arXiv:2611.29365v1 [cs.LO] 22 Nov 2026

具有多个必然与阈值目标的概率定时自动机

Jeremy Sproston

都灵大学，意大利
jeremy.sproston@unito.it

摘要。 概率定时自动机通过在边上引入离散概率选择，扩展了经典的定时自动机形式化模型。我们研究概率定时自动机的多个目标组合的验证问题，其中目标可以是非概率性的（指所有行为的必然满足），也可以是概率性的（指满足某个概率阈值），并且涉及使用奇偶条件表达的执行上的可达性或 ω-正则性质。我们表明，针对有限状态马尔可夫决策过程的多个目标，现有算法可以通过使用经典的区域图构造，应用于获得概率定时自动机对应目标的算法。特别地，在时间几乎必然发散的条件下，针对多个概率阈值汇可达性目标验证概率定时自动机是 EXPTIME 完全的；而针对包含时间必然发散在内的一个必然性质与单个概率阈值奇偶目标的组合进行验证，则属于 NEXPTIME $\cap$ coNEXPTIME。

关键词： 概率模型检测 · 定时自动机 · Ω-正则 · 多重目标。

1 引言

在复杂系统的开发过程中，考虑时间、概率或能量等定量特征可能至关重要。因此，人们相应地开发了用于描述和自动分析具有此类定量特征的系统的形式化方法。特别是，定时自动机 [3] 这一形式化方法已广泛用于描述定时系统。定时自动机由一个有限有向图构成，并配有一组称为时钟的实值变量；这些变量以与实时时间相同的速率递增，而图上的边则标注了时钟约束，用以限制边可被遍历的时刻。将其他定量信息纳入经典定时自动机形式化框架的方法包括考虑概率行为的方法。本文重点讨论概率定时自动机 （PTA） [18,27,29]。概率定时自动机在保留定时自动机原有特性的基础上，除通常的非确定性选择外，还

对于精确的时间延迟和要经过的边，可以选择哪些

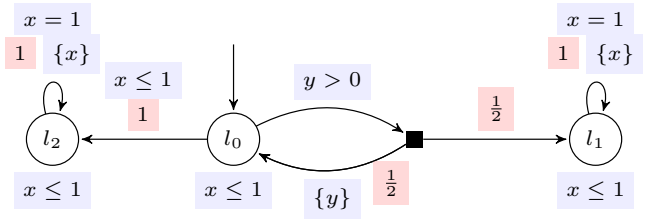


图 1. 一个概率定时自动机的示例。

边依据概率选择来经过。概率定时自动机也可以看作是带有时钟及其约束的马尔可夫决策过程（MDP）的保守扩展。对概率定时自动机的分析通常包括构造一个等价的有限状态马尔可夫决策过程 [26,27], ，然后使用有限状态马尔可夫决策过程的分析方法进行分析；这一过程已在 Prism [25] 和 mcsta [20]等工具中实现。概率定时自动机及其相关分析技术已用于对多个案例研究进行建模和分析 [26,29]。概率定时自动机还可作为抽象模型，用于近似分析时序与随机特征复杂交互的随机系统[19]。对概率定时自动机的分析通常采用验证形式，判断该自动机是否满足概率版本的单一可达性、时序逻辑或 ω-正则性质 [27,31], 或者某个确定性时间自动机 [17]。更准确地说，这类分析旨在确定是否存在一种策略（一种消解概率定时自动机非确定性选择的方式），使得该策略的行为满足某项性质的概率高于给定阈值。

例 *1.* 图 1 展示了一个概率定时自动机的示例。我们采用绘制定时自动机模型的常用惯例，并注意到，时钟约束（例如 $x \leq 1$）和重置（例如 $\{y\}$）以蓝色背景显示，而概率则以红色背景显示。考虑位置 l_0，并假设时钟 x 和 y 的值均为 0。在离开位置 l_0 之前，经过的时间长度是非确定性选择的，但受以下事实约束： x 的值不能超过 1（由写在 l_0 下方的不变条件限定）。如果在 l_0 中经过了非零时间，那么离开 l_0 时， y 的值将大于 0；随后将在通往 l_2 且概率为 1 的边与通往黑色方块的边之间作出非确定性选择。后一条边分叉为两个概率选项：一个以概率 $_1{}_2$ 通往 l_1 ，另一个以概率 $_1{}_2$ 返回 l_0 ；在后一种情况下，时钟 y 会重置为 0（如边标签 $\{y\}$ 所示）。如果离开 l_0 时 y 为 0，那么唯一可选的操作是沿边前往 l_2 （因为从 l_0 向右的边上的守卫条件 $y > 0$ 不满足）。请注意，该概率定时自动机存在以概率 1 到达 l_1 的策略，也存在以概率 1 到达 l_2 的策略。

马尔可夫决策过程的多目标阈值性质规定，一种多重性质的组合（每种性质都有各自的阈值）应由该马尔可夫决策过程 [10,14], 的某个策略满足；此类性质已应用于多种场景，例如自动驾驶 [11] 和移动机器人中的任务规划[28]。用于判断马尔可夫决策过程是否满足多目标性质的方法（以及相关问题，例如近似所考虑多重目标对应的帕累托曲线）已在 Prism [15,16], mcsta 和 Stor m [21] 中实现。

此外，多目标性质已扩展至包含必然目标：如果某个策略的所有行为都满足某项行为性质，那么该策略就满足该必然目标。具体而言，已有研究分别在 [8] 和 [7], 中探讨了结合单个必然目标与单个阈值奇偶目标，以及结合单个必然目标与多个阈值汇点可达性目标的多目标性质（其中，汇点可达性目标是指目标状态为吸收状态的可达性目标，即一旦到达目标状态，我们就会停留在该状态）。

本文扩展了针对概率定时自动机的基础单目标方法，使其能够验证概率定时自动机是否满足多个目标。再次考虑例 1 中的概率定时自动机，以及指定以（至少）$_{1\ 2}$ 的概率到达 l_1 、并以（至少）$_{1\ 2}$ 的概率到达 l_2 的多目标性质（通常使用诸如 $\mathbb{P}_{\geq \frac{1}{2}}(\Diamond l_1) \wedge \mathbb{P}_{\geq \frac{1}{2}}(\Diamond l_2)$ 的语法表示）。该概率定时自动机满足此多目标性质：一个能够证明该性质成立的策略示例是，首次到达 l_0 时选择通往黑色方块的边；如果概率定时自动机返回到 l_0，则选择通往 l_2 的边。

我们验证概率定时自动机的多目标性质的方法，是考虑应用经典区域等价 [3], 从而获得一个有限状态马尔可夫决策过程，随后采用有限状态马尔可夫决策过程多目标性质的分析方法对其进行分析。我们重点关注以下多目标性质：(i) 多阈值汇点可达性质；(ii) 包含一个必然奇偶目标和一个阈值可达性或奇偶性目标的性质；以及 (iii) 包含一个必然目标和多个阈值汇点可达性目标的性质。虽然我们证明了标准区域图马尔可夫决策过程（例如，参见 [27]）可用于验证这些多目标性质，但在多目标情形下，证明其正确性会因以下事实而变得复杂：对于多个阈值目标，即使在有限状态马尔可夫决策过程中，也需要在非确定性选择之间进行随机化 [14]。以往关于概率定时自动机的研究主要局限于非随机化策略；在有限状态区域图马尔可决策过程上非随机化策略能够刻画最优行为的情形下，这已经足够。我们证明，在概率定时自动机中，为满足多目标阈值性质，可能有必要对时间延迟进行随机化；但我们还证明，可以将注意力限制在这样一类策略上：随机选择中涉及的时间延迟会导向不同的区域，同时不影响多目标性质的满足情况。后一个性质是证明区域图马尔可夫决策过程构造正确性的关键。鉴于区域图马尔可夫决策过程的规模相对于概率定时自动机描述的规模呈指数增长，并考虑到

有限状态马尔可夫决策过程多目标性质的复杂度结果 [7,8,14]，我们得出结论：验证概率定时自动机满足以下目标的复杂度分别为：(i) 多阈值汇点可达性目标为 EXPTIME 完全；(ii) 一个必然奇偶目标和一个阈值可达性或奇偶性目标属于 NEXPTIME ∩ coNEXPTIME；以及 (iii) 一个必然目标和多个阈值汇点可达性目标属于 2-EXPTIME。

最后，我们还研究概率定时自动机中的时间发散问题。在概率定时自动机中，与定时自动机一样，时间不超过任何界限的行为并不现实，在分析时应予以排除。此前关于概率定时自动机中发散问题的研究主要关注几乎必然发散，即只考虑时间以概率 1 [27], 发散的策略；以及必然发散，即只考虑时间在所有行为中都发散的策略 [30]。请注意，在例 1 中，使用几乎必然策略时，可以以概率 1 从位置 l_0 到达位置 l_1；但使用必然策略时，则无法以概率 1 到达该位置。我们证明，几乎必然发散可以在多目标框架中表示为概率阈值为 1 的目标，而必然发散可以表示为必然目标。这一观察为概率定时自动机带来了新的结果。首先，在验证多目标阈值性质时，可通过修改概率定时自动机（且不会增加复杂度）并向多目标阈值性质添加一个合取项，来处理对几乎必然时间发散策略的限制；这意味着我们仍处于概率定时自动机／多目标阈值性质的框架中。其次，我们获得了一种方法，用于在必然发散的情况下验证单目标阈值奇偶目标和多目标阈值汇点可达性目标。第三，通过改编 [8], 的一个结果，我们证明，在必然发散的情况下，阈值余 Büchi 目标一般需要无限记忆。

我们注意到， [22,23] 关于基于概率定时自动机的多智能体系统的研究中采用了在边上进行随机化的策略。不同的是，本文的策略会同时对边和时间延迟进行随机选择。

2 预备知识

我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，用 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示非负实数集，用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集，并用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集。可数集 Q 上的（离散概率）分布是一个函数 $\mu\colon Q \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$，满足 $\sum_{q \in Q} \mu(q) = 1$。令 $\mathrm{Dist}(Q)$ 表示 Q 上的分布集合。对于集合 Q（可能不可数）和函数 $\mu : Q \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$，我们定义 $\mathrm{support}(\mu) = \{q \in Q \mid \mu(q) > 0\}$。对于不可数集 Q，我们将 $\mathrm{Dist}(Q)$ 定义为函数 $\mu\colon Q \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 的集合，其中 $\mathrm{support}(\mu)$ 是一个可数集，并且将 μ 限制在 $\mathrm{support}(\mu)$ 上所得的函数是一个分布。给定二元函数 $f\colon Q \times Q \to [0,1]$ 和 $q \in Q$，我们用 $f(q,\cdot)\colon Q \to [0,1]$ 表示满足以下条件的一元函数：对于每个 $q' \in Q$，$f(q,\cdot)(q') = f(q,q')$。

马尔可夫链。A 马尔可夫链 (MC) $\mathcal{C}$ 是一个元组 $(S, \bar{s}, \mathbf{P})$，其中 S 是状态集合，初始状态为 $\bar{s} \in S$，且 $\mathbf{P}\colon S \times S \to [0,1]$ 是转移概率函数，满足对于每个状态 $s \in S$，$\mathbf{P}(s,\cdot) \in \mathrm{Dist}(S)$。MC 的一个（无限）路径

$\mathcal{C}$是一个状态的无限序列 $s_0 s_1 \cdots$，满足对于所有 $i \geq 0$均有 $\mathsf{P}(s_i, s_{i+1}) > 0$。给定一条路径 $\mathsf{r} = s_0 s_1 \cdots$和 $i \geq 0$，我们令 $\mathsf{r}(i) = s_i$表示 r 上的第（$i+1$）个状态。以初始状态 $\bar{s}$开始的 $\mathcal{C}$的路径集合记为 $\mathsf{Paths}^{\mathcal{C}}$。类似地，$\mathcal{C}$的有限路径是一个有限序列 $r = s_0 s_1 \cdots s_n$，满足对于所有 $0 \leq i < n$均有 $\mathsf{P}(s_i, s_{i+1}) > 0$。对于 $0 \leq i \leq n$，我们令 $r(i) = s_i$ 表示 r上的第（$i+1$）个状态，并令 $\mathsf{Paths}^{\mathcal{C}}_*$ 表示以初始状态 $\bar{s}$开始的 $\mathcal{C}$ 的有限路径集合。给定 $\mathsf{Paths}^{\mathcal{C}}_*$中的一条有限路径 $r = s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_n$，令 $\Pr^{\mathcal{C}}_*(r) = \mathsf{P}(s_0, s_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(s_{n-1}, s_n)$。我们可以唯一地扩展 $\Pr^{\mathcal{C}}_*$，从而在 $\mathsf{Paths}^{\mathcal{C}}$ 上得到一个概率测度 $\Pr^{\mathcal{C}}$（更多详细信息请参见 [5]）。

设 Labels 是一个有限标签集，且 $\mathsf{c}: S \to$ Labels 是一个为 $\mathcal{C}$ 的状态赋予标签的函数。我们将 $(\mathcal{C}, \mathsf{c})$ 称为带标签马尔可夫链。对于 $\mathcal{C}$ 的一条无限路径 $\mathsf{r} = s_0 s_1 \cdots$，其关联的标签序列记为 $\mathsf{trace}[\mathsf{c}](\mathsf{r}) = \mathsf{c}_1(s_0)\mathsf{c}_1(s_1) \cdots$。设 $\mathcal{C}_1 = (S_1, \bar{s}_1, \mathsf{P}_1)$ 和 $\mathcal{C}_2 = (S_2, \bar{s}_2, \mathsf{P}_2)$ 是马尔可夫链，且 $(\mathcal{C}_1, \mathsf{c}_1)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathsf{c}_2)$ 是带标签马尔可夫链。那么，如果存在一个双射 $f: S_1 \to S_2$，使得 (1) $f(\bar{s}_1) = \bar{s}_2$，并且 (2) 对于状态 $s_1 \in S_1$ 和 $s_2 \in S_2$，若 $f(s_1) = s_2$，则 (2a) $\mathsf{c}_1(s_1) = \mathsf{c}_2(s_2)$，且 (2b) 对每个状态 $s_1' \in S_1$，都有 $\mathsf{P}_1(s_1, s_1') = \mathsf{P}_2(s_2, f(s_1'))$，则 $(\mathcal{C}_1, \mathsf{c}_1)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathsf{c}_2)$ 同构。

引理 1。对于同构的带标记马尔可夫链 $(\mathcal{C}_1, \mathsf{c}_1)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathsf{c}_2)$，对于由无限标签序列组成的集合 $\Xi \subseteq$ 标签$^{\omega}$，当且仅当对所有 $\mathbf{r}_1 \in$ 路径$^{\mathcal{C}_1}$，都有 轨迹$[\mathsf{c}_1](\mathbf{r}_1) \in \Xi$，且对所有 $\mathbf{r}_2 \in$ 路径$^{\mathcal{C}_2}$，都有 轨迹$[\mathsf{c}_2](\mathbf{r}_2) \in \Xi$。

设 $(\mathcal{C}, \mathsf{c})$ 是一个带标签马尔可夫链，并设 $\Xi \subseteq$ 标签$^{\omega}$ 是由标签序列组成的集合。如果集合 路径$^{\mathcal{C}}(\Xi) = \{\mathbf{r} \in$ 路径$^{\mathcal{C}} \mid$ 轨迹$[\mathsf{c}](\mathbf{r}) \in \Xi\}$ 是可测的，我们称Ξ 为 $(\mathcal{C}, \mathsf{c})$ 的一个事件。

引理 2。对于同构的带标记马尔可夫链 $(\mathcal{C}_1, \mathsf{c}_1)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathsf{c}_2)$中的事件 Ξ，有 概率$^{\mathcal{C}_1}$(路径$^{\mathcal{C}_1}(\Xi)$) = 概率$^{\mathcal{C}_2}$(路径$^{\mathcal{C}_2}(\Xi)$)。

引理 2 可由 [5, 引理 10.66] 推出（该引理针对双模拟给出了类似结果，而双模拟是一种弱于同构的等价关系）。

马尔可夫决策过程。马尔可夫决策过程（简称 MDP）$\mathcal{M} = (S, \bar{s}, A, \Delta)$由状态集 S、初始状态 $\bar{s} \in S$、动作集 A以及概率转移函数 $\Delta: S \times A \to \mathsf{Dist}(S) \cup \{\bot\}$组成。符号 $\bot$ 表示某个动作在某个状态下不可用，即 $\Delta(s, a) = \bot$表示动作 $a \in A$ 在状态 $s \in S$下不可用。对于每个状态 $s \in S$，令$A(s) = \{a \in A \mid \Delta(s, a) \neq \bot\}$，并假设 $A(s) \neq \emptyset$，即每个状态下至少有一个可用动作。从状态 s 出发的转移分为两步：首先从 $A(s)$中非确定性地选择一个动作 a，然后根据分布$\Delta(s, a)$以概率方式选择一个目标状态（即以概率 $\Delta(s, a)(s')$选择目标状态 s'）。一般而言，状态集和动作集可以是不可数的。若 S 和 A 为有限集，则称该 MDP 为有限的。MDP $\mathcal{M}$ 的一条（无限）路径是满足以下条件的序列$s_0 a_0 s_1 a_1 \cdots$：$a_i \in A(s_i)$，且对于所有 $i \geq 0$，$\Delta(s_i, a_i)(s_{i+1}) > 0$。给定一条无限路径 $\mathsf{r} = s_0 a_0 s_1 a_1 \cdots$和 $i \geq 0$，令 $\mathsf{r}(i) = s_i$表示 r 上第$i+1$个状态。令 $\mathsf{Paths}^{\mathcal{M}}$ 表示从初始状态出发的 $\mathcal{M}$ 的无限路径集

$\bar{s}$。有限路径是满足以下条件的序列 $r = s_0a_0s_1a_1\cdots a_{n-1}s_n$： $a_i \in A(s_i)$，且对于所有 $0 \leq i < n$，$\Delta(s_i, a_i)(s_{i+1}) > 0$。令$last(r) = s_n$ 表示r的最终状态。对于 $a \in A(s_n)$以及满足 $\Delta(s_n, a)(s) > 0$的 $s \in S$，我们用 ras 表示有限路径 $s_0a_0s_1a_1\cdots a_{n-1}s_nas$。令$Paths^{\mathcal{M}}_*$表示从初始状态 $\bar{s}$出发的 MDP $\mathcal{M}$ 的有限路径集。

$\mathcal{M}$ 的策略是一个函数 $\sigma : \text{Paths}^{\mathcal{M}}_* \to \bigcup_{s\in S}\text{Dist}(A(s))$，满足对于所有 $r \in \text{Paths}^{\mathcal{M}}_*$，$\sigma(r) \in \text{Dist}(A(\text{last}(r)))$，且 $|\text{support}(\sigma(r))|$ 是有限的。令 $\Sigma^{\mathcal{M}}$为 MDP $\mathcal{M}$ 的策略集合。若对于所有 $i \in \mathbb{N}$，无限路径 $\mathbf{r} = s_0a_0s_1a_1\cdots$由 σ 生成，即 $\sigma(s_0a_0s_1a_1\cdots a_{i-1}s_i)(a_i) > 0$，则称之为生成路径。令 Paths^{σ}为由 σ 生成的路径集合。由 σ 生成的有限路径集合 Paths^{σ}_* 定义类似。给定策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$，我们可以定义一个可数无限状态的马尔可夫链 $\mathcal{C}^{\sigma}$，称为 σ的诱导马尔可夫链，它对应于σ的行为：令 $\mathcal{C}^{\sigma} = (\text{Paths}^{\sigma}_*, \bar{s}, \text{P}^{\sigma})$，其中，对于 r、$r' \in \text{Paths}^{\sigma}_*$，有 $\text{P}^{\sigma}(r, r') = \sigma(r)(a) \cdot \Delta(\text{last}(r))(s)$，如果 $r' = ras$ 且 $a \in A(\text{last}(r))$；否则，$\text{P}^{\sigma}(r, r') = 0$。注意，$\mathcal{M}$ 由 σ 生成的（有限和无限）路径与 $\mathcal{C}^{\sigma}$的路径之间存在一一对应关系：例如，Paths^{σ} 中的无限路径 $s_0a_0s_1a_1\cdots$对应于 $\text{Paths}^{\mathcal{C}^{\sigma}}$中的无限路径 $s_0(s_0a_0s_1)(s_0a_0s_1a_1s_2)\cdots$。这使我们能够根据 $\text{Paths}^{\mathcal{C}^{\sigma}}$ 上的概率测度 $\Pr^{\mathcal{C}^{\sigma}}$，在 Paths^{σ} 上定义一个概率测度，记为 $\Pr^{\sigma}$。

给定一个有限集标签，设 $\text{m} : S \to$ 标签 是 $\mathcal{M}$的标记函数，并将 $(\mathcal{M},\text{m})$ 称为一个带标签的马尔可夫决策过程。设 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$的一个策略。我们将由 σ 和 m 诱导的带标签马尔可夫链定义为 $(\mathcal{C}^{\sigma},\text{c}^{\text{m}})$，其中对于每个 $r \in$ 路径$^{\sigma}_*$，$\text{c}^{\text{m}}(r) = \text{m}(last(r))$。

接下来，我们将轨迹和事件的概念扩展到带标签的马尔可夫决策过程。设 $(\mathcal{M}, \text{m})$ 是一个带标签的马尔可夫决策过程。对于 $\mathcal{M}$ 的一条无限路径$\mathbf{r} = s_0s_1\cdots$，令 $\text{trace}[\text{m}](\mathbf{r}) = \text{m}(s_0)\text{m}(s_1)\cdots$。我们称一个集合 $\Xi \subseteq$ 标签$^{\omega}$为一个事件，当且仅当对于每个 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$，集合路径$^{\mathcal{C}^{\sigma}}(\Xi) = \{\mathbf{r} \in$ 路径$^{\mathcal{C}^{\sigma}} \mid \text{trace}[\text{c}^{\text{m}}](\mathbf{r}) \in \Xi\}$ 是可测的。

下文中，我们考虑两类事件：可达性性质和奇偶条件。标签序列 $\pi = \mu_0\mu_1\mu_2\cdots$ 是一个无限标签序列（即 $\pi \in$ 标签$^{\omega}$）。沿着 π 的第 $i+1$ 个标签记为 $\pi(i)$，即 $\pi(i) = \mu_i$。令 $T \subseteq$标签为一组目标标签。我们用 $\Diamond T$ 表示包含至少一个 T 中标签的无限标签序列集合，即可达性性质。形式上，$\Diamond T = \{\pi \in$标签$^{\omega} \mid \exists i \in \mathbb{N}.\, \pi(i) \in T\}$。优先级函数 $\text{p} :$ 标签 $\to \{1, 2, \ldots, d\}$ 为每个标签指定一个优先级。给定标签序列 $\pi \in$ 标签$^{\omega}$，令 $\inf(\pi) = \{k \mid \forall i \geq 0.\exists j \geq i.\text{p}(\pi(j)) = k\}$ 表示沿着 π 无限次出现的优先级集合。与 p 相关联的奇偶条件对应于这样的标签序列：在无限次出现的优先级中，最大优先级为偶数。形式上，与 p 相关联的奇偶条件的标签序列集合定义为 $\text{Parity(p)} = \{\pi \in$ 标签$^{\omega} \mid \max\{k \in \inf(\pi)\}$ 为偶数$\}$。今后，我们假设只考虑可达性性质和奇偶条件均可测的带标签马尔可夫决策过程。带标签马尔可夫决策过程的可达性性质 $\Diamond T$ 是汇可达性性质，当且仅当每个满足 $\text{m}(s) \in T$ 的状态 $s \in S$ 都是吸收状态；也就是说，每个可用动作 $a \in A(s)$ 都满足 $\Delta(s, a)(s) = 1$。

基于事件 $\mathfrak{e} \subseteq$ 标签$^{\omega}$ 的必然目标记为 S($\mathfrak{e}$)。如果 $\mathcal{M}$ 的所有轨迹都属于 $\mathfrak{e}$，则策略满足该目标。形式上，给定 ($\mathcal{M}$, m) 和 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$，我们记 ($\mathcal{M}$, m) $\sigma \models$ S($\mathfrak{e}$)，当且仅当对所有 r $\in$ 路径$^{\sigma}$，trace[m](r) $\in \mathfrak{e}$。基于 $\mathcal{M}$ 的事件 $\mathfrak{e}$ 且参数为 $\trianglerighteq \in \{>, \geq\}$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 的阈值目标记为 $\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}(\mathfrak{e})$。如果 $\mathcal{M}$ 的轨迹中属于 $\mathfrak{e}$ 的部分所对应的概率与 λ 满足关系 $\trianglerighteq$，则该策略满足此目标。形式上，给定 ($\mathcal{M}$, m) 和 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$，我们记 ($\mathcal{M}$, m) $\sigma \models \mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}(\mathfrak{e})$，当且仅当 Pr$^{\sigma}$(路径$^{\mathcal{C}^{\sigma}}(\mathfrak{e})) \trianglerighteq \lambda$。

一个多目标公式（关于标签）由基于事件的目标合取组成，即 $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\mathfrak{e}_i)$，其中 ϕ_i 为 S 或属于 $\{\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda} \mid \trianglerighteq \in \{>, \geq\}$ 和 $\lambda \in [0,1]\}$，并且对于每个 $1 \leq i \leq n$，$\mathfrak{e}_i$ 要么是可达性性质，要么是奇偶条件。设 ($\mathcal{M}$, m) 是一个带标签的马尔可夫决策过程。给定策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$，我们记 ($\mathcal{M}$, m) $\sigma \models \varphi$ 当且仅当 $\bigwedge_{i=1}^{n}$ ($\mathcal{M}$, m) $\sigma \models \phi_i(\mathfrak{e}_i)$，并且 ($\mathcal{M}$, m) $\models \varphi$ 当且仅当存在 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}}$ 使得 ($\mathcal{M}$, m) $\sigma \models \varphi$。下面的引理是引理 1 和引理 2 的推论。其证明见附录。

引理 3。设 $(\mathcal{M}_1, \mathsf{m}_1)$ 和 $(\mathcal{M}_2, \mathsf{m}_2)$ 是带标签的马尔可夫决策过程，使得对于 $\mathcal{M}_1$的所有策略 $\sigma_1 \in \Sigma^{\mathcal{M}_1}$，都存在 $\mathcal{M}_2$ 的一个策略 $\sigma_2 \in \Sigma^{\mathcal{M}_2}$，使得$(\mathcal{C}^{\sigma_1}, \mathsf{c}^{\mathsf{m}_1})$ 和 $(\mathcal{C}^{\sigma_2}, \mathsf{c}^{\mathsf{m}_2})$ 同构。设 φ 为一个多目标公式。如果$(\mathcal{M}_1, \mathsf{m}_1) \models \varphi$，则$(\mathcal{M}_2, \mathsf{m}_2) \models \varphi$。

3 概率定时自动机

本节回顾概率定时自动机的定义。设 $\mathcal{X}$ 为一个时钟的有限集，这些时钟是实值变量，其值以与实时时间相同的速率增长。我们将映射 $v: \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 称为时钟赋值。令 $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}}$ 表示时钟赋值的集合。设 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}}$ 为将 $\mathcal{X}$中的所有时钟赋值为 0 的时钟赋值。对于时钟赋值 $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}}$ 和$\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$（用于表示时间延迟），我们用 $v + \delta$ 表示通过令 $(v+\delta)(x) = v(x) + \delta$（对所有时钟 $x \in \mathcal{X}$）而得到的时钟赋值。对于时钟集合 $X \subseteq \mathcal{X}$，令 $v[X := 0]$ 表示从 v 得到的时钟赋值，即将 X 中的所有时钟重置为 0；形式化地，令 $v[X := 0](x) = 0$（对所有 $x \in X$），并令 $v[X := 0](x) = v(x)$（对所有 $x \in \mathcal{X} \setminus X$）。对于两个时钟赋值 v、$v' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}}$，令 Reset$(v, v') = \{X \subseteq \mathcal{X} \mid v[X := 0] = v'\}$ 表示满足以下条件的时钟集合 X：在 v中将 X 内的时钟重置为 0 后，可以得到时钟赋值 v'。

集合 Ψ 由时钟约束 组成，定义为 $\mathcal{X}$ 上由形如 $x \sim c$ 的原子公式构成的合取项集合，其中 x，$y \in \mathcal{X}$，$\sim \in \{<, \leq, >, \geq, =\}$，和 $c \in \mathbb{N}$。时钟赋值 $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{X}}$ 满足 时钟约束 $\psi \in \Psi$（记作 $v \models \psi$）当且仅当将 ψ 中的每个时钟 $x \in \mathcal{X}$ 替换为其值 $v(x)$ 后，ψ 成立。

~~1. 概率定时自动机~~ 一个概率定时自动机（概率定时自动机）$A = (L, \bar{l}, \mathcal{X}, \mathit{inv}, \mathit{prob})$ 由以下部分构成：一个有限集 L，其中包含位置，以及一个初始位置 $\bar{l} \in L$；一个有限的 $\mathcal{X}$ 时钟集合；一个函数不变式：$L \to \Psi$，为每个位置关联一个不变条件；一个集合概率 $\subseteq L \times \Psi \times \mathrm{Dist}(2^{\mathcal{X}} \times L)$，其中包含概率边。一条概率边$(l, g, \wp) \in$ 概率是一个三元组，其中：(1) l 是源位置；(2) g 是一个时钟

约束，称为守卫；(3) $\wp$ 是 $2^{\mathcal{X}} \times L$上的概率分布，即定义在时钟集合 $X \subseteq \mathcal{X}$ 与目标位置 $l' \in L$构成的数对(X, l')上的概率分布。

概率定时自动机的一个状态是一个有序对 $(l, v) \in L \times \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\geq 0}$，满足 $v \models \mathsf{inv}(l)$。概率定时自动机的一次转移具有以下形式。从状态 (l, v) 出发，非确定性地选择一个时间延迟 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并受以下约束：当时间 δ 从 (l, v) 开始流逝时，不变式 $\mathsf{inv}(l)$ 必须始终成立。随后，若 $l = l'$ 且守卫 g 被 $v+\delta$满足，则可非确定性地选择一条概率边 $(l', g, \wp) \in \mathsf{prob}$。从状态 $(l, v+\delta)$ 开始。选定概率边 $(l', g, \wp)$ 后，根据分布 $\wp$随机选择要重置的时钟集合和一个后继位置；也就是说，$X \subseteq \mathcal{X}$ 中的时钟被重置为 0，概率定时自动机以概率 $\wp(X, l'')$ 转移到位置 l''，从而得到状态 $(l'', (v+\delta)[X := 0])$。

按照概率定时自动机文献中的惯例（例如，参见 [29]），概率定时自动机的规模包括时钟约束（不变条件和守卫）中所用常数的二进制编码，以及将概率表示为两个自然数之比的编码，其中两个自然数均以二进制书写。

在正式介绍概率定时自动机的语义之前，我们作出以下标准的良构性假设：(1) 对于任意状态 (l, v)，存在 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和概率边 $(l, g, \wp) \in$ 概率，使得 $v+\delta \models g$ 且对于所有 $0 \leq \delta' \leq \delta$，$v+\delta' \models$ 不变式(l)（从任意状态出发，都存在可能的转移）；以及 (2) 对于任意概率边 $(l, g, \wp) \in$ 概率 以及满足 $v \models g \wedge$ 不变式 (l) 的任意时钟赋值 $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\geq 0}$，对于每个 $(X, l') \in \mathsf{support}(\wp)$，都有 $v[X := 0] \models$ 不变式(l')（概率边必须指向有效状态）。

概率定时自动机 $\mathcal{M}$ 的语义 $[\![\mathcal{M}]\!]$ 是 MDP $(S, \bar{s}, A, \Delta)$，其中

- $S = \{(l, v) \mid l \in L$ 且 $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\geq 0}$ 满足条件 $v \models \mathsf{inv}(l)\}$ 且 $s = (\bar{l}, 0)$；
- $A = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{prob}$；
- 对于 $(l, v) \in S$，$\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及 $(l, g, \wp) \in \mathsf{prob}$，使得 (i) $v+\delta \models g$ 且 (ii) 对所有 $0 \leq \delta' \leq \delta$，$v+\delta' \models \mathsf{inv}(l)$，令 $\Delta((l, v), (\delta, (l, g, \wp)))$ 为如下概率分布：对于 $(l', v') \in S$：

$$\Delta((l, v), (\delta, (l, g, \wp)))(l', v') = \sum_{X \in \mathsf{Reset}(v+\delta, v')} \wp(X, l')\,;$$

对于 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和不满足条件 (i) 和 (ii) 的 $p \in$ 概率，我们令$\Delta((l, v), (\delta, p)) = \bot$。

我们还考虑语义 MDP 的带标签扩展，其中标记函数将状态标记为其对应的位置。形式化地，对于 PTA $\mathcal{P}$，$\mathcal{P}$ 的带标签语义 MDP是带标签的马尔可夫决策过程 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}], \mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})$，其中 $\mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]} : S \to L$ 满足：对于每个 $(l, v) \in S$，$\mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}(l, v) = l$。因此，我们在 PTA 的语境下考虑的事件是基于位置的可达性性质和奇偶条件：更具体地说，给定标签 $= L$，可达性性质的形式为 $\Diamond T$ for $T \subseteq L$；类似地，优先级函数的形式为 $\mathsf{p} : L \to \{1, 2, \ldots, d\}$。给定关于 L 的多目标公式 φ，当且仅当 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}], \mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}) \models \varphi$ 时，我们记作 $\mathcal{P} \models \varphi$。

4 验证概率定时自动机的多目标公式

本节第一部分回顾 PTA [27] 的区域等价[3] 和区域图马尔可夫决策过程的定义。随后，我们考察见证多目标公式满足性的策略的性质，论证在此语境下使用区域图马尔可夫决策过程的正确性，最后陈述某些类别多目标公式验证问题的复杂度。本节结果的证明见附录。

区域图马尔可夫决策过程。对于 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们令 $\mathsf{frac}(t) = t - \lfloor t \rfloor$。对于概率定时自动机 $\mathcal{P} = (L, l, \mathcal{X}, \mathsf{inv}, \mathsf{prob})$ 的每个时钟 $x \in \mathcal{X}$，我们令 c_x 为 x 在 $\mathcal{P}$ 的概率边的不变式或守卫中进行比较时所用的最大常数（如果 x 没有出现在 $\mathcal{P}$ 的任何时钟约束中，则令 $c_x = 1$）。若两个时钟赋值 v、$v' \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\geq 0}$ 满足以下条件，则称它们时钟等价：(1) 对所有时钟 $x \in \mathcal{X}$，$v(x) \leq c_x$ 当且仅当 $v'(x) \leq c_x$；(2) 对所有满足 $v(x) \leq c_x$ 的时钟 $x \in \mathcal{X}$，有 $\lfloor v(x) \rfloor = \lfloor v'(x) \rfloor$；(3) 对所有时钟 x、$y \in \mathcal{X}$，若 $v(x) \leq c_x$ 且 $v(y) \leq c_y$，则 $\mathsf{frac}(v(x)) \leq \mathsf{frac}(v(y))$ 当且仅当 $\mathsf{frac}(v'(x)) \leq \mathsf{frac}(v'(y))$；(4) 对所有满足 $v(x) \leq c_x$ 的时钟 $x \in \mathcal{X}$，有 $\mathsf{frac}(v(x)) = 0$ 当且仅当 $\mathsf{frac}(v'(x)) = 0$。令 CECs 为 $\mathcal{P}$ 的时钟等价类集合。

给定时钟赋值 $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\geq 0}$，包含 v 的唯一时钟等价类记作 $[v]$。给定时钟等价类 $\alpha \in$CECs 和时钟约束 ψ（它是 $\mathcal{P}$ 的不变式或守卫），我们记作 $\alpha \models \psi$，表示存在一个时钟赋值 $v \in \alpha$，使得 $v \models \psi$（另请注意，存在 $v \in \alpha$ 使得 $v \models \psi$ 蕴含对于所有 $v' \in \alpha$ 都有 $v' \models \psi$）。我们记 $\alpha[X := 0]$ 表示集合 $\{v[X := 0] \mid v \in \alpha\}$。注意，$\alpha[X := 0]$ 本身就是一个时钟等价类。我们使用 $\mathsf{Reset}(\alpha, \beta) = \{X \subseteq \mathcal{X} \mid \alpha[X := 0] = \beta\}$ 表示这样的时钟集合的集合：从 α 中的时钟赋值将这些时钟重置为 0 后，会得到 β。下面的引理 4 阐述了时钟赋值与区域的 Reset 之间的关系（形式化证明见 [32]）。

引理 4。对于时钟赋值 v、$v' \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\geq 0}$，有 $\mathsf{重置}(v, v') = \mathsf{重置}([v], [v'])$。

如果满足以下条件，则两个状态 (l, v)、(l', v') 是区域等价：(1) $l = l'$，以及 (2) v 和 v' 是时钟等价的。区域是区域等价关系的一个等价类。区域将写成对 (l, α) 的形式，其中 $l \in L$ 是一个位置，$\alpha \in$ 是时钟等价类。令 $\mathfrak{Regs}$ 为 $\mathcal{P}$ 的区域集合。根据关于定时自动机区域数量的标准结果，[3],对应于概率定时自动机 $\mathcal{P}$ 的区域数量上界为 $|L| \cdot \prod_{x \in \mathcal{X}} (c_x + 1) \cdot |\mathcal{X}|! \cdot 2^{|\mathcal{X}|}$。

设 (l, α) 是一个区域。(l, α) 的时间后继是一个时钟等价类，它可以通过让时间流逝从 α 中的时钟赋值到达，同时受 l 的不变式约束：形式化地说，如果存在 $v \in \alpha$ 和 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $v + \delta \in \beta$ 并且对于所有 $0 \leq \delta' \leq \delta$ 均有 $v + \delta' \models$ 不变式(l)，则 $\beta \in$ 是 (l, α) 的时间后继。令时间后继$[l](\alpha)$为 (l, α) 的时间后继集合。

概率定时自动机 $\mathcal{P}$ 的区域集合可按以下方式构造 $\mathcal{P}$ 的区域图马尔可夫决策过程 $^-$，记作 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}] = (\mathfrak{Regs}, (l, [\mathbf{0}]) \mathfrak{A}, \blacktriangle)$。其状态集合为

$\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的 $^-$ 是区域集合 $\mathfrak{Regs}$，初始状态为 $(l, [\mathbf{0}])$。$\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的动作集合定义为 $\mathfrak{A} = \mathsf{CEC} \times \mathsf{prob}$。概率转移函数 $\blacktriangle$：$\mathfrak{Regs} \times \mathfrak{A} \to \mathsf{Dist}(\mathfrak{Regs})$ 定义如下。对于满足 (i) $l = l'$、(ii) $\beta \in \mathsf{tsucc}[l](\alpha)$ 以及 (iii) $\beta \models g$ 的 $(l, \alpha) \in \mathfrak{Regs}$ 和 $(\beta, (l', g, \wp)) \in \mathfrak{A}$，令 $\blacktriangle((l, \alpha), (\beta, (l', g, \wp)))$ 为如下分布：对于 $(l'', \gamma) \in \mathfrak{Regs}$：

$$\blacktriangle((l, \alpha), (\beta, (l', g, \wp)))(l'', \gamma) = \sum_{X \in \mathsf{Reset}(\beta, \gamma)} \wp(X, l'') \, .$$

对于 $(l, \alpha) \in \mathfrak{Regs}$ 以及 $(\beta, (l', g, \wp)) \in \mathfrak{A}$ 不满足条件 (i)、(ii) 或 (iii) 中至少一个的情况，令 $\blacktriangle((l, \alpha), (\beta, (l', g, \wp))) = \bot$。注意，$\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 是一个有限马尔可夫决策过程。

与 PTA 的带标签语义 MDP 情况相同，我们也将区域的位置视为其标签：形式上，对于 PTA，我们令 $\mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]} : \mathfrak{Regs} \to L$ 满足 $\mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}(l, \alpha) = l$，对每个 $(l, \alpha) \in \mathfrak{Regs}$均成立。$\mathcal{P}$ 的带标签区域图马尔可夫决策过程为带标签马尔可夫决策过程 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}], \mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]})$。

接下来，我们将证明以下结果，它指出，判断一个 PTA 是否满足多目标公式，可以通过判断区域图马尔可夫决策过程是否满足同一公式来实现。

命题 1. 设 $\mathcal{P}$ 为一个概率定时自动机，φ 为关于 $\mathcal{P}$的位置集合的多目标公式。那么 $\mathcal{P} \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}], \mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}) \models \varphi$。

区域策略、随机化与记忆。 在证明命题 1 之前，我们先介绍纯策略和区域策略（无记忆及有限记忆），并探讨它们在多目标情境中的作用。

若对所有有限路径 $r \in$路径$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_*$，策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 满足纯 $| \; = 1$，即 $\mathsf{support}(\sigma(r))| \; = 1$，则称该策略为纯策略；也就是说，它不会在其动作之间进行随机选择。

接下来，我们沿用 [2,9] 在双玩家定时自动机博弈中的先例，考察区域策略。下文将 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$的有限路径称为有限区域路径。考虑以下 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$的有限区域路径 $\mathfrak{r}$ 和有限路径 r：

$$\mathfrak{r} = (l_0, \alpha_0)(\beta_0, p_0)(l_1, \alpha_1)(\beta_1, p_1) \ldots (\beta_{n-1}, p_{n-1})(l_n, \alpha_n)$$
$$r = (l'_0, v_0)(\delta_0, p'_0)(l'_1, v_1)(\delta_1, p'_1) \ldots (\delta_{m-1}, p'_{m-1})(l'_m, v_m) \, .$$

若满足以下条件，我们记作 $r \in \mathfrak{r}$：(1) $n = m$；(2) 对每个 $0 \leq i \leq n$，$l_i = l'_i$ 且 $v_i \in \alpha_i$；(3) 对每个 $0 \leq i < n$，$v_i + \delta_i \in \beta_i$ 且 $p_i = p'_i$。设 $[r]$ 为 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$的唯一有限区域路径，使得 $r \in [r]$（鉴于 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 表示 $\mathcal{P}$的所有可能行为，因此对于任意 $r \in$路径$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_*$，这样的 $[r]$ 均存在）。

给定一个状态 $s \in S$，我们用 $\mathsf{val}(s)$ 表示 s 的时钟赋值，即，若 $s = (l, v)$，则 $\mathsf{val}(s) = v$。设 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 为一个策略，且 $r, r' \in \mathsf{Paths}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_*$ 为有限路径。若存在一个双射 $f : \mathsf{support}(\sigma(r)) \to \mathsf{support}(\sigma(r'))$，使得对于每个 $(\delta, p) \in \mathsf{support}(\sigma(r))$，都有 (1) $f(\delta, p) = (\delta', p)$，其中 $[\mathsf{val}(\mathsf{last}(r)) + \delta] = [\mathsf{val}(\mathsf{last}(r')) + \delta']$；以及 (2) $\sigma(r)(\delta, p) = \sigma(r')(f(\delta, p))$，则称 σ 对 r, r' 有时钟等价选择。

若策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 对所有满足 $[r] = [r']$ 的有限路径 $r, r' \in Paths_*^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 都具有时钟等价选择，则称其为区域策略。若区域策略$\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 对所有满足 $last(r)$ 和 $last(r')$ 区域等价的有限路径 $r, r' \in Paths_*^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 都具有时钟等价选择，则称其为无记忆。

随机摩尔机 (M $\bar{}$m, u, na) 包含一个由记忆状态组成的有限集 M、一个初始记忆状态 $\bar{}$m $\in$ M、一个更新函数 u : M $\times$ $\mathfrak{Regs}$ $\to$ M，以及一个下一动作函数 na : M $\times$ $\mathfrak{Regs}$ $\to$ Dist($\mathfrak{A}$)。给定当前区域 (l, α) 和记忆状态 m $\in$ M，随机摩尔机以概率 na(m, (l, α))(β, p) 选择下一动作 $(\beta, p) \in \mathfrak{A}(l, \alpha)$，并将其记忆状态更新为 u(m, (l, α))。给定有限区域路径 $\mathfrak{r} \in$ Paths$_*^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$，我们令 $\hat{}$u($\bar{}$m $\mathfrak{r}$) 表示 u 沿 $\mathfrak{r}$ 中区域序列的标准扩展，即 $\hat{}$u($\bar{}$m $\mathfrak{r}(\beta, p)(l, \alpha)$) = u($\hat{}$u($\bar{}$m $\mathfrak{r}$), (l, α))，以及 $\hat{}$u($\bar{}$m, (l, α)) = u($\bar{}$m, (l, α))。如果一个区域策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 是根据随机摩尔机 (M $\bar{}$m, u, na) 按如下方式定义的，则称其为有限记忆区域策略。对于所有满足 $\hat{}$u($\bar{}$m $[r]$) = $\hat{}$u($\bar{}$m $[r']$) 的有限路径$r, r' \in$ Paths$_*^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$：(1) 存在一个双射 f: support($\sigma(r)$) $\to$ support(na($\hat{}$u($\bar{}$m $[r]$))，使得对于每个 $(\delta, p) \in$ support($\sigma(r)$)，有 $f(\delta, p) = ([\text{val}(\text{last}(r)) + \delta], p)$，且 $\sigma(r)(\delta, p) =$ na($\hat{}$u($\bar{}$m $[r]$))$(f(\delta, p))$；(2) 存在一个双射 f': support($\sigma(r')$) $\to$ support(na($\hat{}$u($\bar{}$m $[r']$))，使得对于每个 $(\delta', p') \in$ support($\sigma(r')$)，有 $f'(\delta', p') = ([\text{val}(\text{last}(r')) + \delta'], p')$，且 $\sigma(r')(\delta', p') =$ na($\hat{}$u($\bar{}$m $[r']$))$(f'(\delta', p'))$。

值得注意的是，区域策略尤为重要，因为我们使用区域图马尔可夫决策过程作为有限状态马尔可夫决策过程；从所考虑的多目标公式的角度来看，它与概率定时自动机的语义 MDP 等价。具体而言，对于某个多目标公式，如果一组策略足以应对有限状态区域图马尔可夫决策过程，那么相关的一组区域策略也足以应对语义 MDP：在有限状态区域图马尔可夫决策过程中满足该多目标公式的策略，为语义 MDP 上相应的区域策略提供了一套“方案”。例如，对于有限 MDP 上形如 $\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}(\Diamond T)$ 的单目标阈值可达性公式，纯无记忆策略已足够；由此可知，对于概率定时自动机上的单目标阈值可达性公式，纯无记忆区域策略也足够。有限记忆策略足以证明有限状态 MDP 满足以下两类多目标公式：（1）形如 $\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\mathfrak{e}_i)$ 的多阈值公式，其中对于每个 $1 \le i \le n$ （从 [14] 出发），$\phi_i \in \{\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda} \mid \trianglerighteq \in \{>, \ge\} \text{ and } \lambda \in [0, 1]\}$ and$\mathfrak{e}_i$ 都是可达性性质；（2）单必然奇偶条件单阈值可达性性质 S($\mathfrak{e}_1$) $\wedge$ $\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}(\mathfrak{e}_2)$，即 $\mathfrak{e}_1$ 是奇偶条件，而 $\mathfrak{e}_2$ 是可达性性质（从 [8] 出发）。因此，有限记忆区域策略足以证明概率定时自动机满足此类公式。反过来，对于考虑这些类别的公式时，我们可以得出结论：概率定时自动机的策略需要记忆和随机化，因为有限状态 MDP 在相同公式类别上的策略也需要记忆和随机化（回想一下，概率定时自动机对 MDP 作了保守扩展，即如果某概率定时自动机的时钟约束无论时钟取何值都始终成立，那么它就可以解释为一个 MDP）。此外，要确定有限状态 MDP 是否满足形如 S($\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}$)$\Diamond T$($\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$) 的必然阈值公式，需要无限记忆，其中 $\mathfrak{e}_i$and $\phi_i \in \{\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda} \mid \trianglerighteq \in \{>, \ge\}$ 是奇偶条件 $\lambda \in [0, 1]\}$，

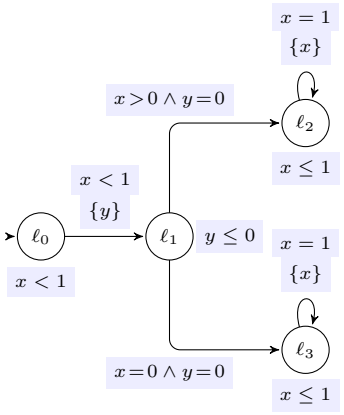


图2. 一种需要对时间延迟进行随机化的 PTA （所有边对应的概率均为 1 ）。

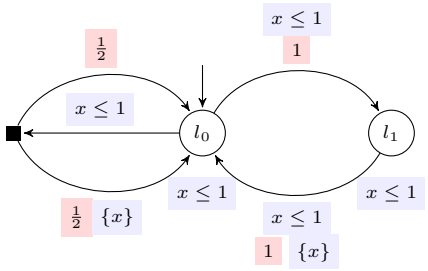


图3. 从 [8], 的例1改编而来的一种 PTA，其中选择概率边需要无限记忆。

因此，对于满足此类必然阈值公式的概率定时自动机策略，这一结论同样适用。

在以下例子中，我们给出一种 PTA，对于该 PTA，要满足多目标公式，必须对时间延迟进行随机化 。

例*2.* 图2所示的 PTA 是对 [6], 图2中的有限马尔可夫决策过程的定时扩展，它通过采用一种策略来满足多目标公式 $\mathbb{P}_{>0}(\Diamond\{l_2\}) \wedge \mathbb{P}_{>0}(\Diamond\{l_3\})$：该策略为动作 $(0, p)$ 分配概率 λ ，并为动作 (δ, p) 分配概率 $1-\lambda$；其中概率 $\lambda \in$ （0,1）和时间延迟 $\delta \in$ （0,1）可任意取值， p 表示源位置为 l_0的概率边。不符合上述描述的 PTA 策略无法满足该多目标公式。

受限延迟策略。 尽管例2表明，为了满足多目标公式，时间延迟随机化可能是必要的，但我们现在将证明，在那些会到达同一时钟等价类的时间延迟之间进行随机化并非必要：对于任何在会到达同一时钟等价类的延迟之间进行随机化的策略，我们都可以找到一个等价策略，使其在该等价类中至多只为一个延迟赋予正概率。这一结果是命题 1 证明的关键。

策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 称为受限延迟 策略，若对于所有 $r \in$ 路径$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_{*}$以及每一对不同的 $(\delta, p), (\delta', p') \in$ 支撑集$(\sigma(r))$，满足 $p \neq p'$ 或 $[\mathrm{val}(last(r)) + \delta] \neq [\mathrm{val}(last(r)) + \delta']$。令 $\Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}} \subseteq \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 为 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$的受限延迟策略集合。

对于策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 和有限区域路径 $\mathfrak{r} \in$ 路径$_*^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$，令 Paths$_*^{\sigma}(\mathfrak{r}) = \{r \in$路径$_*^{\sigma} \mid r \in \mathfrak{r}\}$。我们回顾以下定义。首先，给定策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$，我们定义其诱导马尔可夫链 $\mathcal{C}^{\sigma} =$(路径$_*^{\sigma}, \bar{s},$ P$^{\sigma}$)。其次，对于任意有限路径 $r \in$ 路径$_*^{\mathcal{C}^{\sigma}}$，我们用 Pr$_*^{\mathcal{C}^{\sigma}}(r)$表示 r在 $\mathcal{C}^{\sigma}$中的概率。第三，我们回顾由 σ生成的路径与 $\mathcal{C}^{\sigma}$的路径之间的一一对应关系。对于任意有限路径 $r \in$ 路径$_*^{\sigma}$，我们将与之对应的唯一有限路径记为 Paths$_*^{\mathcal{C}^{\sigma}}$ 中的 $\downarrow_{\mathcal{C}^{\sigma}}^{\sigma}(r)$。以上内容使我们能够定义函数 Pr$_*^{\sigma}$：路径$_*^{\sigma} \to [0,1]$，将由 σ 生成的路径映射为概率：对于每个 $r \in$ 路径$_*^{\sigma}$，令 Pr$_*^{\sigma}(r) =$ Pr$_*^{\mathcal{C}^{\sigma}}(\downarrow_{\mathcal{C}^{\sigma}}^{\sigma}(r))$。令 Pr$_*^{\sigma}$(路径$_*^{\sigma}(\mathfrak{r})) = \sum_{r \in Paths_*^{\sigma}(\mathfrak{r})}$ Pr$_*^{\sigma}(r)$。

以下引理指出，对于任意策略，我们都可以找到一个延迟受限策略，使其对对应于相同有限区域路径的路径赋予相同的概率。

引理 5. 设 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 是 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$ 的一个策略。那么存在一个延迟受限策略 $\tilde{\sigma} \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$，使得对于 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的每条有限区域路径 $\mathfrak{r}$，˜ ˜都有 概率$_*^{\sigma}$(路径$_*^{\sigma}(\mathfrak{r})) =$概率$_*^{\sigma}$(路径$_*^{\sigma}(\mathfrak{r}))$。

引理 5 的证明通过将多个导致相同时间等价类的时间延迟选择转换为单个导致相同时间等价类的时间延迟，从标准策略 σ 构造延迟受限策略 $\tilde{\sigma}$。根据引理 5，我们可以利用概率测度方面的结果（类似于在 [5] 中概率双模拟背景下证明引理 10.66 时所用的结果），得出标准策略 σ 及其对应的延迟受限策略 $\tilde{\sigma}$ 赋予事件的概率相等。此外，鉴于 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 展现相同的轨迹集合，它们满足相同的必然目标。综上，我们得到以下结果。

引理 6。 设 φ 是关于 $\mathcal{P}$的位置集合的一个多目标公式。若存在策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 使得 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})$ $\sigma \models \varphi$，则存在一个延迟受限策略 $\tilde{\sigma} \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$ 使得 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})$ $\tilde{\sigma} \models \varphi$。

命题 1 的正确性。 现在，我们结合引理 6 和以下两个引理来证明命题 1。首先，我们证明 $\mathcal{P} \models \varphi$ 蕴含 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]})$ $\models \varphi$。回顾一下， $\mathcal{P} \models \varphi$ 表示存在一个策略$\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$，使得 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})$ $\sigma \models \varphi$。我们利用引理 6 找到一个延迟受限策略 $\tilde{\sigma} \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$，使得 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})$ $\tilde{\sigma} \models \varphi$。然后利用引理 7（见下文）和引理 3，得出存在一个策略$[\tilde{\sigma}] \in \Sigma^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$，使得 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$, m$^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]})$ $[\tilde{\sigma}] \models \varphi$，因此 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]})$ $\models \varphi$。引理 7 利用引理 4，确保从 $\mathcal{C}^{\tilde{\sigma}}$ 和 $\mathcal{C}^{[\tilde{\sigma}]}$ 中由同构见证双射关联的每一对状态出发，其后继状态上的概率分布都满足同构所需的关系。

引理 7. 设 $\tilde{\sigma} \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$ 是 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$的延迟受限策略。则存在 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的策略 $[\tilde{\sigma}] \in \Sigma^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$，使得带标签的马尔可夫链 $(\mathcal{C}^{\tilde{\sigma}}$, c$^{\mathsf{m}\cdot\mathcal{M}[\mathcal{P}]})$和$(\mathcal{C}^{[\tilde{\sigma}]}$,c$^{\mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}})$ 同构。

命题 1 的反向证明需要说明 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}],\ \mathrm{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}) \models\varphi$ 蕴含 $\mathcal{P} \models \varphi$。回忆一下，$(\mathfrak{M}[\mathcal{P}],\ \mathrm{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}) \models \varphi$ 表示存在 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$，使得 $(\mathfrak{M}[\mathcal{P}],\ \mathrm{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]})\ \sigma \models \varphi$。接下来，结合以下引理和引理 3，可知存在 $\sigma' \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$，使得 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}],\ \mathrm{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})\ \sigma' \models \varphi$，由此我们得出 $\mathcal{P} \models \varphi$

引理 8. 设 $\sigma \in \Sigma^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$ 是 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$的一个策略。那么存在 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$ 的一个策略 $\sigma' \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$，使得带标签的马尔可夫链 $(\mathcal{C}^{\sigma},\mathfrak{c}^{\mathrm{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}})$ 和$(\mathcal{C}^{\sigma'},\mathfrak{c}^{\mathrm{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}})$同构。

在概率定时自动机上验证多目标公式的复杂度。现在，我们针对某些公式子类，给出判定概率定时自动机是否满足多目标公式这一问题的复杂度上界。这些结果综合了以下内容：命题 1、区域图马尔可夫决策过程的大小相对于概率定时自动机编码的大小呈指数增长，以及关于多目标公式子类的已有研究。作为背景，我们回顾一下， [27] 的经典结果为形如 $\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}(\Diamond T)$ 的单目标阈值可达性公式提供了一种方法，该方法基于对区域图马尔可夫决策过程进行标准概率可达性分析。对于有限状态马尔可夫决策过程，此类分析可在 Ptime 时间内完成 [1,12], ，因此判定概率定时自动机是否满足单目标阈值可达性公式可在指数时间内完成。考虑形如$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\mathfrak{e}_i)$的多目标阈值公式，其中 $\phi_i \in \{\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda} \mid \trianglerighteq \in \{>,\geq\}、\ \lambda \in [0,1]\}$，且对每个 $1 \leq i \leq n$，$\mathfrak{e}_i$ 都是一个汇点可达性性质。此类公式可在多项式时间内对有限状态马尔可夫决策过程进行验证 [14]。因此，判定概率定时自动机是否满足这类多目标公式可在指数时间内完成。形如 $\mathsf{S}(\mathfrak{e}_1) \wedge \mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda}(\mathfrak{e}_2)$ 的单确定性单阈值公式，其中 $\mathfrak{e}_1$ 是奇偶条件，且 $\mathfrak{e}_2$ 是可达性性质或奇偶条件，可在有限状态马尔可夫决策过程中于 NP∩coNP 时间内验证 [8],，因此在概率定时自动机上可于 NEXPTIME∩coNEXPTIME 时间内验证。最后，考虑形如 $\mathsf{S}(\mathfrak{e}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\mathfrak{e}_i)$ 的单确定性多阈值公式，其中 $\mathfrak{e}$ 是奇偶条件，并且对每个 $1 \leq i \leq n$，$\phi_i \in \{\mathbb{P}_{\trianglerighteq\lambda} \mid \trianglerighteq \in \{>,\geq\}、\ \lambda \in [0,1]\}$，且 $\mathfrak{e}_i$ 是汇点可达性性质。此类公式可在指数时间内对有限状态马尔可夫决策过程进行验证 [7], ，因此在概率定时自动机上可于 2-EXPTIME 时间内验证。上述所有问题都是 EXPTIME-困难的，因为它们涵盖了单目标阈值可达性这一情形 [24]。

5 时间发散与多目标公式

现在，我们将重点讨论概率定时自动机中的时间发散问题，并展示多目标公式的合取项如何将公式求值限制在发散策略上。

若对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{j=0}^{i} \delta_j > n$，则路径 $\mathbf{r} = s_0(\delta_0, p_0)s_1(\delta_1,\ p_1)$ .....称为 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$ 的发散路径集合。令 $\mathsf{Divergent} \subseteq$ 路径$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 表示 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$的发散路径集合。若 $\Pr^{\sigma}(\mathsf{Divergent}) = 1$，则策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 称为几乎必然发散；若 路径$^{\sigma} \subseteq$Divergent，则称其为必然发散。令 $\Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_{\mathrm{a.s.}}$

表示几乎必然发散策略的集合，并令 $\Sigma_{\text{sure}}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$表示必然发散策略的集合。此外，当且仅当存在一个几乎必然策略 $\sigma \in \Sigma_{\text{a.s.}}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$（分别为必然策略 $\sigma \in \Sigma_{\text{sure}}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$）使得 $(\mathcal{M}[\mathcal{P}], \mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]})\ \sigma \models \varphi$ 时，我们记作 $\mathcal{P} \models_{\text{a.s.}} \varphi$ （分别记作 $\mathcal{P} \models_{\text{sure}} \varphi$）。

现在说明如何扩展 PTA，以表示总流逝时间是否已达到某个自然数。该方法采用了[2,4] 中的思想以及 [30]的先例。给定 PTA $\mathcal{P} = (L, l, \mathcal{X}, \text{inv}, \text{prob})$，其 tick 扩展 PTA 定义如下。首先，对于任意位置 $l \in L$，我们将其对应的 tick 位置记为 $\widehat{l}$。在下面的构造中，tick 位置中不经过时间，并且某个 tick 位置恰好在上一次访问该 tick 位置（或 PTA 执行开始）之后 1 个时间单位时被访问。我们将 tick 位置的集合记为 $\widehat{L} = \{\widehat{l} \mid l \in L\}$。随后，将 tick 扩展 PTA 定义为 $\widehat{\mathcal{P}} = (L \cup \widehat{L}, l, \mathcal{X} \cup \{\mathfrak{z}\}, \text{inv}, \text{prob})$，其中，对于每个 $l \in L$，$\text{inv}(l) = \text{inv}(l) = \text{inv}(l) \wedge (\mathfrak{z} \leq 1)$；并且 $\text{prob} = \text{prob} \cup \{(l, (\mathfrak{z} = 1), \wp_{\emptyset}, \widehat{l}), (l, (\mathfrak{z} = 1), \wp_{\{\mathfrak{z}\}}, l) \mid l \in L\}$，其中$\wp_{\emptyset}$、$\widehat{l}$和$\wp_{\{\mathfrak{z}\}}$、$l$分别表示满足以下条件的分布：$\wp_{\emptyset}$、$\widehat{l}(\emptyset, l) = 1$ 以及 $\wp_{\{\mathfrak{z}\}}$、$l(\{\mathfrak{z}\}, l) = 1$。对于奇偶条件，优先级函数 $\mathsf{p} : L \to \{1, 2, \ldots, d\}$ on $\mathcal{P}$由扩展优先级函数 $\widehat{\mathsf{p}} : L \cup \widehat{L} \to \{1, 2, \ldots, d\}$ on $\mathcal{P}$表示，其中$\widehat{\ }$对于每个 $l \in L$，$\mathsf{p}(l) = \widehat{\mathsf{p}}(l) = \mathsf{p}(\widehat{l})$。

注意，tick 扩展 PTA $\widehat{\mathcal{P}}$ 不会改变 $\mathcal{P}$ 在满足可达性性质或奇偶条件方面的行为（其中奇偶条件使用上述扩展后的奇偶函数定义）：tick 位置及其入边、出边和时钟约束仅起到观测机制的作用。对于相对于 $\mathcal{P}$的位置定义的任意多目标公式 $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\mathfrak{e}_i)$，我们将 $\widehat{\varphi} = \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\widehat{\mathfrak{e}}_i)$ 定义为相对于 $\widehat{\mathcal{P}}$的位置定义的多目标公式；其中，对于 $1 \leq i \leq n$，若 $\mathfrak{e}_i$ 为 Parity(p_i)，则 $\widehat{\mathfrak{e}}_i$ 为 Parity($\widehat{\mathsf{p}}_i$)；若 $\mathfrak{e}_i$ 为 $\Diamond T_i$，则 $\widehat{\mathfrak{e}}_i$ 也为 $\Diamond T_i$（也就是说，$\widehat{\varphi}$ 中涉及的奇偶函数是根据上述方法，由 φ的奇偶函数扩展而来，而 $\widehat{\varphi}$ 中涉及的可达性性质与 φ中的保持不变）。根据 $\mathcal{P}$ 和 $\widehat{\varphi}$的定义，我们有 $\mathcal{P} \models \varphi$ 当且仅当 $\widehat{\mathcal{P}} \models \widehat{\varphi}$。接下来注意到$\widehat{\ }$，$\widehat{\mathcal{P}}$ 的一条语义 MDP 路径发散，当且仅当该路径无限次访问 tick 位置。我们用 $\square\Diamond$ tick 表示无限次访问$\widehat{\ }$tick 位置的轨迹集合，在 $\widehat{\mathcal{P}}$ 和 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$中均如此。注意，$\square\Diamond$tick 可由优先级函数 $\mathsf{p}^{\mathsf{tick}}$ 表示：$L \cup \widehat{L} \to \{1, 2\}$ 其中 $\mathsf{p}^{\mathsf{tick}}(l) = 1$，且对于每个 $l \in L$，$\mathsf{p}^{\mathsf{tick}}(\widehat{l}) = 2$（注意，$\mathsf{p}^{\mathsf{tick}}$ 表示一个 Büchi 性质）。根据上述推理以及命题 1，我们得出结论：在分析区域图马尔可夫决策过程时，几乎必然发散和必然发散都可以表示为额外的合取项。

命题 2. 设 $\mathcal{P}$ 是一个概率定时自动机，φ 是关于 $\mathcal{P}$ 的位置集合的多目标公式。那么，$\mathcal{P} \models_{\text{a.s.}} \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}[\widehat{\mathcal{P}}], \mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\widehat{\mathcal{P}}]}) \models \varphi \wedge \mathbb{P}_{\geq 1}(\square\Diamond\mathsf{tick})$；而 $\mathcal{P} \models_{\text{sure}} \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{M}[\widehat{\mathcal{P}}], \mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\widehat{\mathcal{P}}]}) \models \varphi \wedge \mathsf{S}(\square\Diamond\mathsf{tick})$。

限制为必然发散策略时，单个概率阈值奇偶目标的情形是一个新结果，它基于使用 [8], 的算法；此前关于必然发散的结果仅考虑了可达性和安全性目标的阈值性质 [30]。对于多目标阈值汇点可达性性质和几乎必然发散，通过考察 [14, 定理 5.1(1)] 的证明构造，我们可以得到一个指数时间算法。

例 *3.* 考虑图 3 中的概率定时自动机，以及单目标公式$\mathbb{P}_{\geq 1}(\mathfrak{e}_{\mathrm{p}})$，其中 $\mathfrak{e}_{\mathrm{p}}$ 是一个基于优先级函数 p 的事件，$\mathrm{p}(l_0) = 0$且 $\mathrm{p}(l_1) = 1$；也就是说，该公式表达了余 Büchi 性质，即 l_1 只能被访问有限次。这个例子是例 1 中马尔可夫决策过程的概率定时自动机版本，该例来自 [8], ，要求使用无限记忆才能满足必然 Büchi 阈值余 Büchi 公式。在我们的设定中，我们使用必然发散，而非必然 Büchi 目标。注意，单目标公式 $\mathbb{P}_{\geq 1}(\mathfrak{e}_{\mathrm{p}})$可以由必然发散区域策略满足，但这些策略需要无限记忆，才能在从 l_0出发的左向边和右向边之间作出选择。此类策略按轮次运行：在第 i 轮中，策略让 1 个时间单位流逝，然后选择反复访问黑色方块，尝试重置时钟 x，并进行足够多次尝试，使重置 x 的概率超过 $1 - \frac{1}{2^i}$。只有在当前轮次的尝试次数已用尽且 x 尚未重置时，策略才选择访问 l_1。重置时钟 x后，策略进入第 $i+1$ 轮，因此它通过黑色方块重置 x 的尝试次数会增加。该策略保证其所有路径上的时间都发散，并且无限次访问 l_1 的概率为 0。

请注意，本例所需的无限记忆是指在（概率）边之间进行选择。这与例 1 不同：在例 1 中，通过反复选择从 l_0 出发向右的概率边，直到到达 l_1，可以满足 $\mathbb{P}_{\geq 1}(\Diamond\{l_2\})$（通过一般策略或几乎必然策略）；但在 l_0 中，需要逐渐缩短时间延迟，以使 x 的值不超过 1。因此，例 1 需要无限记忆来选择合适的时间延迟。

6 结论

我们已经看到，可以依靠区域图 MDP 构造以及现有的多目标性质方法，对 PTA 的多目标性质进行验证。作为未来工作，我们猜想，必然发散的单阈值公式可以在指数时间内得到验证，而不是在 NEXPTIME ∩coNEXPTIME 内验证；这是基于以下事实：可以使用固定数量的优先级来推理扩展 PTA 上的发散性，并结合 [13] 在定性设置下的结果。我们还猜想，与本文所考虑的有限集相比，允许策略在不可数集合的时间延迟上进行随机化，并不会在 PTA 和多目标设置下带来任何优势。鉴于[14]也为有限状态马尔可夫决策过程的多目标奇偶公式提供算法，未来的工作可以研究在 PTA 上检查此类公式的复杂度。针对奖励 [15], 确定性定时自动机目标的扩展

（推广 [17]）更一般的布尔组合（如 [6] 中针对定性性质的布尔组合），以及多重目标的帕累托前沿近似，也可以在 PTA 设置下加以研究。多目标阈值性质构成了 [23],的概率策略逻辑的基础，而本文的结果可能有助于推动该逻辑的算法和复杂度结果的发展。

致谢。 本研究获得了欧盟地平线研究与创新计划 Chips JU 的资助，资助协议编号为 101139769，项目为 DistriMuSe 项目（HORIZON-KDT-JU-2023-2-RIA）。JU 获得了欧盟地平线研究与创新计划以及参与上述项目的各国的支持。本研究仅反映作者的观点；欧盟委员会不对其中信息的任何使用承担责任。

参考文献

1. de Alfaro, L.：《概率系统的形式化验证》。博士论文，斯坦福大学（1997） 2. de Alfaro, L., Faella, M., Henzinger, T., Majumdar, R., Stoelinga, M.：定时博弈中的惊奇元素。载于：CONCUR 2003 论文集。计算机科学讲义，第 2761 卷，第 142–156 页。施普林格（ 2003 10 1007 978 3 540 45187 7_9 ）。https://doi.org/ 。 / - 3 - - - 。Alur, R., Dill, D.L.：定时自动机理论。《理论计算机科学》 **126** 2 183 235 1994 10 1016 0304 3975 94 90010 8 ( ), – （）。 4 https://doi.org/ 。 / - ( ) - 。Alur, R., Henzinger, T.：实时系统 离散系统 时钟变量。《国际软件工具与技术转移杂志》**1**(1-2)，86–109（1997）。https://doi.org/10. 1007/S100090050007 5. Baier, C., Katoen, J.-P.：模型检测原理。麻省理工学院出版社（2008） 6. Berthon, R., Guha, S., Raskin, J.-F.：在马尔可夫决策过程中混合概率目标与非概率目标。载于：LICS 2020 论文集。第 195–208 页。美国计算机协会（2020 3394805 7 10 1145 3373718）。https://doi.org/ 。 / . . Berthon, R., Katoen, J.-P., Winkler, T.：具有必然奇偶性和多重可达性目标的马尔可夫决策过程。载于：RP 2024 论文集。计算机科学讲义，第 15050 卷，第 203– 220 2024 10 1007 978 3 031 72621 7_14 页。施普林格（）。 8 https://doi.org/ 。 / - - - - 。Berthon, R., Randour, M., Raskin, J.-F.：马尔可夫决策过程中奇偶性目标的带保证阈值约束。载于：ICALP 2017 论文集。LIPIcs，第 80 卷，第 121:1–121:15 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2017 121 9 10 4230 2017）。 https://doi.org/ 。 /LIPICS.ICALP. . . Chatterjee, K., Henzinger, T., Prabhu, V.：定时博弈中以均匀随机性换取无限记忆。载于：HSCC 2008 论文集。计算机科学讲义，第 4981 卷，第 87– 100 页。施普林格（ 2008 10 1007 978 3 540 78929 1_7 ）。 https://doi.org/ 。 / 10 - - - - 。Chatterjee, K., Majumdar, R., Henzinger, T.：具有多个目标的马尔可夫决策过程。载于：STACS 2006 论文集。计算机科学讲义，第 3884 卷，第 325–336 页。施普林格（ 2006 10 1007 11672142_26 ）。https://doi.org/ 。 / . Chen, T., Kwiatkowska, M., Simaitis, A., Wiltsche, C.：随机博弈的多目标综合：城市自动驾驶中的应用。 11 载于：QEST 2013 论文集）。计算机科学讲义，第 8054 卷，第 322–337 页。施普林格（2013）

12. Courcoubetis, C., Yannakakis, M.：马尔可夫决策过程与正规事件。IEEE《自动控制学报》。**43**(10)，1399–1418（1998）。https://doi.org/10. 1109/9.720497 13. Doyen, L., Guha, S.：随机奇偶博弈中必然-几乎必然情形的算法与策略构造。载于：STACS 2026 论文集。LIPIcs，第 364 卷，第 34:1–34:20 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2026）。https://doi.org/10. 4230/LIPICS.STACS.2026.34 14. Etessami, K., Kwiatkowska, M., Vardi, M., Yannakakis, M.：马尔可夫决策过程的多目标模型检测。《计算机科学中的逻辑方法》。**4**(4)（2008 2008 15 10 2168 4 4 8）。https://doi.org/ 。 /LMCS- (:)。Forejt, V., Kwiatkowska, M., Norman, G., Parker, D., Qu, H.：概率系统的定量多目标验证。载于：TACAS 2011 论文集。计算机科学讲义，第 6605 卷，第 112–127 页。施普林格（2011）。https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-19835-9_1116. Forejt, V., Kwiatkowska, M., Parker, D.：概率模型检测的帕累托曲线。载于：ATVA 2012 论文集。计算机科学讲义，第 7561 卷，第 317–332 页。施普林格（2012）。https://doi.org/ 10 1007 978 3 642 33386 6_25 。 / - - - - 。Fu, H., Li, Y., Li, J.：验证概率定时自动机是否满足 ω-正规稠密时间性质。载于：QEST 2018 论文集。计算机科学讲义，第 11024 卷，第 122–139 页。施普林格（ 2018 10 1007 978 3 319 99154 2_8 ）。https://doi.org/ 。 / - - - - 。Gregersen, H., Jensen, H.E.：《可靠实时系统的形式化设计》。硕士论文，奥尔堡大学数学与计算机科学系（1995） 19. Hahn, E., Hartmanns, A., Hermanns, H.：随机定时自动机的可达性与奖励检查。《欧洲软件科学技术协会电子通讯》**70** 2014 20 2014 10 14279 70 968， （）。https://doi.org/ 。 /TUJ.ECEASST. 。AvoCS 论文集。Hartmanns, A., Hermanns, H.：Modest 工具集：定量建模与验证的集成环境。载于：TACAS 2014 论文集。计算机科学讲义，第 8413 卷，第 593 598 2014 10 1007 978 3 642 54862 8_51 – 页。施普林格（）。https://doi.org/ 。 / - - - - 。Hartmanns, A., Quatmann, T., van Wijk, M.：可靠的多目标概率模型检验的工具与算法（长篇工具论文）。载于：FM 2026 论文集。计算机科学讲义，第 16556 卷，第 189–210 页。施普林格（2026）。https://doi.org/10.1007/ 978 3 032 26204 2_10 - - - - 。Jamroga, W., Kwiatkowska, M., Penczek, W., Petrucci, L., Sidoruk, T.：概率定时 ATL。载于：AAMAS 2025 论文集。第 1051–1059 页。IFAAMAS/美国计算机协会（2025）。https://doi.org/10 3743625 23 5555 3709347 。 / . . Jamroga, W., Kwiatkowska, M., Penczek, W., Petrucci, L., Sidoruk, T.：迈向概率策略定时 CTL。载于：AAMAS 2026 论文集。第 3468–3470 页。IFAA-MAS/美国计算机协会（2026 4130 24 10 65109）。https://doi.org/ 。 /OEXM 。Jurdziński, M., Laroussinie, F., Sproston, J.：使用一个或两个时钟对概率定时自动机进行模型检测。《计算机科学中的逻辑方法》**4**(3)（2008 2008 25 10 2168 4 3 12 4 0）。https://doi.org/ 。 /LMCS- (:)。Kwiatkowska, M., Norman, G., Parker, D.：P RISM：概率实时系统的验证。载于：CAV 2011 论文集。计算机科学讲义，第 6806 卷，第 585–591 页。施普林格（ 2011 10 1007 978 3 642 22110 1_47 ）。https://doi.org/ 。 / - - - - 。Kwiatkowska, M., Norman, G., Parker, D., Sproston, J.：使用数字时钟对概率定时自动机进行性能分析。《形式化方法与系统设计》**29**，33 2 27 78 2006 10 1007 10703 006 0005 –（）。https://doi.org/ 。 /s - - - 。Kwiatkowska, M., Norman, G., Segala, R., Sproston, J.：使用离散概率分布对实时系统进行自动验证。《理论计算机科学》**286**，101–150（2002）。https://doi.org/10.1016/S0304-3975(01)00046-9

28. Lacerda, B., Parker, D., Hawes, N.：概率时间有界保证下移动机器人的多目标策略生成。载于：ICAPS 2017 论文集。第 504–512 页。AAAI出版社（2017）29. Norman, G., Parker, D., Sproston, J.：概率定时自动机的模型检测。系统设计中的形式化方法 **43**(2), 164–190（2013）。https: //doi.org/10.1007/S10703-012-0177-X 30. Sproston, J.：概率定时自动机的严格发散。载于：CON- CUR 2009 论文集。计算机科学讲义，第 5710 卷，第 620–636 页。施普林格（2009）。https://doi.org/10. 1007/978-3-642-04081-8_4131. Sproston, J.：概率矩形混合自动机的离散时间验证与控制。载于：QEST 2011 论文集。第 79–88 页。IEEE计算机学会（2011）。https://doi.org/10 18 32 1109 2011 . /QEST. . . Sproston, J.：具有时钟相关概率的概率定时自动机。Fundamenta Informaticae **178**(1–2), 101–138（2021）。https://doi.org/10.3233/ FI-2021-2000

7 附录

7.1 引理 3 的证明

证明。给定 $(\mathcal{M}_1,\mathrm{m}_1) \models \varphi$，存在存在 $\sigma_1 \in \Sigma^{\mathcal{M}_1}$，使得 $(\mathcal{M}_1, \mathrm{m}_1)\ \sigma_1 \models \varphi$。引理陈述指出，存在 $\sigma_2 \in \Sigma^{\mathcal{M}_2}$，使得 $(\mathcal{C}^{\sigma_1}, \mathrm{c}^{\mathrm{m}_1})$ 和 $(\mathcal{C}^{\sigma_2}, \mathrm{c}^{\mathrm{m}_2})$ 同构。根据引理 1 和引理 2，对于每个 $1 \le i \le n$，如果 $(\mathcal{M}_1, \mathrm{m}_1)\ \sigma_1 \models \phi_i(\mathfrak{e}_i)$，那么 $(\mathcal{M}_2, \mathrm{m}_2)\ \sigma_2 \models \phi_i(\mathfrak{e}_i)$。因此 $(\mathcal{M}_2, \mathrm{m}_2)\ \sigma_2 \models \varphi$。由此我们找到了一个策略，通过它可以得到 $\sigma_2 \in \Sigma^{\mathcal{M}_2}$，使得 $(\mathcal{M}_2, \mathrm{m}_2)\ \sigma_2 \models \varphi$，据此我们得出 $(\mathcal{M}_2, \mathrm{m}_2) \models \varphi$。□

7.2 引理 5 所需的技术引理

下述引理指出，对于延迟受限策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$，以及任意有限区域路径 $\mathfrak{r}$，至多存在一条路径 $r \in$路径$^{\sigma}_{*}$ 满足 $r \in \mathfrak{r}$。而对于一般（非延迟受限）策略，这一性质通常不成立。下文中，对于任意概率边 $p \in$ 概率，若 $p = (l,\ g,\ \wp)$，则 grdof$(p) = g$ 且 distof$(p) = \wp$。

引理 9。给定一个延迟受限策略 $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$ 和一条有限区域路径$\mathfrak{r} \in$ 路径$^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}_{*}$，至多存在一条有限路径 $r \in$路径$^{\sigma}_{*}$ 满足 $r \in \mathfrak{r}$。

证明。令 $\mathfrak{r} = (l_0, \alpha_0)(\beta_0, p_0)(l_1, \alpha_1)(\beta_1, p_1) \cdots (\beta_{n-1}, p_{n-1})(l_n, \alpha_n)$。对于 $0 \le i \le n$，我们将 $\mathfrak{r}\lfloor_i$ 记作 $\mathfrak{r}$ 的第 $i+1$ 个前缀，即 $\mathfrak{r}\lfloor_0 = (l_0, \alpha_0)$，且 $\mathfrak{r}\lfloor_i = (l_0, \alpha_0)(\beta_0, p_0) \cdots (\beta_{i-1}, p_{i-1})(l_i, \alpha_i)$，其中 $0 < i \le n$。我们尝试构造 $r \in$路径$^{\sigma}_{*}$，使得 $r \in \mathfrak{r}$，具体做法是逐步构造更长的路径 $r_0, r_1, \cdots, r_n$，使其属于路径集 $^{\sigma}_{*}$，并满足：(1) 对每个 $0 < i \le n$，r_i 通过一次转移扩展 r_{i-1}；(2) 对每个 $0 \le i \le n$，$r_i \in \mathfrak{r}\lfloor_i$。如果路径 $r_0, r_1, \cdots, r_n$ 的构造成功，则令 $r = r_n$。

考虑 $i = 0$。于是 $\mathfrak{r}\lfloor_0 = (l_0, \alpha_0)$。已知 $\mathfrak{r} \in$ 路径$_*^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$，我们有 (l_0, α_0) 是 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的初始状态，即 $(l_0, \alpha_0) = (l, [\mathbf{0}])$。回想一下，$(l, \mathbf{0})$ 是 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$ 的初始状态，因此令 $r_0 = (l, \mathbf{0})$。显然，由于 $\mathbf{0} \in [\mathbf{0}]$，我们有 $r_0 \in \mathfrak{r}\lfloor_0$。

考虑 $0 < i \leq n$。假设我们已经构造了 r_{i-1}，使得 $r_{i-1} \in \mathfrak{r}\lfloor_{i-1}$；现在我们尝试构造 r_i。为了得到 $r_i \in \mathfrak{r}\lfloor_i$，我们需要确定 $(\delta_{i-1}, p_{i-1}) \in \mathsf{support}(\sigma(r_{i-1}))$，使得 $\mathsf{val}(\mathit{last}(r_{i-1}))+\delta_{i-1} \in \beta_{i-1}$ 且 $v_i \in \alpha_i$。由于 σ 是一种延迟受限策略，至多存在一个 $(\delta_{i-1}, p_{i-1}) \in \mathsf{support}(\sigma(r_{i-1}))$，使得 $\mathsf{val}(\mathit{last}(r_{i-1}))+\delta_{i-1} \in \beta_{i-1}$。

如果不存在这样的 $(\delta_{i-1}, p_{i-1}) \in \mathsf{support}(\sigma(r_{i-1}))$，则不可能扩展 r_{i-1} 以最终获得一条路径 $r \in$ 路径$_*^\sigma$，使得$r \in \mathfrak{r}$，因此证明完毕。

在存在此类 $(\delta_{i-1}, p_{i-1}) \in$ 支撑集 $(\sigma(r_{i-1}))$ 的情况下，由以下事实：$\beta_{i-1}[X := 0] = \alpha_i$ 对于某个满足 $\mathsf{distof}(p_{i-1})(X, l_i) > 0$ 的 $X \subseteq \mathcal{X}$，以及 $\mathsf{val}(\mathit{last}(r_{i-1}))+\delta_{i-1} \in \beta_{i-1}$，我们有 $(\mathsf{val}(\mathit{last}(r_{i-1}))+\delta_{i-1})[X := 0] \in \alpha_i$；因此令 $v_i = (\mathsf{val}(\mathit{last}(r_{i-1}))+\delta_{i-1})[X := 0]$。□

7.3 引理 5 的证明

证明。我们首先定义延迟受限策略 $\tilde{\sigma} \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_{\mathrm{dr}}$，然后证明 $\tilde{\sigma}$ 对于任意 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的有限区域路径 $\mathfrak{r}$，$\Pr^\sigma_*(\text{路径}^\sigma_*(\mathfrak{r})) = \Pr^\sigma_*(\text{路径}^\sigma_*(\mathfrak{r}))$ 成立。

我们引入以下记号：给定有限路径 $r \in$ 路径$_*^\sigma$，将 $\mathsf{val}(\mathit{last}(r))$ 简记为 $\mathsf{vl}(r)$。

设 $r \in$ 路径$_*^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$，并回顾一下，$[r]$ 表示满足 $r \in [r]$ 的唯一有限区域路径。我们将根据从有限路径 路径$_*^\sigma([r])$ 中作出的选择来定义 $\tilde{\sigma}(r)$。令 $\mathit{last}([r]) = (l, \alpha)$。考虑 $(\beta, p) \in \mathfrak{A}(l, \alpha)$。令 $\mathsf{Choices}[r', \sigma](\beta, p)$ 表示 σ 在有限路径 $r' \in$ 路径$_*^\sigma([r])$ 之后所选择的动作，这些动作对应于以下选择：(i) 导致时钟赋值处于 β 中的时间延迟；以及 (ii) 概率边 p。形式化地：

$$\mathsf{Choices}[r', \sigma](\beta, p) = \{(\delta, p) \in \mathsf{support}(\sigma(r')) \mid \mathsf{vl}(r')+\delta \in \beta\} .$$

注意，$\{$选择$[r', \sigma](\beta, p) \mid (\beta, p) \in \mathfrak{A}(l, \alpha)\}$ 是 $\mathsf{support}(\sigma(r'))$ 的一个划分。对于每个满足存在 $p \in \mathsf{prob}$，使得 (1) $(\beta, p) \in \mathfrak{A}(l, \alpha)$ 且 (2) 选择 $[r', \sigma](\beta, p) \neq \emptyset$ 的 $\beta \in \mathsf{CECs}$，固定 $\delta_\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\mathsf{vl}(r')+\delta_\beta \in \beta$。注意，根据 $(\beta, p) \in \mathfrak{A}(l, \alpha)$，我们有 $\beta \models \mathsf{grdof}(p)$，因此 $\mathsf{vl}(r)+\delta_\beta \models \mathsf{grdof}(p)$。然后我们令：

$$\tilde{\sigma}(r)(\tilde{\delta}_\beta, p) = \frac{1}{\Pr^\sigma_*(\mathit{Paths}^\sigma_*([r]))} \sum_{r' \in \mathit{Paths}^\sigma_*([r])} \Pr^\sigma_*(r') \sum_{(\delta, p) \in \mathsf{Choices}[r', \sigma](\beta, p)} \sigma(r')(\delta, p) .$$

我们注意到， $\tilde{\sigma}(r)$ 是一个分布：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\delta,p)\in \mathsf{support}(\tilde{\sigma}(r))} \tilde{\sigma}(r)(\delta,p) \\
&\geq \sum_{(\beta,p)\in \mathfrak{A}(l,\alpha)} \tilde{\sigma}(r)(\tilde{\delta}_\beta,p) \\
&= \sum_{(\beta,p)\in \mathfrak{A}(l,\alpha)} \frac{1}{\Pr^\sigma_*(Paths^\sigma_*([r]))} \sum_{r'\in Paths^\sigma_*([r])} \Pr^\sigma_*(r') \sum_{(\delta,p)\in \mathsf{Choices}[r',\sigma](\beta,p)} \sigma(r')(\delta,p) \\
&= \frac{1}{\Pr^\sigma_*(Paths^\sigma_*([r]))} \sum_{r'\in Paths^\sigma_*([r])} \Pr^\sigma_*(r') \sum_{(\beta,p)\in \mathfrak{A}(l,\alpha)} \sum_{(\delta,p)\in \mathsf{Choices}[r',\sigma](\beta,p)} \sigma(r')(\delta,p) \\
&= \frac{1}{\Pr^\sigma_*(Paths^\sigma_*([r]))} \sum_{r'\in Paths^\sigma_*([r])} \Pr^\sigma_*(r') \\
&= 1 ,
\end{aligned}
$$

倒数第二步依据的是：$\{$选择$[r',\sigma](\beta,\ p)\ |(\beta,\ p)\in \mathfrak{A}(l,\ \alpha)\}$ 是支撑集$(\sigma(r'))$ 的一个划分；最后一步则依据 $\Pr^\sigma_*$(路径$^\sigma_*([r])$ 的定义。我们还注意到， $\tilde{\sigma}(r)$ 的定义与延迟受限策略是一致的：给定 $(\beta,\ p)\ \in \mathfrak{A}(l,\ \alpha)$，至多存在一个 $(\delta,\ p)\ \in$ 支撑集 $(\tilde{\sigma}(r))$，使得 $\mathsf{vl}(r)+\delta \in \beta$。

为了完成证明，我们需要证明：对于任意有限区域路径 $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$，$\Pr^\sigma_*$(路径$^\sigma_*$ $(\mathfrak{r})) = \tilde{}\ \tilde{}\Pr^\sigma_*$(路径$^\sigma_*(\mathfrak{r})$)。我们对所考虑的有限区域路径的长度进行归纳法证明。首先考虑由 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的初始状态 $\mathfrak{r} = (l,[\mathbf{0}])$ 构成的有限区域路径。然后，显然有路径$^\sigma_*(\mathfrak{r})$ $=$ $=$路径$^\sigma_*(\mathfrak{r})\ = \{(l,0)\}$，对此 $\Pr^\sigma_*(\{(l,0)\})\ \Pr^\sigma_*(\{(l,0)\})\ = 1$。

令 $i \geq 1$，并考虑长度为$i-1$的有限区域路径 $\mathfrak{r} \in \mathsf{Paths}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}_*$，以及延伸自 $\mathfrak{r}$ 的有限区域路径 $\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)\ \in \mathsf{Paths}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}_*$。$\tilde{}\ \ \tilde{}$ 根据归纳法，我们已证明 $\Pr^\sigma_*$ $(\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}))\ =\ \Pr^\sigma_*(\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}))$。若 $\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r})\ =\ \emptyset$，即 $\mathfrak{r}$ 不对应于由σ生成的任何有限路径，那么根据 $\tilde{\sigma}$ 的构造，我们有 $\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r})\ =\ \emptyset$。此外， $\mathfrak{r}$ 的任何延伸都不可能对应于由 σ 或 $\tilde{\sigma}$ 生成的有限路径，因此$\tilde{}\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))\ =\emptyset$，且 $\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))\ =\emptyset$。由此我们得出$\tilde{}\ \ \tilde{}$，$\Pr^\sigma_*(\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)))\ =\Pr^\sigma_*$ $(\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)))\ = 0$。

现在考虑 路径$^\sigma_*(\mathfrak{r}) \neq \emptyset$ 的情况。令 $\tilde{r} \in$ 路径$^\sigma_*$ 为 $\tilde{\sigma}$ 的唯一有限路径，使得 $\tilde{r} \in \mathfrak{r}$（即，路径 $\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r})\ =\{\tilde{r}\}$）。这里有两种子情况。如果 $\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))\ =\emptyset$，则对于满足 $r \in \mathfrak{r}$ 的每个 $r \in$ 路径$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_*$，$\mathsf{Choices}[r,\sigma](\beta,$ $p)\ =\emptyset$。根据 $\tilde{\sigma}$ 的构造，不存在任何满足 $\tilde{}$ 的 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $(\delta,p)\ \in$ 支撑集$\tilde{\sigma}(\tilde{r})$ 且 $\mathsf{vl}(\tilde{r})$ $+\delta \in \beta$。因此，$\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))\ =\emptyset$，从而$\tilde{}\ \ \tilde{}\Pr^\sigma_*(\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)))\ =\Pr^\sigma_*$ $(\mathsf{Paths}^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)))\ = 0$。

现在我们考虑第二子情况，其中 路径$^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))\ \neq \emptyset$。首先注意到，由于 $\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)$ 是 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的有限区域路径，我们有 $\blacktriangle($ 最后 $(\mathfrak{r}),(\beta,p))(l,\alpha)\ >\ 0$，这进而意味着存在 .....

..... $X \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，使得 $\mathsf{distof}(p)(X,l) > 0$。接下来，根据 $\tilde{\sigma}$ 的构造-，我们观察到 $(\tilde{\delta}_\beta, p) \in$ 支撑集$(\tilde{\sigma}(\tilde{r}))$。令 $\tilde{v} = \mathsf{vl}(\tilde{r})$。我们用 $\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}$ 表示在 α 中的时钟赋值：从 $\tilde{v}$ 出发经过 δ_β 时间延迟，然后将 $\mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$ 中任意选取的一个集合内的时钟重置为 0。形式化地说，对于某个 $X \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，有 $\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta} = (\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta)[X := 0]$。之所以可以任意选择 $X \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，是因为 $\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta} \in \alpha$，并且根据引理 4，即 $\mathsf{Reset}(\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta, \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}) = \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$：对于任意 $X, X' \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，都有 $(\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta)[X := 0] = (\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta)[X' := 0] = \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}$。现在，回想一下，存在 $X \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，使得 $\mathsf{distof}(p)(X,l) > 0$；又根据引理 4，$\mathsf{Reset}(\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta, \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}) = \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，我们有存在..... $X \in \mathsf{Reset}(\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta, \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta})$，使得 $\mathsf{distof}(p)(X,l) > 0$。这意味着 $\Delta(\mathsf{last}(\tilde{r}), (\tilde{\delta}_\beta, p))(l, \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}) > 0$。回想一下，$\tilde{\sigma}$ 的定义指出 δ_β 是唯一的时间延迟，使得 $\tilde{\sigma}(\delta_\beta, p) > 0$ 且 $\tilde{v}+\delta_\beta \in \beta$。此外，回想一下，$\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}$ 是 α 中唯一的时钟赋值，它由从 $\tilde{v}$ 出发经过 δ_β 时间延迟、再将 $\mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$ 中某个集合内的时钟重置为 0 而得到。结合这两点以及 $\Delta(\mathsf{last}(\tilde{r}),(\tilde{\delta}_\beta, p))(l, \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}) > 0$ 这一事实，我们得出 $\mathsf{Paths}^{\tilde{\sigma}}_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)) = \{\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta})\}$，因此 $\mathrm{Pr}^{\tilde{\sigma}}_*(\mathsf{Paths}^{\tilde{\sigma}}_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))) = \mathrm{Pr}^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}))$。因此，我们的任务变为证明 $\mathrm{Pr}^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta})) = \mathrm{Pr}^{\sigma}_*(\mathsf{Paths}^{\sigma}_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)))$.

根据概率$^{\tilde{\sigma}}_*$的定义，并由引理 4 得知 $\mathsf{Reset}(\tilde{v}+\tilde{\delta}_\beta, \tilde{v}_\alpha^{\delta_\beta}) = \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)$，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}_\alpha^{\tilde{\delta}_\beta})) &= \mathrm{Pr}^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}) \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{r})(\tilde{\delta}_\beta,p) \cdot \sum_{X \in \mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(\tilde{r})+\tilde{\delta}_\beta, \tilde{v}_\alpha^{\tilde{\delta}_\beta})} \mathsf{distof}(p)(X,l) \\
&= \mathrm{Pr}^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}) \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{r})(\tilde{\delta}_\beta,p) \cdot \sum_{X \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)} \mathsf{distof}(p)(X,l) \\
&= \mathrm{Pr}^{\sigma}_*(Paths^{\sigma}_*(\mathfrak{r})) \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{r})(\tilde{\delta}_\beta,p) \cdot \sum_{X \in \mathsf{Reset}(\beta,\alpha)} \mathsf{distof}(p)(X,l)\ ,
\end{aligned}$$

最后一步由归纳法得出。

现在考虑概率$^{\sigma}_*$(路径$^{\sigma}_*(\mathfrak{r})$) $\cdot\, \tilde{\sigma}(\tilde{r})(\delta_\beta,\ p)$。根据 $\tilde{\sigma}$ 的定义（并回想 $\tilde{r} \in \mathfrak{r}$），我们得到：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}^{\sigma}_*(Paths^{\sigma}_*(\mathfrak{r})) \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{r})(\tilde{\delta}_\beta,p) \\
&= \mathrm{Pr}^{\sigma}_*(Paths^{\sigma}_*(\mathfrak{r})) \cdot \frac{1}{\mathrm{Pr}^{\sigma}_*(Paths^{\sigma}_*(\mathfrak{r}))} \sum_{r \in Paths^{\sigma}_*(\mathfrak{r})} \mathrm{Pr}^{\sigma}_*(r) \sum_{(\delta,p) \in \mathsf{Choices}[r,\sigma](\beta,p)} \sigma(r)(\delta,p) \\
&= \sum_{r \in Paths^{\sigma}_*(\mathfrak{r})} \mathrm{Pr}^{\sigma}_*(r) \sum_{(\delta,p) \in \mathsf{Choices}[r,\sigma](\beta,p)} \sigma(r)(\delta,p)\ .
\end{aligned}$$

将其代入前一个方程即可得到：

$$\begin{aligned}&\Pr^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}^{\tilde{\delta}_\beta}_\alpha))\\ =&\sum_{r\in Paths^\sigma_*(\mathfrak{r})}\Pr^\sigma_*(r)\sum_{(\delta,p)\in\mathsf{Choices}[r,\sigma](\beta,p)}\sigma(r)(\delta,p)\sum_{X\in\mathsf{Reset}(\beta,\alpha)}\mathsf{distof}(p)(X,l)\ .\end{aligned}$$

对于 $r\in$ 路径$^\sigma_*$(r) 和 $\delta\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 vl($r$)+$\delta\in\beta$，令 $v^{r,}{}_\alpha{}^\delta=$(vl($r$)+$\delta$)[$X:=0$] 为有限路径 r 最后一个状态的时钟赋值经过时间流逝，并将 X 中的时钟重置为 0 后得到的时钟赋值，其中 Reset(β, α) 是任意选取的 $X\in$。注意，$v^{r,}{}_\alpha{}^\delta\in\alpha$。根据引理 4，我们有 Reset($\beta$, α) = Reset(vl(r)+δ, $v^{r,}{}_\alpha{}^\delta$)。因此：

$$\begin{aligned}&\Pr^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}^{\tilde{\delta}_\beta}_\alpha))\\ =&\sum_{r\in Paths^\sigma_*(\mathfrak{r})}\Pr^\sigma_*(r)\sum_{(\delta,p)\in\mathsf{Choices}[r,\sigma](\beta,p)}\sigma(r)(\delta,p)\sum_{X\in\mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta,v^{r,\delta}_\alpha)}\mathsf{distof}(p)(X,l)\ .\end{aligned}$$

根据 Choices[r,σ](β, p) 的定义，我们得到：

$$\begin{aligned}&\Pr^{\tilde{\sigma}}_*(\tilde{r}(\tilde{\delta}_\beta,p)(l,\tilde{v}^{\tilde{\delta}_\beta}_\alpha))\\ =&\sum_{r\in Paths^\sigma_*(\mathfrak{r})}\Pr^\sigma_*(r)\sum_{\substack{(\delta,p)\in\mathsf{support}(\sigma(r))\\ \text{s.t. }\mathsf{vl}(r)+\delta\in\beta}}\sigma(r)(\delta,p)\sum_{X\in\mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta,v^{r,\delta}_\alpha)}\mathsf{distof}(p)(X,l)\\ =&\sum_{r\in Paths^\sigma_*(\mathfrak{r})}\sum_{\substack{(\delta,p)\in\mathsf{support}(\sigma(r))\\ \text{s.t. }\mathsf{vl}(r)+\delta\in\beta}}\Pr^\sigma_*(r)\cdot\sigma(r)(\delta,p)\sum_{X\in\mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta,v^{r,\delta}_\alpha)}\mathsf{distof}(p)(X,l)\\ =&\sum_{r(\delta,p)(l,v^{\delta,p}_{l,\alpha})\in Paths^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha))}\Pr^\sigma_*(r(\delta,p)(l,v^{r,\delta}_\alpha))\\ =&\Pr^\sigma_*(Paths^\sigma_*(\mathfrak{r}(\beta,p)(l,\alpha)))\ .\end{aligned}$$

因此我们已经证明 Pr$^\sigma_*$(路径$^\sigma_*$(r(β, p)(l, α))) = Pr$^\sigma_*$(路径$^\sigma_*$(r(β, p)(l, α)))，证明完毕。 □

7.4 引理 6 的证明

证明。给定 $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 使得 ($\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$) $\sigma\models\varphi$，我们按照引理 5 的证明方法构造 $\tilde{\sigma}\in\Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}{}_{\mathrm{dr}}$。接下来只需证明 ($\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$) $\tilde{\sigma}\models\varphi$。令 $\varphi=\bigwedge_{i=1}^n\phi_i$(e$_i$)。

首先，我们考虑子公式 ϕ_i(e$_i$)为 ϕ_i 是 S 的情况。注意，$\tilde{\sigma}$ 与 σ 的区别在于：在 σ 中，在同一时钟等价类内通过不同延迟获得时钟赋值的随机选择（然后采取相同的概率边），在 $\tilde{\sigma}$ 中则表示为选择单个 延迟，以获得上述时钟等价类中的一个时钟赋值。因此，所访问的位置序列（即，所展示的轨迹集合）

由 σ $\tilde{\sigma}$ $\{ [\mathcal{M}[\mathcal{P}]] | \in \sigma\} =$给出，并且二者相同。形式化地，$\{ [\mathcal{M}[\mathcal{P}]] \tilde{} | \tilde{} \in \tilde{\sigma}\}$ $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$ $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$
我们有 trace m (r) r 路径trace m (r) r 路径，由此可得，(,m) $\sigma \models$S($\mathfrak{e}_i$) 蕴含 ($\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$) $\tilde{\sigma} \models$ S($\mathfrak{e}_i$)。

现在考虑 $\phi_i(\mathfrak{e}_i)$ 的情形，其中 ϕ_i 的形式为 $\mathbb{P}_{\geq\lambda}$。我们的推理与 [5] 中引理 10.66 的证明类似。考虑一个位置的有限序列 π。注意，π 对应于 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的一个有限区域路径有限集，即按照 π 所指定顺序访问位置的有限区域路径集合。根据引理 5，σ 和 $\tilde{\sigma}$ 对展现 π 的有限路径所赋予的概率之和相等。由此以及关于将为有限路径赋予概率的函数扩展为定义在无限路径集合上的概率测度的标准推理可知，Pr$^{\sigma}$ 和 Pr$^{\sigma}$ 所赋予的、其前缀遵循序列 π 的无限路径集合的概率 ˜ 相等。这意味着，对于任意事件 $\mathfrak{e}$（无限位置序列的一个可测集合），都有 Pr$^{\sigma}$(路径$^{\mathcal{C}^{\sigma}}$($\mathfrak{e}$)) =Pr$^{\tilde{\sigma}}$(路径$^{\mathcal{C}^{\sigma}}$($\mathfrak{e}$))。因此，若 ($\mathcal{M}[\mathcal{P}]$, m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$) $\sigma \models \mathbb{P}_{\geq\lambda}(\mathfrak{e}_i)$，则 ($\mathcal{M}[\mathcal{P}]$, m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$) $\tilde{\sigma} \models \mathbb{P}_{\geq\lambda}(\mathfrak{e}_i)$。[1] □

7.5 引理 7 的证明

证明。设 $\tilde{\sigma} \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ dr 是一个延迟受限策略。我们定义 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的策略 $[\tilde{\sigma}]\tilde{}$。令 $r \in$ Paths$^{\sigma}_{*}$，并回顾一下，$[r]$ 表示与 r对应的 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$的唯一有限区域路径。于是我们按以下方式定义 $[\tilde{\sigma}]([r])$。由于 $\tilde{\sigma}$ 是一个延迟受限策略，对于满足 $p = p'$的 (δ, p), $(\delta', p') \in$support($\tilde{\sigma}(r)$)，有 $[\text{vl}(r) + \delta] \neq [\text{vl}(r) + \delta']$。这意味着我们可以定义单射函数 ι : support($\tilde{\sigma}(r)$) $\rightarrow \mathfrak{A}$(last($[r]$))，其定义为 $\iota(\delta, p)$ =($[\text{vl}(r) + \delta]$, p)。然后，对于每个 $(\delta, p) \in$support($\tilde{\sigma}(r)$)，令 $[\tilde{\sigma}]([r])(\iota(\delta, p))$ =$\tilde{\sigma}(r)(\delta, p)$。对于每个满足以下条件的 $(\beta, p) \in \mathfrak{A}$(last($[r]$)：不存在 $(\delta, p) \in$support($\tilde{\sigma}(r)$)，使得 $(\beta, p) = \iota(\delta, p)$，我们令 $[\tilde{\sigma}]([r])(\beta, p) = 0$。注意，$[\tilde{\sigma}]([r])$ 是一个分布。对于所有满足以下条件的有限区域路径 $\mathfrak{r} \in$Paths$^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}_{*}$：不存在任何满足 $[r] = \mathfrak{r}$的有限路径 $r \in$Paths$^{\sigma}_{*}$，$[\tilde{\sigma}](\mathfrak{r})$ 中的选择是任意的。至此，$[\tilde{\sigma}]$ 的定义完成。

回顾带标记语义 MDP（$\mathcal{M}[\mathcal{P}]$,m$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$）（分别地，带标记区域图 MDP（$\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$, m$^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$））的标记函数：它将一个状态（分别地，一个区域）赋予其位置。此外，回顾与某个策略对应的带标记 MC 的标记函数：它将一个 MC 状态（即该策略的一条有限路径）赋予该路径的最终 MDP 状态的位置。现在我们证明，带标记 MC（$\mathcal{C}^{\tilde{\sigma}}$, c$^{\text{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}}$）和（$\mathcal{C}^{[\tilde{\sigma}]}$, c$^{\text{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}}$）是同构的。我们提出双射 f $\tilde{\sigma}$ $*$ $\rightarrow$ $[\tilde{\sigma}]$ $*$ $f\ r = [r]$: $Paths\, Paths$，其定义为（˜）对所有 $r \in Paths^{\sigma}_{*}$成立。f 是双射这一事实由$[\tilde{\sigma}]$的定义可得：f 仅映射到 $[\tilde{\sigma}]$ 的有限区域路径（即，给定 $r \in Paths^{\sigma}_{*}$，有 $[r] \in Paths^{[\tilde{\sigma}]}_{*}$），并且 $[\tilde{\sigma}]$ 的所有有限区域路径都有一条对应的 $\tilde{\sigma}$ 有限路径（即，对所有 $\mathfrak{r} \in Paths^{[\tilde{\sigma}]}_{*}$，存在 $r \in Paths^{\tilde{\sigma}}_{*}$，使得$f$（$r$） $= \mathfrak{r}$）。对于同构的带标记 MC 定义中的第（1）部分，回顾

[1] 注意，在这种情况下，以及 ϕ_i 为 S 的情况下，反向蕴含也成立，但我们的结果不需要这一方向。

$\mathcal{C}^{\tilde{\sigma}}$ 和 $\mathcal{C}^{[\tilde{\sigma}]}$ 的初始状态分别为 $(\bar{l}, \mathbf{0})$ 和 $(\bar{l}, [\mathbf{0}])$。由于 $(l, \mathbf{0})$ 和 $(l, [\mathbf{0}])$ 被解释为仅含一个状态且没有转移的路径，满足 $(l, \mathbf{0}) \in (l, [\mathbf{0}])$，即，$[(l, \mathbf{0})] = (l, [\mathbf{0}])$，因此得到 $f(l, \mathbf{0}) = (l, [\mathbf{0}])$。现在我们考察同构定义中的（2a）和（2b）部分。考虑 $r \in \mathsf{Paths}^{\tilde{\sigma}}_{*}$ 和 $\mathfrak{r} \in \mathsf{Paths}^{[\tilde{\sigma}]}_{*}$，使得 $f(r) = \mathfrak{r}$，从而有 $r \in \mathfrak{r}$。对于（2a），由 $r \in \mathfrak{r}$ 可知，r 上的最后一个状态与 $\mathfrak{r}$ 上的最后一个区域具有相同的位置，由此我们得出 $\mathsf{c}^{\mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}}(r) = \mathsf{c}^{\mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}}(\mathfrak{r})$。对于（2b），考虑有限路径 $r(\delta, p)(l, v) \in \mathsf{Paths}^{\sigma}_{*}$。为建立（2b），我们需要证明：

$$\mathbf{P}^{\tilde{\sigma}}(r, r(\delta,p)(l,v)) = \mathbf{P}^{[\tilde{\sigma}]}(\mathfrak{r}, f(r(\delta,p)(l,v))) \,.$$

根据 $\mathbf{P}^{\tilde{\sigma}}$ 和 $\mathcal{M}[\mathcal{P}]$ 的定义，我们有：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{\tilde{\sigma}}(r, r(\delta,p)(l,v)) &= \tilde{\sigma}(r)(\delta,p) \cdot \Delta(last(r), (\delta,p))(l,v) \\ &= \tilde{\sigma}(r)(\delta,p) \sum_{X \in \mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta, v)} \wp(X,l) \,.\end{aligned}$$

现在注意，根据 $[\cdot]$ 在有限路径上的定义，有限区域路径 $[r(\delta,p)(l,v)]$ 对应于 $[r]([\mathsf{vl}(r)+\delta], p)(l, [v])$。因此我们有 $f(r(\delta,p)(l,v)) = [r]([\mathsf{vl}(r)+\delta], p)(l, [v])$。根据 $\mathbf{P}^{[\tilde{\sigma}]}$ 和 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的定义：

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}^{[\tilde{\sigma}]}([r], [r]([\mathsf{vl}(r)+\delta], p))(l, [v])) \\ &= [\tilde{\sigma}]([r])([\mathsf{vl}(r)+\delta], p) \cdot \blacktriangle(last([r]), ([\mathsf{vl}(r)+\delta], p)(l, [v]) \\ &= [\tilde{\sigma}]([r])([\mathsf{vl}(r)+\delta], p) \sum_{X \in \mathsf{Reset}([\mathsf{vl}(r)+\delta], [v])} \wp(X,l) \,.\end{aligned}$$

因此，我们的任务归结为证明：

$$\tilde{\sigma}(r)(\delta,p) \sum_{X \in \mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta, v)} \wp(X,l) = [\tilde{\sigma}]([r])([\mathsf{vl}(r)+\delta], p) \sum_{X \in \mathsf{Reset}([\mathsf{vl}(r)+\delta], [v])} \wp(X,l) \,.$$

根据 $[\tilde{\sigma}]$ 的定义，我们有 $\tilde{\sigma}(r)(\delta,p) = [\tilde{\sigma}]([r])([\mathsf{vl}(r)+\delta], p)$。此外，根据引理 4，我们有 $\mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta, v) = \mathsf{Reset}([\mathsf{vl}(r)+\delta], [v])$，因此 $\sum_{X \in \mathsf{Reset}(\mathsf{vl}(r)+\delta, v)} \wp(X, l') = \sum_{X \in \mathsf{Reset}([\mathsf{vl}(r)+\delta], [v])} \wp(X, l)$。由此我们得出 $\mathsf{P}^{\tilde{\sigma}}(r, r(\delta,p)(l,v)) = \mathsf{P}^{[\tilde{\sigma}]}([r], [r]([\mathsf{vl}(r)+\delta], p)(l, [v]))$，即 $\mathsf{P}^{\tilde{\sigma}}(r, r(\delta,p)(l,v)) = \mathsf{P}^{[\tilde{\sigma}]}(\mathfrak{r}, f(r(\delta,p)(l,v)))$，这满足同构定义中的条件 (2b)。因此，带标记的马尔可夫链 $(\mathcal{C}^{\tilde{\sigma}}, \mathsf{c}^{\mathsf{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}})$ 和 $(\mathcal{C}^{[\tilde{\sigma}]}, \mathsf{c}^{\mathsf{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}})$ 同构，证明至此完成。□

7.6 引理 8 的证明

证明。令 $\sigma \in \Sigma^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}$。我们将 $\sigma' \in \Sigma^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}$ 定义如下。令 $r \in \text{路径}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_{*}$，并考虑 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$ 的有限区域路径 $[r]$。对于每个 $\beta \in \mathsf{CECs}$，若存在 $(\beta, p) \in \mathsf{support}(\sigma([r]))$，则我们固定一个 $\delta^{r}_{\beta} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $\mathsf{vl}(r)+\delta^{r}_{\beta} \in \beta$。然后，对于每个 $(\beta, p) \in \mathsf{support}(\sigma([r]))$，我们令 $\sigma'(r)(\delta^{r}_{\beta}, p) = \sigma([r])(\beta, p)$。事实是

$(\delta^r_\beta, p) \in A(\mathsf{last}(r))$，这是 σ' 定义良好所必需的，可由两个事实得出。首先，由 $(\beta, p) \in \mathsf{support}(\sigma([r])$，我们知道 β 是 $\mathsf{last}([r])$ 的时间后继，因此随着 δ^r_β 时间流逝，$\mathsf{last}(r)$ 所在位置的不变条件得以满足。其次，$(\beta, p) \in \mathsf{support}(\sigma([r])$ 也意味着 $\beta \models \mathsf{grdof}(p)$，因此 $\mathsf{vl}(r)+\delta^r_\beta \in \mathsf{grdof}(p)$。为完成 σ' 的定义，对于上文未考虑的所有 $(\delta, p) \in A(\mathsf{last}(r))$，我们令 $\sigma'(r)(\delta, p) = 0$。至此，$\sigma'(r)$ 的定义完成。注意，$\mathsf{support}(\sigma([r]))$ 和 $\mathsf{support}(\sigma'(r))$ 的元素之间存在一一对应关系；对于相对应的元素 $(\beta, p) \in \mathsf{support}(\sigma([r]))$ 和 $(\delta^r_\beta, p) \in \mathsf{support}(\sigma'(r))$，有 $\sigma'(r)(\delta^r_\beta, p) = \sigma([r])(\beta, p)$。因此，我们有 $\sigma'(r)$ 是一个分布：

$$\sum_{(\delta,p)\in\mathsf{support}(\sigma'(r))} \sigma'(r)(\delta, p) = \sum_{(\beta,p)\in\mathsf{support}(\sigma([r]))} \sigma([r])(\beta, p) = 1 \, .$$

还要注意，σ' 也是一种延迟受限策略：给定 $r \in$ 路径$^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}_*$和 $(\beta,\ p) \in \mathsf{support}(\sigma([r]))$，恰好存在一个 $(\delta^r_\beta,\ p) \in \mathsf{support}(\sigma([r]))$，使得 $\delta^r_\beta \in \beta$。这一事实将在证明的其余部分发挥作用。

现在证明 $(\mathcal{C}^\sigma, \mathsf{c}^{\mathfrak{m}^{\mathfrak{M}[\mathcal{P}]}})$ 和 $(\mathcal{C}^{\sigma'}, \mathsf{c}^{\mathfrak{m}^{\mathcal{M}[\mathcal{P}]}})$ 是同构的。回顾一下，这要求在 Paths^σ_* 和 $\mathsf{Paths}^{\sigma'}_*$ 上存在一个双射，也就是说，分别在 $\mathcal{C}^\sigma$ 和 $\mathcal{C}^{\sigma'}$的有限路径集合之间存在一个满足某些性质的双射。回顾一下，既然 σ' 是一种延迟受限策略，引理 9 指出，对于 $\mathfrak{M}[\mathcal{P}]$的每条有限区域路径，在 σ'中至多存在一条对应的路径。反过来，对于 σ'的每条有限路径 $r \in \mathsf{Paths}^{\sigma'}_*$，我们有 $[r]$ 是 σ 的一条有限区域路径，即 $[r] \in \mathsf{Paths}^\sigma_*$，理由如下。记作$r = (l_0, v_0)(\delta_0, p_0)(l_1, v_1)(\delta_1, p_1) \cdots (\delta_{n-1}, p_{n-1})(l_n, v_n)$，并将 $r\lfloor_i$ 记为 r的第 $(i + 1)$ 个前缀；对于 $0 \leq i < n$，假设我们已经证明了$\lfloor r\rfloor_i] \in \mathsf{Paths}^\sigma_*$（对于 $i = 0$，我们有 $[r\lfloor_i] = (l, [\mathbf{0}])$，这显然是 Paths^σ_*中的一条有限区域路径）。考虑 (δ_i, p_i)：由 $r \in \mathsf{Paths}^{\sigma'}_*$ 可知，$(\delta_i, p_i) \in \mathsf{support}(\sigma'(r\lfloor_i))$。于是，根据上一段提到的 $\mathsf{support}(\sigma([r\lfloor_i]))$ 与 $\mathsf{support}(\sigma'(r\lfloor_i))$ 中元素之间的一一对应关系，我们有 $[r\lfloor_i](\beta, p_i)(l_{i+1}, \alpha_{i+1}) \in \mathsf{Paths}^\sigma_*$，其中 (β_i, p_i) 是 $\mathsf{support}(\sigma([r\lfloor_i]))$ 中与 (δ_i, p_i) 相关联的唯一元素，而 (l_{i+1}, α_{i+1}) 是 $\mathsf{support}(\blacktriangle(\mathsf{last}([r\lfloor_i]), (\beta_i, p_i)))$ 中满足 $v_{i+1} \in \alpha_{i+1}$的唯一元素；根据引理 9 的证明中给出的同样推理，该元素确实存在。

上述内容意味着我们可以定义双射 f：路径$^{\sigma'}_*$ →路径$^\sigma_*$，使得 $f(r) = [r]$。证明的其余部分与引理 7 的证明中相应部分相同（将 $[\tilde{\sigma}]$ 替换为 σ，并将 $\tilde{\sigma}$ 替换为 σ'），因此不再赘述。□