底层量子群的表示 [45–47]，即可系统地获得 R 矩阵。与此同时，Jones 提出了一种不同的方法，称为 *Baxter*化 [48], ，直接利用代数获得杨-巴克斯特方程的解，例如 Temperley-Lieb 代数 [49], 、Hecke代数和 Birman-Wenzl-Murakami（BWM）代数 [50, 51]。此后，这种方法又扩展到了其他代数，如多色辫群-幺半群代数 [52]。它还被表述为编织张量范畴的形式 [53] ，并应用于可积量子电路 [54]。这种方法的优点在于，代数中的一个解能够为该代数的每个表示生成一个可积模型。例如，Temperley-Lieb 代数的表示给出了自旋-$\frac{1}{2}$ XXZ链、 Q-态波茨模型和受限固体-固体（RSOS）模型 [55–58], ，以及相互作用任意子链 [59]。此外，还可以在代数层面研究所有表示共有的性质，例如能谱的简并和关联函数 [60–62]。

此外，中程自旋链近年来也受到了关注，这是由于其与里德伯原子实验的密切关系。
验 [63, 64] 以及量子多体疤痕 [65–67]和希尔伯特空间碎裂 [68–71]等现象。宽泛地说，中程自旋链指的是相互作用超出最近邻范围的自旋链。与此同时，与最近邻自旋链相比，人们对可积中程自旋链的理解要少得多。著名的可积模型包括 Bariev模型 [72–74], 、折叠XXZ模型 [75–77], 以及

具有里德伯阻塞的受限模型 [78–80] 以及相关的 RSOS量子链 [81], ，它们源自Baxter的硬六边形模型以及 Andrews、Baxter 和 Forrester 的 RSOS模型 [82, 83]。已有研究尝试为可积中程自旋链写出 Lax算子和 R矩阵 [84]，但已知的显式解很少 [80, 84, 85]。另一方面，对于自由费米子模型，代数方法在处理中程自旋链方面已证明非常成功：伪装起来的自由费米子 [86–89]在由哈密顿量局域项生成的代数的任意表示中都是可解的；这些局域项会根据彼此间的距离而对易或反对易。我们沿用 Jones 的 Baxter 化方法，解决了相互作用模型这一难题，并从代数角度得到了中程Yang-Baxter方程的解。事实证明，某些已知解是下文给出的代数解的表示。

本文的出发点是观察到，文献 [84]中的中程Yang-Baxter方程 R_m 无需诉诸张量积希尔伯特空间 m ，即可作出一种表述。与 Jones 的方法中将 R 矩阵$R_{m,\ m+1}$ 关联到代数的一个位点 m 不同，我们考虑将 R 矩阵$R_{m,\ m+1}$ 关联到两个相邻格点，并以扩展 *Yang-Baxter* 方程（24）取代杨-巴克斯特方程，该方程将$R_{m,\ m+1}$ 与$R_{m+2,\ m+3}$联系起来。我们证明，扩展 Yang-Baxter 方程及其对应的 Lax 算符方程会导出彼此对易（相差边界项）的传递矩阵，进而得到中程哈密顿量，其方式与 Jones 的 Baxter 化相同。

随后，我们在三着色色多项式代数中给出一个显式解，即色多项式代数 [90–92]，其中 $Q = 3$ 种颜色，并辅以 Jones-Wenzl型关系。这一代数是自旋1/2XXZ链及其非可逆相关模型的基础；这些模型由 Eck 和 Fendley 发现，[93], 他们以通常的（最近邻）方式对其进行了 Baxter 化。我们找到的 R 矩阵为非差分形式，并由此产生两族中程˜哈密顿量， H 以及 $H(v_0)$，定义见方程（46）和（57）。

最后，三着色色多项式代数与融合范畴 Rep(S_3) 密切相关：其生成元由对称群 S_3 的二维不可约表示的两个副本的三个融合通道构成。因此，Rep(S_3) 的四个不可分解模范畴各自赋予该代数的一个表示，这正是文献 [93] 中四个模型的来源。将这一构造应用于我们的解，我们找到了四个中程模型。其中两个是已知的，即折叠XXZ模型 [75–77]（以及其相互作用推广）和硬杆变形 XXZ 模型 [84, 85], ，后者包含 Bariev模型的一个特殊点。另外两个模型分别定义在三态反铁磁体和里德堡阻塞梯子上，据我们所知是全新的。这些模型通过非可逆对偶性彼此关联，其中两个模型具有非可逆 Rep(S_3) 对称性 [94], 及其连续对应物 [95]。

本文结构如下。我们在第II节回顾 Jones 的 Baxter 化，并以 Temperley-Lieb 代数和三着色色多项式代数为例。第III节引入扩展 Yang-Baxter 方程，并在第IV节给出其在三着色色多项式代数中的解。第V节讨论四种表示。我们在第VI节总结。扩展色多项式代数的关系式在附录A中推导。

II. Jones 的 Baxter 化 `A LA JONES

对于一个给定的代数 $\mathcal{A}$ ，其生成元为 $a_m^{(n)}$，并由链上的位点 m 标记，且当 $|m-m'|\geq 2$ 时，位点 m 和 m' 处的生成元彼此对易，则可能可以找到杨-巴克斯特方程（YBE）的解

$$\check{R}_m(u,v)\check{R}_{m+1}(w,v)\check{R}_m(w,u) = \check{R}_{m+1}(w,u)\check{R}_m(w,v)\check{R}_{m+1}(u,v), \tag{1}$$

其中，R 矩阵由 $\mathcal{A}$ 的生成元定义，

$$\check{R}_m(u,v) = \sum_n f^{(n)}(u,v)a_m^{(n)}. \tag{2}$$

一旦找到这样的解，便可直接定义传递矩阵

$$T(u,v_0) = \prod_{m=1}^{\overleftarrow{L}} \check{R}_m(u,v_0) = \check{R}_L(u,v_0)\cdots\check{R}_2(u,v_0)\check{R}_1(u,v_0), \tag{3}$$

它们通过递归使用杨–巴克斯特方程（1）彼此对合，差一个边界项，

$$\lim_{L\to\infty}[T(u,v_0),T(w,v_0)] = 0. \tag{4}$$

为说明这一点，我们在方程（ $v = v_0$ 1）中令，并将其改写为

$$\check{R}_m(u,v_0)\check{R}_{m+1}(w,v_0) = \check{R}_{m+1}(w,u)\left[\check{R}_m(w,v_0)\check{R}_{m+1}(u,v_0)\right]\check{R}_m^{-1}(w,u). \tag{5}$$

由于当 $k \le m-1$ 时，$\check{R}_{m+1}(w,\ v_0)$ 与 $\check{R}_k(u,\ v_0)$ 对易，因此两个传递矩阵的乘积可以重新排列为

$$T(u,v_0)T(w,v_0) = \check{R}_L(u,v_0)\left[\prod_{m=1}^{L-1}\overleftarrow{\check{R}_m(u,v_0)\check{R}_{m+1}(w,v_0)}\right]\check{R}_1(w,v_0). \tag{6}$$

将式（5）应用于每个因子 后，算符 $\check{R}_m(w,\ u)$ 和 $\check{R}_m^{-1}(w,\ u)$ 在体区中两两抵消，从而得到

$$T(u,v_0)T(w,v_0) = \check{R}_L(u,v_0)\check{R}_L(w,u)\left[\prod_{m=1}^{L-1}\overleftarrow{\check{R}_m(w,v_0)\check{R}_{m+1}(u,v_0)}\right]\check{R}_1^{-1}(w,u)\check{R}_1(w,v_0), \tag{7}$$

w它与 $T(w,\ v_0)T(u,\ v_0)$ 的区别仅在于作用于链两端的算符 n,

$$T(w,v_0)T(u,v_0) = \check{R}_L(w,v_0)\check{R}_L^{-1}(w,u)\check{R}_L^{-1}(u,v_0)T(u,v_0)T(w,v_0)\check{R}_1^{-1}(w,v_0)\check{R}_1^{-1}(w,u)\check{R}_1(u,v_0). \tag{8}$$

当 R 矩阵是正则的，即 $\check{R}_m(v_0,\ v_0) = 1$ 时，传递矩阵的对数会生成彼此对易的局域守恒荷，而它们在体区中彼此对易。第一个局域守恒荷就是哈密顿量

$$H = \sum_m \partial_u \check{R}_m(u,v_0)\big|_{u=v_0}. \tag{9}$$

有几个著名的代数 $\mathcal{A}$ 拥有杨–巴克斯特方程（1）的解，例如 Temperley-Lieb（TL）代数 [49], Birman-Wenzl-Murakami（BWM）代数 [50, 51] 以及较近出现的三着色色多项式代数 [93]。我们将使用第一个和最后一个代数来举例说明 Baxter化过程。

Temperley-Lieb 代数——TL 代数由满足以下关系的生成元 e_m 定义

$$e_m^2 = \beta e_m, \quad e_m e_{m\pm1} e_m = e_m, \tag{10}$$

$$[e_m, e_n] = 0, \quad |m-n| \ge 2. \tag{11}$$

逸度参数 $\beta = q + q^{-1} = 2\cosh\eta$。

巴克斯特化R矩阵为

$$\check{R}_m(u,v) = \check{R}_m(u-v) = 1 - \frac{\sinh\lambda}{\sinh(\lambda+\eta)}e_m, \quad \lambda = u-v, \tag{12}$$

它是以下方程的一个解 杨–巴克斯特方程（1）。因此，可积哈密顿量（略去一个乘法常数）为

$$H = \sum_m e_m. \tag{13}$$

TL 代数有众多表示，例如伊辛模型、波茨模型、自旋-1/2 XXZ 模型和 SOS 模型 [1, 55, 58]。

三着色色多项式代数。—— 我们回顾三着色色多项式代数（CA_3） [93]。色多项式代数 [90–92] 是一种依赖于参数 Q的图示代数，其求值给出色多项式，即平面图各区域的 Q着色数。按照参考文献 [93]中的表示法，我们用 CA_3 表示在$Q=3$ 处附加了 Jones–Wenzl 型关系的色多项式代数。

CA_3 由生成元 S_j 和 P_j 定义，并满足 j = 1、……、 L。指标相同的生成元之间的关系为

$$S_j^2 = 1 - P_j, \quad P_j^2 = P_j, \quad S_j P_j = P_j S_j = 0. \tag{14}$$

涉及相邻指标的关系为

$$S_j S_{j\pm1} S_j = P_j S_{j\pm1} P_j = 0, \tag{15}$$

其中假设周期边界条件为： $S_{L+1} = S_1$。生成元满足以下对易关系：

$$\begin{aligned} &[S_j, S_l] = [S_j, P_l] = 0, \quad (|j-l|>1) \\ &[P_j, P_l] = 0. \quad (\forall j,l) \end{aligned} \tag{16}$$

关系式（14）和（15）的一个有用推论是 [93]

$$P_j S_{j\pm1} = S_{j\pm1}\,(1 - P_j)\,. \tag{17}$$

三着色色多项式代数的哈密顿量抽象定义为:

$$H^{\mathrm{CA}} = \sum_{j=1}^{L} \left(S_j - \Delta S_j^2\right), \tag{18}$$

其中 Δ 是各向异性参数。哈密顿量（18）通过 Baxter化 [93]被证明是可积的。巴克斯特化R矩阵具有差分形式,

$$\check{R}_j(u,v) = \check{R}_j(u-v), \quad \check{R}_j(\lambda) = \frac{\sin(\lambda+\mu)}{\sin\mu} + \frac{\sin\lambda}{\sin\mu} S_j + \left(1 - \frac{\sin(\lambda+\mu)}{\sin\mu}\right) S_j^2, \tag{19}$$

并且对任意 μ都满足YBE（1）。

哈密顿量（18）由 sin $\mu\,\partial_\lambda \check{}\, R_j(\lambda)|_{\lambda=0} = S_j - \Delta S_j^2 + \cos\mu$恢复，其中 $\Delta = \cos\mu$。

例如，自旋-$\frac{1}{2}$ XXZ链是CA的表示之一[3]。以下表示满足CA的定义关系[3] (14)–(16):

$$S_j^{\mathrm{XXZ}} = \frac{1}{2}(X_j X_{j+1} + Y_j Y_{j+1}), \tag{20}$$

$$P_j^{\mathrm{XXZ}} = \frac{1}{2}(1 + Z_j Z_{j+1}), \tag{21}$$

其中 X_j、Y_j 和 Z_j 是作用在第 j 个自旋上的泡利矩阵。在此表示中，H^{CA} 变为自旋-1/2 XXZ链的哈密顿量，其各向异性为 Δ，相差一个常数。其他已知表示将在第V节中讨论。

III. Baxter化的新提案

为了处理中程自旋链的可积性，我们需要将 Jones [48] 风格的 Baxter化过程代数构造扩展为 ˇ。受参考文献 [84]，中程Lax形式的启发，我们提出如下构造。

设 $\mathcal{A}$ 为一个代数，其元素 $O_m^{(a)}$ 由链上的位点 m 标记，且满足

$$\left[O_m^{(a)}, O_{m'}^{(b)}\right] = 0, \quad |m - m'| \geq 3. \tag{22}$$

我们不再考虑附着于单个位点的 R 矩阵，而是考虑附着于两个相邻格点的 R 矩阵,

$$\check{R}_{m,m+1}(u,v) = \sum_{a,b} \left[c_{ab}(u,v)\, O_m^{(a)} O_{m+1}^{(b)} + c'_{ab}(u,v)\, O_{m+1}^{(b)} O_m^{(a)}\right], \tag{23}$$

并提出以下扩展 *Yang-Baxter* 方程,

$$\begin{aligned} &\check{R}_{m,m+1}(u,v)\check{R}_{m+2,m+3}(w,v)\check{R}_{m,m+1}(w,u) = \\ &\check{R}_{m+2,m+3}(w,u)\check{R}_{m,m+1}(w,v)\check{R}_{m+2,m+3}(u,v). \end{aligned} \tag{24}$$

与杨–巴克斯特方程 (1) 不同，式 (24) 中的两个 R 矩阵不共享任何位点。不过，该方程仍然是非平凡的，因为位点 m 和 $m+1$ 上的元素与位点 $m+2$ 和$m+3$上的元素不对易，唯有 $(m, m+3)$ 这一对例外。

扩展 Yang-Baxter 方程伴随着一个附加在单个格点上的 *Lax* 算符 ,

$$\check{L}_m(u) = \sum_a f_a(u)\, O_m^{(a)}, \tag{25}$$

其通过 RLL 关系与 R 矩阵交织

$$\check{R}_{m,m+1}(u,v)\check{L}_{m-1}(u)\check{L}_{m+1}(v) = \check{L}_{m-1}(v)\check{L}_{m+1}(u)\check{R}_{m-1,m}(u,v). \tag{26}$$

我们假设两个算符都是正则的，

$$\check{L}_m(0) = 1, \quad \check{R}_{m,m+1}(u,u) = 1. \tag{27}$$

方程（24）和（26）是满足于参考文献 [84], 中具有三位点相互作用的自旋链的 Lax 算符和 R 矩阵的关系式的代数对应物；在一种表示中，它们与这些关系式等价，其中 $O_m^{(a)}$作用于张量积希尔伯特空间的位点 $m-1$、 m 和 $m+1$。不过，此处并未涉及任何特定表示。在第 V 节的表示中，元素 $O_m^{(a)}$作用于三个、四个或五个相邻位点，而希尔伯特空间不一定是张量积。

传递矩阵——由 Lax 算符定义传递矩阵

$$T(u) = \prod_m^{\longleftarrow} \check{L}_m(u) = \cdots \check{L}_{m+1}(u)\check{L}_m(u)\check{L}_{m-1}(u)\cdots . \tag{28}$$

由方程（22），ˇ L_{m+1}（w）与ˇ L_k（u）对易，其中 $k \le m-2$，两个传递矩阵的乘积可重排为

$$T(u)T(w) = \prod_m^{\longleftarrow} \left[\check{L}_{m-1}(u)\check{L}_{m+1}(w)\right]. \tag{29}$$

RLL 关系（26）推出

$$\check{L}_{m-1}(u)\check{L}_{m+1}(w) = \check{R}^{-1}_{m,m+1}(u,w)\left[\check{L}_{m-1}(w)\check{L}_{m+1}(u)\right]\check{R}_{m-1,m}(u,w), \tag{30}$$

因此，相邻因子之间的 R矩阵两两抵消。由此证明，传递矩阵在相差边界项的意义下构成对合，

$$T(u)T(w) \simeq T(w)T(u), \tag{31}$$

其中 $\simeq$ 表示等式成立至多相差作用于链的两端的算符，参见公式（4）。

为了明确写出公式（31）中的边界项，我们考虑位点为 $m = 1, \ldots, L$ 的链，其传递矩阵（28）为 $T(u) =$ˇL_L(u) $\cdots$ˇL_2(u)ˇL_1(u)。在乘积 $T(u)T(w)$ 中，我们将每个ˇ $L_{m+1}(w)$（其中 $m \ge 2$）向左移动，穿过与之对易的算符ˇ $L_k(u)$（其中 $k \le m-2$），直到它紧邻ˇ $L_{m-1}(u)$。于是，重排（29）可写为

$$T(u)T(w) = \check{L}_L(u)\check{L}_{L-1}(u)\left[\prod_{m=2}^{L-1}{}^{\longleftarrow} \check{L}_{m-1}(u)\check{L}_{m+1}(w)\right]\check{L}_2(w)\check{L}_1(w), \tag{32}$$

其中只有最左边的两个谱参数为 u的 Lax 算符和最右边的两个谱参数为 w 的 Lax 算符未配对。

将公式(30)应用于括号内每个因子，标签为 m 的因子在其左侧贡献了ˇ$R^{-1}_{m-1,\,m}$(u, w)。因此，R矩阵在体区中两两抵消，只有最左端和最右端的 R矩阵保留下来，

$$T(u)T(w) = \check{L}_L(u)\check{L}_{L-1}(u)\check{R}^{-1}_{L-1,L}(u,w)\left[\prod_{m=2}^{L-1}{}^{\longleftarrow} \check{L}_{m-1}(w)\check{L}_{m+1}(u)\right]\check{R}_{1,2}(u,w)\check{L}_2(w)\check{L}_1(w). \tag{33}$$

另一方面，将 32) 中的 u 和 w 互换顺序可得

$$T(w)T(u) = \check{L}_L(w)\check{L}_{L-1}(w)\left[\prod_{m=2}^{L-1}{}^{\longleftarrow} \check{L}_{m-1}(w)\check{L}_{m+1}(u)\right]\check{L}_2(u)\check{L}_1(u). \tag{34}$$

乘积 (33) 和 (34) 具有相同的体部分，即括号内的部分；二者仅在作用于位点$L-1$、 L 以及链两端的 1、2 上的算符方面有所不同。这就是方程 (31) 的确切含义，与 Jones 的 Baxter 化中的方程 (6) 和 (7) 完全类似。

由 R 矩阵本身可得到第二族传递矩阵。记 $\check{\mathsf{R}}_n(u,\ v) = \check{R}_{2n,\ 2n+1}(u,\ v)$。由方程 (22)，当 R_n 和 $\check{\mathsf{R}}_{n'}$ 在 $|n-n'| \geq 2$ 时对易，而扩展 Yang-Baxter 方程 (24) 变为

$$\check{\mathsf{R}}_n(u,v)\check{\mathsf{R}}_{n+1}(w,v)\check{\mathsf{R}}_n(w,u) = \check{\mathsf{R}}_{n+1}(w,u)\check{\mathsf{R}}_n(w,v)\check{\mathsf{R}}_{n+1}(u,v), \tag{35}$$

这不过就是杨–巴克斯特方程（1）。因此，传递矩阵变为

$$\tilde{T}(u,v_0) = \overleftarrow{\prod_n} \check{R}_{2n,2n+1}(u,v_0), \tag{36}$$

第二节的论证II 表明，传递矩阵 $T(u,v_0)$具有相同的 v_0，除边界项外彼此对合，恰如 Jones 情形。

哈密顿量——得益于正则性（27），传递矩阵（28）和（36的对数是局域密度之和。在最低阶，我们得到哈密顿量

$$H = \sum_m \partial_u \check{L}_m(u)\big|_{u=0}\,, \tag{37}$$

$$\tilde{H}(v_0) = \sum_n \partial_u \check{R}_{2n,2n+1}(u,v_0)\big|_{u=v_0}\,. \tag{38}$$

哈密顿量 H 在平移一个位点下保持不变，而 $H(v_0)$ 在平移两个位点下保持不变。对于非差形式的 R 矩阵，$H(v_0)$ 非平凡地依赖于参数 v_0。高阶守恒荷由传递矩阵的对数展开得到。例如，由 $T(u)$ 生成的下一个守恒荷为

$$Q^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_m \left([\check{L}'_{m+1}, \check{L}'_m] + [\check{L}'_{m+2}, \check{L}'_m] + \check{L}''_m - (\check{L}'_m)^2 \right), \tag{39}$$

其中 $\check{L}'_m = \partial_u \check{L}_m(u)|_{u=0}$ 以及 $\check{L}''_m = \partial_u^2 \check{L}_m(u)|_{u=0}$。

由于传递矩阵彼此对易（相差边界项），局域守恒荷在体区内彼此对易。与 Jones 的 Baxter 化情形一样，这使我们推测，在施加周期边界条件时，哈密顿量（37）和（38）是可积的，也就是说，在 $\mathcal{A}$的任意表示中，它们都具有数量随系统规模广延增长且彼此对易的局域守恒荷。对于下面给出的解，我们已明确验证，在第V节讨论的所有表示中，哈密顿量在周期链上均与第一组高阶守恒荷对易。

IV. 示例：三着色的色多项式代数

现在，我们用 CA_3的生成元给出扩展 Yang-Baxter 方程（24）和 RLL 关系（26）的一个解。扩展色多项式代数——我们引入扩展色多项式代数（ECA）。ECA 是由以下元素 S_j、P_j和 W_j生成的 CA_3 子代数，其中 $j = 1, \ldots\ldots, L$：

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_j &= \frac{1}{2}\left[[P_{j-1}, S_j], P_{j+1}\right] + \frac{1}{2}S_j = (P_{j-1} - P_{j+1})^2 S_j, \\
\widetilde{W}_j &= \frac{1}{2}\left[1 + (2P_{j-1}-1)(2P_j-1)(2P_{j+1}-1)\right], \\
\widetilde{P}_j &= P_j \widetilde{W}_j.
\end{aligned} \tag{40}$$

算符 $(P_{j-1}-P_{j+1})^2$ 是一个与 S_j对易的投影算符。因此，生成元 $\widetilde{S}_j$ 是一个由其邻居 S_j 控制的生成元：当 S_j 和 P_{j-1} 中恰有一个 P_{j+1} 取值为 1 时，它的作用为3；否则为零。利用 CA 的关系式（14）–（17），可以证明 ECA 的生成元满足以下关系式，参见附录A。指标相同的生成元之间的关系式为

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S}_j^2 = \widetilde{W}_j - \widetilde{P}_j, \quad \widetilde{P}_j^2 = \widetilde{P}_j, \quad \widetilde{W}_j^2 = \widetilde{W}_j, \\
&\widetilde{S}_j\widetilde{P}_j = \widetilde{P}_j\widetilde{S}_j = 0, \\
&\widetilde{S}_j\widetilde{W}_j = \widetilde{W}_j\widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j.
\end{aligned} \tag{41}$$

存在涉及到下一个最近邻的指标的关系式：

$$A_j \widetilde{S}_{j\pm d} A_j = 0. \quad (A_j \in \{\widetilde{S}_j, \widetilde{P}_j, \widetilde{W}_j\},\ d \in \{1,2\}) \tag{42}$$

这里我们假设周 ~ ~期边界条件： $S_{L+d} = S_d$。生成元满足对易关系 ：

$$\begin{aligned} &[A_j, B_l] = 0. \quad (A_j, B_j \in \{\widetilde{P}_j, \widetilde{W}_j\}, \forall j, l) \\ &\left[\widetilde{S}_j, A_l\right] = 0. \quad (A_j \in \{\widetilde{S}_j, \widetilde{P}_j, \widetilde{W}_j\},\ |j-l| > 2) \end{aligned} \tag{43}$$

此外，式（17）的对应关系成立，

$$\widetilde{W}_j \widetilde{S}_{j\pm d} = \widetilde{S}_{j\pm d} \left(1 - \widetilde{W}_j\right), \quad (d \in \{1,2\}) \tag{44}$$

~这意味着式（42），其中 $A_j = W_j$。与式（22）相比，ECA 中指标为 j 的生成元扮演了第 $O_j^{(a)}$ 节中元素 III 的角色。注意， $\widetilde{S}_j^3 = \widetilde{S}_j$，即 $\frac{1}{2}(\widetilde{S}_j^2 \pm \widetilde{S}_j)$ 和 $1 - \widetilde{S}_j^2$是彼此正交的投影算符。可以将式（41）–（44）视为某个抽象代数的定义关系式，而式（40）则给出了该代数在 CA_3中的一个实现。本文不沿此方向展开，以下所有陈述均理解为 CA_3中的恒等式。

ECA 的一个显著性质是，其所有元素都与

$$N_P = \sum_{j=1}^{L} P_j, \tag{45}$$

这对 CA 并不成立$_3$ 本身。事实上， S_j 会改变 P_{j-1} 和 P_{j+1}的取值，参见式（17），而~中的投影算符 S_j 会选取 $P_{j-1} + P_{j+1}$ 保持不变的过程。因此，任何由 ECA 的生成元构成的哈密顿量都具有由 U（1）对称性，其生成元为 N_P，此外还具有 CA 的对称性$_3$。

Lax 算符。—— 我们将 ECA 的抽象哈密顿量定义为：

$$H^{\mathrm{ECA}} = \sum_{j=1}^{L} h_j, \quad h_j = \widetilde{S}_j - \Delta \widetilde{S}_j^2 = (P_{j-1} - P_{j+1})^2 \left(S_j + \Delta S_j^2\right). \tag{46}$$

我们证明，ECA 的哈密顿量（46）具有形式（37），即它可由 RLL 关系（26）的一个解导出。

我们定义如下 Lax 算符，

$$\check{L}_j(u;\mu) = \frac{\sin(u+\mu)}{\sin\mu} + \frac{\sin u}{\sin\mu}\widetilde{S}_j + \left(1 - \frac{\sin(u+\mu)}{\sin\mu}\right)\widetilde{S}_j^2. \tag{47}$$

~它由 CA 的 R 矩阵$_3$ （19）通过将 S_j 替换为 S_j得到。等价地，当 P_{j-1} 和 P_{j+1} 中恰有一个取值为 1 时，Lax 算符的作用如 R 矩阵（19）；否则其作用为标量。它满足 ˇ L_j（0； μ） $= 1$以及反演关系

$$\check{L}_j(u;\mu)\check{L}_j(-u;\mu) = \frac{\sin(\mu+u)\sin(\mu-u)}{\sin^2\mu}. \tag{48}$$

我们由 Lax 算符构造传递矩阵：

$$T(u;\mu) = \overleftarrow{\prod_j} \check{L}_j(u;\mu), \tag{49}$$

其中我们假设 $L \to \infty$。

ECA 的哈密顿量可由传递矩阵的一阶导数得到，这一点可从下式看出

$$\partial_u \check{L}_j(u;\mu)\big|_{u=0} = \frac{1}{\sin\mu}\left(\widetilde{S}_j - \Delta\widetilde{S}_j^2 + \cos\mu\right), \tag{50}$$

其中 $\Delta = \cos\mu$。通过考虑 μ 的虚数值，可达到 $|\Delta| > 1$ 区域。

R 矩阵——我们还将 R 矩阵定义为：

$$\begin{aligned}\check{R}_{j,j+1}(u,v;\mu) =& 1+\left(\frac{\sin\mu}{\sin(\lambda+\mu)}-1\right)\left(\widetilde{S}_j^2+\widetilde{S}_{j+1}^2\right)+\frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda+\mu)}\left(\left\{\widetilde{P}_j,\widetilde{S}_{j+1}\right\}+\left\{\widetilde{P}_{j+1},\widetilde{S}_j\right\}\right)\\ &+\left[1-\frac{2\sin\mu}{\sin(\lambda+\mu)}+\frac{1}{\sin(v-\mu)\sin(u+\mu)}\left(\sin u\sin v-\frac{\sin^3\mu}{\sin(\lambda+\mu)}\right)\right]\widetilde{S}_j^2\widetilde{S}_{j+1}^2\\ &+\frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda+\mu)}\left(\frac{\sin u}{\sin(u+\mu)}\widetilde{S}_{j+1}\widetilde{S}_j+\frac{\sin v}{\sin(v-\mu)}\widetilde{S}_j\widetilde{S}_{j+1}\right)\\ &+\frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sin(\lambda+\mu)}\left[\frac{\widetilde{S}_{j+1}\widetilde{S}_j^2+\widetilde{S}_{j+1}^2\widetilde{S}_j}{\sin(u+\mu)}-\frac{\widetilde{S}_j\widetilde{S}_{j+1}^2+\widetilde{S}_j^2\widetilde{S}_{j+1}}{\sin(v-\mu)}\right],\end{aligned}\tag{51}$$

其中 $\lambda=u-v$ 和 $\{A,B\}=AB+BA$ 表示反对易子。R 矩阵的形式为（23）。与 CA_3 （19）的 R 矩阵不同，它不是差分形式，这与 Bariev模型的 R 矩阵相似 [96, 97]。

接着，我们展示如下 RLL 关系成立 [84], ，这是由定义性质（41）、（42）和（43）推出的 ，

$$\begin{aligned}&\check{R}_{j,j+1}(u,v;\mu)\check{L}_{j-1}(u;\mu)\check{L}_{j+1}(v;\mu)\\ &\quad=\check{L}_{j-1}(v;\mu)\check{L}_{j+1}(u;\mu)\check{R}_{j-1,j}(u,v;\mu),\end{aligned}\tag{52}$$

这确保了传递矩阵（49）在边界项之外彼此对易， $T(u;\ \mu)T(v;\ \mu)\ \simeq T(v;\ \mu)T(u;\ \mu)$，参见方程（31）。

此外，R 矩阵本身满足扩展 Yang-Baxter 方程（24）：

$$\begin{aligned}&\check{R}_{j-1,j}(u,v;\mu)\check{R}_{j+1,j+2}(w,v;\mu)\check{R}_{j-1,j}(w,u;\mu)\\ &\quad=\check{R}_{j+1,j+2}(w,u;\mu)\check{R}_{j-1,j}(w,v;\mu)\check{R}_{j+1,j+2}(u,v;\mu).\end{aligned}\tag{53}$$

R 矩阵是正则且幺正的，

$$\check{R}_{j,j+1}(u,u;\mu)=1,\quad \check{R}_{j,j+1}(u,v;\mu)\check{R}_{j,j+1}(v,u;\mu)=1,\tag{54}$$

并且当第二个谱参数为零时，它可分解为两个 Lax 算符的乘积，

$$\check{R}_{j,j+1}(u,0;\mu)=\frac{\sin^2\mu}{\sin^2(u+\mu)}\check{L}_{j+1}(u;\mu)\check{L}_j(u;\mu),\tag{55}$$

与参考文献 [84] 中发现的一般结构一致。

方程 (52)–(55) 是计算机代数中的恒等式3, ，即它们仅由关系式 (14)–(16) 推出，因此在计算机代数的任意表示中都成立3。由于直接验证十分繁琐，我们借助计算机代数，使用任意谱参数对其进行了检验，并且 μ。

高阶守恒荷由方程 (39) 得出。由于反演关系 (48)，方程 (39) 中最后两项相加为一个常数，因此第一个高阶守恒荷具有简洁形式，

$$Q^{(2)}\propto\sum_{j=1}^{L}\left[h_j,h_{j+1}+h_{j+2}\right].\tag{56}$$

我们已验证 $\left[H^{\mathrm{ECA}},Q^{(2)}\right]=0$ 在第 V 节S所述所有表示中的周期链上成立。

*econd family of Hamiltoni*答。— 现在我们转而讨论由 R 矩阵 (51) 得到的哈密顿量 (38)。采用一种方便的归一化 ，

$$\tilde{H}^{\mathrm{ECA}}(v_0)=\sin\mu\sum_{n=1}^{L/2}\partial_u\check{R}_{2n,2n+1}(u,v_0;\mu)\big|_{u=v_0}=H^{\mathrm{ECA}}+\sum_{n=1}^{L/2}\delta h_{2n,2n+1}(v_0),\tag{57}$$

其中 L 为偶数，并且我们使用式（44）对结果进行了化简。形变作用于每隔一对相邻格点，

$$\begin{aligned}\delta h_{j,j+1}(v_0)=&\alpha_+\widetilde{S}_{j+1}\widetilde{S}_j+\alpha_-\widetilde{S}_j\widetilde{S}_{j+1}+2\alpha_+\alpha_-\cos\mu\,\widetilde{S}_j^2\widetilde{S}_{j+1}^2\\ &+\kappa_+\left(\widetilde{S}_{j+1}\widetilde{S}_j^2+\widetilde{S}_{j+1}^2\widetilde{S}_j\right)+\kappa_-\left(\widetilde{S}_j\widetilde{S}_{j+1}^2+\widetilde{S}_j^2\widetilde{S}_{j+1}\right),\end{aligned}\tag{58}$$

表 I. 三着色色多项式代数的四种表示及由此得到的中程模型。希尔伯特空间的维数针对含有 L 个位点的周期链给出。作用于 H^{ECA} 的哈密顿量密度所涉及的相邻格点数即为作用范围。

$\mathcal{M}$	文献 [93]中的模型	希尔伯特空间（维数）	作用范围	对称性
$\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}_1)=\mathrm{Vec}$	XXZ链	自旋 $1/2(2^L)$	4	$S_3\subset U(1)\rtimes\mathbb{Z}_2$
$\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}_2)$	伊辛之字形梯子	自旋 $1/2(2^L)$	3	$\mathrm{Rep}(S_3)$
$\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}_3)$	三态反铁磁体	$s_j\neq s_{j+1}$ $(2^L+2(-1)^L)$	5	S_3
$\mathrm{Rep}(S_3)$	里德堡阻塞梯子	阻塞 $(2^L+(-1)^L)$	5	$\mathrm{Rep}(S_3)$

系数为

$$\alpha_\pm=\frac{\sin v_0}{\sin(v_0\pm\mu)},\quad \kappa_\pm=\pm\frac{\sin\mu}{\sin(v_0\pm\mu)}-1. \tag{59}$$

形变在 $v_0=0$ 处消失，即 $\tilde{H}^{\mathrm{ECA}}(0)=H^{\mathrm{ECA}}$。这是因式分解（55）的结果，它意味着 $T(u,0)$ 与 $T(u;\mu)$ 成正比。特别地，将所有谱参数设为零后，哈密顿量（38）不过就是 H^{ECA}。

对于 $v_0\neq 0$，我们得到一个真正不同的模型，它与 H^{ECA} 不对易，且其能谱取决于 v_0。它可以被视为 H^{ECA} 的可积形变，具有双站点晶胞，其中非差形式的 R 矩阵的参数v_0 起到耦合常数 [1]的作用。

哈密顿量 $\tilde{H}^{\mathrm{ECA}}(v_0)$ 是厄米的（在 S_j 和 P_j 均为厄米的表示中），当 μ为实数且v_0 为虚数时，或者当 μ 为虚数且 v_0 为实数时。在这两种情况下，$\alpha_-=\alpha_+^*$ 和 $\kappa_-=\kappa_+^*$。我们已验证，$\tilde{H}^{\mathrm{ECA}}(v_0)$ 与由 $\tilde{T}(u,v_0)$ 在第 V 节所有表示中的周期链上生成的第一个高阶守恒荷对易。

V. 表示与$\mathrm{Rep}(S_3)$

CA_3 的任意表示都会导出 Lax 算符（47）和 R 矩阵（51）的表示，进而导出中程哈密顿量（46）和（57）。本节利用 CA_3 与融合范畴 $\mathrm{Rep}(S_3)$ 之间的关系，按照 Eck 和 Fendley [93]的构造，得到其中四个哈密顿量。

三着色色多项式代数与 $\mathrm{Rep}(S_3)$。——融合范畴 $\mathrm{Rep}(S_3)$ 有三个简单对象：平凡表示$\mathbf{1}$、符号表示 ϵ，以及对称群 S_3 的二维表示 ρ，其融合规则为

$$\epsilon\otimes\epsilon=\mathbf{1},\quad \rho\otimes\epsilon=\epsilon\otimes\rho=\rho,\quad \rho\otimes\rho=\mathbf{1}\oplus\epsilon\oplus\rho. \tag{60}$$

根据融合范畴 $\mathrm{Rep}(S_3)$，可以通过任意子链的标准构造 [59, 98–101] 构造量子晶格模型。输入数据包括融合范畴 $\mathrm{Rep}(S_3)$ 和 $\mathrm{Rep}(S_3)$ 上的模范畴 $\mathcal{M}$ [102, 103]。基态以链上位点处简单对象的构型标记 $\mathcal{M}$，相邻位点上的对象通过与 ρ 融合而关联，投影算符则根据某个位点的两个邻位点作用。最重要的是，以由融合通道中的对象标记的投影算符表示时，作用于希尔伯特空间的算符构成键代数 [100, 101, 104] 。键代数与 CA_3 [105], 直接相关

$$\mathcal{P}_j^{(\mathbf{1})}=\frac{1}{2}\left(S_j^2+S_j\right),\quad \mathcal{P}_j^{(\epsilon)}=\frac{1}{2}\left(S_j^2-S_j\right),\quad \mathcal{P}_j^{(\rho)}=P_j. \tag{61}$$

此外，$\mathrm{Rep}(S_3)$ 的不可分解模范畴与子群$G\subseteq S_3$ 在共轭意义下（其第二上同调群均为平凡群）一一对应，$\mathcal{M}_G=\mathrm{Rep}(G)$，$\mathrm{Rep}(S_3)$ 通过限制作用于其上。这样的子群共有四个，分别为 $G=\mathbb{Z}_1$，$\mathbb{Z}_2$，$\mathbb{Z}_3$ 和 S_3，它们对应于文献 [93] 中通过轨形和拓扑缺陷得到的四个模型，见表 I。

与 $\mathcal{M}$ 相关的模型的对称性由相对于 $\mathcal{M}$ [100, 101, 103]的 $\mathrm{Rep}(S_3)$ 对偶范畴描述。对于 $G=\mathbb{Z}_1$ 和 $\mathbb{Z}_3$，它是群 S_3；而对于 $G=\mathbb{Z}_2$ 和 S_3，它就是 $\mathrm{Rep}(S_3)$ 本身，其

[1] 还可以考虑 $\partial_u\check{R}_{j,j+1}(u,v_0;\mu)|_{u=v_0}$ 在位点 all 上的求和 j，它在平移一个位点后保持不变。在 $v_0=0$ 处，它等于 $2H^{\mathrm{ECA}}$。然而，对于 $v_0\neq 0$，它与传递矩阵（36）无关，我们也不认为它是可积的。

对象 ρ 产生了一个不可逆对称算符 [94, 106, 107]。文献 [93]明确构造了对称算符以及四个模型之间的不可逆对偶映射。重要的是，这些算符与各个生成元 S_j 和 P_j对易（分别与之交织），因此也与由它们构成的任意哈密顿量对易。因此，下面的中程模型继承了表 I所列的对称性，并且文献 [93]中的不可逆对偶映射将它们彼此映射。

现在我们给出哈密顿量 H^{ECA} 在四种表示中的形式。哈密顿量 $\tilde{H}^{\mathrm{ECA}}(v_0)$ 由相同方 y 法从方程 (57) and (58).

XXZ 表示。—— 通过用 CA 的 XXZ 表示来表示 ECA 的生成元，可以推导出一种物理表示$_3$ （20），其中

$$\widetilde{S}_j = \frac{1}{4}\left(1+Z_{j-1}Z_{j+2}\right)\left(X_jX_{j+1}+Y_jY_{j+1}\right), \quad \widetilde{S}_j^2 = \frac{1}{4}\left(1+Z_{j-1}Z_{j+2}\right)\left(1-Z_jZ_{j+1}\right). \tag{62}$$

哈密顿量（46）变为

$$H_{\mathrm{XXZ}}^{\mathrm{ECA}} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{L}\left(1+Z_{j-1}Z_{j+2}\right)\left[X_jX_{j+1}+Y_jY_{j+1}+\Delta\left(1-Z_jZ_{j+1}\right)\right], \tag{63}$$

其中包含一种四体相互作用。该表示的特殊情形 $\Delta = 0$ 对应于折叠 XXZ 链 [75–77],这等同于 Bariev 链的特殊点 [72–74]在考虑 Kramers-Wannier 对偶时 [108]。守恒荷（45）为 $N_P = \frac{1}{2}\sum_j(1+Z_jZ_{j+1})$ ，即畴壁数守恒，这是折叠 XXZ 链的一个典型特征。

伊辛之字形表示。— 在与 Rep($\mathbb{Z}_2$) 相关联的表示中，生成元作用于一条自旋链1/2，其作用方式为 [93]

$$S_j^{\mathrm{Izz}} = \frac{1}{2}\sigma_{j-1}^z\left(1+\sigma_j^x\right)\sigma_{j+1}^z, \quad P_j^{\mathrm{Izz}} = \frac{1}{2}\left(1-\sigma_j^x\right), \tag{64}$$

其中 σ_j^α是作用于第 j 个位点的泡利矩阵。哈密顿量 H^{CA} 描述了两条以之字形方式耦合的伊辛链。Kramers-Wannier 对偶将 XXZ 表示映射为之字形表示 [93]。由于 P_j 作用于单个位点，ECA 的生成元仅作用于三个位点，

$$\widetilde{S}_j = \frac{1}{4}\left(1+\sigma_j^x\right)\left(\sigma_{j-1}^z\sigma_{j+1}^z+\sigma_{j-1}^y\sigma_{j+1}^y\right), \quad \widetilde{S}_j^2 = \frac{1}{4}\left(1+\sigma_j^x\right)\left(1-\sigma_{j-1}^x\sigma_{j+1}^x\right). \tag{65}$$

经过旋转（σ^x， σ^y， σ^z） $\to$ （σ^z， $-\sigma^y$， σ^x）后，哈密顿量（46）变为

$$H_{\mathrm{zig}}^{\mathrm{ECA}} = \sum_{j=1}^{L} n_j\left[\sigma_{j-1}^+\sigma_{j+1}^- + \sigma_{j-1}^-\sigma_{j+1}^+ + \frac{\Delta}{2}\left(1-\sigma_{j-1}^z\sigma_{j+1}^z\right)\right], \quad n_j = \frac{1}{2}\left(1+\sigma_j^z\right), \tag{66}$$

即由中间的自旋开启的次近邻之间的 XXZ 相互作用。这是文献 [84, 85]，（另见文献 [79], 中提出的硬杆变形 XXZ 模型，该模型在 [72–74] 耦合强度为 $|U| = 1$ 时 $\Delta = 0$化为 Bariev 模型。在这种表示下，Lax 算符（47）和 R 矩阵（51）分别作用于三个和四个位点，符合文献 [84]的框架。

守恒荷（45）是磁化强度， $N_P = \sum_j (1-n_j)$ 。此外，我们的构造表明，硬杆变形 XXZ 模型具有非可逆的 Rep(S_3) 对称性，该对称性继承自伊辛之字形梯子 [93]。

三态反铁磁体。— 在与 Rep($\mathbb{Z}_3$) 相关的表示中，每个格点承载一个三态自旋$s_j \in \{A, B, C\}$，并受约束 $s_j \neq s_{j+1}$限制。生成元为 [93]

$$S_j^{(3)} = \delta_{s_{j-1},s_{j+1}}F_j, \quad P_j^{(3)} = 1-\delta_{s_{j-1},s_{j+1}}, \tag{67}$$

其中 F_j 将自旋 s_j 翻转为唯一一个既不同于 s_j 也不同于 $s_{j-1} = s_{j+1}$的状态。哈密顿量变为 (46)

$$H_3^{\mathrm{ECA}} = \sum_{j=1}^{L}\left(1-\delta_{s_{j-2},s_{j+2}}\right)\delta_{s_{j-1},s_{j+1}}\left(F_j+\Delta\right), \tag{68}$$

具有五位点相互作用：只有当其近邻相同且次近邻不同，spin s_j 才会翻转。该模型在三个状态的置换下保持不变，这些置换构成群 S_3。

里德堡阻塞梯子。— 在与正则模范畴 Rep(S_3)相关的表示中，双腿梯子的每个梯级j 要么为空，要么由位于上腿或下腿的硬核玻色子占据；它们分别由 t_j 和 b_j湮灭。由于里德堡阻塞机制，相邻两个梯级不能同时被占据。遵循参考文献 [93], ，我们记

$$d_{j,\pm}=\frac{t_j\pm b_j}{\sqrt{2}},\quad n_j^{\pm}=d_{j,\pm}^{\dagger}d_{j,\pm},\quad n_j^{(e)}=1-n_j^{+}-n_j^{-},\quad \varsigma_j=d_{j,+}^{\dagger}d_{j,-}+d_{j,-}^{\dagger}d_{j,+}, \tag{69}$$

其中，算符 $d_{j,\ \pm}$ 被视为投影到梯子 $j\pm1$ 为空的态上。生成元为

$$S_j^{\mathrm{IRL}}=d_{j,+}+d_{j,+}^{\dagger}+\varsigma_{j-1}\varsigma_{j+1},\quad P_j^{\mathrm{IRL}}=n_j^{-}+\left(n_{j-1}^{(e)}-n_{j+1}^{(e)}\right)^2, \tag{70}$$

且 H^{CA} 是可积里德堡阻塞梯子 [93, 105]的哈密顿量。哈密顿量（46）变为

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{IRL}}^{\mathrm{ECA}}=\sum_{j=1}^{L}\Big[&\left(n_{j-2}^{(e)}-n_{j+2}^{(e)}\right)^2\left(d_{j,+}+d_{j,+}^{\dagger}+\Delta\, n_{j-1}^{(e)}\left(1-n_j^{-}\right)n_{j+1}^{(e)}\right)\\&+\left(n_{j-1}^{-}-n_{j+1}^{-}\right)^2\left(\varsigma_{j-1}\varsigma_{j+1}+\Delta\left(1-n_{j-1}^{(e)}\right)\left(1-n_{j+1}^{(e)}\right)\right)\Big],\end{aligned} \tag{71}$$

其中包含五阶梯相互作用。第一行描述在梯子 j的对称态中产生和湮灭一个玻色子；仅当梯子 $j\pm2$ 中恰有一个被占据时，才允许这一过程。第二行则交换梯子 $j-1$和 $j+1$上对称态与反对称态中的玻色子。与硬杆变形 XXZ 模型类似，模型（71）具有非可逆 Rep(S_3) 对称性。

备注。 如 [95], 中所述，哈密顿量（66）和（71）都具有连续非可逆对称性，其融合规则与双陪集环 $\mathbb{Z}\left[\mathbb{Z}_2\backslash O(2)/\mathbb{Z}_2\right]$相同。离散非可逆对称性 Rep($S_3$) 包含于这一连续对称性之中。

据我们所知，模型（68）和（71），以及四个模型的变形 $\tilde{H}^{\mathrm{ECA}}$（v_0），~都是新的。最后，我们指出四个模型共有的一项性质。由于 S_j 仅在 $P_j=0$且 $P_{j-1}\neq P_{j+1}$时才有非平凡作用，并交换 P_{j-1} 和 P_{j+1}的值，因此在任意表示中，对易投影算符 P_j 的本征值构型都会像硬核粒子那样演化：粒子跨越一个空位点跳跃两个位点。这一动力学约束导致折叠 XXZ 链 [75, 77], 的希尔伯特空间碎裂，因此我们预期这一性质会出现在所有四个模型中。

VI. 总结与展望

我们提出了将 Jones 的 Baxter 化推广至中程可解模型的方法。该方法基于扩展 Yang-Baxter 方程（24）和 RLL 关系（26），它们针对距离至少为三个位点时彼此对易的代数元素而建立。与 Jones 的构造一样，它们导出除边界项外彼此对合的传递矩阵，以及中程哈密顿量（37）和（38）；我们猜想这些哈密顿量在该代数的任意表示中都是可积的。

我们在三着色色多项式代数中找到了一个解，由 Lax 算符（47）和非差形式的 R 矩阵（51）给出。三着色色多项式代数与 Rep(S_3) 的关系产生了四种表示。它们将折叠XXZ模型和硬杆变形 XXZ 模型与两个新模型统一起来，这两个新模型分别定义在三态反铁磁体和里德堡阻塞梯子上。这四个模型通过不可逆对偶映射相互关联，而硬杆变形 XXZ 模型和里德堡阻塞梯子具有不可逆的 Rep(S_3) 对称性。

目前仍有几个悬而未决的问题。首先，新模型的能谱尚待求出。硬杆变形 XXZ 模型的贝特拟设解已知 [85], ，而四种表示之间的关系令人联想到顶点-面-边对应 [11–13, 55]。理想情况下，应在代数层面表述传递矩阵（28）和（36）的对角化问题，从而能够同时获得全部四个模型的热力学和广义流体力学。其次，R矩阵（51）不具有差分形式。由于哈密顿量（66）在 $\Delta=0$ 处是 Bariev模型的一个特殊点，因此厘清其与 Bariev模型的 R 矩阵之间的关系 [74, 96, 97], ，以及后者在具有一般耦合时是否允许同类代数表述，将会很有意义。第三，我们只给出了扩展 Yang-Baxter 方程的一个解。寻找其他 Hecke 型代数中的解，并对给定代数中的解进行分类，是很自然的方向。此外，还可以将该构造推广到代数中仅在更大距离下才彼此对易的元素，从而对应于相互作用

更长程的相互作用。最后，幺正性（54）表明，可以将 R 矩阵用作量子门，由此得到具有不可逆对称性的可积量子电路和元胞自动机 [54, 109]。推广到开放边界条件 [110]是另一个有趣的研究方向。

致谢

Y.M. 获得了 PSL 研究大学“统计物理与数学”重大研究计划的资助。该计划由 PSL 研究大学发起，并由 ANR 实施，项目编号为 ANR-10-IDEX- 0001。作者在未借助 AI 的情况下取得了本文的研究成果。我们感谢使用 Claude Opus 5.5 和 Fable 5.2 协助校对稿件。

附录 A：扩展色多项式代数的关系式

在本附录中，我们从 CA_3的关系式推导出关系式 (41)–(44)。为此，方便起见，引入 $K_j = 2P_j - 1$。由方程 (14)–(17)可得

$$K_j^2 = 1, \quad [K_j, K_l] = 0, \quad K_j S_j = S_j K_j = -S_j, \quad K_{j\pm1} S_j = -S_j K_{j\pm1}, \tag{A1}$$

而 K_l 与 S_j 在 $|j-l| \geq 2$下对易。因此，生成元 (40)可表示为

$$\widetilde{S}_j = \Pi_j S_j = S_j \Pi_j, \quad \widetilde{W}_j = \frac{1}{2}\left(1 + K_{j-1} K_j K_{j+1}\right), \quad \widetilde{P}_j = \frac{1}{2}\left(1 + K_j\right)\left(1 - \Pi_j\right), \tag{A2}$$

其中投影算符为 $\Pi_j = (P_{j-1} - P_{j+1})^2 = \frac{1}{2}(1 - K_{j-1}K_{j+1})$。第一个等式由 $[P_{j-1}, S_j] = K_{j-1} S_j$ 和 $[K_{j-1} S_j, P_{j+1}] = -K_{j-1} K_{j+1} S_j$ 得出；由于 S_j 与 K_{j-1} 和 K_{j+1} 均反对易，因此 Π_j 与 S_j 对易。

关系式（41）直接由方程（A2）得到，例如 $\widetilde{S}_j^2 = \Pi_j\,(1 - P_j) = \frac{1}{2}\Pi_j\,(1 - K_j) = \widetilde{W}_j - \widetilde{P}_j$，其中我们使用了 $K_j S_j = -S_j$，这也意味着 $W_j S_j = \Pi_j S_j$。

元素 P_j 和 W_j 是 K_l 的多项式，因此彼此对易。对于 $|j-l| > 2$，元素 S_j 和 $A_l \in \{S_l, P_l, W_l\}$ 由 CA 的生成元构成$_3$，这些生成元的指标之差大于一，除了成对的K，它们彼此对易。这证明了方程（43）。

对于 $d \in \{1, 2\}$，乘积 $K_{j-1} K_j K_{j+1}$ 恰好包含一个与 $S_{j\pm d}$反对易的因子，即 K_j 对于$d = 1$ 以及 $K_{j\pm1}$ 对于 $d = 2$，其余因子都与之对易。因此 $K_{j-1} K_j K_{j+1}$ 与 $S_{j\pm d}$ 反对易，这就是方程（44）。

最后，我们证明方程（42）。$A_j = W_j$ 的情形由方程（44）得出；$A_j = P_j$ 的情形可用同样的方法证明，其中使用了 $\widetilde{P}_j \widetilde{S}_{j\pm1} = \widetilde{S}_{j\pm1} \frac{1}{2}(1 - K_j)(1 - \Pi_j)$和 $\widetilde{P}_j \widetilde{S}_{j\pm2} = \widetilde{S}_{j\pm2} \frac{1}{2}(1 + K_j)\Pi_j$，它们从右侧被 $\widetilde{P}_j$湮灭。对于 $A_j = S_j$ 和 $d = 1$，我们利用方程（A1）将所有投影算符移至左侧，所得结果正比于 $S_j S_{j\pm1} S_j = 0$。对于 $A_j = S_j$ 和 $d = 2$，生成元 S_j 和 $S_{j\pm2}$ 彼此对易，但 $S_{j\pm2}$ 与 $K_{j\pm1}$反对易，因此 $\Pi_j S_{j\pm2} = S_{j\pm2}(1 - \Pi_j)$以及

$$\widetilde{S}_j \widetilde{S}_{j\pm2} \widetilde{S}_j = S_j \Pi_j \widetilde{S}_{j\pm2} \Pi_j S_j = S_j \widetilde{S}_{j\pm2}\left(1 - \Pi_j\right)\Pi_j S_j = 0. \tag{A3}$$

同样的推理表明，$N_P = \frac{1}{2}\sum_j (1 + K_j)$与 $\widetilde{S}_j$对易：生成元 S_j 使 K_{j-1} 和 K_{j+1} 的符号翻转，同时保持其他 K_l不变，而 Π_j 投影到 $K_{j-1} + K_{j+1} = 0$上。

[1] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*（Academic Press，伦敦，1982年）。[2] M. Gaudin, *The Bethe Wavefunction*（剑桥大学出版社，2014年）。[3] V. E. Korepin、N. M. Bogoliubov 和 A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*，剑桥数学物理专著丛书（剑桥大学出版社，剑桥，1993年）。[4] M. Takahashi, *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*（剑桥大学出版社，剑桥，1999年）。[5] B. Sutherland, *Beautiful Models: 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*（世界科学出版社，新加坡，2004年）。[6] H. Bethe,《物理学杂志》**71**，205（1931年）。

[7] C. N. Yang 和 C. P. Yang，《物理评论》150，321（1966年）。[8] C. N. Yang 和 C. P. Yang，《物理评论》150，327（1966年）。[9] R. J. Baxter，Physical Review Letters 26，832（1971年）。[10] R. J. Baxter，Physical Review Letters 26，834（1971年）。[11] R. Baxter，Annals of Physics 76，1（1973年）。[12] R. Baxter，Annals of Physics 76，25（1973年）。[13] R. Baxter，Annals of Physics 76，48（1973年）。[14] C. N. Yang，Physical Review Letters 19，1312（1967年）。[15] R. J. Baxter，Annals of Physics 70，193（1972年）。[16] E. K. Sklyanin、L. A. Takhtadzhyan 和 L. D. Faddeev，《理论与数学物理》40，688（1979年）。[17] L. A. Takhtadzhyan 和 L. D. Faddeev，《俄罗斯数学调查》34，11（1979年）。[18] L. D. Faddeev，载于 *Symétries quantiques (Les Houches Summer School, Session LXIV, 1995)*（North-Holland，阿姆斯特丹，1998年），第149–219页，arXiv:hep-th/9605187。[19] B. Lake、D. A. Tennant、C. D. Frost 和 S. E. Nagler，《自然·材料》4，329（2005年）。[20] M. Mourigal、M. Enderle、A. Kl¨opperpieper、J.-S. Caux、A. Stunault 和 H. M. Rønnow，Nature Physics 9，435（2013年）。[21] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger，《现代物理评论》80，885（2008年）。[22] T. Kinoshita、T. Wenger 和 D. S. Weiss，《自然》440，900（2006年）。[23] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalattore，《现代物理评论》83，863（2011年）。[24] P. Calabrese、F. H. L. Essler 和 G. Mussardo，Journal of Statistical Mechanics 2016，064001（2016年）。[25] M. Rigol、V. Dunjko、V. Yurovsky 和 M. Olshanii，Physical Review Letters 98，050405（2007年）。[26] L. Vidmar 和 M. Rigol，Journal of Statistical Mechanics 2016，064007（2016年）。[27] T. Langen、S. Erne、R. Geiger、B. Rauer、T. Schweigler、M. Kuhnert、W. Rohringer、I. E. Mazets、T. Gasenzer 和 J. Schmiedmayer，《科学》348，207（2015年）。[28] B. Wouters、J. De Nardis、M. Brockmann、D. Fioretto、M. Rigol 和 J.-S. Caux，Physical Review Letters 113，117202（2014年）。[29] B. Pozsgay、M. Mesty´an、M. A. Werner、M. Kormos、G. Zar´and 和 G. Tak´acs，Physical Review Letters 113，117203（2014年）。[30] E. Ilievski、J. De Nardis、B. Wouters、J.-S. Caux、F. H. L. Essler 和 T. Prosen，Physical Review Letters 115，157201（2015年）。[31] E. Ilievski、M. Medenjak、T. Prosen 和 L. Zadnik，Journal of Statistical Mechanics 2016，064008（2016年）。[32] K. Fukai、Y. Nozawa、K. Kawahara 和 T. N. Ikeda，《物理评论研究》2，033403（2020年）。[33] J.-S. Caux 和 F. H. L. Essler，Physical Review Letters 110，257203（2013年），arXiv:1301.3806。[34] J.-S. Caux，Journal of Statistical Mechanics 1606，064006（2016年），arXiv:1603.04689 [凝聚态物理：强关联电子系统]。[35] F. H. L. Essler 和 M. Fagotti，Journal of Statistical Mechanics 2016，064002（2016年），arXiv:1603.06452。[36] O. A. Castro-Alvaredo、B. Doyon 和 T. Yoshimura，Physical Review X 6，041065（2016年）。[37] B. Bertini、M. Collura、J. De Nardis 和 M. Fagotti，Physical Review Letters 117，207201（2016年）。[38] B. Doyon，SciPost物理讲义18（2020年），arXiv:1912.08496。[39] M. Schemmer、I. Bouchoule、B. Doyon 和 J. Dubail，Physical Review Letters 122，090601（2019年），arXiv:1810.07170。[40] N. Malvania、Y. Zhang、Y. Le、J. Dubail、M. Rigol 和 D. S. Weiss，《科学》373，1129（2021年），arXiv:2009.06651。[41] J. A. Minahan 和 K. Zarembo，Journal of High Energy Physics 2003，013（2003年），arXiv:hep-th/0212208。[42] N. Beisert *et al.*，《数学物理快报》99，3（2012年），arXiv:1012.3982。[43] V. G. Drinfel'd，载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986)*（美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987年），第798–820页。[44] M. Jimbo，《数学物理快报》10，63（1985年）。[45] V. V. Bazhanov，《物理快报 B》159，321（1985年）。[46] M. Jimbo，Communications in Mathematical Physics 102，537（1986年）。[47] M. Jimbo 和 T. Miwa，*Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*（美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年）。[48] V. F. R. Jones，《国际现代物理学杂志 B》4，701（1990年）。[49] H. N. V. Temperley 和 E. H. Lieb，《伦敦皇家学会会刊 A辑》322，251（1971年）。[50] J. S. Birman 和 H. Wenzl，《美国数学会会刊》313，249（1989年）。[51] J. Murakami，《大阪数学杂志》24，745（1987年）。[52] U. Grimm 和 P. A. Pearce，Journal of Physics A: Mathematical and General 26，7435（1993年），arXiv:hep-th/9303161。[53] P. Fendley，《统计物理学杂志》182，43（2021年），arXiv:2008.02292。[54] Y. Miao、V. Gritsev 和 D. V. Kurlov，SciPost物理16，078（2024年），arXiv:2206.15142。[55] V. Pasquier，Communications in Mathematical Physics 118，355（1988年）。[56] V. Pasquier 和 H. Saleur，《核物理 B辑》330，523（1990年）。[57] P. P. Martin，*Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics*（世界科学出版社，新加坡，1991年）。[58] A. Nichols，Journal of Statistical Mechanics 2006，P01003（2006年），arXiv:hep-th/0509069。[59] A. Feiguin、S. Trebst、A. W. W. Ludwig、M. Troyer、A. Kitaev、Z. Wang 和 M. H. Freedman，Physical Review Letters 98，160409 2007 0612341（），arXiv:cond-mat/。[60] B. Aufgebauer 和 A. Kl¨umper，Journal of Statistical Mechanics 2010，P05018（2010年），arXiv:1003.1932。[61] K. Fukai、R. Kleinem¨uhl、B. Pozsgay 和 E. Vernier，SciPost物理16，003（2024年）。[62] K. Fukai，《从局域守恒荷和流计算可积自旋链中的关联函数》（2026年），arXiv:2611.20181 [凝聚态物理：统计力学]。[63] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Omran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《自然》551，579（2017年）。

[64] A. Browaeys 和 T. Lahaye，Nature Physics 16, 132 (2020年)，arXiv:2002.07413。[65] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papi´c，Nature Physics 14, 745 (2018)。[66] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，Nature Physics 17, 675 (2021年)。[67] S. Moudgalya、B. A. Bernevig 和 N. Regnault，Reports on Progress in Physics 85, 086501 (2022)，arXiv:2109.00548。[68] P. Sala、T. Rakovszky、R. Verresen、M. Knap 和 F. Pollmann，Physical Review X 10, 011047 (2020)。[69] V. Khemani、M. Hermele 和 R. Nandkishore，Physical Review B 101, 174204 (2020)。[70] Z.-C. Yang、F. Liu、A. V. Gorshkov 和 T. Iadecola，Physical Review Letters 124, 207602 (2020)。[71] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，Physical Revie w X 12, 011050 (2022)，arXiv:2108.10324。[72] R. Z. Bariev，Journal of Physics A: Mathematical and General 24, L549 (1991年)。[73] R. Z. Bariev，Journal of Physics A: Mathematical and General 24, L919 (1991年)。[74] R. Z. Bariev、A. Kl¨umper、A. Schadschneider 和 J. Zittartz，Journal of Physics A: Mathematical and General 26, 1249 (1993)。[75] L. Zadnik 和 M. Fagotti，SciPost物理核心 4, 010 (2021年)，arXiv:2009.04995。[76] L. Zadnik、K. Bidzhiev 和 M. Fagotti，SciPost物理 10, 099 (2021年)，arXiv:2011.01159。[77] B. Pozsgay、T. Gombor、A. Hutsalyuk、Y. Jiang、L. Pristy´ak 和 E. Vernier，Physical Review E 104, 044106 (2021年)，arXiv:2105.02252。[78] P. Fendley、K. Sengupta 和 S. Sachdev，Physical Review B 69, 075106 (2004)，arXiv:凝聚态物理：统计力学/0309438。[79] F. C. Alcaraz 和 R. Z. Bariev，《一个精确可解的受约束 XXZ 链》（1999），arXiv:凝聚态物理：统计力学/9904042。[80] L. Corcoran、M. de Leeuw 和 B. Pozsgay，SciPost物理 18, 139 (2025年)，arXiv:2405.15848。[81] D. Bianchini、E. Ercolessi、P. A. Pearce 和 F. Ravanini，Journal of Statistical Mechanics 2015, P03010 (2015年)，arXiv:1412.4942。[82] R. J. Baxter，Journal of Physics A: Mathematical and General 13, L61 (1980)。[83] G. E. Andrews、R. J. Baxter 和 P. J. Forrester，《统计物理学杂志》35, 193 (1984)。[84] T. Gombor 和 B. Pozsgay，Physical Review E 104, 054123 (2021年)，arXiv:2108.02053。[85] B. Pozsgay、T. Gombor 和 A. Hutsalyuk，Physical Review E 104, 064124 (2021年)，arXiv:2108.13724。[86] P. Fendley，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 52, 335002 (2019)，arXiv:1901.08078。[87] S. J. Elman、A. Chapman 和 S. T. Flammia，Communications in Mathematical Physics 388, 969 (2021年)，arXiv:2012.07857。[88] P. Fendley 和 B. Pozsgay，SciPost物理 16, 102 (2024年)，arXiv:2310.19897。[89] B. Pozsgay 和 K. Fukai，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 58, 175202 (2025年)，arXiv:2402.02984。[90] P. Fendley，Annals of Physics 323, 3113 (2008)，arXiv:0804.0625。[91] P. Fendley 和 V. Krushkal，Geometry & Topology 13, 709 (2009)，arXiv:0711.0016。[92] P. Fendley 和 V. Krushkal，Advances in Theoretical and Mathematical Physics 14, 507 (2010年)，arXiv:0806.3484。[93] L. Eck 和 P. Fendley，SciPost物理 16, 127 (2024年)，arXiv:2302.14081。[94] L. Bhardwaj 和 Y. Tachikawa，Journal of High Energy Physics 2018, 189 (2018)，arXiv:1704.02330。[95] W. Cao、Y. Miao 和 M. Yamazaki，SciPost Physics Core 8, 070 (2025年)。[96] H.-Q. Zhou，Physics Letters A 221, 104 (1996)。[97] M. Shiroishi 和 M. Wadati，Journal of Physics A: Mathematical and General 30, 1115 (1997)。[98] D. Aasen、R. S. K. Mong 和 P. Fendley，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 49, 354001 (2016)，arXiv:1601.07185。[99] D. Aasen、P. Fendley 和 R. S. K. Mong，《晶格上的拓扑缺陷：对偶性与简并》（2020），arXiv:2008.08598。[100] L. Lootens、C. Delcamp、G. Ortiz 和 F. Verstraete，PRX Quantum 4, 020357 (2023)，arXiv:2112.09091。[101] L. Lootens、C. Delcamp 和 F. Verstraete，PRX Quantum 5, 010338 (2024)，arXiv:2211.03777 [quant-ph]。[102] V. Ostrik，Transformation Groups 8, 177 (2003)，arXiv:math/0111139。[103] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，*Tensor Categories*，数学调查与专著，第205卷（美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2015年）。[104] E. Cobanera、G. Ortiz 和 Z. Nussinov，Advances in Physics 60, 679 (2011年)，arXiv:1103.2776 [凝聚态物理：统计力学]。[105] L. Eck 和 P. Fendley，Physical Review B 108, 125135 (2023)，arXiv:2304.08484。[106] C.-M. Chang、Y.-H. Lin、S.-H. Shao、Y. Wang 和 X. Yin，Journal of High Energy Physics 2019, 026 (2019)，arXiv:1802.04445。[107] S. Schafer-Nameki，Physics Reports 1063, 1 (2024)，arXiv:2305.18296。[108] H. A. Kramers 和 G. H. Wannier，Physical Review 60, 252 (1941)。[109] M. Vanicat、L. Zadnik 和 T. Prosen，Physical Review Letters 121, 030606 (2018)。[110] E. K. Sklyanin，Journal of Physics A: Mathematical and General 21, 2375 (1988年)。