arXiv:2611.29357v1 [nlin.PS] 22 Nov 2026

同步光孤子碰撞模式的可实现性与可调性

Bo-Jie Deng、Rui Guo, * Jia-Xue Niu 和 Jian-Wen Zhang*School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China*（日期：2026年11月24日）

同步碰撞光孤子的位置和相位可以使碰撞中心处的振幅达到最大，从而产生大振幅局域波。我们研究了能否在单个多孤子场中共同实现多个预先设定的同步碰撞，以及在保持同步的同时，它们的相对延迟时间和传播距离能够在多大程度上连续变化。理想光纤传播由具有零边界条件的聚焦型非线性薛定谔方程建模。对于不同的离散特征值，我们推导出一个约束碰撞事件位置的仿射方程组，以确定不同事件的同步条件是否能够同时满足。此外，对于固定的离散谱以及一种可实现的完整碰撞组织（其中每对孤子恰好参与一个事件），在保持同步的同时连续调节相对事件位置，需要由离散特征值构造的辅助谱点具有共线性。当这些点不共线时，只能对所有事件中心进行均匀平移。任何具有不同孤子速度和非共线辅助谱点的三孤子谱，都同时支持集体碰撞和刚性的完全两两碰撞组织。一个具有共线辅助谱点且物理上可容许的四孤子族展示了连续的内部可调性。

I. 引言

具有强局域性和显著瞬态振幅增强特征的极端光学事件，引起了非线性光学领域的广泛关注 [1–3]。实验和理论研究揭示了多种此类事件，并推动了对其形成背后非线性动力学的探究 [4, 5]。聚焦型非线性薛¨定谔方程（NLS）为研究光纤中的此类现象提供了基本的包络模型，其中反常群速度色散和克尔非线性决定了脉冲的演化 [6]。用无量纲变量表示，该方程为

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0, \tag{1}$$

其中， $q(x,\ t)$ 是归一化的复光学包络，x 表示随动参考系中的延迟时间， t 表示归一化的传播距离。

在该模型中，生成此类大振幅局域波的一种广受研究的机制是调制不稳定性。它会放大连续波背景上的微小扰动，并可能在随后非线性演化过程中导致怪波形成 [3, 5, 7–11]。佩雷格林孤子是一种双重局域化的有理解，为怪波提供了典型模型 [2, 12–16]。除这一基本解外，高阶有理推广描述了多个相互作用的怪波所呈现的复杂动力学 [17–19]。在最大压缩态下， n阶解的峰值振幅可达到背景振幅的 $2n+1$ 倍 [20–22]。有趣的是，这些高阶结构具有内部自由参数；改变这些参数可以将中心压缩结构重组为不同的时空峰值图样，这些峰值在局部可由基本佩雷格林孤子近似，图样中心附近还可能伴有一个低阶结构 [21, 23–27]。

然而，极端光学事件并非一定由调制不稳定性引起。相反，另一种形成机制源于相干多孤子相互作用。实验已在锁模光纤激光器中观测到由非线性孤子碰撞产生的怪波 [28]。在满足零边界条件的可积聚焦型非线性薛定谔方程中，经过适当配置的多孤子脉冲能够发生强烈的自压缩 [29, 30], ；而束缚态的相干聚焦和孤子碰撞则可产生瞬态大振幅峰值 [31, 32]。值得注意的是，此类孤子碰撞的局部结构能够非常接近有理怪波的结构。具体而言，研究表明，三个振幅相等、速度对称且相对相位恰当的孤子经过特别设计的碰撞后，在碰撞附近能够非常接近经过适当缩放的二阶佩雷格林孤子，包括其空间轮廓以及最大振幅的时间演化 [31]。相关研究还发现，多孤子中的极端事件具有近似有理型轮廓，

孤子束缚态模型 [33]。更一般地，可以构造空间局域的多孤子解，在孤子数较大时，于扩展的时空区域内近似佩里格林疯波动力学 [34]。

尽管这些研究表明，多孤子相互作用能够产生高度局域化的波，但要实现完全同步的碰撞——即所有参与的孤子在预定的时空点相干聚焦——需要对其位置和相位施加特定条件。通过引入渐近中间态

* 联系作者：gr81@sina.com

，Sun [35]将这些同步条件表述为位置参数与相位参数之间的线性关系，并证明由此产生的峰值振幅等于各个孤子振幅之和。对于速度彼此充分分离的大量等振幅孤子，Girotti 等人 [36] 推导了同步碰撞附近的局部 sinc 渐近，并在适当的随机振幅假设下确立了该轮廓的普适性。孤子同步的相关方面也在其他可积模型中得到了研究 [37–40]。

然而，在单个碰撞事件处的相干聚焦仅代表多孤子相互作用的一个方面，而多孤子相互作用还可以呈现丰富多样的时空动力学 [41–43]。在另一条平行的研究路线中，研究表明，在调制不稳定的连续波背景上，可以调节呼吸子的位置和相位来控制其相互作用，包括多次碰撞 [44–46]。对于零背景上的亮孤子，相应的问题是如何在单个多孤子场内，将多个碰撞事件安排在不同的时空点上。因此，理解如何通过适当选择参数来操纵光孤子，对于在光纤中安排此类事件具有重要意义。

近期的光纤实验已经实现了对亮孤子的参数和碰撞构型的控制。在这些研究中，逆散射理论指导了对单个孤子速度的选择性控制 [47] ，并为解释三孤子相互作用提供了框架：随着初始脉冲位置的变化，三孤子相互作用会从局域化的碰撞区域转变为三个不同的两两碰撞 [48]。在这一框架中，离散特征值决定组成孤子的振幅和速度，而与之相关的归一化数据则编码了它们的位置和相位信息。对于彼此充分分离的孤子，这些位置和相位信息可以用各个脉冲中心和载波相位来解释。对于给定的离散谱，改变归一化数据可以让我们研究不同的碰撞构型，同时不改变组成孤子的内在性质。这些考虑促使我们研究：是否可以通过适当选择孤子参数，在单个多孤子场内的多个时空点产生预定排列的同步碰撞，这类似于非零背景上高阶怪波的依赖于参数的时空图样。

这些事件的同时实现提出了超出单个碰撞的相容性要求。在固定各组成孤子的振幅和频率参数时，为同步一个事件而选定的位置和相位数据，也会进入涉及同一批孤子的其他事件的同步条件。因此，即使每个预定碰撞都能分别实现，也可能不存在一组共同的归一化数据，能够在同一个多孤子解中实现所有碰撞。即使这些事件能够共同实现，它们的相对位置也不一定能在保持同步的同时连续变化。因此，进一步的问题是：在离散谱固定且保持同步的情况下，事件中心的相对时空几何在多大程度上能够连续变化。

为回答这些问题，我们考虑通过逆散射变换 N构造的、具有零边界条件的聚焦型非线性薛定谔方程的无反射 [49–51]孤子解。基于其行列式表示，我们分析多个同步条件的相容性，并考察离散谱和碰撞组织如何约束联合可实现性以及相对事件位置的可调性。本文结构安排如下。第II 节介绍多孤子参数化，并针对指定碰撞事件推导局部同步条件和相容性条件。第III 节给出可实现性和刚性结果，展示三孤子和四孤子示例，并考察簇间分离和相对相位的同步约束如何体现于混合柔性族的傅里叶干涉中。附录提供相关证明、混合四孤子族的构造与可容许性检查，以及傅里叶分析的推导和数值细节。

II. 多孤子参数化与碰撞设计

A. 多孤子解与孤子参数化

在零边界条件下

$$q(x,t)\to 0, \qquad |x|\to\infty, \tag{2}$$

聚焦型 NLS 方程可通过 Zakharov–Shabat 逆散射变换（IST） [49]求解。假设离散谱由 N 个简单特征值组成

$$\kappa_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j, \qquad \beta_j>0, \qquad j=1,\dots,N, \tag{3}$$

假设这些特征值互不相同，但其实部以及相应的孤子速度不必互不相同。定义 $N\times N$ 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $(N+1)\times(N+1)$ 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 如下

$$G_{jm}=\frac{e^{-(g_j^*+g_m)}+e^{g_j^*+g_m}}{\kappa_j^*-\kappa_m}, \qquad 1\le j,m\le N, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & e^{g_1} & \cdots & e^{g_N} \\ e^{-g_1^*} & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{G} & \\ e^{-g_N^*} & & & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中，上标 $*$ 表示复共轭，且

$$g_j(x,t)=-\mathrm{i}\kappa_j x-2\mathrm{i}\kappa_j^2 t+\frac{c_j}{2}, \tag{6}$$

其中复赋范参数为

$$c_j = s_j + \mathrm{i}\vartheta_j. \tag{7}$$

在此设定下， N方程（1）的孤子解可表示为行列式形式 [35]:

$$q_N(x,t) = -2\mathrm{i}\frac{\det \boldsymbol{H}}{\det \boldsymbol{G}}. \tag{8}$$

与特征值κ_j 对应的单孤子解由方程（8）得到:

$$q_j(x,t) = \mathcal{A}_j \operatorname{sech} \mathcal{X}_j(x,t) e^{\mathrm{i}\mathcal{P}_j(x,t)}, \tag{9}$$

其中

$$\mathcal{A}_j = 2\beta_j, \qquad V_j = -4\alpha_j \tag{10}$$

分别为峰值振幅和速度。实包络坐标和载波相位为

$$\mathcal{X}_j(x,t) = 2\beta_j(x - V_j t) + s_j, \tag{11a}$$
$$\mathcal{P}_j(x,t) = -2\alpha_j x - 4(\alpha_j^2 - \beta_j^2)t + \vartheta_j. \tag{11b}$$

因此，孤子轨迹为

$$x_j^{(0)}(t) = V_j t + d_j, \qquad d_j = -\frac{s_j}{2\beta_j}. \tag{12}$$

B. 渐近位置和相位位移

对于两两不同的速度，当 $t \to \pm\infty$ 时， N孤子解渐近分解为 N 个彼此分离的基态孤子。每个孤子都保持其振幅 $\mathcal{A}_j$ 和速度 V_j，同时因与其他孤子的相互作用而获得有限的位置位移和载波相位位移 [49–51]。

等速孤子虽然仍对应于不同的单特征值，但在下文的局部表述中被视为一个共动子系统。为表示孤子 m 对这些位移的两两贡献，我们定义

$$\Omega_{jm} = \log\left(\frac{\kappa_j - \kappa_m}{\kappa_j - \kappa_m^*}\right), \qquad j \neq m. \tag{13}$$

全文采用主对数，其辐角取值范围为 $(-\pi,\ \pi]$。对数分支的一致变换 $\Omega_{jm} \mapsto \Omega_{jm} + 2\pi\mathrm{i}k_{jm}$, $k_{jm} \in \mathbb{Z}$ 不会改变任何实数散射位移，也不会影响模 2π 意义下的同步条件。

根据孤子同步的渐近中间态表述 [35], ，入射和出射的渐近中心轨迹可对称地写为

$$x_j^{(\pm)}(t) = V_j t + d_j \mp \frac{1}{2\beta_j}\sum_{m\neq j} \operatorname{sgn}(V_j - V_m)\operatorname{Re}\Omega_{jm}, \tag{14}$$

相应的载波相位为

$$\mathcal{P}_j^{(\pm)}(x,t) = \mathcal{P}_j(x,t) \pm \sum_{m\neq j} \operatorname{sgn}(V_j - V_m)\operatorname{Im}\Omega_{jm}. \tag{15}$$

这里，(–) 和 (+) 分别表示渐近入射态和出射态。

这些渐近态中的位置和相位修正包含了所有两两孤子相互作用的累积贡献。对于单个全局碰撞事件，相应的中间态为描述该碰撞提供了一个自然参照。具体而言，中间轨迹和相位通过对入射渐近态与出射渐近态的相应量取平均得到:

$$\frac{x_j^{(+)}(t) + x_j^{(-)}(t)}{2} = V_j t + d_j, \tag{16a}$$

$$\frac{\mathcal{P}_j^{(+)}(x,t) + \mathcal{P}_j^{(-)}(x,t)}{2} = \mathcal{P}_j(x,t). \tag{16b}$$

然而，当多个碰撞事件发生在不同的时空位置时，全局渐近位移会结合来自不同相互作用的贡献，因此无法直接归属于某个单独的事件。特别是，即使某个远端孤子不在局部碰撞核心中，它也可能使后续碰撞发生位移并产生相位变化。这促使我们利用两两相互作用因子 Ω_{jm} 构造逐事件描述，下面将对此进行阐述。

C. 碰撞事件的同步条件

考虑一个给定的、中心位于 μ的碰撞事件

$$P_\mu = (X_\mu, T_\mu), \tag{17}$$

其中参与碰撞的孤子汇集于 $\mathcal{C}_\mu \subseteq \{1,\dots,N\}$。补集

$$\mathcal{R}_\mu = \{1,\dots,N\} \setminus \mathcal{C}_\mu \tag{18}$$

包含远离碰撞核心的孤子。

对于每个 $r \in \mathcal{R}_\mu$，符号 $\epsilon_r^{(\mu)} \in \{-1,+1\}$ 用于标识孤子 r 的哪个渐近扇区包含事件中心 P_μ。具体而言，

$$\epsilon_r^{(\mu)} = \operatorname{sgn}[\operatorname{Re} g_r(P_\mu)]\,. \tag{19}$$

实部 $g_r(P_\mu) = 0$ 对应于扇区边界，因此不满足严格的扇区自洽条件（43），故予以排除。对于参与其中的孤子 $j \in \mathcal{C}_\mu$，远处孤子在局部事件期间仍保持充分分离，因此它们对孤子j 的扇区符号和散射贡献保持不变。相比之下，当参与其中的孤子具有两两不同的速度时，它们之间的散射贡献在碰撞前状态与

碰撞后状态之间会改变符号。因此，这些局部状态可以写为

$$\mathcal{Z}^{(\pm)}_{j|\mu}(x,t) = 2g_j(x,t) + \sum_{r\in\mathcal{R}_\mu} \epsilon_r^{(\mu)}\Omega_{jr} \pm \sum_{\substack{m\in\mathcal{C}_\mu \\ m\neq j}} \operatorname{sgn}(V_j - V_m)\Omega_{jm}, \quad j\in\mathcal{C}_\mu, \tag{20}$$

这里，(–) 和 (+) 分别表示有效 $\mathcal{C}_\mu$-孤子系统碰撞前和碰撞后的渐近态。

对于一般的局部表述，我们引入有效局部状态

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{eff}}_{j|\mu}(x,t) = 2g_j(x,t) + \sum_{r\in\mathcal{R}_\mu} \epsilon_r^{(\mu)}\Omega_{jr}, \qquad j\in\mathcal{C}_\mu. \tag{21}$$

当参与碰撞的速度两两不同时，式（21）与式（20）中碰撞前后状态的算术平均值一致。上述直接定义在部分参与碰撞的孤子速度相等时仍然有效。

若对所有 $j\in\mathcal{C}_\mu$，相应的有效局部状态都以指定事件点 P_μ 为中心，并且模 2π 具有共同相位 Φ_μ，则碰撞事件 μ 是局部同步的：

$$\operatorname{Re}\mathcal{Z}^{\mathrm{eff}}_{j|\mu}(P_\mu) = 0, \qquad j\in\mathcal{C}_\mu, \tag{22a}$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{Z}^{\mathrm{eff}}_{j|\mu}(P_\mu) = \Phi_\mu \pmod{2\pi}, \qquad j\in\mathcal{C}_\mu. \tag{22b}$$

式（22b）中的模相位关系允许每个参与碰撞的配对（j, μ）各自具有独立的整数分支 $n_{j\mu}\in\mathbb{Z}$。

这些条件描述了碰撞核心中参与碰撞的孤子的同步。若要将 $\mathcal{C}_\mu$视为孤立的碰撞事件，未参与碰撞的孤子也必须与碰撞核心保持足够的距离。对于每个 $r\in\mathcal{R}_\mu$，定义冻结扇区尾部坐标

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{loc}}_{r|\mu}(x,t) = 2g_r(x,t) + \sum_{\ell\neq r} \epsilon_\ell^{(r|\mu)}\Omega_{r\ell}. \tag{23}$$

此处，若 $\operatorname{Re} g_\ell(P_\mu) \geq 0$，则为 $\epsilon_\ell^{(r|\mu)} = +1$；否则为 -1。这些符号在 P_μ 处取值，并在尾部诊断中保持不变。我们要求

$$\operatorname{sech}\left|\operatorname{Re}\mathcal{Z}^{\mathrm{loc}}_{r|\mu}(P_\mu)\right| \leq \varepsilon, \qquad r\in\mathcal{R}_\mu, \tag{24}$$

其中，ε 是预先给定的相对尾部容差。

因此，我们引入隔离度量

$$L_\mu = \frac{1}{2}\min_{r\in\mathcal{R}_\mu}\left|\operatorname{Re}\mathcal{Z}^{\mathrm{loc}}_{r|\mu}(P_\mu)\right|. \tag{25}$$

若 $\mathcal{R}_\mu = \varnothing$，则设 $L_\mu = +\infty$。

对于满足同步条件的孤立事件 $P_\mu = (X_\mu,\ T_\mu)$（22），令

$$\mathcal{U}_\mu = \{(x,t) : |x - X_\mu| \leq h_x,\ |t - T_\mu| \leq h_t\}, \tag{26}$$

其中 $h_x,\ h_t > 0$ 均独立于 L_μ固定。对于足够大的 L_μ，远端扇区符号在整个 $\mathcal{U}_\mu$过程中保持不变。附录 A 中的行列式约化给出

$$q_N(x,t) = q^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{C}_\mu}(x,t) + O\left(e^{-2L_\mu}\right), \tag{27}$$

在 $\mathcal{U}_\mu$上一致成立。这里，$q^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{C}_\mu}$ 是约化的 $|\mathcal{C}_\mu|$-孤子解，其有效局部变量为

$$\widetilde{g}_{j|\mu} = g_j + \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathcal{R}_\mu}\epsilon_r^{(\mu)}\Omega_{jr}, \qquad j\in\mathcal{C}_\mu. \tag{28}$$

因此，远处孤子的有限效应通过 $\widetilde{g}_{j|\mu}$中的散射位移得以保留，而其余贡献则呈指数级小。

在同步中心 P_μ处，有效参与状态具有公共相位。附录 A中的中心值计算结合方程（27）得到

$$|q_N(P_\mu)| = \sum_{j\in\mathcal{C}_\mu}\mathcal{A}_j + O\left(e^{-2L_\mu}\right). \tag{29}$$

这些结果表明，对于适当选择的孤子碰撞，所报道的局部 Peregrine 近似同样适用于完整多孤子场中相应的孤立同步事件附近，但振幅剖面还存在 $O(e^{-2L_\mu})$ 的附加误差。 [31]

D. 针对预定碰撞事件的逆向表述

对于预定的事件中心，我们寻求满足目标集合局部同步条件的公共归一化数据

$$\mathcal{E}_{\mathrm{tar}} = \{(\mathcal{C}_\mu, X_\mu, T_\mu)\}_{\mu=1}^{K}, \tag{30}$$

其中 $\mathcal{C}_\mu$ 是参与集合，而 $P_\mu = (X_\mu,\ T_\mu)$ 是预定的中心。位置条件（22a）确定了事件 μ处所需的 s_j 值。我们将该值记为 $S^{(x)}_{j\mu}$：

$$S^{(x)}_{j\mu} = -2\beta_j(X_\mu - V_jT_\mu) - \sum_{r\notin\mathcal{C}_\mu}\epsilon_r^{(\mu)}\operatorname{Re}\Omega_{jr}. \tag{31}$$

对于固定的孤子 j，定义

$$\mathcal{I}_j = \{\mu : j\in\mathcal{C}_\mu\}, \tag{32}$$

作为作用于孤子 j的事件集合。在每个这样的事件中，

$$s_j = S^{(x)}_{j\mu}. \tag{33}$$

因此，当且仅当以下条件成立时，位置要求相容

$$S^{(x)}_{j\mu} = S^{(x)}_{j\nu}, \qquad \mu,\nu\in\mathcal{I}_j. \tag{34}$$

当此条件成立时，公式（33）重构 $s_{j\circ}$ 为表示相位条件，定义

$$B_{j\mu}^{(\phi)} = -2\alpha_j X_\mu - 4(\alpha_j^2 - \beta_j^2)T_\mu + \sum_{r\notin\mathcal{C}_\mu} \epsilon_r^{(\mu)} \operatorname{Im}\Omega_{jr}. \quad (35)$$

Th局部同步条件（22b）因 omes

$$\vartheta_j + B_{j\mu}^{(\phi)} = \Phi_\mu \pmod{2\pi}, \qquad j \in \mathcal{C}_\mu, \quad (36)$$

其中 Φ_μ 是公共事件相位。由于每个孤子都有一个归一化相位 ϑ_j，相位关系必须在每个闭合孤子–事件序列中模 2π 保持一致。闭合序列的形式为

$$\mathfrak{C}: \qquad j_1 - m_1 - j_2 - m_2 - \cdots - j_p - m_p - j_1, \quad (37)$$

其中 p 表示循环中交替的孤子–事件对的数量，并且

$$j_a, j_{a+1} \in \mathcal{C}_{m_a}, \qquad a = 1, \ldots, p, \qquad j_{p+1} = j_1. \quad (38)$$

该序列记录共同参与关系，不施加时间顺序限制。将事件 m_a 处的两个相位关系相减，得到

$$\vartheta_{j_{a+1}} - \vartheta_{j_a} = B_{j_a,m_a}^{(\phi)} - B_{j_{a+1},m_a}^{(\phi)} \pmod{2\pi}. \quad (39)$$

沿循环求和会消去孤子相位，得到

$$\sum_{a=1}^{p} \left[B_{j_{a+1},m_a}^{(\phi)} - B_{j_a,m_a}^{(\phi)} \right] = 2\pi n_{\mathfrak{C}}, \qquad n_{\mathfrak{C}} \in \mathbb{Z}. \quad (40)$$

这里 $n_{\mathfrak{C}}$ 记录了该序列周围的净整数相位分支。改变对数分支会使左端移动整数倍的 2π，这可以通过相应地重新标记 $n_{\mathfrak{C}}$ 来吸收。定义孤子–事件参与关系集合及其大小为

$$\mathcal{L} = \{(j,\mu) : j \in \mathcal{C}_\mu\}, \qquad N_{\text{inc}} := |\mathcal{L}| = \sum_{\mu=1}^{K} |\mathcal{C}_\mu|. \quad (41)$$

当相位闭合条件得到满足时，式（36）可确定所有相位（模 2π），但每个连通组中存在一个公共相位的不确定性。独立相位闭合条件的数量为

$$N_{\text{cyc}} = N_{\text{inc}} - N - K + N_{\text{comp}}, \quad (42)$$

其中， N_{comp} 是由共享孤子连接的组数。如果不存在闭合序列，相位重构不会施加额外约束。

扇区符号在重构之前指定。利用重构得到的范数数据，它们必须满足

$$\epsilon_r^{(\mu)} \operatorname{Re} g_r(P_\mu) > 0, \qquad r \notin \mathcal{C}_\mu. \quad (43)$$

每个事件还必须满足孤立条件（24）。

因此，对于固定谱、中心、成员关系和候选扇区，在一组相互独立的闭合序列上，式（34）和（40）决定了代数相容性。

III. 碰撞组织、可实现性与刚性

本节研究离散谱如何约束完整碰撞组织的可实现性，以及在保持同步的同时，能否在固定特征值下连续改变其相对时空几何。一般的可实现性和刚性分析也适用于孤子速度相等的情况，前提是离散特征值保持不同。

A. 碰撞组织空间

目标集合（30）同时指定参与碰撞的孤子和事件中心。现在我们对其碰撞组织进行分类，

$$\mathfrak{O} = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_K\}, \qquad |\mathcal{C}_\mu| \geq 2,$$

其中，事件中心被视为未知量，受同步条件约束。 $\mathfrak{O}$ 的关联结构记为 Γ ，并记录每个事件中有哪些孤子参与。

对于本文研究的碰撞分解问题，我们仅考虑完整碰撞组织。如果每一对无序孤子恰好包含在一个同步碰撞事件中，则称该组织是完整的。对于每个参与集合 $\mathcal{C}_\mu$，令

$$\mathcal{P}_\mu = \{\{i,j\} : i,j \in \mathcal{C}_\mu,\ i<j\}$$

表示事件 μ中包含的孤子对集合。完备性条件要求这些配对集合构成所有孤子对的一个划分：

$$\begin{aligned} &\bigcup_{\mu=1}^{K} \mathcal{P}_\mu = \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq N\}, \\ &\mathcal{P}_\mu \cap \mathcal{P}_\nu = \varnothing, \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (44)$$

因此，不同的参与集合可以共享个别孤子，但任何一对孤子都不能属于多个碰撞事件。

这一划分性质也限制了碰撞事件的可能数量及其规模。由于包含 m 个孤子的事件包含 $\binom{m}{2}$ 个两两相互作用通道，因此有

$$\sum_{\mu=1}^{K} \binom{|\mathcal{C}_\mu|}{2} = \binom{N}{2}. \quad (45)$$

等价地，从包含 $\binom{N}{2}$ 个事件的完全成对组织出发，将一个 m 孤子事件组合起来，会把 $\binom{m}{2}$ 个两两事件合并为一个同步事件，并使事件数量减少 $\binom{m}{2} - 1.$。因此，

$$K = \binom{N}{2} - \sum_{\mu:\,|\mathcal{C}_\mu|\geq 3} \left[\binom{|\mathcal{C}_\mu|}{2} - 1 \right]. \quad (46)$$

对于 $N \geq 3$，完全组织可根据其参与集合的分组模式分为三种类型。对于 $N = 3$，只有集体组织和完全成对组织是可能的。

单点集体碰撞。所有 N 孤子在单个事件中同步，

$$K = 1, \qquad \mathcal{C}_1 = \{1, \ldots, N\}, \qquad P_1 = P_c. \tag{47}$$

聚焦型非线性薛定谔方程文献中对单点集体碰撞这一构型已有充分研究，在此作为碰撞分裂的参考组织。

部分分解组织。存在多个碰撞事件，同时至少有一个事件仍包含三个或更多孤子，

$$K > 1, \qquad \max_{1 \leq \mu \leq K} |\mathcal{C}_\mu| \geq 3. \tag{48}$$

这类组织描述了碰撞分裂的中间形态，其中一个或多个集体碰撞核心仍然存在，而其他两两相互作用通道则分离为不同的碰撞事件。

完全两两分解组织。每个碰撞事件恰好包含两个孤子，

$$|\mathcal{C}_\mu| = 2, \qquad \mu = 1, \ldots, K. \tag{49}$$

在这种情况下，每个事件都对应一个孤子对，而完备性条件给出

$$K = \binom{N}{2}. \tag{50}$$

B. 碰撞组织的可实现性

为考察离散谱和碰撞组织如何影响可实现性，我们利用第 IID 节中的相容条件来约束事件中心。对于完整碰撞组织，所有事件都通过共享孤子相连，因此 $N_{\mathrm{comp}} = 1$。我们将事件中心坐标收集在

$$\mathbf{P} = (X_1, T_1, \ldots, X_K, T_K)^{\mathsf{T}}. \tag{51}$$

为每个孤子选择一个参考事件 $\mu_j^0 \in \mathcal{I}_j$，式（34）给出，对于 $\mu \in \mathcal{I}_j \setminus \{\mu_j^0\}$，

$$X_\mu + 4\alpha_j T_\mu - X_{\mu_j^0} - 4\alpha_j T_{\mu_j^0} = b_{j\mu}^{(x)}, \tag{52}$$

其中散射位移差为

$$b_{j\mu}^{(x)} = \frac{1}{2\beta_j} \left[\sum_{r \notin \mathcal{C}_{\mu_j^0}} \epsilon_r^{(\mu_j^0)} \operatorname{Re} \Omega_{jr} - \sum_{r \notin \mathcal{C}_\mu} \epsilon_r^{(\mu)} \operatorname{Re} \Omega_{jr} \right]. \tag{53}$$

位置行的数量为

$$M_x = \sum_{j=1}^{N} (|\mathcal{I}_j| - 1) = N_{\mathrm{inc}} - N. \tag{54}$$

独立相位条件的数量由式（42）得出：

$$N_{\mathrm{cyc}} = N_{\mathrm{inc}} - N - K + 1. \tag{55}$$

选择一组独立的闭合序列$\mathfrak{C}_1$，…，$\mathfrak{C}_{N_{\mathrm{cyc}}}$。将式（40）按式（$\ell$）中的编号展开第 37 个基循环，得

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p} \Big\{ & 2(\alpha_{j_a} - \alpha_{j_{a+1}}) X_{m_a} \\ & + 4\big[(\alpha_{j_a}^2 - \beta_{j_a}^2) - (\alpha_{j_{a+1}}^2 - \beta_{j_{a+1}}^2)\big] T_{m_a} \Big\} \\ & = b_\ell^{(\phi,0)} + 2\pi n_\ell, \qquad n_\ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{56}$$

零相位分支处的散射贡献为

$$\begin{aligned} b_\ell^{(\phi,0)} = \sum_{a=1}^{p} \Bigg[& \sum_{r \notin \mathcal{C}_{m_a}} \epsilon_r^{(m_a)} \operatorname{Im} \Omega_{j_a r} \\ & - \sum_{r \notin \mathcal{C}_{m_a}} \epsilon_r^{(m_a)} \operatorname{Im} \Omega_{j_{a+1} r} \Bigg]. \end{aligned} \tag{57}$$

将位置条件与相位条件结合，可得到关于事件中心的线性相容系统。方程总数为

$$M = M_x + N_{\mathrm{cyc}} = 2N_{\mathrm{inc}} - 2N - K + 1 \tag{58}$$

令 $A_{\Gamma,\,x}$ 包含位置行，$A_{\Gamma,\,\phi}$ 包含相位循环行。我们写作

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} A_{\Gamma,x} \\ A_{\Gamma,\phi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times 2K}. \tag{59}$$

With

$$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_{N_{\mathrm{cyc}}})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Z}^{N_{\mathrm{cyc}}}, \tag{60}$$

右端项可整理为

$$\mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{n}) = \mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{0}) + 2\pi \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{M_x} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \tag{61}$$

其中，$\mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{0})$汇集了位置和零分支相位的右端项。因此，兼容系统为

$$A_\Gamma(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{P} = \mathbf{b}_\Gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{n}), \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{N_{\mathrm{cyc}}}. \tag{62}$$

谱确定 A_Γ，而散射位移连同远端扇区符号 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和整数分支$\mathbf{n}$，则确定右端项。附录B给出了构成$\mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{0})$的显式位置与零分支相位右端项，从而得到完整的$\mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{n})$，以及 $A_{\Gamma,x}$ 和$A_{\Gamma,\phi}$的分块构造。

设 $L_\Gamma \in \mathbb{R}^{M\times\rho_\Gamma}$ 的列构成核 A_Γ^{T}的一组基，其中

$$\rho_\Gamma = \dim\ker A_\Gamma^{\mathsf{T}} = M - \operatorname{rank} A_\Gamma. \tag{63}$$

对于给定的组织 Γ，相应的谱选择条件为

$$F_\Gamma(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\epsilon},\mathbf{n}) := L_\Gamma^{\mathsf{T}}\mathbf{b}_\Gamma(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\epsilon},\mathbf{n}) = 0. \tag{64}$$

命题 1（约化同步系统的可实现性）。对于指定的组织 Γ 以及固定的谱、扇区分配和相位分支，存在满足 Γ 的所有局部同步方程的事件中心和公共范数化数据，当且仅当式（64）成立。

证明。考虑兼容系统（62）。由于 L_Γ 的列构成了 A_Γ^{T}的核的一组基，

$$F_\Gamma = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{b}_\Gamma \perp \ker A_\Gamma^{\mathsf{T}} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{b}_\Gamma \in \operatorname{Col} A_\Gamma.$$

因此，式（62）有一个关于事件中心的解。第 IID 节中的重构随后给出公共范数化数据，且相差一个全局相位。反过来，任何同步实现都满足式（62），因此$F_\Gamma = 0$。□

当且仅当对于至少一种扇区分配和整数相位分支（$\boldsymbol{\epsilon}$，$\mathbf{n}$），选择规则成立时，该谱在代数上支持此组织。

代数相容条件刻画了候选碰撞几何。物理可容许性还要求满足扇区自洽条件（43）、孤立条件（24），以及不同事件中心之间保持间距。若仍存在自由事件坐标，这些要求便确定了相容解族中物理上可容许的部分。

C. 谱刚性与相容性平衡

在固定谱、扇区分配和相位分支下，两个相容几何 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}'$ 满足方程（62）。因此，它们的差 $\delta\mathbf{P} = \mathbf{P}' - \mathbf{P}$ 满足

$$A_\Gamma\delta\mathbf{P} = 0. \tag{65}$$

核 $\ker A_\Gamma$ 包含一个二维平凡子空间，该子空间由所有事件中心在空间和时间中的均匀平移生成。除去这一子空间后，定义内部形变维数，

$$D_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\kappa},\Gamma) = \dim\ker A_\Gamma - 2. \tag{66}$$

因此，$D_{\mathrm{int}} = 0$ 意味着相对事件几何具有刚性，而 $D_{\mathrm{int}} > 0$ 则允许非平凡的代数内部形变。

对于 $\delta\mathbf{P} \in$ 核 A_Γ，齐次位置条件（52）使得 $\delta X_\mu + 4\alpha_j\delta T_\mu$ 与包含孤子的事件无关 j。将这一公共值记为

$$\xi_j := \delta X_\mu + 4\alpha_j\delta T_\mu = -\frac{\delta s_j}{2\beta_j}, \qquad j \in \mathcal{C}_\mu. \tag{67}$$

最后一个等式通过改变位置同步条件（22a）得到。

改变相位同步条件可得 (22b)

$$\delta\vartheta_j = \delta\Phi_\mu + 2\alpha_j\delta X_\mu + 4(\alpha_j^2 - \beta_j^2)\delta T_\mu, \qquad j \in \mathcal{C}_\mu. \tag{68}$$

由于 $\delta\mathbf{P} \in$ 核 A_Γ，相位变化可以在相差一个公共加性常数的意义下保持一致地重构，如附录 B所示。结合 $\delta s_j = -2\beta_j\xi_j$，它们确定了归一化数据变分。

对于每个特征值 κ_j，定义谱点

$$\mathbf{p}_j = \big(|\kappa_j|^2, \alpha_j\big)^{\mathsf{T}}, \tag{69}$$

并令

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

引入

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \begin{pmatrix} \xi_j \\ \delta\vartheta_j - 2\alpha_j\xi_j \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_\mu &= \begin{pmatrix} \delta X_\mu \\ \delta\Phi_\mu \end{pmatrix}, \qquad \omega_\mu = 4\delta T_\mu. \end{aligned} \tag{71}$$

方程（67）和（68）随后给出

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{a}_\mu + \omega_\mu J\mathbf{p}_j, \qquad j \in \mathcal{C}_\mu. \tag{72}$$

这些辅助运动表示固定特征值处归一化数据的变化。对于每个事件，方程（72）描述参与其中的辅助谱点的共同无穷小刚体运动，该运动具有两个平移参数和一个旋转参数。这些约束可由任意满足以下条件的满行秩矩阵 $R_\mu(\mathbf{p})$ 表示

$$\begin{aligned} \ker R_\mu(\mathbf{p}) = \big\{(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathcal{C}_\mu} : \exists\, \mathbf{a}_\mu \in \mathbb{R}^2,\ \omega_\mu \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_j = \mathbf{a}_\mu + \omega_\mu J\mathbf{p}_j \quad \text{for all } j \in \mathcal{C}_\mu\big\}. \end{aligned} \tag{73}$$

由于每个事件至少包含两个不同的谱点，

$$\operatorname{rank} R_\mu = 2|\mathcal{C}_\mu| - 3. \tag{74}$$

对于双孤子事件，式（72）意味着

$$(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^{\mathsf{T}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) = 0. \tag{75}$$

这是关于该对（$\mathbf{p}_i$、$\mathbf{p}j$）的通常无穷小杆约束。然而，对于集体事件，R_μ 会对所有参与碰撞的孤子施加共同刚体运动条件（72）。

将局部约束嵌入

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1^\mathsf{T}, \dots, \mathbf{u}_N^\mathsf{T})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$$

将其在所有指定事件上叠加，即得到全局刚性系统

$$R_\Gamma(\mathbf{p})\mathbf{u} = 0. \tag{76}$$

这里，每个共享孤子在其所有事件中都有一个向量$\mathbf{u}_j$。全局平面平移和旋转属于 $\ker\ R_\Gamma$，因此 $\dim \ker\ R_\Gamma \geq 3$。以下定理确定事件变形空间与谱变形空间在去除其平凡运动后的对应关系。

定理 1（谱刚性表示）。对于具有不同特征值且存在代数可实现分支的完全组织，令 $\mathcal{T}_A \subseteq \ker A_\Gamma$ 为事件统一平移构成的二维空间

$$\delta X_\mu = a, \qquad \delta T_\mu = b \qquad \text{for all } \mu,$$

其共同参数为 $a,\ b \in \mathbb{R}$。令 $\mathcal{T}_R \subseteq \ker\ R_\Gamma$ 为辅助谱点的全局无穷小刚体运动构成的三维空间，

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{a} + \omega J \mathbf{p}_j \qquad \text{for all } j,$$

其共同参数为$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ 和 $\omega \in \mathbb{R}$。

对应映射 $\Pi : \ker\ R_\Gamma \to \ker A_\Gamma$ 在附录 B中构造，诱导出一个线性同构

$$\overline{\Pi} : \ker R_\Gamma / \mathcal{T}_R \xrightarrow{\cong} \ker A_\Gamma / \mathcal{T}_A, \qquad [\mathbf{u}] \longmapsto [\Pi(\mathbf{u})]. \tag{77}$$

这里，$[\mathbf{u}]$ 和 $[\Pi(\mathbf{u})]$分别表示模$\mathcal{T}_R$ 和 $\mathcal{T}_A$的等价类。因此，去除相应的平凡运动后，辅助谱运动与事件变形之间存在一一线性对应关系。

因此，

$$D_{\text{int}} = \dim \ker R_\Gamma - 3 = 2N - 3 - \operatorname{rank} R_\Gamma. \tag{78}$$

因此，当且仅当下式成立时，相对事件几何是刚性的：

$$\operatorname{rank} R_\Gamma = 2N - 3. \tag{79}$$

证明。 附录 B证明了商空间同构。取维数并利用 $\dim\ \mathcal{T}_A = 2$ 和 $\dim \mathcal{T}_R = 3$ 可得 $D_{\text{int}} = \dim$核 $R_\Gamma - 3$。由于 R_Γ 有$2N$ 列，秩-零化度定理给出式（78）。令式（79）中的 $D_{\text{int}} = 0$ 取为式（78）中的值，即得刚性判据（□

推论 1 (非共线谱的刚性)。 对于完全组织，假设谱点$\mathbf{p}_j = (|\kappa_j|^2, \alpha_j)^\mathsf{T}$ 并非全部共线。那么，在每个代数上可实现的分支中，相容事件中心在空间和时间上只允许均匀平移。因此，

$$D_{\text{int}} = 0. \tag{80}$$

证明。 对于同一事件的参与者，式（72）意味着成对约束（75）。由于组织是完全的，这一约束对每一对谱点都成立。

选取三个不共线的谱点，标记为 1、2 和 3。这些点上的两两约束仅允许共同的平面无穷小平移和旋转。因此，存在$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ 和 $\omega \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a} + \omega J \mathbf{p}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

减去这个全局刚性运动，写成

$$\widetilde{\mathbf{u}}_j = \mathbf{u}_j - \mathbf{a} - \omega J \mathbf{p}_j.$$

残余向量仍满足所有两两约束，并且 $\widetilde{\mathbf{u}}_i = 0$ 对于 $i = 1,\ 2、3$。

对于任意剩余的谱点 $\mathbf{p}_j$，它与所选三个点之间的约束给出

$$(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)^\mathsf{T} \widetilde{\mathbf{u}}_j = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

由于所选的三个点不共线，向量 $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$ 中至少有两个线性无关。因此 $\widetilde{\mathbf{u}}_j = 0$。

因此，每个 $\mathbf{u} \in$ 核 R_Γ 都是全局无穷小平面刚性运动。由于所有此类运动都属于核 R_Γ，

$$\ker R_\Gamma = \mathcal{T}_R, \qquad \dim \ker R_\Gamma = 3.$$

定理 1 给出 $D_{\text{int}} = 0$。 □

离散谱和完整的碰撞组织固定后，A_Γ 也随之固定。扇区指派和整数相位分支的变化，使右端项只能取离散值。在事件中心连续变形的过程中，$A_\Gamma \mathbf{P}$ 是连续的，因此右端项必须保持不变。因此，这种变形前后事件中心向量之差属于 $\ker A_\Gamma$。根据前述刚性结果，$\ker\ A_\Gamma = \mathcal{T}_A$，所以此类变形仅限于所有事件中心共同进行时空平移。

供后文使用，定义

$$\mathcal{D}_{ijk} = \det \begin{pmatrix} 1 & |\kappa_i|^2 & \alpha_i \\ 1 & |\kappa_j|^2 & \alpha_j \\ 1 & |\kappa_k|^2 & \alpha_k \end{pmatrix}. \tag{81}$$

那么，$\mathcal{D}_{ijk} = 0$ 当且仅当这三个谱点（$|\kappa_i|^2$、α_i）、（$|\kappa_j|^2$、α_j）和（$|\kappa_k|^2$、α_k）共线。因此，推论1 表明

$$D_{\text{int}} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}_{ijk} = 0 \qquad \text{for every triple } (i, j, k). \tag{82}$$

因此，共线性是内部自由度的必要条件，但并非充分条件：集体事件约束仍然可能施加刚性。代数可实现性还需要满足谱选择条件。

a. 相容性平衡。结合式（66）和（63）可得

$$\rho_\Gamma = \Delta_\Gamma + D_{\rm int}, \tag{83}$$

其中约束盈余

$$\Delta_\Gamma := M - 2K + 2 = 2N_{\rm inc} - 2N - 3K + 3 \tag{84}$$

仅取决于组织。在组织固定时，秩亏损会使 $D_{\rm int}$ 和 $\mathbf{b}_\Gamma$ 上独立线性条件的数量 ρ_Γ 同幅增加。对于代数可实现的刚性分支， $D_{\rm int} = 0$，因此 $\rho_\Gamma = \Delta_\Gamma$.

b. 两个代表性族的明确推论。

推论 2 （完全成对组织）。对于所有 $\binom{N}{2}$ 成对事件均已指定的 $N \geq 3$，内部形变维数由辅助谱点 $\mathbf{p}^j$ 的共线性决定。如果这些点并非全部共线，那么

$$D_{\rm int} = 0, \qquad \rho_\Gamma = \frac{(N-2)(N-3)}{2}. \tag{85}$$

如果这些点全部共线，那么

$$D_{\rm int} = N - 2, \qquad \rho_\Gamma = \frac{(N-1)(N-2)}{2}. \tag{86}$$

推论 3 （一个集体事件，其余部分为成对事件）。考虑一个完全组织，其中包含一个m-孤子集体事件，其余相互作用均为成对事件，且 $3 \leq m \leq N$。如果辅助谱点并非全部共线，那么

$$D_{\rm int} = 0, \qquad \rho_\Gamma = \frac{(N-m)(N+m-5)}{2}. \tag{87}$$

如果辅助谱点全部共线，那么

$$D_{\rm int} = N - m, \qquad \rho_\Gamma = \frac{(N-m)(N+m-3)}{2}. \tag{88}$$

推论2 和3 的证明见附录C。对于代数可实现分支，$D_{\rm int}$ 的相应取值给出了相容的相对事件几何的维数。

在共线轨迹上，将 m 个孤子之间的两两相互作用替换为单个集体事件，会使内部形变维数减少 $m-2$。特别地，即使辅助谱点全部共线，端点 $m = N$ 仍是刚性的。对于一般的完全组织，内部形变维数由秩 R_Γ 通过式（78）确定，而相容性计数则由式（83）给出。

D. 谱点选择与形变示例

以下的三孤子和四孤子示例说明了这些刚性替代方案，并确定了谱选择条件。

1. *Three-soliton organizations*

对于 $N = 3$，唯一的完全组织是集体事件 $\{123\}$ 和完全成对组织$\{12, 13, 23\}$，如第III A节所述。集体组织具有（$D_{\rm int}$， ρ_Γ） = （0， 0），而推论2给出

$$(D_{\rm int}, \rho_\Gamma) = \begin{cases} (0,0), & \mathcal{D}_{123} \neq 0, \\ (1,1), & \mathcal{D}_{123} = 0, \end{cases} \tag{89}$$

对于完全两两组织。

对于非共线辅助谱点，这种组织在代数上可实现且具有刚性。如果孤子速度也各不相同，相容性方程表明，$|\mathrm{Re}\, g_r(P_\mu)|$ 会无限增大，并且随着整数相位分支n 趋于 $+\infty$，事件中心彼此远离。适当选择扇区符号后，当正 n足够大时，即可得到完全两两组织的物理可接受实现。

对于共线点，只有满足相容条件时，才存在一参数的相对事件几何族。

我们设

$$\epsilon_{12} := \epsilon_3^{(12)}, \quad \epsilon_{13} := \epsilon_2^{(13)}, \quad \epsilon_{23} := \epsilon_1^{(23)},$$

其中 ϵ_{12}， ϵ_{13}， $\epsilon_{23} \in \{-1, +1\}$。

a. 刚性不共线实现。考虑固定谱

$$\kappa_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad \kappa_2 = \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad \kappa_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{i}. \tag{90}$$

对于这个谱，

$$\mathcal{D}_{123} = -\frac{1}{32} \neq 0,$$

因此，完全成对组织是刚性的，且 ($D_{\rm int}$， ρ_Γ) =(0， 0)。

在这一相同的谱下，通过选择不同的归一化数据，既可以实现集体组织，也可以实现完全成对组织。对于两两实现，

$$(\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}) = (-1, +1, -1),$$

直接代入可验证，三个不同的两两事件中心满足位置与相位同步条件。此外，

$$\max_{\mu,r} \mathrm{sech}\left|\mathrm{Re}\, \mathcal{Z}^{\rm loc}_{r|\mu}(P_\mu)\right| < 1.32 \times 10^{-6},$$

因此，规定的扇区与隔离条件均得到满足。两种实现的对比见图1。

因此，同一离散谱通过不同的归一化数据支持两种不同的完全组织，而完全两两实现在其固定扇区和相位分支内仍保持刚性。

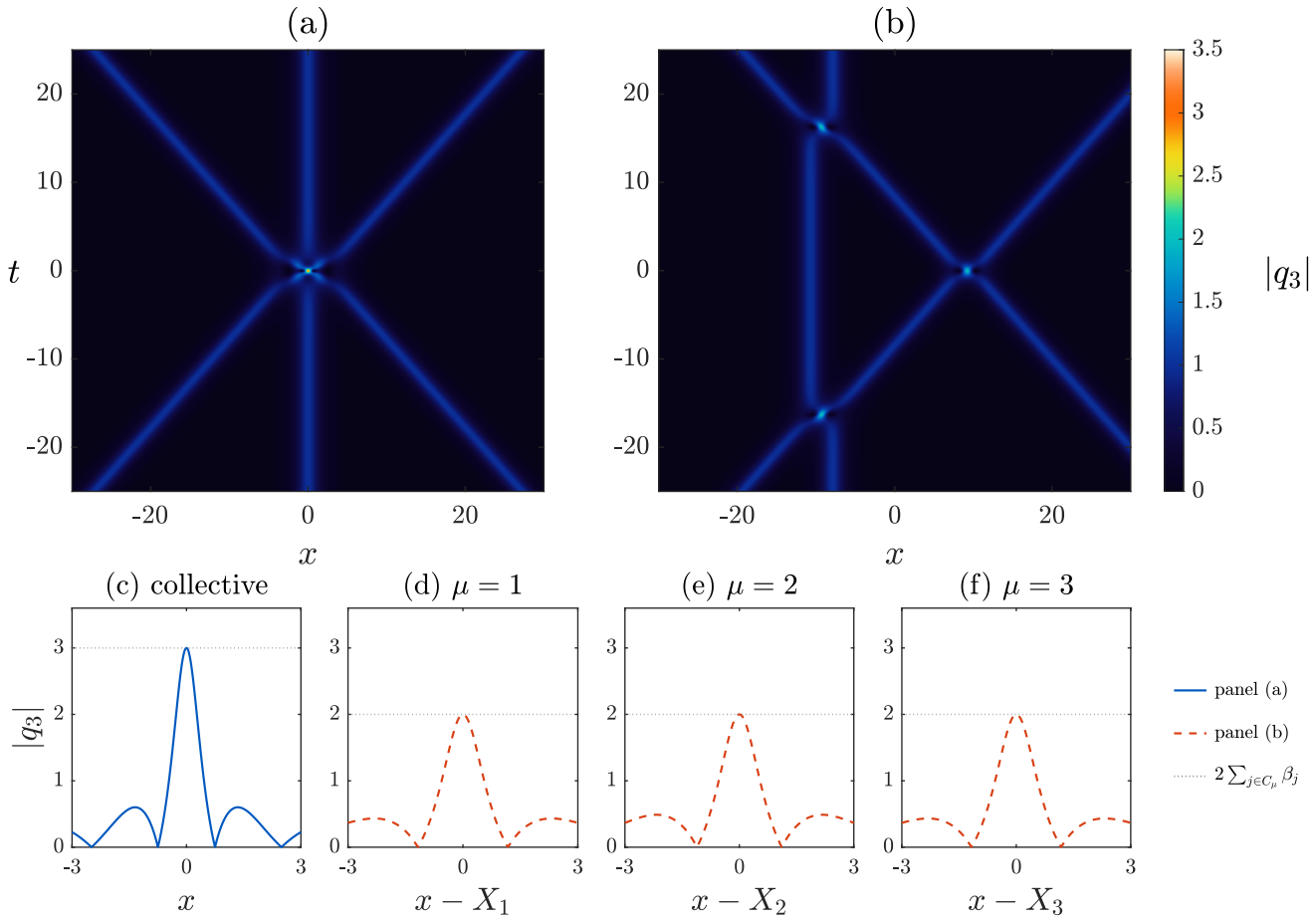

图1. 固定谱（90）对应的三孤子碰撞构型。集体实现采用 $(c_1, c_2, c_3) = (0,\ 0, 0)$。对于完全两两实现，$c_1 = \frac{1}{2}\ln 17 - \Delta - \mathrm{i}_2\Delta$、$c_2 = \Delta - \frac{1}{2}\ln 17 + \mathrm{i}(\arctan 4 - 2\pi)$ 和 $c_3 = \frac{1}{2}\ln 17 - \Delta + \mathrm{i}(2\arctan 4 + \frac{1}{2}\Delta)$，其中 $\Delta = 4\pi - \frac{1}{4}\ln 85 - 2\arctan 2$。同步中心为 $P_{12} = (-\Delta, -\tau)$、$P_{13} = (\Delta, 0)$ 和 $P_{23} = (-\Delta, \tau)$，其中 $\tau = 2\Delta - \frac{1}{2}\ln 85$。上方面板展示集体实现和完全两两实现的场，下方面板展示相应碰撞传播距离处的延迟时间剖面。灰色虚线表示同步振幅和。

b. 灵活共线实现。为了构造一种灵活实现，令 $r > 0$ 并设

$$(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{r}{2}, r, 2r\right), \qquad \kappa_j = \frac{z_j + \mathrm{i}}{z_j - \mathrm{i}}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{91}$$

由于 $|\kappa_j| = 1$，辅助谱点 $\mathbf{p}_j = (1,\ \alpha_j)^{\mathsf{T}}$ 共线，因此由式（89）可得 $D_{\mathrm{int}} = 1$ 和 $\rho_\Gamma = 1$。此外，z_j 的几何级数还给出 $\mathrm{Re}\,\Omega_{12} = \mathrm{Re}\,\Omega_{23} = -\ln 3$ 和 $\mathrm{Re}\Omega_{13} = -\ln(5/3)$。

考虑候选扇区分配 $(\epsilon_{12},\ \epsilon_{13},\ \epsilon_{23}) = (-1,\ +1,\ -1)$。固定 $P_{13} = (0,\ 0)$ 以消除两个全局时空平移，并选择全局相位规范 $\vartheta_1 = 0$。由于 $D_{\mathrm{int}} = 1$，还剩下一个实相对自由度，我们将其参数化为

$$X_{12} + 4\alpha_2 T_{12} = X_{23} + 4\alpha_2 T_{23} = -\frac{D}{2}. \tag{92}$$

利用位置重构 $s_j = S_{j\mu}^{(x)}$ 和相位关联关系（36），可得

$$\begin{aligned} c_1 &= \ln 3, \\ c_2 &= -\ln 3 - \mathrm{i}\kappa_2 D + \mathrm{i}w_1 \ln 5, \\ c_3 &= \ln 3 + \mathrm{i}\pi, \\ w_j &= \frac{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{z_j - z_j^{-1}}{2}. \end{aligned} \tag{93}$$

其余位置方程确定了 P_{12} 和 P_{23}关于 D的仿射关系。

对于这些重构事件中心，局部相位同步条件在P_{12}和 P_{13}处自动满足。在 P_{23} 处剩余的相位失配为 $(w_1 - w_3)\ln 5 - \pi$，它必须等于 $2\pi n$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。选择 $n = -1$并使用 $w_1 - w_3 = -\frac{3}{4}(r + r^{-1})$，得到 $r + r^{-1} = 4\pi/(3\ln 5)$。因此我们取较小的正根

$$r = \frac{3\ln 5}{2\pi + \sqrt{4\pi^2 - 9\ln^2 5}}. \tag{94}$$

对于这一选择，所有三个成对事件都满足模 2π 的局部相位同步条件。

固定 r 后，随着 D 变化，离散谱、扇区分配和整数相位分支保持不变，而相对事件几何沿着一维相容族移动。

我们将注意力限制在子区间 $32 \le D \le 56$ 上。在这个固定分支上，扇区裕度、参与隔离检验的实远端局部坐标，以及相关的事件时间差都是 D 的仿射函数，并在整个区间内保持符号不变。因此，只需进行端点检验，即可验证整个区间上的可容许性。它们恢复了指定的扇区分配，并给出

$$\begin{aligned} &T_{12} < T_{13} = 0 < T_{23}, \\ &\max_{\mu,r} \operatorname{sech} \left| \operatorname{Re} \mathcal{Z}^{\mathrm{loc}}_{r|\mu}(P_\mu) \right| < 5.0 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

因此，整个子区间在物理上都是可容许的。在其中改变 D，即可实现式（89）所预言的一维内部自由度。图 2 展示了两个端点成员 $D = 32$ 和 $D = 56$。

c. 相容性排除具有共线辅助点的谱。仅有共线性并不能保证完全成对组织的可实现性。考虑

$$\kappa_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \qquad \kappa_2 = \mathrm{i}, \qquad \kappa_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}. \tag{95}$$

由于 $|\kappa_j| = 1$，辅助谱点$\mathbf{p}^j = (1,\ \alpha_j)^{\mathsf{T}}$共线，因此式（89）给出 $D_{\mathrm{int}} = 1$ 和$\rho_\Gamma = 1$。因此，必须满足一个非平凡的相容条件。

对于定向环

$$1 - 12 - 2 - 23 - 3 - 13 - 1,$$

利用附录B中的构造，相容矩阵的左零空间为一维，由下式生成

$$\ell = (-1, 0, 1, 1)^{\mathsf{T}}.$$

选择条件 $\ell^{\mathsf{T}}\mathbf{b}_\Gamma(n) = 0$ 因此简化为

$$\begin{aligned} n &= \frac{\epsilon_{13}}{2} + \frac{2\epsilon_{13}L - (\epsilon_{12} + \epsilon_{23})\ln 2}{2\pi\sqrt{3}}, \\ L &= \ln(2 + \sqrt{3}), \qquad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{96}$$

其中使用了式（13）中的主对数。

由于 $L > \ln 2$，右端项中的第二项与 ϵ_{13} 同号。此外，对于每一种扇区分配，

$$0 < \left| \frac{2\epsilon_{13}L - (\epsilon_{12} + \epsilon_{23})\ln 2}{2\pi\sqrt{3}} \right| \le \frac{L + \ln 2}{\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{2}. \tag{97}$$

因此，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < n < 1 \quad &\text{if } \epsilon_{13} = +1, \\ -1 < n < -\frac{1}{2} \quad &\text{if } \epsilon_{13} = -1, \end{aligned}$$

这与 $n \in \mathbb{Z}$不相容。因此，在（95）处，没有任何扇区分配或整数相位分支能够实现完全成对组织，尽管同一谱支持具有 $(c_1,\ c_2,\ c_3) = (0,\ 0,\ 0)$ 的集体碰撞。

对于三孤子成对组织，这些例子区分了谱条件的两种作用：共线性决定是否存在内部变形模态，而相容条件（64）决定成对分支是否可实现。

2. *Four-soliton organizations*

根据第 IIIA节的分类，在重新标记的意义下，完整的四孤子组织为

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathrm{c}} &= \{1234\}, \\ \Gamma_{\mathrm{m}} &= \{123, 14, 24, 34\}, \\ \Gamma_{\mathrm{p}} &= \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}. \end{aligned} \tag{98}$$

我们将上述一般相容性和刚性结果应用于这三种组织，并假设速度两两不同。

a. 集体碰撞。对于 Γ_{c}，不存在位置相容行或相位循环。因此，选择条件是空泛的，推论 3 在 $m = N = 4$处给出 $(D_{\mathrm{int}},\ \rho_\Gamma) = (0,\ 0)$。因此，在所述范围内，对于任意谱，集体组织在代数上均可实现。

b. 部分分辨碰撞。考虑混合组织 $\Gamma_{\mathrm{m}} = \{123, 14, 24, 34\}$。对于 $N = 4$和$m = 3$，推论 3给出 $(D_{\mathrm{int}},\ \rho_{\Gamma_{\mathrm{m}}}) = (0,\ 1)$，适用于非共线辅助谱点；当辅助谱点共线时，则给出 $(1,\ 2)$。接下来需要明确相应的相容条件。

固定 $P_{123} = (0,\ 0)$，并将其余事件中心收集于 $\mathbf{P}_{\mathrm{m}} = (X_{14},\ T_{14},\ X_{24},\ T_{24},\ X_{34},\ T_{34})^{\mathsf{T}}$。令 $\widehat{A}_{\mathrm{m},\ x}$和 $A_{\mathrm{m},\ \phi}$ 分别表示经过该规范固定后的通用兼容系统（62）中的位置块与相位块。

对于不同的速度，秩$A_{\mathrm{m},\ x} = 5$，因此位置相容几何构成一个一维仿射族。设 $\mathbf{P}_{\mathrm{m},\ 0}$ 是满足 $T_{14} = 0$ 的唯一解，并且

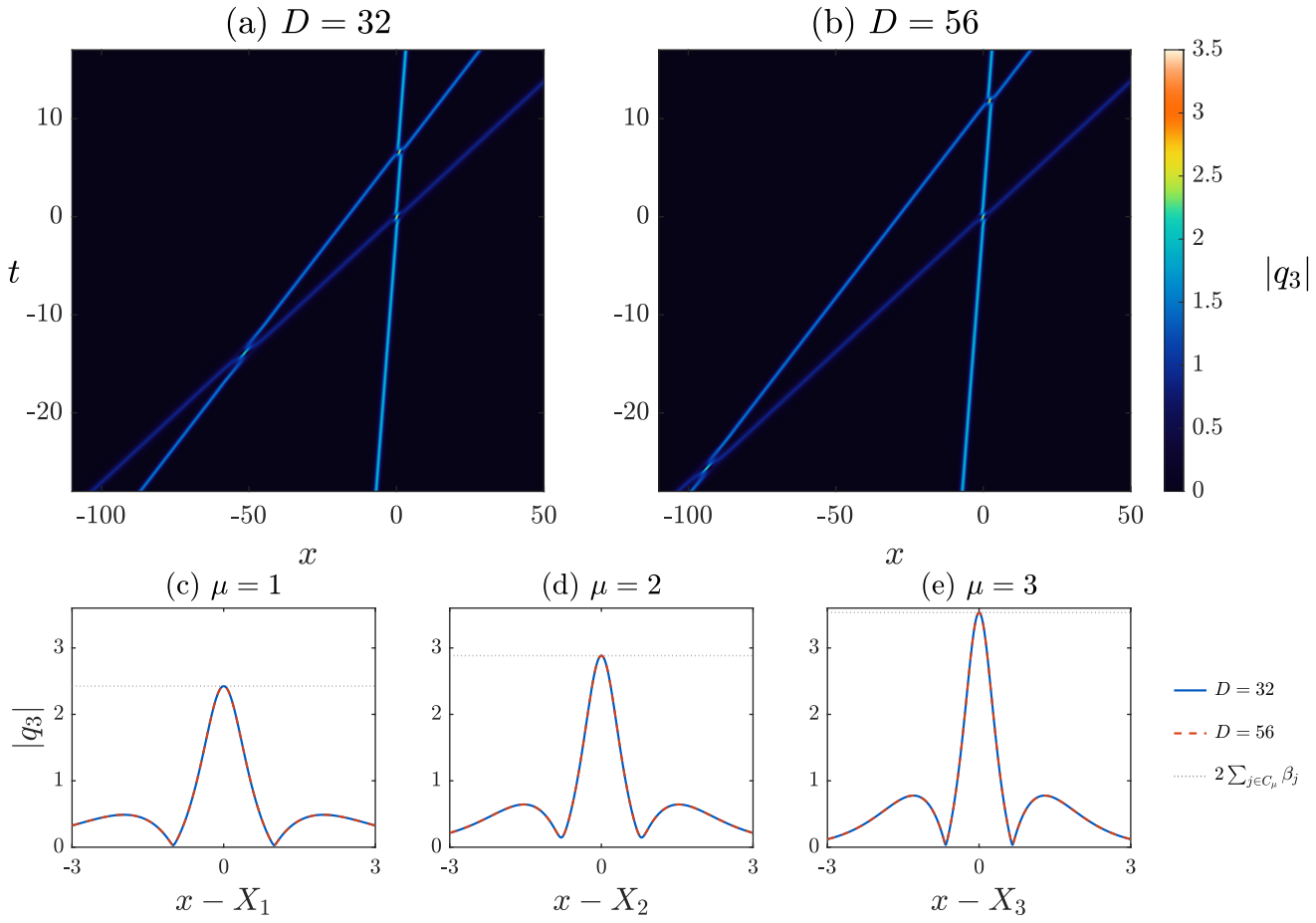

图2. 灵活三孤子族的两个成员，其中 $D = 32$ 和 $D = 56$使用公式（91）和（94）中的固定谱，以及公式（93）中的归一化数据。对于所绘制的实现， $P_{13} = (0, 0)$， $T_{12} = (A - D/2)/[4(\alpha_2 - \alpha_1)]$， $X_{12} = -D/2 - 4\alpha_2 T_{12}$ $T_{23} = B - D/2/[4\alpha_2 - \alpha_3]$， $X_{23} = -D/2 - 4\alpha_2 T_{23}$ $A = 5/2\beta_1$ $B = 5/2\beta_3$ ，（）（）以及，其中 ln（）和 ln（）。随着 D 变化，两两碰撞的相对几何发生变化，而扇区分配和相位分支保持不变。下方面板显示了相应碰撞传播距离处的延迟时间剖面。灰色虚线表示同步对振幅和。

设 $\mathbf{v}$ 张成 $\ker A_{\mathrm{m},x}$，并按 $v_2 = 1$ 归一化。那么，每个位置相容几何都具有如下形式

$$\mathbf{P}_{\mathrm{m}} = \mathbf{P}_{\mathrm{m},0} + \mathbf{v}T, \qquad T = T_{14}. \tag{99}$$

存在两个独立的相位循环，我们选取 124 和 134。记 $\mathbf{b}_{\mathrm{m},\phi}(\mathbf{n}) = (\Psi_{124}, \Psi_{134})^{\mathsf{T}}$，其中 $\Psi_{abc} = b_{abc}^{(\phi,0)} + 2\pi n_{abc}$，并定义 $(Q_{124}, Q_{134})^{\mathsf{T}} := \widehat{A}_{\mathrm{m},\phi}\mathbf{P}_{\mathrm{m},0}$。将相位相容方程限制在式 (99) 上，得到

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{m}}T &= \mathbf{g}_{\mathrm{m}}, \\ G_{\mathrm{m}} &= \widehat{A}_{\mathrm{m},\phi}\mathbf{v} = 4\begin{pmatrix} d_{124} \\ d_{134} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_{\mathrm{m}} &= \begin{pmatrix} \Psi_{124} - Q_{124} \\ \Psi_{134} - Q_{134} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{100}$$

其中 $d_{124} = \mathcal{D}_{124}/(\alpha_2 - \alpha_4)$ 和 $d_{134} = \mathcal{D}_{134}/(\alpha_3 - \alpha_4)$。简短的矩阵约化以及所选的循环定向记录于附录D。

当实部两两不同时， $d_{124} = d_{134} = 0$等价于四个辅助谱点共线。因此，若 $(d_{124}, d_{134}) \neq (0, 0)$，则辅助谱点不共线。在这种情况下 $\rho_{\Gamma_{\mathrm{m}}} = 1$，且方程（100）给出了关于单个变量 T的两个标量方程。当且仅当满足以下条件时，它们存在公共解：

$$d_{134}(\Psi_{124} - Q_{124}) - d_{124}(\Psi_{134} - Q_{134}) = 0. \tag{101}$$

当此选择条件成立时， T 可被唯一确定，这与 $D_{\mathrm{int}} = 0$一致。

如果相反 $d_{124} = d_{134} = 0$，辅助谱点共线。方程（100）随后变得与 T无关，而可实现性要求两个选择条件

条件

$$\Psi_{124} = Q_{124}, \qquad \Psi_{134} = Q_{134}. \tag{102}$$

当这些条件成立时，T仍然是自由的，这与 $D_{\mathrm{int}} = 1$和 $\rho_{\Gamma_{\mathrm{m}}} = 2$一致。

c. 完全两两碰撞。对于$\Gamma_{\mathrm{p}} = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$，无需额外进行显式约化。应用推论2于 $N = 4$可得

$$(D_{\mathrm{int}}, \rho_{\Gamma_{\mathrm{p}}}) = (0, 1)$$

对于不共线的谱点以及

$$(D_{\mathrm{int}}, \rho_{\Gamma_{\mathrm{p}}}) = (2, 3)$$

在共线轨迹上。因此，一般的谱选择规则（64）在不共线情形下给出一个独立的相容性条件，在共线情形下给出三个。当这些条件成立时，前一种情形下代数相容的相对几何是唯一的，而后一种情形下则构成二维空间。

d. 灵活的混合实现。对于附录E中指定的单位圆谱、扇区和固定相位分支，两个选择条件（102）均成立。因此，T_{14} 仍是一个自由的内部形变参数。图3比较了该族中的两个成员：它们具有相同的谱、扇区和整数分支，但重构得到的归一化数据不同。区间$T_{14} \in [-30, -20]$ 在隔离容差 $\varepsilon = 2 \times 10^{-6}$下满足可容许性检查。固定各个孤子的参数后，改变 T_{14} 会改变相对事件几何，同时保持所规定的同步条件。

E. 混合柔性族中的受限傅里叶干涉

混合族的内部形变具有由同步约束固定的傅里叶特征。在分离簇区域中，这些约束将簇间分离与相对相位联系起来，从而确定干涉条纹如何沿该族变化。我们采用附录 E 中的固定谱和范数数据重构，其中 $P_{123} = (0,0)$ 以及 $\tau = T_{14} = -30,\ -25,\ -20$。三个样本均位于经认证的区间 $[-30, -20]$ 内。谱和重构分支保持不变。参数τ 标记不同的解，且均在 $t = 0$ 处进行评估。

1. *Effective cluster profiles and two-cluster approximation*

在 $t = 0$ 处，同步簇 $\mathcal{C}_{123} = \{1, 2, 3\}$ 以 $x = 0$ 为中心，而孤子 4 位于其右侧。我们分别确定它们的有效轮廓。

对于 $j \in \mathcal{C}_{123}$，将 $\epsilon_4^{(123)} = -1$ 和 $P_{123} = (0,0)$ 代入式 (21)，并将式 ($2g_j(0,0) = c_j$ 中的结果代入6，可得

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{eff}}_{j|123}(0, 0) = c_j - \Omega_{j4}.$$

因此，同步条件（22）要求

$$c_j - \Omega_{j4} = \mathrm{i}\Phi_{123} + 2n_j\pi\mathrm{i}, \qquad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3.$$

取 $\Phi_{123} = 0$ 和 $n_j = 0$ 可得 $c_j = \Omega_{j4}$。方程（28）随后化简为 $\widetilde{g}_{j|123}(x,0) = -\mathrm{i}$。因此，在 κ_1，κ_2，κ_3 固定时，有效的三孤子轮廓是与 τ 无关的 $q^{\mathrm{sync}}_{123}(x)$，如附录 F1中的公式（F2）所示。

对于单体簇 $\{4\}$，外部扇区符号为 $\epsilon_j = +1$，$j = 1, 2, 3$。将 g_4 由方程（6）代入方程（28），得到

$$\widetilde{g}_4(x, t; \tau) = -\mathrm{i}\kappa_4 x - 2\mathrm{i}\kappa_4^2 t + \frac{1}{2}\left[c_4(\tau) + \sum_{j=1}^{3}\Omega_{4j}\right].$$

此处 $c_4(\tau) = s_4(\tau) + \mathrm{i}\vartheta_4(\tau)$ 是方程（7）中定义的范数化参数，由事件 14 处的同步条件重构得到。因此，我们定义

$$H_4 := \sum_{j=1}^{3}\Omega_{4j}, \qquad c_4^{\mathrm{eff}}(\tau) := c_4(\tau) + H_4. \tag{103}$$

因此，有效的位置和相位参数分别为 $\mathrm{Re}\ c_4^{\mathrm{eff}}(\tau)$ 和 $\mathrm{Im}\ c_4^{\mathrm{eff}}(\tau)$。于是，方程（12）给出孤子 4 在 $x = D(\tau)$ 处的包络中心 $t = 0$。将（11b）式代入（x，t）$= (D(\tau), 0)$ 处求值，得到该中心处的载波相位 $\phi(\tau)$：

$$\begin{aligned} D(\tau) &:= -\frac{\mathrm{Re}\, c_4^{\mathrm{eff}}(\tau)}{2\beta_4}, \\ \phi(\tau) &:= \mathrm{Im}\, c_4^{\mathrm{eff}}(\tau) - 2\alpha_4 D(\tau) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{104}$$

对于所选族，附录 F 2 中的重构表明，在整个 $D(\tau) > 0$ 范围内均有 $\tau \in [-30, -20]$，因此孤子 4 位于 123 核心右侧。由于 123 核心的中心位于 $x = 0$，且 $\Phi_{123} = 0$，$D(\tau)$ 表示两个簇中心之间的距离，而 $\phi(\tau)$ 表示在各自中心处计算的两个簇之间的相位差。在光学解释中，$D(\tau)$ 表示在固定传播距离 $t = 0$ 处两个簇的延迟时间间隔。

利用公式（104），我们将公式（9）中 $t = 0$ 处的有效单孤子场改写为 $e^{\mathrm{i}\phi(\tau)}Q_4(x - D(\tau))$，其中

$$Q_4(\xi) = 2\beta_4\,\mathrm{sech}(2\beta_4\xi)e^{-2\mathrm{i}\alpha_4\xi}$$

是其中心化剖面。由于 κ_4 固定，Q_4 与 τ无关。

将这两个有效簇轮廓结合起来，当两个簇相距较远时，可得以下近似：

$$q_4(x, 0; \tau) \approx q^{\mathrm{sync}}_{123}(x) + e^{\mathrm{i}\phi(\tau)}Q_4(x - D(\tau)). \tag{105}$$

局部约化（27）为每个簇附近的这一近似提供了依据。

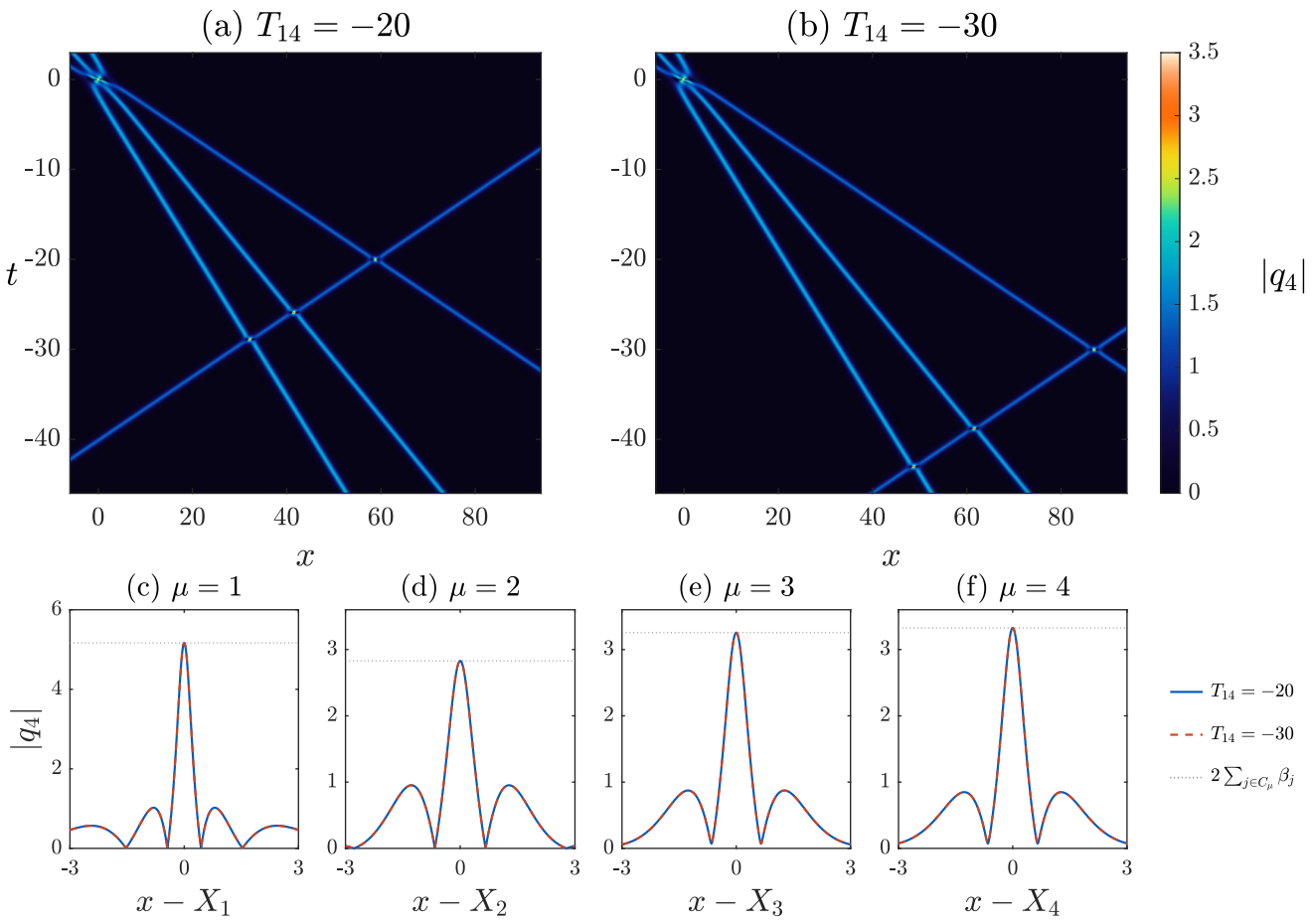

图3. 混合四孤子构型的固定谱内部形变 $\Gamma_{\mathrm{m}} = \{123, 14, 24, 34\}$，单位圆谱见附录E。面板 (a) 和 (b) 展示 $|q_4(x,\ t)|$ 对应 $T_{14} = -20$ 和 -30。扇区分配和整数分支 $(n_{124},\ n_{134}) = (-1,\ -2)$ 已固定。该族由 T_{14}参数化。面板 (c)–(f) 分别展示事件123、14、24和34的传播距离处的延迟时间剖面，并以 $x - X_\mu$为横轴绘制。实线蓝色曲线和橙色虚线曲线分别对应 $T_{14} = -20$ 和 -30。灰色虚线标记 $2\sum_{j\in\mathcal{C}_\mu}\beta_j$。

2. Separation–phase constraint and Fourier interference

为了确定双簇近似如何随 τ变化，我们使用同步条件计算$D'(\tau)$ 和 $\phi'(\tau$。采用$\phi(\tau$的连续代表，附录 F 2 中的推导给出

$$D' = v = 4(\alpha_4 - \alpha_1), \qquad \phi' = \omega = 4(|\kappa_1|^2 - |\kappa_4|^2), \tag{106}$$

其中撇号表示关于 τ的导数。对于共线辅助谱点，写作 $|\kappa_j|^2 = a_{\mathrm{sp}}\alpha_j + b$，其中 a_{sp} 和 b 为常数。方程 (106) 随即给出$\phi' = -a_{\mathrm{sp}}D'$。关于 τ 积分得到

$$\phi(\tau) + a_{\mathrm{sp}}D(\tau) = \chi, \tag{107}$$

其中，χ 沿该族保持不变。因此，在保持规定的同步条件。

对于单位圆谱（E2），$a_{\mathrm{sp}} = 0$。当 $\theta_1 = \pi/4$ 和 $\theta_4 = 3\pi/4$时，式（106）给出 $D' = -4\sqrt{2}$ 和$\phi' = 0$。因此，随着 τ 增大，间距减小，而中心相对相位保持不变。

我们使用傅里叶变换

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

这里，k 是与延迟时间 x共轭的归一化角频率偏移。我们将中心化剖面的变换记为

$$\mathcal{F}_{123}(k) := \widehat{q_{123}^{\mathrm{sync}}}(k), \qquad \mathcal{F}_4(k) := \widehat{Q}_4(k).$$

$\mathcal{F}_{123}(k)$ 和 $\mathcal{F}_4(k)$ 均与 τ 无关。

变换 $\mathcal{F}_{123}(k)$ 根据精确的同步三孤子轮廓进行计算。如附录 F1所示，对称性 $q_{123}^{\mathrm{sync}}(-x) = q_{123}^{\mathrm{sync}}(x)$ 表明，$\mathcal{F}_{123}(k)$ 为实数。对 Q_4 进行直接变换可得

$$\mathcal{F}_4(k) = \pi \operatorname{sech}\left[\frac{\pi(k+2\alpha_4)}{4\beta_4}\right] > 0. \tag{108}$$

令 $q_{\mathrm{int}}(x;\ \tau)$ 表示由式（105右端项给出的双簇近似。应用傅里叶平移恒等式可得

$$\widehat{q}_{\mathrm{int}}(k;\tau) = \mathcal{F}_{123}(k) + e^{\mathrm{i}\phi(\tau)-\mathrm{i}kD(\tau)}\mathcal{F}_4(k).$$

我们将完整的四孤子场和双簇近似的傅里叶功率谱分别记为

$$P(k;\tau) := |\widehat{q}_4(k,0;\tau)|^2, \qquad P_{\mathrm{int}}(k;\tau) := |\widehat{q}_{\mathrm{int}}(k;\tau)|^2,$$

分别。

展开 P_{int} 可得

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{int}}(k;\tau) = {} & \mathcal{F}_{123}(k)^2 + \mathcal{F}_4(k)^2 \\ & + 2\mathcal{F}_{123}(k)\mathcal{F}_4(k)\cos\Psi(k;\tau). \end{aligned} \tag{109}$$

此处 $\Psi(k;\ \tau)$ 表示傅里叶干涉相位。利用同步约束（107），可得

$$\Psi(k;\tau) := kD(\tau) - \phi(\tau) = (k + a_{\mathrm{sp}})D(\tau) - \chi. \tag{110}$$

对式（110）关于 τ 求导可得

$$\partial_\tau \Psi = (k + a_{\mathrm{sp}})D',$$

它描述了干涉相位沿该族变化的方式。

在固定 τ 时，令 $\Delta k(\tau) > 0$ 表示余弦干涉因子在归一化角频率 k 下的周期。于是

$$\Psi(k + \Delta k(\tau);\tau) - \Psi(k;\tau) = D(\tau)\Delta k(\tau) = 2\pi,$$

由此得到

$$\Delta k(\tau) = \frac{2\pi}{D(\tau)}.$$

对于单位圆实现，随着簇间分离减小，该周期增大，而离散特征值保持不变。

3. *Comparison with the full four-soliton field*

我们通过将双簇近似的延迟时间剖面和傅里叶功率谱与由完整四孤子场计算得到的结果进行比较，来评估该近似。4比较了 $t = 0$处的延迟时间剖面。重构得到的间距分别为 $D \approx 172.131$、143。847、115。563，分别对应于 $\tau = -30$、-25和 -20。

图 5 展示了 $\tau = -20$更宽的傅里叶功率谱。图 6 比较了预测的傅里叶功率谱与对完整四孤子场进行直接傅里叶变换所得的结果，分别对应于 $\tau = -30$、-25和 -20。D 和 ϕ 均通过公式（104）由重构的归一化数据得到。

我们将全场功率谱与预测功率谱之间的差异记为 $E(k;\ \tau) := P(k;\ \tau) - P_{\mathrm{int}}(k;\ \tau)$。为分离式（109）中的干涉因子，我们定义区间 $\mathcal{I}(k;\ \tau)$ 上的归一化全场干涉 $I_k = [1.6, 2.4]$ 如下

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(k;\tau) &:= \frac{P(k;\tau) - \mathcal{F}_{123}(k)^2 - \mathcal{F}_4(k)^2}{2\mathcal{F}_{123}(k)\mathcal{F}_4(k)} \\ &= \cos\Psi(k;\tau) + \frac{E(k;\tau)}{2\mathcal{F}_{123}(k)\mathcal{F}_4(k)}. \end{aligned} \tag{111}$$

选择区间 $I_k = [1.6, 2.4]$ 是为了避免分母 $2\mathcal{F}_{123}(k)\mathcal{F}_4(k)$ 取值过小。图 7 绘制了 $\mathcal{I}$ 随 Ψ（模 2π）的变化，以检验预测的相位依赖关系在该族的三个成员中是否成立。三个样本的归一化干涉均与预测的余弦依赖关系高度吻合。数值差异及收敛性检验见附录 F3。

IV. 讨论

本研究结果阐明了同步碰撞模式的两个核心方面：在单个多孤子解中实现多个预设碰撞所需满足的谱约束，以及在固定特征值的情况下改变这些碰撞在延迟时间和传播距离上的相对排列，同时保持同步的自由度。

对于互异的离散特征值，我们通过要求所有事件共享相同的归一化数据，推导出关于碰撞事件位置的仿射相容方程组。给定离散谱和碰撞组织，该方程组的可解性决定了是否存在一组共同的归一化数据，能够满足所有事件的同步条件，进而决定该谱是否在代数上支持这种组织。由于离散特征值决定了孤子振幅和速度，这些性质限制了通过调整孤子位置和相位能够实现同步的碰撞组织。物理可容许性条件还进一步确定了哪些相容构型对应于充分隔离的碰撞事件。

即使某种碰撞组织可以实现，同步条件也可能会固定其碰撞事件的相对位置。对于完整的碰撞组织，我们利用离散谱来刻画同步条件如何约束相对事件位置的连续变化。当辅助点 $(|\kappa_j|^2,\ \mathrm{Re}\,\kappa_j)$ 不共线时，在连续形变过程中维持同步，同时保持

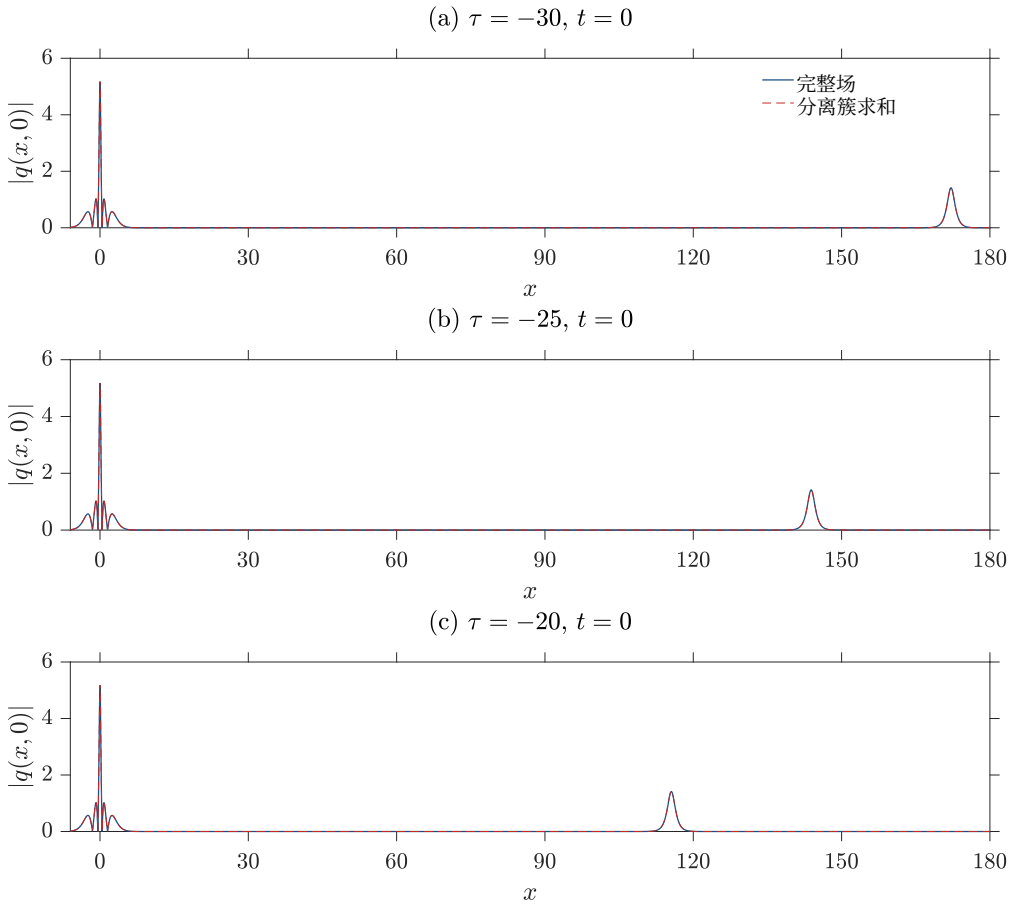

图 4. 延迟时间剖面，时间为 $t = 0$，其中 (a) $\tau = -30$，(b) $\tau = -25$，以及 (c) $\tau = -20$，采用固定谱 (E2)。蓝色实线表示完整的四孤子振幅 $|q_4(x,\ 0;\ \tau)|$，红色虚线表示双簇近似的模（105）。共同的延迟时间尺度突显了孤子 4 相对于由孤子 1–3 组成的同步簇的位置变化。

离散特征值和完整的碰撞组织不变，可以使所有事件一起移动，但其在延迟时间和传播距离上的相对间距保持不变。三孤子示例说明，这种刚性并不意味着碰撞组织是唯一的：在相同的离散谱下，不同的归一化数据可以实现三孤子集体事件，也可以实现三个分离的两两碰撞事件。

当辅助谱点共线时，可用自由度取决于孤子如何分组成碰撞事件。对于此处考虑的两类情况（$N \geq 3$），我们已得到明确的内部形变维数：完全由两两碰撞组成的组织具有 $N-2$ 个内部代数自由度；而包含一个 m 孤子集体事件、其余相互作用均为两两碰撞的组织具有 $N-m$，且 $3 \leq m \leq N$。这些维数量化了在离散特征值固定时相对事件位置的可调性，说明在保持同步的同时，可连续改变的独立参数有多少个。

混合四孤子族展示了同步碰撞事件如何在离散特征值固定的情况下改变其相对时空位置，同时保持其首阶中心振幅。这种形变也体现在傅里叶功率谱中。对于这一族，同步以及辅助谱点的共线性在簇间分离与相对相位之间施加了仿射关系，从而约束双簇近似中的干涉相位。在单位圆实现中，簇中心处的相对相位保持不变，而簇间分离 D 随着 $t = 0$ 变化，从而改变振荡干涉因子的周期 $2\pi/D$。因此，离散特征值固定并不意味着普通傅里叶干涉图样也固定。

更一般地，局部约化适用于 N 孤子场中充分孤立的同步事件。其首阶项是参与孤子的有效场，其中纳入了远端孤子引起的有限位置位移和相位位移，而余项相对于隔离参数呈指数级小。在满足同步和隔离条件时，

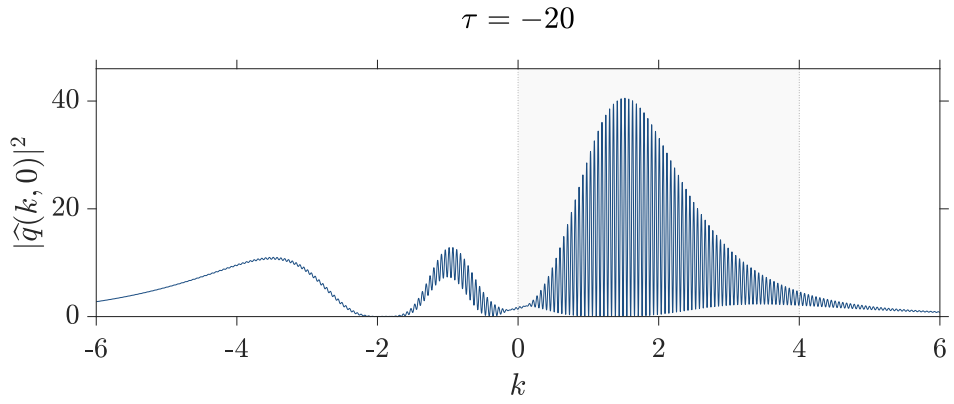

图 5. 在 $t = 0$ 时， $\tau = -20$ 在 $k \in [-6, 6]$处的傅里叶功率概览。蓝色曲线由完整四孤子场计算得出。阴影区间 $0 \le k \le 4$ 以更大的比例显示于图6(c) 中。

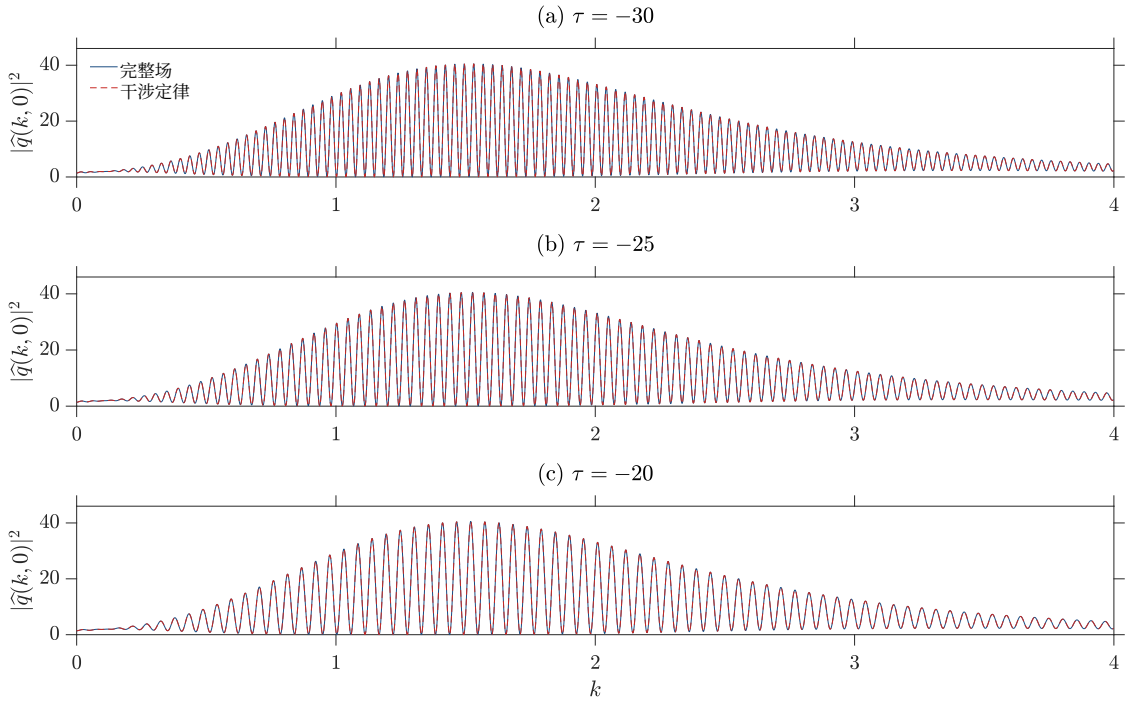

图 6. 在 $t = 0$ 时的傅里叶干涉：(a) $\tau = -30$，(b) $\tau = -25$，以及 (c) $\tau = -20$。蓝色实线表示完整四孤子场的傅里叶功率，红色虚线给出预测值（109）。所示归一化角频率范围为 $k \in [0, 4]$。离散谱保持不变。干涉因子周期 $2\pi/D$ 分别约为 0。0365、0。0437 和 0。0544。

因此，每个指定中心处的场振幅等于参与孤子振幅之和，误差为指数级小。在离散特征值和参与集合固定时，该振幅和在允许的内部形变过程中保持不变。指数级小的修正取决于每个事件的孤立程度。

局部约化还提供了一种方法，用于比较孤立碰撞附近的轮廓与有理怪波的轮廓。有趣的是，已有研究表明，某些双孤子、三孤子和四孤子碰撞在局部在振幅达到最大值时，其振幅剖面分别类似于一阶、二阶和三阶 Peregrine 孤子 [31]。这些例子促使我们对一个 N 孤子碰撞与一个带有 $n = N - 1$ 的 n 阶怪波进行形式上的比较。根据这种对应关系，N 孤子的完整两两组织包含 $N(N-1)/2$ 个碰撞事件，这与 n 阶怪波完全分解后得到的 $n(n+1)/2$ 个基本峰相等 [27]。每个充分孤立的同步成对事件都具有一个有效双孤子场。当有效参数

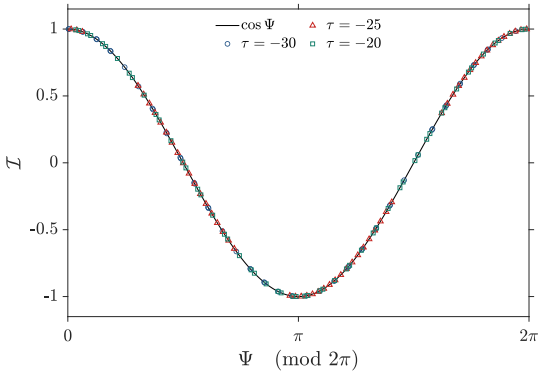

图 7. 归一化全场干涉（111）在 $I_k = [1.6, 2.4]$ 上随 Ψ（模 2π）变化的曲线，适用于 $\tau = -30,\ -25,\ -20$。符号由完整的四孤子场计算得出，黑色实线表示 $\cos\ \Psi$。

产生一阶类 Peregrine 振幅剖面时，局部约化公式会在双方共同的有效区域内，将这一近似传递到完整的多孤子场中，并带来一个额外的指数小误差。因此，这种比较既涉及可分辨事件的数量，也涉及这些事件可能呈现的局部振幅剖面。在多孤子情形下，所有事件必须共享相同的散射数据，因此它们的联合实现受制于本文所确立的相容性和可容许条件。

在可积非线性薛定谔方程对光脉冲传播的描述框架内，这些发现为设计光纤中的多孤子碰撞模式提供了理论基础，阐明了哪些预设构型能够实现，以及在保持同步的同时，其相对时空几何结构可在什么条件下连续调节。此外，四孤子族中所揭示的几何调节与傅里叶干涉之间的联系，确定了可用于表征光纤实验中此类变化的频谱特征。

这一框架的自然延伸方向是研究大-N 极限下同步碰撞组织的可实现性及其相对事件位置的可调性。另一个方向是将局部分析扩展到彼此间隔不大的事件，并量化相邻碰撞区域之间的重叠如何影响局部波形和振幅增强。

致谢

我们感谢讨论小组的每一位成员提出的建议。本工作得到了国家自然科学基金委员会（项目编号：12575005）、国家自然科学基金委员会（项目编号：12472387）以及山西省自然科学基金（项目编号：202303021221031）的资助。

附录 A：孤立同步碰撞的局部约化

我们建立了满足同步条件（27）的孤立事件的局部约化（29）和振幅和定律（22）。在本附录中，特征值 κ_j 固定且互不相同，且 $\operatorname{Im}\kappa_j > 0$。所有误差估计在固定邻域 $\mathcal{U}_\mu$ 内一致，该邻域定义见式（26）。若 $\mathcal{R}_\mu = \varnothing$，则约化是精确的。下文省略空矩阵块。

a. 消去远程块。对于本附录中的计算，引入

$$K_{jm} = \frac{1}{\kappa_j^* - \kappa_m}, \qquad \mathcal{R}_{\mu,\pm} = \{r \in \mathcal{R}_\mu : \epsilon_r^{(\mu)} = \pm 1\},$$

并令$\boldsymbol{K}_{S,\ S}$ 表示由以下索引 S所确定的子矩阵。扇区符号仍按式（19）中的定义。

对于每个 $r \in \mathcal{R}_\mu$，定义 $C_r := \sum_{\ell \neq r} |\mathrm{Re}\Omega_{r\ell}|$. 由式（23）和（25），根据三角不等式可得

$$2L_\mu \le \left|\operatorname{Re}\mathcal{Z}_{r|\mu}^{\mathrm{loc}}(P_\mu)\right| \le 2\left|\operatorname{Re} g_r(P_\mu)\right| + C_r.$$

因此

$$|\operatorname{Re} g_r(P_\mu)| \ge L_\mu - \frac{C_r}{2}, \qquad r \in \mathcal{R}_\mu. \tag{A1}$$

对于固定谱，C_r 为常数，因此增大 L_μ会使每个远端裸指数都远离零点。

仿射形式（6）意味着

$$|\operatorname{Re} g_r(x,t) - \operatorname{Re} g_r(P_\mu)| \le \beta_r h_x + 4|\alpha_r|\beta_r h_t.$$

结合方程（A1），可得 $2\epsilon_r^{(\mu)}$实部 $g_r\ (x,\ t) \ge 2L_\mu - C_r - 2\beta_r h_x - 8|\alpha_r|\beta_r h_t$。因此

$$z_r := e^{-2\epsilon_r^{(\mu)} g_r} = O(e^{-2L_\mu}), \qquad r \in \mathcal{R}_\mu, \tag{A2}$$

在 $\mathcal{U}_\mu$处。当 L_μ足够大时，远端符号固定不变。同步条件（22）

并且，式（28）还表明，$\mathrm{Re}\, g_j$，$j \in \mathcal{C}_\mu$在该邻域内保持一致有界。

在矩阵（4）和（5）中，将对应于每个远端指标 r 的行和列分别乘以 $e^{-\epsilon_r^{(\mu)} g_r^*}$ 和 $e^{-\epsilon_r^{(\mu)} g_r}$。将所得矩阵记为 $\widehat{\boldsymbol{G}}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{H}}$。这些公因子在式（8）的行列式比中相互抵消。直接代入可得

$$\widehat{G}_{rs} = \begin{cases} K_{rs}(1 + z_r^* z_s), & \epsilon_r^{(\mu)} = \epsilon_s^{(\mu)}, \\ K_{rs}(z_r^* + z_s), & \epsilon_r^{(\mu)} \neq \epsilon_s^{(\mu)}, \end{cases} \tag{A3}$$

并且，对于 j，$m \in \mathcal{C}_\mu$，

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{jr} &= K_{jr} e^{\epsilon_r^{(\mu)} g_j^*} + O(e^{-2L_\mu}), \\ \widehat{G}_{rm} &= K_{rm} e^{\epsilon_r^{(\mu)} g_m} + O(e^{-2L_\mu}). \end{aligned} \tag{A4}$$

因此，远程块具有如下形式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &:= \widehat{\boldsymbol{G}}_{\mathcal{R}_\mu, \mathcal{R}_\mu} = \boldsymbol{D}_0 + O(e^{-2L_\mu}), \\ \boldsymbol{D}_0 &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathcal{R}_{\mu,+}, \mathcal{R}_{\mu,+}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_{\mathcal{R}_{\mu,-}, \mathcal{R}_{\mu,-}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A5}$$

每个非空对角块根据柯西行列式公式均为非奇异矩阵。由于 $\boldsymbol{D}_0$ 固定，利用诺依曼展开可得

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \boldsymbol{D}_0^{-1} + O(e^{-2L_\mu}) \tag{A6}$$

当 L_μ足够大时。

柯西行列式公式给出以下恒等式：

$$K_{jm} - \boldsymbol{K}_{j,S} \boldsymbol{K}_{S,S}^{-1} \boldsymbol{K}_{S,m} = K_{jm} e^{\sum_{r \in S} (\Omega_{jr}^* + \Omega_{mr})}, \tag{A7}$$

$$1 - \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{K}_{S,S}^{-1} \boldsymbol{K}_{S,m} = e^{\sum_{r \in S} \Omega_{mr}}, \tag{A8}$$

$$1 - \boldsymbol{K}_{j,S} \boldsymbol{K}_{S,S}^{-1} \mathbf{1} = e^{\sum_{r \in S} \Omega_{jr}^*}, \tag{A9}$$

其中 j、$m \notin S$ 以及 $\mathbf{1}$ 是所需维度的全一列向量。事实上，式（A7）的左端等于

$$\frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{S,S} & \boldsymbol{K}_{S,m} \\ \boldsymbol{K}_{j,S} & K_{jm} \end{pmatrix}}{\det \boldsymbol{K}_{S,S}} = K_{jm} \prod_{r \in S} \frac{(\kappa_j^* - \kappa_r^*)(\kappa_m - \kappa_r)}{(\kappa_j^* - \kappa_r)(\kappa_m - \kappa_r^*)}.$$

式（13）将每个因子与 $e^{\Omega_{jr}^* + \Omega^{mr}}$对应起来。将行变量 κ_j^* 视为独立复变量，与其相乘并令其趋于无穷，得到式（A8）。列变量在与 $-\kappa_m$相乘后的相应极限给出式（A9）。

将孤子指标排序为 $\mathcal{C}_\mu$、$\mathcal{R}_\mu$，并引入分块记号

$$\widehat{\boldsymbol{G}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{a}_{\mathcal{C}_\mu}^{\mathsf{T}} & \boldsymbol{a}_{\mathcal{R}_\mu}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{b}_{\mathcal{C}_\mu} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{b}_{\mathcal{R}_\mu} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

这里的向量是从式（5）继承的归一化边界项。$\boldsymbol{a}_{\mathcal{R}_\mu}$ 的各项在$\mathcal{R}_{\mu,+}$ 上为 $\mathbf{1}$，且 z_r 在$\mathcal{R}_{\mu,-}$上为 $\mathbf{1}$，而 $\boldsymbol{b}_{\mathcal{R}_\mu}$ 的各项在$\mathcal{R}_{\mu,+}$ 上为 z_r^*，且在 $\mathcal{R}_{\mu,-}$上为 $\mathbf{1}$。

在 $\widehat{\boldsymbol{G}}$和 $\widehat{\boldsymbol{H}}$ 中，$\boldsymbol{D}$ 的舒尔补分别为 $\boldsymbol{S}$ 和$\begin{pmatrix} h & \widehat{\boldsymbol{a}}^{\mathsf{T}} \\ \widehat{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{S} \end{pmatrix}$，其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}, \\ h &= -\boldsymbol{a}_{\mathcal{R}_\mu}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}_{\mathcal{R}_\mu}, \\ \widehat{\boldsymbol{a}}^{\mathsf{T}} &= \boldsymbol{a}_{\mathcal{C}_\mu}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{a}_{\mathcal{R}_\mu}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{C}, \\ \widehat{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{b}_{\mathcal{C}_\mu} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b}_{\mathcal{R}_\mu}. \end{aligned} \tag{A10}$$

这里，$\widehat{\boldsymbol{a}} = (\widehat{a}_m)_{\, m \in \mathcal{C}_\mu}$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_j)_{\, j \in \mathcal{C}_\mu}$ 表示消去远端块后的边界向量。这些向量上的帽子表示这种约化。将式（A6）代入舒尔补 $\boldsymbol{S}$，并对两个远程扇区应用式（A7），得到

$$\begin{aligned} S_{jm} = K_{jm} \Big[& e^{-g_j^* - g_m + \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mu,-}} (\Omega_{jr}^* + \Omega_{mr})} \\ & + e^{g_j^* + g_m + \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mu,+}} (\Omega_{jr}^* + \Omega_{mr})} \Big] + O(e^{-2L_\mu}). \end{aligned} \tag{A11}$$

类似地，方程（A8）和（A9）给出

$$\begin{aligned} \widehat{a}_m &= e^{g_m + \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mu,+}} \Omega_{mr}} + O(e^{-2L_\mu}), \\ \widehat{b}_j &= e^{-g_j^* + \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mu,-}} \Omega_{jr}^*} + O(e^{-2L_\mu}). \end{aligned} \tag{A12}$$

h 的主导贡献为零，因为$\boldsymbol{a}_{\mathcal{R}_\mu}$ 和$\boldsymbol{b}_{\mathcal{R}_\mu}$ 在不同扇区具有非零的主导项，而 $\boldsymbol{D}_0^{-1}$是块对角的。因此，$h = O(e^{-2L_\mu})$。公共因子 $\det \boldsymbol{D}$ 相消，从而得到精确恒等式

$$q_N = -2\mathrm{i} \frac{\det \begin{pmatrix} h & \widehat{\boldsymbol{a}}^{\mathsf{T}} \\ \widehat{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{S} \end{pmatrix}}{\det \boldsymbol{S}}. \tag{A13}$$

设 $f_{j|\mu} = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{r \in \mathcal{R}_\mu} \Omega_{jr} \right)$，$j \in \mathcal{C}_\mu$。方程（28）中定义的有效指数满足

$$f_{j|\mu} e^{\pm \widetilde{g}_{j|\mu}} = e^{\pm g_j + \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mu,\pm}} \Omega_{jr}}.$$

令 $\widetilde{\boldsymbol{G}}$和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 分别表示由方程（4）和（5）得到的矩阵，其中将孤子指标限制为$\mathcal{C}_\mu$ 并将 g_j 替换为 $\widetilde{g}_{j|\mu}$。在方程（A11）和（A12）中使用这些恒等式可得

$$\begin{aligned} S_{jm} &= f_{j|\mu}^* \widetilde{G}_{jm} f_{m|\mu} + O(e^{-2L_\mu}), \\ \widehat{a}_m &= e^{\widetilde{g}_{m|\mu}} f_{m|\mu} + O(e^{-2L_\mu}), \\ \widehat{b}_j &= f_{j|\mu}^* e^{-\widetilde{g}_{j|\mu}^*} + O(e^{-2L_\mu}). \end{aligned} \tag{A14}$$

由于 $h = O(e^{-2L_\mu})$ 以及因子 $f_{j|\mu}$ 和它们的倒数在固定的不同特征值下均有界，方程（A13）和（A14）给出

$$\begin{aligned} q_N &= -2\mathrm{i} \frac{\left(\prod_{j \in \mathcal{C}_\mu} |f_{j|\mu}|^2 \right) \det(\widetilde{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{E}_H)}{\left(\prod_{j \in \mathcal{C}_\mu} |f_{j|\mu}|^2 \right) \det(\widetilde{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{E}_G)} \\ &= -2\mathrm{i} \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{E}_H)}{\det(\widetilde{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{E}_G)}, \end{aligned} \tag{A15}$$

其中 $\boldsymbol{E}_H$, $\boldsymbol{E}_G = O\left(e^{-2L_\mu}\right)$ 。

b. 分母界和一致误差。上半平面条件意味着

$$\int_0^\infty e^{-\mathrm{i}\kappa_j^* s} e^{\mathrm{i}\kappa_m s}\,\mathrm{d}s = \frac{-\mathrm{i}}{\kappa_j^* - \kappa_m}.$$

因此，对于任意非零向量 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{|\mathcal{C}_\mu|}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}^\dagger(-\mathrm{i}\widetilde{\boldsymbol{G}})\boldsymbol{w} &= \int_0^\infty \left[\left|\sum_{j\in\mathcal{C}_\mu} w_j e^{-\widetilde{g}_{j|\mu}} e^{\mathrm{i}\kappa_j s}\right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left|\sum_{j\in\mathcal{C}_\mu} w_j e^{\widetilde{g}_{j|\mu}} e^{\mathrm{i}\kappa_j s}\right|^2\right] \mathrm{d}s > 0,\end{aligned} \tag{A16}$$

其中 † 表示共轭转置。由于不同特征值对应的指数函数~线性无关，且 $\boldsymbol{w} \neq 0$ 和 $e^{-g_{j|\mu}} \neq 0$ 对于~每个 j均成立，因此严格正性随即得到。于是 $\det \boldsymbol{G} \neq 0$。

由公式（21）和（28）， $2\widetilde{g}_{j|\mu} = \mathcal{Z}^{\mathrm{eff}}_{j|\mu}$。因此，公式（ 2π ）中的零实部以及模 22的公共相位意味着

$$\widetilde{g}_{j|\mu}(P_\mu) = \frac{\mathrm{i}\Phi_\mu}{2} + \mathrm{i}\pi n_{j\mu}, \qquad n_{j\mu} \in \mathbb{Z}.$$

公式（28）中的修正项与 x、t无关。使用公式（ P_μ ）在6处的值相减，便得到

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{j|\mu}(x,t) = &-\mathrm{i}\kappa_j(x - X_\mu) - 2\mathrm{i}\kappa_j^2(t - T_\mu) \\ &+ \frac{\mathrm{i}\Phi_\mu}{2} + \mathrm{i}\pi n_{j\mu}.\end{aligned} \tag{A17}$$

~公共相位在 G_{jm} 中抵消，而整数分支产生相匹配的行列符号，~因此其行列式保持不变。于是 $\det \boldsymbol{G}$ 仅取决于固定的参与谱和局部坐标。根据连续性以及在紧邻域 $\mathcal{U}_\mu$ 上不为零，

$$|\det \widetilde{\boldsymbol{G}}| \geq \eta_\mu > 0, \tag{A18}$$

其中η_μ 与 L_μ无关。

~公式（A17）还确保 $\boldsymbol{G}$ 和~$\boldsymbol{H}$ 在 $\mathcal{U}_\mu$上均一致有界。由于行列式是矩阵元素的多项式，式（A15）中的扰动会产生阶为 $O\left(e^{-2L_\mu}\right)$ 的行列式误差。因此，当 L_μ足够大时，

$$|\det(\widetilde{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{E}_G)| \geq \eta_\mu/2.$$

结合方程（A18），行列式扰动估计给出

$$q_N(x,t) = -2\mathrm{i}\frac{\det \widetilde{\boldsymbol{H}}}{\det \widetilde{\boldsymbol{G}}} + O(e^{-2L_\mu}) = q^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{C}_\mu}(x,t) + O(e^{-2L_\mu}), \tag{A19}$$

c. 同步中心处的振幅。在 P_μ处，方程（A17化简为 $\widetilde{g}_{j|\mu} = \mathrm{i}\Phi_\mu/2 + \mathrm{i}\pi n_{j\mu}$。消去行列式比中的行、列符号因子后，我们得到

$$\begin{aligned}q^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{C}_\mu}(P_\mu) &= -2\mathrm{i}\frac{\det\begin{pmatrix} 0 & e^{\mathrm{i}\Phi_\mu/2}\mathbf{1}^{\mathsf{T}} \\ e^{\mathrm{i}\Phi_\mu/2}\mathbf{1} & 2\boldsymbol{K}_{\mathcal{C}_\mu,\mathcal{C}_\mu}\end{pmatrix}}{\det(2\boldsymbol{K}_{\mathcal{C}_\mu,\mathcal{C}_\mu})} \\ &= \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\Phi_\mu}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{K}^{-1}_{\mathcal{C}_\mu,\mathcal{C}_\mu}\mathbf{1}.\end{aligned} \tag{A20}$$

为计算这个标量，我们利用柯西矩阵的位移恒等式。令 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\kappa_j)_{j\in\mathcal{C}_\mu}$以及$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{\mathcal{C}_\mu,\ \mathcal{C}_\mu}$。由于（$\kappa_j^* - \kappa_m$）$K_{jm} = 1$，我们有

$$\boldsymbol{\Lambda}^*\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}. \tag{A21}$$

注意到 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\mathbf{1} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{K}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}})$ 。利用式（A21）和迹的循环性质，我们得到

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\mathbf{1} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda}^* - \boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{j\in\mathcal{C}_\mu}(\kappa_j^* - \kappa_j) = -2\mathrm{i}\sum_{j\in\mathcal{C}_\mu}\beta_j.$$

将A20）中的式子代入，并结合 $\mathcal{A}_j = 2\beta_j$ 式（10）中的结果，可得

$$q^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{C}_\mu}(P_\mu) = e^{\mathrm{i}\Phi_\mu}\sum_{j\in\mathcal{C}_\mu}\mathcal{A}_j.$$

将这一恒等式与式（A19 $||a|-|b|| \leq |a-b|$）结合，得到

$$|q_N(P_\mu)| = \sum_{j\in\mathcal{C}_\mu}\mathcal{A}_j + O(e^{-2L_\mu}), \tag{A22}$$

如式（29）所述。

附录B：相容系统构造与事件–谱对应

第IIIB 节给出了相容方程及其散射右端项。这里详细说明$A_{\Gamma,\ x}$ 和$A_{\Gamma,\ \phi}$ 的分块构造，并明确相应的$\mathbf{b}_\Gamma$（$\mathbf{0}$）排序。我们还建立刚性定理中所使用的商空间对应。

对于位置块，使用正文中选取的参考事件 μ_j^0，并将对（j、μ）按以下方式排序：

$$\mu \in \mathcal{I}_j \setminus \{\mu_j^0\},$$

并将这样的第 r 个对表示为（j_r， μ_r）。然后

$$A_{\Gamma,x} = \begin{pmatrix} C^{(x)}_{11} & \cdots & C^{(x)}_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C^{(x)}_{M_x 1} & \cdots & C^{(x)}_{M_x K}\end{pmatrix},$$

其中，与事件 ν 相关的列中的 1×2 块为

$$C^{(x)}_{r\nu}=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 4\alpha_{j_r}\end{pmatrix}, & \nu=\mu_r,\\ \begin{pmatrix}-1 & -4\alpha_{j_r}\end{pmatrix}, & \nu=\mu^0_{j_r},\\ \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，$A_{\Gamma,x}$ 的第 r 行正是与配对（j_r,μ_r）相关的位置兼容方程的系数行。

对于相位块，考虑第 ℓ 个基本圈

$$\mathfrak{C}_\ell=(j_1,m_1,\dots,j_p,m_p,j_1),\qquad j_{p+1}=j_1.$$

其在与事件 ν 相关的列中的第 1×2 块为

$$\begin{aligned}C^{(\phi)}_{\ell\nu}=\big(&2(\alpha_{j_a}-\alpha_{j_{a+1}}),\\ &4\big[(\alpha^2_{j_a}-\beta^2_{j_a})-(\alpha^2_{j_{a+1}}-\beta^2_{j_{a+1}})\big]\big),\\ &\nu=m_a \text{ for some } a\in\{1,\dots,p\},\\ C^{(\phi)}_{\ell\nu}=(0,0),\quad &\nu\notin\{m_1,\dots,m_p\}.\end{aligned}$$

相应地，

$$A_{\Gamma,\phi}=\begin{pmatrix}C^{(\phi)}_{11} & \cdots & C^{(\phi)}_{1K}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ C^{(\phi)}_{N_{\rm cyc}1} & \cdots & C^{(\phi)}_{N_{\rm cyc}K}\end{pmatrix}.$$

第 ℓ 行 $A_{\Gamma,\phi}$ 因此恰好是相位圈方程（56）的系数行。将位置块和相位块堆叠起来，得到方程（59）。

采用相同的行排序，对应的零分支右端项为

$$\mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{0})=\begin{pmatrix}b^{(x)}_{j_1\mu_1}\\ \vdots\\ b^{(x)}_{j_{M_x}\mu_{M_x}}\\ b^{(\phi,0)}_1\\ \vdots\\ b^{(\phi,0)}_{N_{\rm cyc}}\end{pmatrix}.\tag{B1}$$

结合方程（61），即可确定完整的右端项 $\mathbf{b}_\Gamma(\mathbf{n})$。

该构造取决于所选的参考事件 μ^0_j 以及所选的基本圈基。不同的选择对应于等价的相容性方程组，因此不会改变解集及兼容系统的秩。

1. 对应映射的构造

根据局部核刻画（73）以及式（ R_Γ （76）中的构造，$\mathbf{u}\in$ 核 R_Γ 当且仅当，对于每个事件 μ，都存在 $\mathbf{a}_\mu\in\mathbb{R}^2$ 和 $\omega_\mu\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{u}_j=\mathbf{a}_\mu+\omega_\mu J\mathbf{p}_j,\qquad j\in\mathcal{C}_\mu.\tag{B2}$$

每个共享孤子在包含它的每个事件中都有相同的向量 $\mathbf{u}j$。

对于给定的 $\mathbf{u}$，局部参数是唯一的。事实上，若两组参数对产生相同的向量，则对于不同的 $j,k\in\mathcal{C}_\mu$,

$$(\omega_\mu-\omega'_\mu)J(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_k)=0.$$

由于 $\mathbf{p}_j\neq\mathbf{p}_k$ 和 J 可逆，因此 $\omega_\mu=\omega'_\mu$，进而 $\mathbf{a}^\mu=\mathbf{a}'_{\mu^\circ}$ 因此，我们通过下式恢复事件变量：

$$\delta X_\mu=(\mathbf{a}_\mu)_1,\qquad \delta T_\mu=\frac{\omega_\mu}{4},\qquad \delta\Phi_\mu=(\mathbf{a}_\mu)_2.\tag{B3}$$

写作

$\mathbf{u}_j=(\xi_j,y_j)^{\mathsf T},\qquad \delta s_j=-2\beta_j\xi_j,\qquad \delta\vartheta_j=y_j+2\alpha_j\xi_j.$

将式（B3）代入式（B2），取 $J\mathbf{p}^j=(\alpha_j,\ -|\kappa_j|^2)^{\mathsf T}$，可得式（67）和式（68）。对包含同一孤子的两个事件之间的位置关系作差，可消去 ξ_j，从而得到齐次位置相容方程。对每个事件内的相位关系作差，可消去 $\delta\Phi_\mu$；沿一个循环求和则会抵消孤子的相位变化。由此得到齐次相位—循环相容方程。因此

$$A_\Gamma\delta\mathbf{P}=0,\qquad \delta\mathbf{P}=(\delta X_1,\delta T_1,\dots,\delta X_K,\delta T_K)^{\mathsf T}.$$

每个$\mathbf{u}\in$ 核 R_Γ 因此唯一确定一个 $\delta\mathbf{P}\in$核 A_Γ。恢复出的参数关于$\mathbf{u}$呈线性关系，因为局部刚体运动的线性组合，其对应的唯一参数也是这些参数的相应线性组合。因此

$$\Pi:\ker R_\Gamma\longrightarrow\ker A_\Gamma,\qquad \mathbf{u}\longmapsto\delta\mathbf{P}\tag{B4}$$

是一个线性映射。

2. 对应映射的满射性

反之，设 $\delta\mathbf{P}\in$ 核 A_Γ。齐次位置相容方程确保式 ξ_j（67）中关于包含孤子j的事件的选择相互独立。为恢复相位变化，先在一个参考事件处固定$\delta\Phi_{\mu_*}=0$，然后沿着孤子—事件关联依次使用式（68）来确定其余相位变化。连通性确保每个孤子和事件都可以到达。齐次相位—循环条件确保不同路径得到相同结果，因此式（68）在每个关联上都成立。

Set

$$\mathbf{u}_j=\begin{pmatrix}\xi_j\\ \delta\vartheta_j-2\alpha_j\xi_j\end{pmatrix}.$$

方程（67）和（68）给出

$$\mathbf{u}_j=\begin{pmatrix}\delta X_\mu\\ \delta\Phi_\mu\end{pmatrix}+4\delta T_\mu J\mathbf{p}_j,\qquad j\in\mathcal{C}_\mu.$$

因此，$\mathbf{u}\in$ 核 R_Γ 和 $\Pi(\mathbf{u})=\delta\mathbf{P}$。由于 $\delta\mathbf{P}$ 是任意的，Π是满射：

$$\Pi(\ker R_\Gamma)=\ker A_\Gamma.\tag{B5}$$

3. 平凡运动的对应关系

令 $\mathcal{T}_A$ 和 $\mathcal{T}_R$ 为定理 1中定义的平凡运动空间。对于全局谱运动 $\mathbf{u}_j = \text{一个} + \omega J\mathbf{p}_j$，其中 $\text{一个} = (a_1, a_2)^{\mathsf{T}}$，方程（B3）给出

$$\delta X_\mu = a_1, \qquad \delta T_\mu = \omega/4, \qquad \delta\Phi_\mu = a_2 \qquad \text{对所有 } \mu.$$

因此，每个全局谱运动都会产生统一事件平移。反过来，任意统一事件平移 $\delta X_\mu = a, \delta T_\mu = b$ 都可通过选择 $\mathbf{a} = (a,0)^{\mathsf{T}}$ 和 $\omega = 4b$ 得到。因此，

$$\Pi(\mathcal{T}_R) = \mathcal{T}_A. \tag{B6}$$

为确定核 Π，设 $\Pi(\mathbf{u}) = 0$。那么 $\delta X_\mu = \delta T_\mu = 0$ 对每个事件都成立，且式（B2）化简为

$$\mathbf{u}_j = (0, \delta\Phi_\mu)^{\mathsf{T}}, \qquad j \in \mathcal{C}_\mu.$$

共享同一孤子的事件必须具有相同的 $\delta\Phi_\mu$。因此，连通性意味着所有事件的相位变化都相同。反过来，任何共同的竖直平移都会使事件位移为零。因此，当 $\mathbf{e}_2 = (0,1)^{\mathsf{T}}$ 时，

$$\ker\Pi = \{\mathbf{u} : \mathbf{u}_j = c\mathbf{e}_2 \text{ for all } j, \quad c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{T}_R. \tag{B7}$$

若 $\Pi(\mathbf{u}) \in \mathcal{T}_A$，则式（B6）给出$\mathbf{v} \in \mathcal{T}_R$ 满足$\Pi(\mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{u})$。因此，$\mathbf{u} - \mathbf{v} \in$ 属于核 $\Pi \subseteq \mathcal{T}_R$，所以$\mathbf{u} \in \mathcal{T}_R$。结合式（B6），即可证明

$$\Pi^{-1}(\mathcal{T}_A) = \mathcal{T}_R. \tag{B8}$$

4. 商空间对应

由于 $\mathcal{T}_R$ 和 $\mathcal{T}_A$ 分别是 $\ker R_\Gamma$ 和 $\ker A_\Gamma$ 的线性子空间，因此相应的商空间是良定义的。

考虑诱导映射

$$\overline{\Pi} : \ker R_\Gamma/\mathcal{T}_R \longrightarrow \ker A_\Gamma/\mathcal{T}_A, \qquad [\mathbf{u}] \longmapsto [\Pi(\mathbf{u})]. \tag{B9}$$

若 $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \mathcal{T}_R$，则式（B6）表明 $\Pi(\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{v}) \in \mathcal{T}_A$。因此 Π是良定义的。它继承了 Π的线性和满射性。

为证明单射性，设 $\Pi([\mathbf{u}]) = [0]$。于是$\Pi(\mathbf{u}) \in \mathcal{T}_A$，而式（B8）给出 $\mathbf{u} \in \mathcal{T}_R$，因此 $[\mathbf{u}] = [0]$。所以 Π是线性同构：

$$\ker R_\Gamma/\mathcal{T}_R \cong \ker A_\Gamma/\mathcal{T}_A. \tag{B10}$$

取维数可得

$$\dim\ker R_\Gamma - 3 = \dim\ker A_\Gamma - 2 = D_{\text{int}},$$

这建立了定理中内部形变之间的对应关系1。

附录C：代表性完全组织的显式刚性计数

1. 完全成对组织

对于完全成对组织，每一对无序谱点都会贡献一个约束

$$(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^{\mathsf{T}}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) = 0, \qquad 1 \le i < j \le N. \tag{C1}$$

如果谱点并非全部共线，推论 1给出

$$D_{\text{int}} = 0, \qquad \dim\ker R_\Gamma = 3.$$

现在假设所有谱点共线。设$\mathbf{t}$ 为其公共直线的单位切向量，$\hat{}\mathbf{n}$ 为单位法向量，并记

$$\mathbf{u}_j = a_j\mathbf{t} + b_j\hat{\mathbf{n}}.$$

由于每个差 $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ 都平行于 $\mathbf{t}$，方程 (C1) 意味着

$$a_i = a_j \qquad \text{for all } i, j,$$

而法向分量 $b_1, \ldots, b_N$则不受限制。因此

$$\dim\ker R_\Gamma = N + 1, \qquad D_{\text{int}} = N - 2.$$

对于完全成对组织，每个事件有两个关联数，因此 $N_{\text{inc}} = 2K$。由于 $K = \binom{N}{2}$，式（84）给出

$$\Delta_\Gamma = K - 2N + 3 = \frac{(N-2)(N-3)}{2}.$$

因此，利用 $\rho_\Gamma = \Delta_\Gamma + D_{\text{int}}$，

$$\rho_\Gamma = \begin{cases} \dfrac{(N-2)(N-3)}{2}, & \text{if the spectral points are not all collinear} \\ \dfrac{(N-1)(N-2)}{2}, & \text{if the spectral points are all collinear} \end{cases}.$$

这证明了推论2。

2. 具有两两余项的一个集体事件 项

考虑一种完全组织，其中有一个 m-孤子集体事件，其余所有相互作用均为两两相互作用，其中 $3 \le m \le N$。令 $\mathcal{C}_*$ 表示参与该集体事件的孤子集合。集体事件约束意味着集合 $\mathcal{C}_*$中的孤子之间满足所有成对刚性约束。由于其余所有相互作用均为两两相互作用，每个$\mathbf{u} \in$ 核 R_Γ 都满足完全成对刚性约束。

如果辅助谱点并非全部共线，推论1 给出

$$D_{\text{int}} = 0.$$

现在假设所有辅助谱点共线。设$\mathbf{t}$ 为其公共直线的单位切向量，并令 $\widehat{\mathbf{n}} = J\mathbf{t}$。记

$$\mathbf{u}_j = a_j\mathbf{t} + b_j\widehat{\mathbf{n}}.$$

由于集体事件约束在 $\mathcal{C}_*$ 内给出了两两刚性约束，因此完整的两两刚性约束集合为

$$a_1 = \cdots = a_N =: a_t,$$

同时不对法向分量施加任何限制。

对于 $j \in \mathcal{C}_*$，记 $\mathbf{p}^j = \mathbf{p}_0 + \lambda_j\mathbf{t}$。集体事件条件给出

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{a}_* + \omega_* J\mathbf{p}_j = \mathbf{a}_* + \omega_* J\mathbf{p}_0 + \omega_*\lambda_j\widehat{\mathbf{n}}.$$

由于最后一项完全沿法向，且所有切向分量均等于 a_t，记

$$\mathbf{a}_* + \omega_* J\mathbf{p}_0 = a_t\mathbf{t} + c\widehat{\mathbf{n}}.$$

因此

$$\mathbf{u}_j = a_t\mathbf{t} + (c + \omega_*\lambda_j)\widehat{\mathbf{n}}, \qquad j \in \mathcal{C}_*.$$

量 λ_j 由谱配置确定，因此 m 个核心点的法向分量仅取决于 c 和 ω_*。对于 $r \notin \mathcal{C}_*$，两两约束使法向分量 b_r 保持自由。因此，自由参数为 a_t、c、ω_* 和 $(b_r)_{r\notin\mathcal{C}_*}$，从而得到

$$\dim\ker R_\Gamma = 1 + 2 + (N - m) = N - m + 3,$$
$$D_{\mathrm{int}} = N - m.$$

对于这一组织，

$$K = 1 + \binom{N}{2} - \binom{m}{2}, \qquad N_{\mathrm{inc}} = m + 2(K - 1).$$

公式（84）因此给出

$$\Delta_\Gamma = \frac{(N - m)(N + m - 5)}{2}.$$

利用 $\rho_\Gamma = \Delta_\Gamma + D_{\mathrm{int}}$，我们得到

$$\rho_\Gamma = \begin{cases} \dfrac{(N - m)(N + m - 5)}{2}, & \text{if the spectral points are not all collinear} \\ \dfrac{(N - m)(N + m - 3)}{2}, & \text{if the spectral points are all collinear} \end{cases}.$$

这证明了推论 3。

附录 D：3–2–2–2模式的矩阵约化

对于 $\Gamma_{\mathrm{m}} = \{123, 14, 24, 34\}$，固定 $P_{123} = (0,\ 0)$，并令 $A_{\mathrm{m},\ x}$ 和 $A_{\mathrm{m},\ \phi}$ 为由以下内容得到的规范固定块附录 B 中的一般构造。共有五个位置行和两个独立的相位循环行。对于个互不相同的速度，删除 T_{14} 列后得到的 $A_{\mathrm{m},\ x}$ 子式为

$$-16(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) \neq 0,$$

因此秩 $A_{\mathrm{m},\ x} = 5$。

令 $\mathbf{P}_{\mathrm{m},\ 0}$ 为以下方程的唯一解 $A_{\mathrm{m},\ x}\mathbf{P} = \mathbf{b}_{\mathrm{m},\ x}$ 其中 $T_{14} = 0$，并令 $\mathbf{v}$ 张成 $\ker A_{\mathrm{m},\ x}$ 其中 $v_2 = 1$。则 $\mathbf{P}_{\mathrm{m}} = \mathbf{P}_{\mathrm{m},\ 0} + \mathbf{v}T$，其中 $T = T_{14}$。

选取定向环 $\mathfrak{C}_{124} = 1 - 123 - 2 - 24 - 4 - 14 - 1$ 和 $\mathfrak{C}_{134} = 1 - 123 - 3 - 34 - 4 - 14 - 1$，并写作

$$\widehat{A}_{\mathrm{m},\phi}\mathbf{P}_{\mathrm{m},0} = \begin{pmatrix} Q_{124} \\ Q_{134} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_{\mathrm{m},\phi}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \Psi_{124} \\ \Psi_{134} \end{pmatrix}.$$

将相位块限制在仿射位置族上，可得

$$G_{\mathrm{m}}T = \mathbf{g}_{\mathrm{m}},$$
$$G_{\mathrm{m}} = \widehat{A}_{\mathrm{m},\phi}\mathbf{v},$$
$$\mathbf{g}_{\mathrm{m}} = \mathbf{b}_{\mathrm{m},\phi}(\mathbf{n}) - \widehat{A}_{\mathrm{m},\phi}\mathbf{P}_{\mathrm{m},0}.$$

直接计算这两个相位行，得到

$$G_{\mathrm{m}} = 4\begin{pmatrix} d_{124} \\ d_{134} \end{pmatrix},$$

因此，式（100）。

附录 E：混合柔性族的参数与可容许性

1. 谱参数

对于全场和傅里叶示例中使用的混合族 $\Gamma_{\mathrm{m}} = \{123, 14, 24, 34\}$，设 $P_{123} = (0,0)$ 并固定

$$\begin{aligned}(\epsilon_4^{(123)}, \epsilon_2^{(14)}, \epsilon_3^{(14)}, \epsilon_1^{(24)}, \epsilon_3^{(24)}, \epsilon_1^{(34)}, \epsilon_2^{(34)}) \\ = (-1, +1, +1, -1, +1, -1, -1),\end{aligned} \tag{E1}$$

对于整数分支 $(n_{124}, n_{134}) = (-1, -2)$。

我们寻求如下形式的单位圆谱

$$\kappa_j^{(\mathrm{f})} = e^{\mathrm{i}\theta_j}, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta_4 = \frac{3\pi}{4}. \tag{E2}$$

令 $u := \theta_2$ 和 $v := \theta_3$，其中 $\pi/4 < u < v < 3\pi/4$。

对于指定顺序，式（13）中的主对数给出

$$\operatorname{Im}\Omega_{jm} = \begin{cases} \theta_m - \pi, & j < m, \\ \theta_m, & j > m. \end{cases}$$

对应的实散射位移为

$$r_{jm} := \operatorname{Re}\Omega_{jm} = \log\frac{\sin[(\theta_m-\theta_j)/2]}{\sin[(\theta_j+\theta_m)/2]}, \qquad j<m. \tag{E3}$$

对于单位圆谱，辅助谱点 $\mathbf{p}^j = (1,\ \alpha_j)$ 共线，因此 $d_{124}=d_{134}=0$。利用式（57）中的区域以及附录 D 中的循环定向直接计算，得到$b_{124}^{(\phi,0)}=\pi$ 和 $b_{134}^{(\phi,0)}=2\pi$。对于 $\Psi_{abc}=b_{abc}^{(\phi,0)}+2\pi n_{abc}$和 $(n_{124},\ n_{134}) = (-1,\ -2)$，相容条件（102）化简为

$$Q_{124}=-\pi, \qquad Q_{134}=-2\pi. \tag{E4}$$

将位置相容的事件中心代入这些条件，得到 $F_1(u,v) = F_2(u,v) = 0$，其中$F_1 := Q_{124}+\pi$ 和 $F_2 := Q_{134}+2\pi$ 由下式给出

$$\begin{aligned} F_1(u,v) &= \pi - \log 2 + r_{12}+r_{13}+r_{24} \\ &\quad + \cot u\,(r_{12}-r_{23}-r_{24}), \\ F_2(u,v) &= 2\pi - \log 2 + r_{12}+r_{13}+2r_{24}+r_{34} \\ &\quad + \cot v\,(r_{13}+r_{23}-r_{34}). \end{aligned} \tag{E5}$$

选定根的数值为 $\theta_2 \approx 1.1697116482$ 和 $\theta_3 \approx 1.2716864478$。

精确谱由以下位置中 F_1 和 F_2 的唯一公共零点确定

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (u_0,v_0)+[-h,h]^2, \\ (u_0,v_0) &= (1.16971165, 1.27168645), \quad h=10^{-8}. \end{aligned}$$

在整个 $\mathcal{R}$ 中，显式表达式给出

$$\begin{aligned} \partial_u F_1 &> 4.6, \qquad |\partial_v F_1| < 2.4, \\ |\partial_u F_2| &< 2.2, \qquad \partial_v F_2 > 8.5. \end{aligned} \tag{E6}$$

中心残差满足

$$|F_1(u_0,v_0)| < 4\times10^{-9}, \qquad |F_2(u_0,v_0)| < 2\times10^{-8}. \tag{E7}$$

对于每个 $v\in[v_0-h,v_0+h]$，由中值定理以及式（E6）和（E7）中的界可得

$$F_1(u_0-h,v) < 0 < F_1(u_0+h,v).$$

由 u中的连续性和严格单调性可知，方程$F_1(u,v) = 0$ 对每个$v\in[v_0-h,v_0+h]$都有唯一解 $u = u(v)$。由于 $\partial_u F_1>0$，隐函数定理保证 $u(v)$连续可微。

定义 $H(v) = F_2(u(v),v)$。隐式求导可得

$$H'(v) = \partial_v F_2 - \frac{\partial_u F_2\,\partial_v F_1}{\partial_u F_1},$$

其中导数在 $(u(v),v)$ 处取值。式（E6）中的导数界给出 $H'(v)>7$。此外，

$F_1(u(v_0),v_0) = 0$ 和中值定理可得

$$\begin{aligned} |H(v_0)| &\le |F_2(u_0,v_0)| + \sup_{\mathcal{R}}|\partial_u F_2|\,|u(v_0)-u_0| \\ &\le |F_2(u_0,v_0)| + \frac{\sup_{\mathcal{R}}|\partial_u F_2|}{\inf_{\mathcal{R}}\partial_u F_1}|F_1(u_0,v_0)| \\ &< 2.2\times10^{-8} < 7h. \end{aligned}$$

因此，

$$H(v_0-h) < H(v_0)-7h < 0 < H(v_0)+7h < H(v_0+h).$$

由于 H 严格递增，它恰有一个零点，从而 $\mathcal{R}$中 F_1 和 F_2 有唯一的公共零点。

在此根处，相位闭合条件得到满足。由于单位圆谱的 $d_{124}=d_{134}=0$，约化相位系统（100）不对 T_{14}施加限制，由此确立了固定谱下的代数灵活性。可容许变形区间由下文讨论的扇区、孤立性和事件分离条件决定。

2. 重构与可容许性

共同的位置归一化数据和相位由方程（31）–（33）和（36）得出。在两个端点$T_{14}=-30$ 和 -20处，扇区条件均成立，且事件时间满足

$T_{34}<T_{24}<T_{14}<T_{123}=0$，最小间隔大于2.9980。

对散射位移进行界定可得，在每个 $2\epsilon_r^{(\mu)}\operatorname{Re} g_r(P_\mu) - C_r > 15.5765$下，两个端点处均有 μ 和 $r\in\mathcal{R}_\mu$，其中 $C_r = \sum_{\ell\neq r}|\operatorname{Re}\Omega_{r\ell}|$。对于方程（E2）中的谱，$\theta_2$ 和 θ_3 如上所确定，带符号远程坐标和连续事件时间间隔关于 T_{14} 呈仿射关系，而 C_r 为常数。因此，这些界在整个 $T_{14}\in[-30,-20]$ 区间内均成立，并得到

$$\max_{\mu,\ r\in\mathcal{R}_\mu} \operatorname{sech}\left|\operatorname{Re}\mathcal{Z}_{r|\mu}^{\mathrm{loc}}(P_\mu)\right| < 3.44\times10^{-7}.$$

因此，该族在整个此区间内均物理上可容许。

附录 F：簇恒等式、相位速率与傅里叶比较

1. 居中的同步核心

我们首先说明，除整体相位外，同步有效簇的中心化剖面由其参与特征值决定。令 $q_{\mathcal{C}}^{\mathrm{sync}}(\xi)$ 为子谱为 $(\kappa_j)_{j\in\mathcal{C}}$ 且 $c_j=0$对所有 $j\in\mathcal{C}$均成立的零时刻解。在事件中心 $(X_\mu,\ T_\mu)$ 处，同步条件（22）意味着 $\mathcal{Z}_{j|\mu}^{\mathrm{eff}}(X_\mu,\ T_\mu) = \mathrm{i}\Phi_\mu$（模 $2\pi\mathrm{i}$），对所有 $j\in\mathcal{C}_\mu$均成立。令 $x = X_\mu+\xi$ 在 $t=T_\mu$处，得到

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}_{j|\mu}^{\mathrm{eff}}(X_\mu+\xi,T_\mu) \\ &\quad = 2\beta_j\xi + \mathrm{i}(\Phi_\mu - 2\alpha_j\xi) \pmod{2\pi\mathrm{i}}, \quad j\in\mathcal{C}_\mu. \end{aligned} \tag{F1}$$

于是，行列式表示给出

$$q^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{C}_\mu}(X_\mu+\xi,T_\mu)=e^{\mathrm{i}\Phi_\mu}q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}_\mu}(\xi). \tag{F2}$$

对于标准的零时刻同步剖面，$g_j(\xi)=-\mathrm{i}\kappa_j\xi$。令 $f_j=e^{g_j}$ 和 $h_j=e^{-g_j}$，并令$\boldsymbol{G}$ 为限制在该簇上的分母矩阵。其元素给出 $\boldsymbol{G}^\dagger=-\boldsymbol{G}$，而 $\xi\mapsto-\xi$ 交换 f和 h，并保持 $\boldsymbol{G}$ 不变。舒尔补表示为

$$q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}}(\xi)=2\mathrm{i}f^{\mathsf{T}}\boldsymbol{G}^{-1}\overline{h}. \tag{F3}$$

对其取复共轭，并将所得标量转置，利用 $\boldsymbol{G}^{-1\,\mathsf{T}}=-\boldsymbol{G}^{-1}$，得到 $q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}}(\xi)=2\mathrm{i}h^{\mathsf{T}}\overline{\boldsymbol{G}^{-1}}f=q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}}(-\xi)$。对傅里叶积分作变量替换可证明

$$\begin{aligned}q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}}(-\xi)&=\overline{q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}}(\xi)},\\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(k)&:=\int_{\mathbb{R}}q^{\mathrm{sync}}_{\mathcal{C}}(\xi)e^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{F4}$$

实值性并不意味着非负性，甚至也不意味着 k 中的偶性。

2. 混合族距离与相位的变化率

我们结合相位同步条件（106），由位置重构关系（31）和（33）推导出式36中的变化率。位移 Ω_{jm}沿族保持不变，因为谱和扇区分配均固定。

在 $P_{123}=(0,\,0)$ 处，扇区符号为 $\epsilon_4^{(123)}=-1$，因此式（31）和（33）给出 $s_1=\mathrm{Re}\,\Omega_{14}$。在事件 $P_{14}=(X_{14},\,\tau)$ 处，远端符号为 $\epsilon_2^{(14)}=\epsilon_3^{(14)}=+1$。同一公式给出

$$s_1=-2\beta_1(X_{14}-V_1\tau)-\mathrm{Re}(\Omega_{12}+\Omega_{13}).$$

令同一 s_1 的两个表达式相等，可得

$$\begin{aligned}X_{14}(\tau)&=V_1\tau-\frac{\mathrm{Re}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{14})}{2\beta_1},\\ X'_{14}&=V_1=-4\alpha_1.\end{aligned} \tag{F5}$$

接下来，利用孤子 4 在 P_{14} 处的方程（31）和（33，可得

$$s_4(\tau)=-2\beta_4(X_{14}(\tau)-V_4\tau)-\mathrm{Re}(\Omega_{42}+\Omega_{43}).$$

利用方程（103）和 $\mathrm{Re}\,c_4=s_4$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,c_4^{\mathrm{eff}}(\tau)&=s_4(\tau)+\mathrm{Re}\,H_4\\&=-2\beta_4(X_{14}(\tau)-V_4\tau)+\mathrm{Re}\,\Omega_{41}.\end{aligned}$$

因此，式（104）中的中心公式变为

$$\begin{aligned}D(\tau)&=X_{14}(\tau)-V_4\tau-\frac{\mathrm{Re}\,\Omega_{41}}{2\beta_4},\\ D'&=V_1-V_4=4(\alpha_4-\alpha_1).\end{aligned} \tag{F6}$$

这证明了簇间距对时间的独立性，且无需引入额外的截距参数。对于谱（E2），

$$D(\tau)\approx-4\sqrt{2}\,\tau+2.425734,$$

它在整个 $\tau\in[-30,-20]$上均为正。

在固定整数分支上，123核心与 $\Phi_{123}=0$ 的同步给出 $\vartheta_1=\mathrm{Im}\Omega_{14}$。在事件 14 处，式（36）对于孤子 1 可写为

$$\begin{aligned}\Phi_{14}=\vartheta_1&-2\alpha_1X_{14}-4(\alpha_1^2-\beta_1^2)\tau\\&+\mathrm{Im}(\Omega_{12}+\Omega_{13})\pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

求导并结合 $X'_{14}=V_1=-4\alpha_1$，可得

$$\Phi'_{14}=-2\alpha_1X'_{14}-4(\alpha_1^2-\beta_1^2)=4|\kappa_1|^2. \tag{F7}$$

孤子 4 的相同相位关联方程给出

$$\begin{aligned}\vartheta_4=\Phi_{14}&+2\alpha_4X_{14}+4(\alpha_4^2-\beta_4^2)\tau\\&-\mathrm{Im}(\Omega_{42}+\Omega_{43})\pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

由于 H_4 与 τ无关，式（103）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{Im}\,c_4^{\mathrm{eff}}=\vartheta'_4=4\big[|\kappa_1|^2-2\alpha_1\alpha_4+\alpha_4^2-\beta_4^2\big]. \tag{F8}$$

最后，对式（104）中的中心化相位求导，并代入间距变化率，得到

$$\phi'=\vartheta'_4-2\alpha_4D'=4(|\kappa_1|^2-|\kappa_4|^2),$$

这证明了式（106）。

3. 双簇预测的数值比较

对于 $\tau=-30,\,-25,\,-20$，我们将完整四孤子场的傅里叶功率谱与双簇预测进行比较，使用根据范数数据重建的 D 和 ϕ。在 $x\in[-60,240)$ 上使用长度为 2^{18}、$\Delta x=0.02$ 的零填充快速傅里叶变换，我们在采样频率网格上得到 $\max_{|k|\le20}|E|<10^{-10}$ 和 $\max_{k\in I_k}|\mathcal{I}-\cos\Psi|<10^{-11}$，其中 $I_k=[1.6,2.4]$。将 Δx 减半或把窗口延长至 $[-80,260)$，在整个采样频率范围内，复傅里叶变换的变化均小于 10^{-11}。

[1] A. Mussot、A. Kudlinski、M. Kolobov、E. Louvergneaux、M. Douay 和 M. Taki，《连续波泵浦超连续谱中的极端时间事件观测》，《光学快报》17，17010（2009）。[2] B. Kibler、J. Fatome、C. Finot、G. Millot、F. Dias、G. Genty、N. Akhmediev 和 J. M. Dudley，《非线性光纤光学中的 Peregrine 孤子》，《自然·物理》6，790（2010）。[3] J. M. Dudley、F. Dias、M. Erkintalo 和 G. Genty，《光学中的不稳定性、呼吸子与怪波》，Nat. Photonics 8，755（2014）。[4] D. R. Solli、C. Ropers、P. Koonath 和 B. Jalali，《光学怪波》，《自然》450，1054（2007）。[5] J. M. Dudley、G. Genty、A. Mussot、A. Chabchoub 和 F. Dias，《怪波及其在光学与海洋学中的类比》，《自然综述：物理》1，675（2019）。[6] A. Hasegawa 和 F. Tappert，《色散介质光纤中稳定非线性光脉冲的传输。I. 反常色散》，Appl. Phys. Lett. 23，142（1973）。[7] T. B. Benjamin 和 J. E. Feir，《深水波列的解体。第一部分》，理论，J. Fluid Mech. 27，417（1967）。[8] K. Tai、A. Hasegawa 和 A. Tomita，《光纤中调制不稳定性的观测》，Phys. Rev. Lett. 56，135（1986）。[9] M. Onorato、A. R. Osborne、M. Serio 和 S. Bertone，《随机海洋海况中的怪浪》，Phys. Rev. Lett. 86，5831（2001）。[10] V. E. Zakharov 和 L. A. Ostrovsky，《调制不稳定性：起源》，《物理学D》238，540（2009）。[11] M. Onorato、S. Residori、U. Bortolozzo、A. Montina 和 F. T. Arecchi，《不同物理背景中的怪波及其生成机制》，Phys. Rep. 528，47（2013）。[12] D. H. Peregrine，《水波、非线性薛定谔方程及其解》，《澳大利亚数学学会杂志B辑》25，16（1983）。[13] N. N. Akhmediev、V. M. Eleonskii 和 N. E. Kulagin，《非线性薛定谔方程的精确一阶解》，Theor. Math. Phys. 72，809（1987）。[14] K. B. Dysthe 和 K. Trulsen，《关于作为怪浪模型的 NLS 呼吸子型解的注记》，Phys. Scr. T82，48（1999）。[15] V. I. Shrira 和 V. V. Geogjaev，《Peregrine 孤子作为怪波原型为何如此特殊？》，《工程数学杂志》67，11（2010）。[16] A. Chabchoub、N. P. Hoffmann 和 N. Akhmediev，《水波水槽中的怪波观测》，Phys. Rev. Lett. 106，204502（2011）。[17] N. Akhmediev、A. Ankiewicz 和 M. Taki，《无中出现、无迹消失的波》，《物理快报A辑》373，675（2009）。[18] P. Dubard、P. Gaillard、C. Klein 和 V. B. Matveev，《关于 NLS 方程的多怪波解和 KdV方程的正子解》，Eur. Phys. J. Special Topics 185，247（2010）。[19] B. L. Guo、L. M. Ling 和 Q. P. Liu，《非线性薛定谔方程：广义 Darboux 变换与怪波解》，Phys. Rev. E 85，026607（2012）。[20]N. Akhmediev、A. Ankiewicz 和 J. M. Soto-Crespo，非线性薛定谔方程的怪波与有理解，Phys. Rev. E 80，026601（2009）。[21] Y. Ohta 和 J. K. Yang，非线性薛定谔方程的一般高阶怪波及其动力学，《英国皇家学会会刊A辑》468，1716（2012）。[22] L. H. Wang、C. H. Yang、J. Wang 和 J. S. He，非线性薛定谔方程中 n阶基本怪波的高度，《物理快报A辑》381，1714（2017）。[23] P. Dubard 和 V. B. Matveev，多怪波解：从非线性薛定谔方程到KP-I方程，《非线性》26，R93（2013）。[24] D. J. Kedziora、A. Ankiewicz 和 N. Akhmediev，圆形怪波簇，Phys. Rev. E 84，056611（2011）。[25] D. J. Kedziora、A. Ankiewicz 和 N. Akhmediev，三角形怪波级联，Phys. Rev. E 86，056602（2012）。[26] D. J. Kedziora、A. Ankiewicz 和 N. Akhmediev，非线性薛定谔方程怪波解层级的分类，Phys. Rev. E 88，013207（2013）。[27] B. Yang 和 J. K. Yang，非线性薛定谔方程中的怪波图样，《物理学D》419，132850（2021）。[28] J. S. Peng、N. Tarasov、S. Sugavanam 和 D. Churkin，锁模光纤激光器多孤子态中通过非线性孤子碰撞产生怪波，《光学快报》24，21256（2016）。[29] N. N. Akhmediev、L. L. Betina、V. M. Eleonskii、N. E. Kulagin、N. V. Ostrovskaya 和 E. A. Poltoratskii，光纤中多孤子脉冲的最优自压缩，《苏联量子电子学杂志》19，1240（1989）。[30] N. N. Akhmediev 和 N. V. Mitzkevich，光纤中 N孤子脉冲的极高压缩度，《IEEE量子电子学杂志》27，849（1991）。[31] A. A. Gelash 和 D. S. Agafontsev，强相互作用孤子气体与怪波的形成，Phys. Rev. E 98，042210（2018）。[32] Z. H. Zhang、Y. K. Huang、T. T. Li、D. L. Wang 和 J. Peng，玻色–爱因斯坦凝聚体中观测到的怪波的非线性傅里叶谱特征（2026），arXiv:2607.27734 [nlin.PS]。[33] D. S. Agafontsev 和 A. A. Gelash，不稳定凝聚体及其孤子模型中具有有理轮廓的怪波，《物理学前沿》9，610896（2021）。[34] D. Agafontsev、A. Gelash、S. Randoux 和 P. Suret，近似描述呼吸子解动力学的多孤子相互作用，《应用数学研究》152，810（2024）。[35] Y. H. Sun，聚焦非线性薛定谔方程中的孤子同步，Phys. Rev. E 93，052222（2016）。[36] M. Girotti、T. Grava、R. Jenkins、G. Mazzuca、K. McLaughlin 和 M. Yattselev，具有随机性的孤子同步：怪波与普适性，《非线性》38，115003（2025）。[37] A. V. Slunyaev 和 E. N. Pelinovsky，多孤子相互作用在怪波产生中的作用：修正的科尔特韦格–德弗里斯框架，Phys. Rev. Lett. 117，214501（2016）。[38] A. V. Slunyaev，长波模型中孤子与呼吸子的最优聚焦，《应用数学研究》142，

385（2019）。[39] A. V. Slunyaev 和 T. V. Tarasova，极端孤子碰撞的统计性质，Chaos 32，101102（2022）。[40] T. V. Tarasova 和 A. V. Slunyaev，柯特韦格–德弗里斯方程中孤子同步碰撞的性质，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 118，107048（2023）。[41] J. P. Gordon，光纤中孤子之间的相互作用力，Opt. Lett. 8，596（1983）。[42] F. M. Mitschke 和 L. F. Mollenauer，光纤中孤子间相互作用力的实验观测，Opt. Lett. 12，355（1987）。[43] L. C. Zhao、L. M. Ling、Z. Y. Yang 和 J. Liu，孤子相互作用过程中的时空干涉图样特性，Nonlinear Dyn. 83，659（2016）。[44] N. Akhmediev、J. M. Soto-Crespo 和 A. Ankiewicz，如何激发怪波，Phys. Rev. A 80，043818（2009）。[45] B. Frisquet、B. Kibler 和 G. Millot，非线性光纤光学中的阿赫梅季耶夫呼吸子碰撞，Phys. Rev. X 3，041032（2013）。[46] A. Gelash、G. Xu 和 B. Kibler，呼吸子相互作用的调控，Phys. Rev. Research 4，033197 (2022)。[47]A. Mucci、P. Suret、F. Copie、S. Randoux、R. Mullyadzhanov 和 A. Gelash，《光纤实验中强相互作用孤子的操控》，Phys. Rev. Lett. **134**，193804（2025）。[48] F. Copie、P. Suret 和 S. Randoux，《循环光纤环路中孤子碰撞动力学的时空观测》，Opt. Commun. **545**，129647（2023）。[49] V. E. Zakharov 和 A. B. Shabat，《非线性介质中二维自聚焦和一维波自调制的精确理论》，Sov. Phys. JETP **34**，62（1972）。[50] J. Satsuma 和 N. Yajima，《色散介质中非线性波一维自调制的初值问题》，Prog. Theor. Phys. Suppl. **55**，284（1974）。[51] M. J. Ablowitz、B. Prinari 和 A. D. Trubatch，*Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*，伦敦数学学会讲义系列，第302卷（剑桥大学出版社，剑桥，2004）。