arXiv:2611.29392v1 [math.RA] 22 Nov 2026

劈裂扩张上的平衡对

JUNPENG REN、ZHENG-GANG WU 和 MENGZHEN ZHU*

摘要。设 (B, A i, e, l) 是阿贝尔范畴的一个裂分扩张，且 e 有一个右伴随r。证明了，(C, D) 是 B 中的一个可容许平衡对，当且仅当 (add(lC), add(rD)) 是 A 中的一个可容许平衡对。当该扩张相对于 B 的一个有限积分解是定向的时，完备遗传余挠对 (C, Y) 和 (X , D) 向 A 的提升可由第一导出函子的消失来刻画。在一个相容性条件下，进一步证明特殊类的对 (Δ(C) ∇(D)) 是可容许平衡对，当且仅当 (C, D) 是可容许平衡对。作为应用，对于环 A, B 和一个 (B, A)- 双模 U，若其在 A 上的平坦维数有限且在 B 上的投射维数有限，则三角矩阵环 $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ U & B \end{smallmatrix}\right)$ 是左虚拟 Gorenstein 的，当且仅当 A 和 B 是。

1. 引言

Enochs 和 Jenda [9] 研究了相对同调代数中的平衡性。设$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 是阿贝尔范畴$\mathcal{B}$ 的子范畴，其中$\mathcal{C}$ 是预覆盖的，$\mathcal{D}$ 是预包嵌的。按照 Chen [4], 的定义，若$\mathcal{B}$ 中的每个对象都存在一个$\mathcal{C}$-分解，使其对每个 $D \in \mathcal{D}$ 在 Hom$_{\mathcal{B}}(-, D)$ 下成为无环的；并且存在一个$\mathcal{D}$-余分解，使其对每个 $C \in \mathcal{C}$ 在 Hom$_{\mathcal{B}}(C, -)$ 下成为无环的，则称这一对（$\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$）为平衡的。此时，可以利用分解或余分解计算 Hom 的相对导出函子 [4, 引理 2.1]。若每个$\mathcal{C}$-预覆盖都是满态射，且每个$\mathcal{D}$-预包嵌都是单态射，则称平衡对（$\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$）为可容许的。当$\mathcal{B}$ 具有小 Ext 群时，$\mathcal{B}$ 中的可容许平衡对与$\mathcal{B}$ 上具有足够多投射对象和内射对象的正合结构一一对应 [28]。

可容许平衡对也源自挠对理论：若 ($\mathcal{C}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{D}$) 是一个完备遗传余挠三元组，则 ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$) 是一个可容许平衡对 [8, 定理 4.1], [4, 命题 2.6], , 其逆向结论见 [12]。一个例子来自 Gorenstein同调代数。令 GProj R 和 GInj R 分别表示环 R 上 Gorenstein 投射左模和 Gorenstein 内射左模构成的类。若环 R 满足 (GProj R)$^{\perp}$ $=$ $^{\perp}$(GInj R)，其中正交类是相对于 Ext^1_R 定义的，则称其为左虚拟 *Gorenstein* [3, 12]。Estrada、Hu 和 Trlifaj [11] 证明， R 是左虚拟 Gorenstein，当且仅当 (GProj R, GInj R) 是一个平衡对。平衡对也已在三角范畴 [14] 和外三角范畴 [16, 29] 中得到定义。

本文探讨阿贝尔范畴与其扩张之间可容许平衡对的传递。对于一个形式三角矩阵环

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix},$$

对于 $\mathsf{C}_1, \mathsf{D}_1$ 类 A-模和 $\mathsf{C}_2, \mathsf{D}_2$ 类 B-模，Mao 证明，由 C_1 和 C_2 诱导的 T-模以及由 D_1 和 D_2 余诱导的 T-模在 T 上构成可容许平衡对，当且仅当 (C_1,D_1) 和 (C_2,D_2) 分别在 A 和 B [25, 上构成可容许平衡对。定理 2.2]。左 T-模是一个三元组 (X, Y, φ)，其中 $\varphi\colon U \otimes_A X \to Y$；令 $\widetilde{\varphi}$ 表示 φ 的伴随。Mao 还考察了这样的 T-模：其中 φ 是单态射，且满足 $X \in \mathsf{C}_1$ 和 Coker $\varphi \in \mathsf{C}_2$, ; 以及那些

2020 数学主题分类。 18G25,18E10, 16E30,16E65, 16S50.关键词与短语。 裂分扩张，可容许平衡对，挠余对，三角矩阵环，虚拟戈伦斯坦环。

*通讯作者。

其中 $\widetilde{\varphi}$ 是满态射，且 Ker $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}_1$ 和 $Y \in \mathcal{D}_2$。如果这两个类在 T 上构成可容许平衡对，那么 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$ 和 $(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2)$ 也构成可容许平衡对 [25, 命题 2.4], ; 在余挠对假设以及 Tor 和 Ext 消失条件 [25, 下，反之亦然。定理 2.5]。对于 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模，这给出了这样的条件： T 是左虚拟 Gorenstein，当且仅当 A 和 B 是 [25, 。定理 2.8]。

T的模范畴是 A- 模范畴到 $\times B$- 模范畴的一个劈裂扩张。阿贝尔范畴的扩张由 Beligiannis [1] 引入，作为环的裂扩张与 Fossum、Griffith 和 Reiten [13]研究的阿贝尔范畴的平凡扩张的共同推广。一个劈裂扩张（$\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ i, e, l）由阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 以及加性函子组成

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{A} \underset{e}{\overset{l}{\rightleftarrows}} \mathcal{B} \qquad \begin{array}{c} l \dashv e, \qquad ei \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}, \\ e \text{ is faithful and exact.} \end{array}$$

对于环，具有 $\beta\alpha = \mathrm{id}_R$ 的一对同态 $R \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} R$ 给出了模范畴的一个劈裂扩张；平凡扩张、三角矩阵环、张量环以及具有零配对的 Morita 环都以这种方式产生。根据 [1, 26], , 每个劈裂扩张都等价于一个 η-扩张 $\mathcal{B} \ltimes_\eta F$，其中 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 是一个右正合函子，而 $\eta\colon F^2 \to F$ 是一个结合自然变换，称为乘法。$\mathcal{B} \ltimes_\eta F$的对象是形如（$X$, f）的对，其中 $f\colon FX \to X$且 $f \circ Ff = f \circ \eta_X$，并且 e（X, f）$= X$。

裂分扩张的相对同调在 [2]中得到发展。此后，有限性以及其他同调维数、 [15, 24], Gorenstein对象和奇异性范畴、 [20, 22, 27], 挠余对 [5, 18, 23], 以及倾斜和tilting对象 [31] ，已在裂分扩张与其基范畴之间进行了比较。本文旨在对可容许平衡对开展这一比较。

假设 e 具有右伴随 r。那么 F 具有右伴随 G，而 i 同时具有左伴随 q和右伴随 s:

$$l \dashv e \dashv r, \qquad q \dashv i \dashv s.$$

对于环 T，函子 l 和 r 分别给出诱导模和余诱导模，而 q 和 s 将定义特殊类。

在全文中，子范畴均为充、加性且在同构和直和项下闭合。对于对象类$\mathcal{U}$ ，add$\mathcal{U}$ 表示其在有限直和和直和项下的闭包；对于函子 Γ， $\Gamma\mathcal{U}$ 表示与 ΓU 同构且满足 $U \in \mathcal{U}$的对象类。于是，本文的第一个主要结果可表述如下。

定理 A。 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}\ i, e, l)$ 是一个裂分扩张，并设 e 具有右伴随 r。则$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的可容许平衡对，当且仅当 $(\mathrm{add}(l\mathcal{C}), \mathrm{add}(r\mathcal{D}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的可容许平衡对。

定理 A 不要求任何同调条件。它适用于每个环的裂分扩张，特别是适用于平凡扩张以及具有零配对的 Morita 环（推论 5.1）；对于逗号范畴，它重新得到 [25, 定理 2。2]（推论 5.2）。之所以取闭包 add，是因为 $l\mathcal{C}$ 和$r\mathcal{D}$ 不一定对直和项封闭（例 3.5）。在余诱导侧， r 不能替换为 i: 即使 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是可容许平衡对，$(\mathrm{add}(l\mathcal{C})\ i\mathcal{D})$ 也可能不是可容许平衡对（例 3.4）。

现在假设$\mathcal{B}$ 具有足够多的投射对象和内射对象，并令

$$\Delta(\mathcal{C}) = \{M \in \mathcal{A} \mid L_1 q(M) = 0,\ qM \in \mathcal{C}\}, \qquad \nabla(\mathcal{D}) = \{N \in \mathcal{A} \mid R^1 s(N) = 0,\ sN \in \mathcal{D}\}.$$

沿用 Hu [18, 第 3.1 和 3.6], 小节的说法，它们称为特殊类。在模型$\mathcal{B} \ltimes_\eta F$中，条件 $L_1 q(X, f) = 0$ 表示

$$F^2 X \xrightarrow{Ff - \eta_X} FX \xrightarrow{f} X$$

在 FX 处正合（命题 2.2）；对于环 T，结构映射于是是一个单态射。存在 $l\mathcal{C} \subseteq \Delta(\mathcal{C})$ 和 $r\mathcal{D} \subseteq \nabla(\mathcal{D})$，且这两个包含关系都可能是严格的（例 4.11）。

如果 $(\Delta(\mathcal{C}) \ \nabla(\mathcal{D}))$ 是一个可容许平衡对，那么 $(\mathcal{C},\ \mathcal{D})$ 也是一个可容许平衡对（引理 4.1）。反过来，设 $(\mathcal{C},\ \mathcal{Y})$ 和 $(\mathcal{X},\ \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的完备遗传余挠对，并记 $e^{-1}(\mathcal{U}) = \{M \in \mathcal{A} \mid eM \in \mathcal{U}\}$ 为 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ 的一个类。问题是将它们提升为完备遗传余挠对

$$(\Delta(\mathcal{C}), e^{-1}(\mathcal{Y})), \qquad (e^{-1}(\mathcal{X}), \nabla(\mathcal{D}))$$

在 $\mathcal{A}$ 中。对于 η-扩张，当 $L_1F(\mathcal{C}) = 0$和 $F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Y}$ [5, 时，已知平衡对 $(^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y})\ e^{-1}(\mathcal{Y}))$ 是完备的（定理 3.23], ）；对于右平凡扩张（定理 3. [18, ）和像幂零扩张（定理 4.13] ），此前也已得到这一结论。对于 $\mathcal{B}$ 的箭范畴，若两个顶点处都是同一个余挠对，第二个条件表示为 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$。对于逗号范畴，即使没有这一条件，也已知可以提升 [19, 30]。不过仍然需要关于 F 的一些条件：由例 4.12 可知，提升所依赖的识别 $^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y}) = \Delta(\mathcal{C})$ 即使在 F 正合且 $F^2 = 0$ 时也可能失效。

假设 $\mathcal{B} = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j$，并设 $F_{ij} : \mathcal{B}_j \to \mathcal{B}_i$ 是 F的矩阵分量。裂分扩张 $\mathcal{A} = \mathcal{B} \ltimes_{\eta} F$ 称为有限有向 的，若对所有 $i \leq j$都有 $F_{ij} = 0$；对乘法 η不施加任何条件。对于 $n = 2$，这些就是逗号范畴，特别地也是形式三角矩阵环的模范畴；关于箭图表示、线性 Reedy 范畴及广义线性 Reedy 范畴的相关构造已在 [6, 7, 17]中研究。

对于此类扩张，$e^{-1}(\mathcal{Y})$中的每个对象都有一个有限滤过，其因子属于 $i\mathcal{Y}$，因此无需任何消失条件即可得到$\Delta(\mathcal{C}) = {}^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y})$（命题 4.7）。于是，提升问题有如下解答。

定理 B. 设 $A = B \ltimes_{\eta} F$ 是一个有限有向裂缝扩张，且 e 有一个右伴随，其中 $B = \prod_{j=1}^{n} B_j$，并设 G 是 F 的右伴随。假设每个 B_j 都有足够多的投射对象和内射对象。对于每个 j，令 (C_j, Y_j) 和 (X_j, D_j) 为 B_j 中的完备遗传余挠对，并令 C 、 Y 、 X 、 D 为相应的乘积类。

(1) $(\Delta(C)\ e^{-1}(Y))$ 是 A 中的完备遗传余挠对，当且仅当 $L_1F(C) = 0$.(2) $(e^{-1}(X)\ \nabla(D))$ 是 A 中的完备遗传余挠对，当且仅当 $R^1G(D) = 0$.

关于特殊类的主要结果可表述如下。

定理 C. 在定理 B 的设定下，假设对每个 j，$C_j \cap Y_j \subseteq X_j$ 且 $X_j \cap D_j \subseteq Y_j$ 。若

$$L_1F(\mathcal{C}) = 0, \qquad R^1G(\mathcal{D}) = 0,$$

则以下各项等价：

(1) (C, D) 在 B 中具有容许平衡性；(2) $(\mathrm{add}(l$
$C)$,$\mathrm{add}(rD))$ 在 A 中具有容许平衡性；(3) $(\Delta(C)\ \nabla$
$(D))$ 在 A 中具有容许平衡性；(4) $Y = X$；(5) Δ
$(C)^{\perp} = {}^{\perp}\nabla(D)$。

（1）和（2）的等价性即为定理 A，而条件 $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{Y}_j \subseteq \mathcal{X}_j$ 以及 $\mathcal{X}_j \cap \mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{Y}_j$仅用于证明（1）$\Rightarrow$（4）。条件（5）在 $\mathcal{A}$ 中重新表述了（4），因为根据定理 B， $\Delta(\mathcal{C})^{\perp} = e^{-1}(\mathcal{Y})$ 和 $^{\perp}\nabla(\mathcal{D}) = e^{-1}(\mathcal{X})$。当 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ 时，提升后的对构成一个完备遗传余挠三元组，而 [12] 的判据将这一等式与三个层次上的平衡联系起来。对于三角矩阵环，定理 C 恢复了 [25, 定理 2.5]

现假设 U_A 具有有限平坦维数，且 ${}_BU$ 具有有限投射维数。对于 Artin 代数，Eshraghi、Hafezi、Salarian 和 Li [10, 在命题 3.3] 中证明， T 几乎 Gorenstein，当且仅当 A 和 B 均如此；他们的结果是在U满足四个相容条件的假设下得出的，而在这种情形下这些条件均成立。Mao [25, 在定理 2.8] 中刻画了如下情形下的几乎 Gorenstein 三角矩阵环： U_A 是平坦的， ${}_BU$ 是投射的，且 A 和 B 是有限左自内射维数的左 Noether 环。

对于任意环 A 和 B，Gorenstein 投射 T-模与 Gorenstein 内射 T-模分别构成特殊类 Δ (GProj $A \times$ GProj B)和 ∇(GInj $A \times$ GInj B) [21, 30],，且通过维数平移可知消失条件成立。结合 [11], 中对几乎 Gorenstein 环的刻画，余挠三元组的提升便得出以下结果。

定理 D. 设 A 和 B 为环， U 为一个(B, A)-双模，且 U_A 具有有限平坦维数， ${}_BU$ 具有有限投射维数。令 $T = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ U & B \end{smallmatrix}\right)$。那么， T 是左虚拟 *Gorenstein*，当且仅当 A 和 B 是左虚拟 *Gorenstein*。等价地，$(\mathrm{GProj}\ T, \mathrm{GInj}\ T)$ 是容许平衡的，当且仅当$(\mathrm{GProj}\ A, \mathrm{GInj}\ A)$ 和$(\mathrm{GProj}\ B, \mathrm{GInj}\ B)$ 是容许平衡的。

特别地，环 R 上的下三角 $n \times n$ 矩阵环是左虚拟 Gorenstein，当且仅当 R 是左虚拟 Gorenstein（推论 5.6）。

本文组织如下。第2节回顾裂分扩张和平衡对，并给出特殊类所依据的低次正合列。第3节证明定理 A。第4节讨论特殊类并证明定理B和定理C。第5节介绍环的裂扩张、逗号范畴和三角矩阵环方面的应用，并证明定理 D。

2. 预备知识

全文中，我们沿用第1节中关于子范畴的约定以及记号 $\mathrm{add}\mathcal{U}$ 和 $\Gamma\mathcal{U}$。

2.1. 劈裂扩张。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为阿贝尔范畴。按照定义， [1, 2, 26],一个劈裂扩张$(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$由加性函子构成

$$\mathcal{B} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}, \qquad l : \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \qquad l \dashv e, \quad ei \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}},$$

其中 e 是忠实且正合的。因此，函子 i 是全忠实且正合的，并且有一个左伴随 q。全文中，我们假设 e 有一个右伴随 r。于是，$(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, r)$ 是一个劈裂余扩张，因此 i 有一个右伴随 s；参见 [2,第2节4]。这些函子构成如下图表

$$\mathcal{B} \underset{s}{\overset{q}{\rightleftarrows}} \mathcal{A} \underset{r}{\overset{l}{\rightleftarrows}} \mathcal{B} \qquad \begin{array}{l} q \dashv i \dashv s, \\ l \dashv e \dashv r. \end{array} \tag{2.1}$$

在不会引起歧义时，我们将自然同构函子视为相同。

设 $\nu : \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \to el$和 $\mu : le \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$分别为 $l \dashv e$的单位和余单位。由于 $e(\mu_M)\nu_{eM} = \mathrm{id}_{eM}$，每个 μ_M都是满态射。令 $\Omega(M) =$核 μ_M且 $F = e\Omega i$。在对象 iX 处对正合列$0 \to \Omega \to le \xrightarrow{\mu} \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to 0$ 应用 e，得到一个分裂正合列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow el \xrightarrow{e\mu i} \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \longrightarrow 0, \qquad el \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \oplus F,$$

因此 F 是加性的且右正合。由于 F 是 el 的直和项，且 el 有右伴随 er，函子 F 有右伴随 G。由于 $el \dashv er$，伴随函子的唯一性给出 $er \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \oplus G$。

引理 2.1. (2.1) 中的函子满足

$$ql \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}, \quad sr \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}, \quad qi \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}, \quad si \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}.$$

函子 l 和 q 保持投射对象，而 r 和 s 保持内射对象。若 B 有足够多的投射对象，则 A 也有足够多的投射对象。对偶地，若 B 有足够多的内射对象，则 A 也有足够多的内射对象。

这些是裂分扩张和余扩张的标准性质；参见 [1, 命题 2.3 和 5.4(1)], [20,第 2], 节及其对偶命题。

由 e 的单子性，每个裂分扩张都等价于一个 η-扩张 $\mathcal{B} \ltimes_{\eta} F$ [1, 26]。这里$\eta : F^2 \to F$是一个结合自然变换，即 $\eta \circ F\eta = \eta \circ \eta F$。$\mathcal{B} \ltimes_{\eta} F$ 的一个对象

是一个对 (X, f)，其中 $f\colon FX \to X$；态射 $a\colon (X,f) \to (Y,h)$ 是 $\mathcal{B}$ 中的态射 $a\colon X \to Y$。它们分别满足

$$f \circ Ff = f \circ \eta_X, \qquad af = h \circ Fa.$$

在此模型中，(2.1) 中的四个函子分别为

$$\begin{aligned} e(X,f) &= X, & q(X,f) &= \operatorname{Coker} f, \\ iX &= (X,0), & lX &= \left(X \oplus FX, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{FX} & \eta_X \end{pmatrix}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

对偶地，令 $\zeta\colon G \to G^2$ 为 η的伴随变换。在态射 $f\colon FX \to X$与 $g\colon X \to GX$之间的对应关系下，范畴 $\mathcal{B} \ltimes_\eta F$等价于余扩张 $G \rtimes_\zeta \mathcal{B}$，其对象是满足 $Gg \circ g = \zeta_X \circ g$的对 $[X,g]$。在此模型中，

$$s[X,g] = \operatorname{Ker} g, \qquad rX = \left[X \oplus GX, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{GX} \\ 0 & \zeta_X \end{pmatrix}\right];$$

参见 [2, 第 2.2 节和第 2.4] 节。

2.2. 低次比较。 第4节中的特殊类涉及 $L_1 q$ 和$R^1 s$的消失。为了将这些条件与 Ext^1-正交性联系起来，我们使用格罗滕迪克谱序列；这是 Beligiannis [2, 命题 7.1]中的相对谱序列的绝对情形。

命题 2.2。 设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, i, e, l)$ 是阿贝尔范畴的劈裂扩张。假设 $\mathcal{B}$ 具有足够多的投射对象和足够多的内射对象。对于每个 $M \in \mathcal{A}$ 和 $Y \in \mathcal{B}$，都存在一个关于两个变量均自然的正合列，

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(qM, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, iY) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L_1 q(M), Y) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{B}}(qM, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(M, iY). \end{aligned} \tag{2.3}$$

特别地，对于每个内射的 $I \in \mathcal{B}$，都存在一个自然同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, iI) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L_1 q(M), I). \tag{2.4}$$

在模型 (2.2) 中，

$$L_1 q(X,f) \cong \operatorname{Ker} f / \operatorname{Im}(Ff - \eta_X). \tag{2.5}$$

证明。设 $h_Y = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, Y)$。伴随 $q \dashv i$ 给出一个自然同构 $h_Y q \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, iY)$。由引理 2.1 可知，范畴 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象，且 q 保持投射对象，因此对于 $\mathcal{A}$ 中的每个投射对象 P 以及每个 $n \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(qP, Y) = 0$；也就是说，$qP$ 是 h_Y-无环的。因此我们得到一个格罗滕迪克谱序列

$$E_2^{p,t} = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{B}}(L_t q(M), Y) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ext}^{p+t}_{\mathcal{A}}(M, iY).$$

其五项正合序列为

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, iY) \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(M, iY),$$

代入 E_2-项的描述即可得到 (2.3)。现在设 I 在 $\mathcal{B}$ 中是内射的。于是对所有 $n \geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(-, I) = 0$，从而在 (2.3) 中取 $Y = I$，便得到自然同构 (2.4)。最后，(2.5) 由 [1, 推论 5.10(i)] 得出。

□

Du特别地，对于阿贝尔范畴的劈裂余扩张，我们得到以下结果。

命题 2.3. 设$(B, A\ i, e, r)$是阿贝尔范畴的劈裂余扩张。假设 B 有足够多的投射对象和内射对象。对于每个 $M \in A$ 和 $Y \in B$，都存在一个关于两个变量自然的正合列，

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(Y, sM) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(iY, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, R^1 s(M)) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{B}}(Y, sM) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(iY, M). \end{aligned} \tag{2.6}$$

特别地，对于每个投射 $P \in B$，都存在一个自然同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(iP, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P, R^1 s(M)). \tag{2.7}$$

(2.2) 的对偶模型中，

$$R^1 s[X, g] \cong \mathrm{Ker}(Gg - \zeta_X)/\,\mathrm{Im}\, g. \tag{2.8}$$

2.3. **平衡对与余挠三元组**。设$\mathcal{U}$是阿贝尔范畴$\mathcal{B}$的一个子范畴。若态射 $u\colon U \to B$满足 $U \in \mathcal{U}$，则称其为$\mathcal{U}$-预覆盖，如果对每个 $U\prime \in \mathcal{U}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U\prime, u)$ 都是满射；若 u 是满态射，则称其为满 态射。对偶地，若态射 $v\colon B \to U$ 满足 $U \in \mathcal{U}$，则称其为$\mathcal{U}$-预包络，如果对每个 $U\prime \in \mathcal{U}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(v, U\prime)$ 都是满射；若 v 是单态射，则称其为单 态射。若每个对象都存在一个满的$\mathcal{U}$-预覆盖，则称子范畴$\mathcal{U}$为满预覆盖；单射预包络 则作对偶定义。

根据 Chen [4]，子范畴对（$\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$）是一个可容许平衡对，如果$\mathcal{C}$ 是满预覆盖的，$\mathcal{D}$ 是单射预包络的，并且每个 $B \in \mathcal{B}$ 都具有正合复形

$$\cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow D^0 \longrightarrow D^1 \longrightarrow \cdots,$$

其中 $C_j \in \mathcal{C}$ 和 $D^j \in \mathcal{D}$在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}, -)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, \mathcal{D})$ 下均保持正合。下述刻画将贯穿全文，并取代定义使用。

引理 2.4 ([4, 命题 2.2], [12, 引理 3.1])。设 $\mathcal{C}$ 是满预覆盖的，$\mathcal{D}$ 是单射预包络的。那么，$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是可容许平衡的，当且仅当对于每个短正合列 σ，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}, \sigma)\ \textit{is exact} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\sigma, \mathcal{D})\ \textit{is exact}. \tag{2.9}$$

对于 $\mathcal{B}$ 中的一个可容许平衡对（$\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$），令 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ 表示（2.9）中的短正合列的公共类。这是由$\mathcal{C}$投射生成的$\mathcal{B}$ 上的正合结构。当$\mathcal{B}$ 具有小 Ext 群时，Wang、Li 和 Huang [28, 定理 2.2] 证明了，赋值（$\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$）$\mapsto \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ 在可容许平衡对与$\mathcal{B}$ 上具有足够投射对象和内射对象的正合结构之间给出一个双射。

对于对象类$\mathcal{U}$，记作

$${}^{\perp}\mathcal{U} = \{B \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(B, U) = 0 \text{ for all } U \in \mathcal{U}\}, \qquad \mathcal{U}^{\perp} = \{B \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(U, B) = 0 \text{ for all } U \in \mathcal{U}\}.$$

一个余挠对 $(\mathcal{C},\mathcal{Y})$ [9, 章 7] 满足$\mathcal{C} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ 且$\mathcal{Y} = \mathcal{C}^{\perp}$。如果每个对象 B都出现在短正合列中，则称其为完备

$$0 \to Y \to C \to B \to 0, \qquad 0 \to B \to Y' \to C' \to 0$$

其中 $C, C' \in \mathcal{C}$ 以及 $Y, Y\prime \in \mathcal{Y}$；这些分别称为特殊预覆盖列和特殊预包络列。如果对所有 $m \geq 1$，$\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}, \mathcal{Y}) = 0$，则称其为遗传的。三元组$(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{D})$称为完备遗传余挠三元组，如果$(\mathcal{C}, \mathcal{W})$和$(\mathcal{W}, \mathcal{D})$都是完备遗传余挠对。

以下结果将完备遗传余挠三元组与可容许平衡对联系起来；参见 [8, 定理 4.1] 和 [4,命题 2.6]。

引理 2.5. 假设 B 有足够多的投射对象和内射对象。若 $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{D})$ 是 B 中一个完备遗传余挠三元组，则 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 B 中的一个可容许平衡对。

3. 劈裂扩张下的可容许平衡对

本节中，我们研究阿贝尔范畴的裂分扩张下可容许平衡对的传递。设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}\ i, e, l)$ 是阿贝尔范畴的一个裂分扩张，并假设 e 有右伴随 r。根据第 2.1 小节中的讨论，存在两个伴随三元组 $q \dashv i \dashv s$ 和 $l \dashv e \dashv r$。

引理 3.1。设 $\varepsilon\colon\ qi \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ 是 $q \dashv i$ 的余单位，且 $\vartheta\colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \to si$ 是 $i \dashv s$ 的单位。

设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 是满足 $l\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ 且 $q\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ 的子范畴。若 $p\colon\ M_0 \to iB$ 是一个 $\mathcal{F}$-预覆盖，则

$$\bar{p} = \varepsilon_B \circ q(p) : qM_0 \longrightarrow B$$

是一个 $\mathcal{C}$-预覆盖。此外，只要 p 是满态射，$\bar{p}$ 就是满态射。

对偶地，设 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ 是满足 $r\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ 且 $s\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ 的子范畴。若 $v : iB \to N_0$ 是一个 $\mathcal{L}$-预包络，则

$$\bar{v} = s(v) \circ \vartheta_B : B \longrightarrow sN_0$$

是一个 $\mathcal{D}$-预包嵌。此外，只要 v 是单态射，$\bar{v}$ 就是单态射。

证明。由引理 2.1 及假设可得，

$$\mathcal{C} = q l\mathcal{C} \subseteq q\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}, \qquad \mathcal{D} = sr\mathcal{D} \subseteq s\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}.$$

因此 $q\mathcal{F} = \mathcal{C}$ 且 $s\mathcal{L} = \mathcal{D}$。

特别地，$qM_0 \in \mathcal{C}$。设 $b\colon\ qF \to B$ 是一个态射，其中 $F \in \mathcal{F}$。在伴随 $q \dashv i$ 下，它对应于一个满足下式的态射 $b\colon\ F \to iB$：

$$b = \varepsilon_B \circ q(\widetilde{b}).$$

由于 p 是一个 $\mathcal{F}$-预覆盖，我们可以对某个 $c\colon\ F \to M_0$ 写成 $b = p \circ c$。因此

$$b = \varepsilon_B \circ q(p) \circ q(c) = \bar{p} \circ q(c).$$

因此 $\bar{p}$ 是一个 $\mathcal{C}$-预覆盖。

对偶地，$sN_0 \in \mathcal{D}$，因此只需考虑一个态射 $a\colon\ B \to sL$，满足 $L \in \mathcal{L}$。在伴随 $i \dashv s$ 下，它对应于一个满足以下条件的态射 $\widetilde{a}\colon\ iB \to L$

$$a = s(\widetilde{a}) \circ \vartheta_B.$$

由于 v 是一个 $\mathcal{L}$-预包络，我们可以将 $\widetilde{a} = c' \circ v$ 写成某个 $c'\colon\ N_0 \to L$ 的形式。因此

$$a = s(c') \circ s(v) \circ \vartheta_B = s(c') \circ \bar{v}.$$

因此，$\bar{v}$ 是一个 $\mathcal{D}$-预包络。

最后，由于 i 是全忠实的，ε_B 和 ϑ_B 是同构。函子 q 是左伴随，因此保持满态射；而 s 是右伴随，因此保持单态射。这就证明了其余断言。□

定理 3.2。设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}\ i, e, l)$ 是阿贝尔范畴的一个裂分扩张，并假设 $e \dashv r$。对于子范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$，以下条件等价：

(1) $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的可容许平衡对；(2) $(\mathrm{add}(l\mathcal{C}),\ \mathrm{add}(r\mathcal{D}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的可容许平衡对。

证明。令

$$\mathcal{F} = \mathrm{add}(l\mathcal{C}), \qquad \mathcal{L} = \mathrm{add}(r\mathcal{D}).$$

首先，假设 $\mathcal{C}$ 是满预覆盖的。对于 $M \in \mathcal{A}$，取一个满的 $\mathcal{C}$-预覆盖 $a\colon\ C_0 \to eM$。在伴随关系 $l \dashv e$ 下，其伴随

$$\widetilde{a} = \mu_M \circ l(a) : lC_0 \to M$$

是一个 $l\mathcal{C}$-预覆盖，因此也是一个$\mathcal{F}$-预覆盖。这里 μ 表示 $l \dashv e$ 的余单位。若 ν 表示相应的单位，则 $a = e(\tilde{a}) \circ \nu_{C_0}$。由于 a 是满态射， $e(\tilde{a})$ 也是满态射。由 e 的忠实性可知， $\tilde{a}$是满态射。因此$\mathcal{F}$ 是满预覆盖的。

反之 地，假设$\mathcal{F}$ 是满预包络。由于 q 是加性的且 $ql \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，我们有 ave

$$l\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}, \qquad q\mathcal{F} \subseteq \mathrm{add}(ql\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

对每个 $B \in \mathcal{B}$，取一个 iB的满$\mathcal{F}$-预覆盖。由引理 3.1，它诱导出 B的满$\mathcal{C}$-预覆盖。因此

$$\mathcal{C} \text{ is epic precovering} \iff \mathcal{F} \text{ is epic precovering}. \tag{3.1}$$

对偶地，伴随 $e \dashv r$ 将 eM 的单$\mathcal{D}$-预包络映射为 M的单$\mathcal{L}$-预包络。反之，由于 s 是加性的且 $sr \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，我们有

$$r\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}, \qquad s\mathcal{L} \subseteq \mathrm{add}(sr\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

因此，引理 3.1 的对偶断言给出

$$\mathcal{D} \text{ is monic preenveloping} \iff \mathcal{L} \text{ is monic preenveloping}. \tag{3.2}$$

对于 $\mathcal{A}$ 中的每个短正合列 ξ，由伴随 $l \dashv e \dashv r$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \xi) \text{ is exact} &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}, e\xi) \text{ is exact}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\xi, \mathcal{L}) \text{ is exact} &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(e\xi, \mathcal{D}) \text{ is exact}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

如果 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 满足 (2.9)，那么 e 的正合性使我们能够将此判据应用于 $e\xi$。由 (3.3)，$(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ 满足相同的判据。

反之，设 $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ 满足 (2.9)。对于 $\mathcal{B}$ 中的任意短正合列 σ， i 的正合性蕴含 $i\sigma$ 是一个短正合列。由于 $ei\sigma \cong \sigma$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}, \sigma) \text{ is exact} &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, i\sigma) \text{ is exact} \\ &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i\sigma, \mathcal{L}) \text{ is exact} \\ &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\sigma, \mathcal{D}) \text{ is exact}. \end{aligned}$$

因此，$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 满足 (2.9)。

由引理 2.4、(3.1) 和 (3.2) 即得该结论。 □

注 3.3。 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个可容许平衡对，并令 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ 表示其关联的正合结构。由定理 3.2，对 $(\mathrm{add}(l\mathcal{C}), \mathrm{add}(r\mathcal{D}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个可容许平衡对。将其关联的正合结构记为 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$。于是 (3.3) 给出

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = e^{-1}(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}) := \{\xi \text{ short exact in } \mathcal{A} \mid e\xi \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}\}.$$

例 3.4. 定理 3.2 中的余诱导函子 r 一般不能用截面函子 i替代。设 k 是一个域，且 $S = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$。典范嵌入 $k \to S$ 和增广映射 $S \to k, \varepsilon \mapsto 0$构成一个裂分扩张，其中

$$\mathcal{B} = k\text{-Mod}, \qquad \mathcal{A} = S\text{-Mod},$$

其中 e 是沿 $k \to S, l = S \otimes_k -$的标量限制，而 i 是沿增广映射 $S \to k$的标量限制。此外， e 有右伴随 $r = \mathrm{Hom}_k(S, -)$。

由于每个 k-向量空间的短正合列都分裂，$(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ 是一个可容许平衡对。然而， $i\mathcal{B}$ 中的每个模都被 ε 湮灭。对于任意 $N \in i\mathcal{B}$ 以及任意 S-线性映射 $f\colon S \to N$，都有 $f(\varepsilon) = \varepsilon f(1) = 0$。由于 $\varepsilon \neq 0$in S，不存在这样的映射是单态射。因此，正则左 S-模无法单射到 $i\mathcal{B}$ 中的某个对象内，所以 $i\mathcal{B}$ 不是单射预包络。因而，$(\mathrm{add}(l\mathcal{B})\ i\mathcal{B})$ 不是一个可容许平衡对。

例 3.5。 本质像 $l\mathcal{B}$ 不一定对直和项封闭，即使 $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ 是可容许平衡的。令 $\mathcal{B} = k$-模范畴，其中 k 是一个域，并取 $F = \mathrm{id}$ 和 $\eta = \mathrm{id}$。$\mathcal{A} = \mathcal{B} \ltimes_\eta F$ 中的一个对象是带有幂等自同态的向量空间，因此 $\mathcal{A} \simeq k$-模范畴 $\times k$-模范畴，并且$\mathcal{A}$ 中的每个对象都是投射的。由 (2.2) 可得，

$$lX = \left(X \oplus X, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \end{pmatrix}\right) \cong (X, \mathrm{id}) \oplus (X, 0)$$

f或每个 $X \in \mathcal{B}$。因此， lk 的直和项 (k,id) 不属于 $l\mathcal{B}$.

4. 裂分扩张下的平衡对与余挠对

在第3节中，我们比较了$\mathcal{B}$ 中的容许平衡性与$\mathcal{A}$中诱导类和余诱导类的容许平衡性。现在我们要探讨，何时可以将平衡性与特殊类 $\Delta(\mathcal{C})$ 和$\nabla(\mathcal{D})$ 的平衡性进行比较。

我们首先给出一个以提升的完备遗传余挠对为条件的判据。随后证明，当 $L_1F(\mathcal{C}) = 0$ 且 $R^1G(\mathcal{D}) = 0$ 时，该判据适用于有限有向扩张，由此得到定理 C 中的比较结果。

在本节中，设 $(\mathcal{B}, \mathcal{A}\ i,\ e,\ l)$ 是阿贝尔范畴的一个劈裂扩张。我们假设 e 有一个右伴随 r ，且$\mathcal{B}$ 有足够多的射影对象和内射对象。

4.1. **特殊类与余挠三元组**。对于子范畴$\mathcal{C}$，$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$，令

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{C}) &= \{M \in \mathcal{A} \mid L_1q(M) = 0,\ qM \in \mathcal{C}\}, \\ \nabla(\mathcal{D}) &= \{N \in \mathcal{A} \mid R^1s(N) = 0,\ sN \in \mathcal{D}\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

由 (2.5) 和 (2.8)，在相应的模型中，这些与 [18,第 3.1 和 3.6]小节中定义的类一致。我们有

$$l\mathcal{C} \subseteq \Delta(\mathcal{C}), \qquad r\mathcal{D} \subseteq \nabla(\mathcal{D}). \tag{4.2}$$

事实上, 令 $X \in \mathcal{C}$ ，并令 I 为$\mathcal{B}$中的一个内射对象。考虑一个短正合列 e

$$0 \to iI \to E \xrightarrow{p} lX \to 0.$$

由于 e 是正合的且 $eiI \cong I$ 是内射的，它在 e 下的像分裂。取一个截面 $t : elX \to eE$ ，其映射为$e(p)$，并令 $h = t \circ \nu_X$: $X \to eE$，其中 ν 是 $l \dashv e$ 的单位。于是 $e(p) \circ h = \nu_X$。由伴随同构的自然性，伴随态射 $h = \mu_E \circ l(h) : lX \to E$ 满足 $p \circ h = \mathrm{id}_{lX}$，其中 μ 是 $l \dashv e$ 的余单位。因此，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(lX,\ iI) = 0$。由 (2.4),

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L_1q(lX), I) = 0$$

对于每个内射 $I \in \mathcal{B}$。由于 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象， $L_1q(lX) = 0$。结合$qlX \cong X$，这就证明了 $lX \in \Delta(\mathcal{C})$。对偶地，我们有 $r\mathcal{D} \subseteq \nabla(\mathcal{D})$。

引理 4.1. 设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$，$\mathcal{F}$、$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ 为子范畴，满足

$$l\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}, \quad q\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}, \qquad r\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}, \quad s\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}.$$

若 $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的可容许平衡对，则 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的可容许平衡对。特别地，若 $(\Delta(\mathcal{C})\ \nabla(\mathcal{D}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的可容许平衡对，则 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的可容许平衡对。

证明。 对于每个 $B \in \mathcal{B}$，选取一个满$\mathcal{F}$-预覆盖和一个单$\mathcal{L}$-预包络 iB。由引理 3.1，它们分别诱导出 B 的满$\mathcal{C}$-预覆盖和单$\mathcal{D}$-预包络。因此，$\mathcal{C}$ 是满预覆盖的，$\mathcal{D}$ 是单射预包嵌的。

由于 $ql \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ 且 $sr \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，假设中的包含关系给出 $q\mathcal{F} = \mathcal{C}$ 以及 $s\mathcal{L} = \mathcal{D}$。设 σ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个短正合列。由于 i 是正合的，$i\sigma$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列。利用 $q \dashv i$、$(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ 的平衡条件以及 $i \dashv s$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}, \sigma) \text{ is exact} &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, i\sigma) \text{ is exact} \\ &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i\sigma, \mathcal{L}) \text{ is exact} \\ &\iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\sigma, \mathcal{D}) \text{ is exact}.\end{aligned}$$

因此，根据引理 2.4，$(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是一个可容许平衡对。

对于最后一个断言，(4.2) 给出 $l\mathcal{C} \subseteq \Delta(\mathcal{C})$ 和 $r\mathcal{D} \subseteq \nabla(\mathcal{D})$，而 $q\Delta(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ 以及 $s\nabla(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$则由 (4.1) 得出。□

引理 4.1 表明，若 $(\Delta(\mathcal{C})\ \nabla(\mathcal{D}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个可容许平衡对，则 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个可容许平衡对。下一个定理给出了逆命题成立的条件。

定理 4.2. 设$(\mathcal{C}, \mathcal{Y})$和$(\mathcal{X}, \mathcal{D})$是 $\mathcal{B}$ 中的完备遗传余挠对，满足

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}, \qquad \mathcal{X} \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y}. \tag{4.3}$$

假设

$$(\Delta(\mathcal{C}), e^{-1}(\mathcal{Y})), \qquad (e^{-1}(\mathcal{X}), \nabla(\mathcal{D}))$$

是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对。则以下条件等价：

(1) $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是可容许平衡的；(2) $(\Delta(\mathcal{C})$ $\nabla(\mathcal{D}))$ 是可容许平衡的；(3) $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$；

(4) $\Delta(\mathcal{C})^{\perp} = {}^{\perp}\nabla(\mathcal{D})$。

证明。 假设 (1) 成立。则 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个可容许平衡对。由于 $(\mathcal{C}, \mathcal{Y})$ 和 $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ 是满足 (4.3) 的完备遗传余挠对，[12, 推论 4.8] 表明$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$。因此，(1) ⇒ (3)。

接下来假设 (3) 成立。则 $e^{-1}(\mathcal{Y}) = e^{-1}(\mathcal{X})$。因此，$(\Delta(\mathcal{C})\ e^{-1}(\mathcal{Y})\ \nabla(\mathcal{D}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠三元组。由引理 2.1，$\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象和内射对象。因此，引理 2.5 推出 (2)。(2) ⇒(1) 的推论由引理 4.1 得出。

最后，由于（$\Delta\mathcal{C}$） e^{-1}（$e^{-1}\mathcal{X}$）和（ $\nabla\mathcal{D}$）是完备遗传余挠对，我们有

$$\Delta(\mathcal{C})^{\perp} = e^{-1}(\mathcal{Y}), \qquad {}^{\perp}\nabla(\mathcal{D}) = e^{-1}(\mathcal{X}).$$

由于 $ei \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，对于每个 $B \in \mathcal{B}$，我们有

$$B \in \mathcal{Y} \iff iB \in e^{-1}(\mathcal{Y}), \qquad B \in \mathcal{X} \iff iB \in e^{-1}(\mathcal{X}).$$

因此， e^{-1}（$\mathcal{Y}$） $= e^{-1}$（$\mathcal{X}$）当且仅当$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$。这就证明了（3） ⇔ （4），并完成了证明。 □

下面的第一个等式归因于 Hu [18, 引理 3.8] 当 $F^2 = 0$，而对于一般的 η-扩张，则归因于 Chen、Qin 和 Yang[5, 引理 3.3]，我们给出一个利用（2.3）和（2.4）的简短证明。

引理 4.3。 如果 $\mathcal{Y}$ 包含 $\mathcal{B}$ 的所有内射对象，则 $\Delta({}^{\perp}\mathcal{Y}) = {}^{\perp}(i\mathcal{Y})$。对偶地，如果 $\mathcal{X}$ 包含 $\mathcal{B}$ 的所有投射对象，则 $\nabla(\mathcal{X}^{\perp}) = (i\mathcal{X})^{\perp}$。

证明。L 且 $M \in \Delta({}^{\perp}\mathcal{Y})$。于是 $L_1q(M) = 0$ 且 $qM \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$。对于每个 $Y \in \mathcal{Y}$，(2.3) 给出 s

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, iY) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(qM, Y) = 0.$$

因此 $M \in {}^{\perp}(i\mathcal{Y})$。

反之 反之，令 $M \in {}^{\perp}(i\mathcal{Y})$。对于每个 $Y \in \mathcal{Y}$，(2.3) 中的第一个映射给出一个内射映 n

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(qM, Y) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, iY) = 0.$$

Th因此 $qM \in {}^{\perp}\mathcal{Y}$。此外，$\mathcal{B}$ 的每个内射对象 I 都属于$\mathcal{Y}$，所以 (2.4) 给出 es

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L_1q(M), I) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, iI) = 0.$$

由于$\mathcal{B}$有足够多的内射对象， $L_1q(M)$可以嵌入一个内射对象。因此 $L_1q(M) = 0$。这证明了 $M \in \Delta({}^{\perp}\mathcal{Y})$。第二个等式由对偶性得出。□

推论 4.4。 设$(\mathcal{C}, Y)$ 是$\mathcal{B}$中的一个挠余对。

(1) $\Delta(\mathcal{C}) = {}^{\perp}(iY)$，且$(\Delta(\mathcal{C})\ \Delta(\mathcal{C})^{\perp})$是$\mathcal{A}$中的一个挠余对。*(2)* ${}^{\perp}e^{-1}(Y) \subseteq \Delta(\mathcal{C})$，当 $e^{-1}(Y)$中的每个对象都有一个因子属于 iY的有限滤过时，等号成立。*(3)* $({}^{\perp}e^{-1}(Y)\ e^{-1}(Y))$是$\mathcal{A}$中的一个挠余对，当且仅当 $L_1F(\mathcal{C}) = 0$。此时 $\Delta(\mathcal{C})^{\perp} \subseteq e^{-1}(Y)$。

证明。 由于（$\mathcal{C}$,$\mathcal{Y}$）是一个挠余对，$\mathcal{Y}$ 包含 $\mathcal{B}$ 中的所有内射对象，且 $\mathcal{C} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$。由引理 4.3 可得结论（1）；另见 [5,引理 3.3 和定理 3.4]。

现在证明结论（2）。由于 $ei \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，我们有 $i\mathcal{Y} \subseteq e^{-1}(\mathcal{Y})$。因此,

$${}^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq {}^{\perp}(i\mathcal{Y}) = \Delta(\mathcal{C}).$$

现在假设（2）中的滤过条件成立。设 $M \in \Delta(\mathcal{C})$ 和 $N \in e^{-1}(\mathcal{Y})$，并取一个有限滤过

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m = N$$

使得对每个 j，都有 $N_j/N_{j-1} \in i\mathcal{Y}$。由（1），$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N_j/N_{j-1}) = 0$。将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ 应用于

$$0 \longrightarrow N_{j-1} \longrightarrow N_j \longrightarrow N_j/N_{j-1} \longrightarrow 0$$

得到一个正合列

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N_{j-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N_j/N_{j-1}).$$

由于最后一项为零且 $N_0 = 0$，由归纳法可得，对每个 j，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N_j) = 0$ 。因此 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$，从而证明了 $\Delta(\mathcal{C}) \subseteq {}^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y})$。

对于 (3)，若 $L_1F(\mathcal{C}) = 0$，则 $({}^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y})\ e^{-1}(\mathcal{Y}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个挠余对，由 $[5, \text{定理 } 3.10]$ 得出；关于幂零 η，参见 $[18, \text{定理 } 3.5]$ 。此外，包含关系 $\Delta(\mathcal{C})^{\perp} \subseteq e^{-1}(\mathcal{Y})$ 由 [5,命题 3.11] 得出。

反过来，假设 $({}^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y})\ e^{-1}(\mathcal{Y}))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个挠余对。设 I 是 $\mathcal{B}$ 中的一个内射对象。由于 e 是正合的且 $e \dashv r$，对象 rI 是 $\mathcal{A}$ 中的内射对象。因此 $rI \in e^{-1}(\mathcal{Y})$，从而$I \oplus GI \cong erI \in \mathcal{Y}$。由于 $\mathcal{Y}$ 对直和项封闭，故 $GI \in \mathcal{Y}$。

对于 $C \in \mathcal{C}$，取一个投射分解 $P_\bullet \to C$。伴随 $F \dashv G$ 以及 I 的内射性给出

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(C, GI) \cong H^1 \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FP_\bullet, I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L_1F(C), I),$$

其中，最后一个同构由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, I)$ 的正合性得出。由于这对每个内射对象 I 都成立，且 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象，因此 $L_1F(C) = 0$。于是 $L_1F(\mathcal{C}) = 0$。□

4.2. **有限有向扩张**。设 $\mathcal{B} = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j$，其坐标嵌入为 $\iota_j : \mathcal{B}_j \to \mathcal{B}$ ，投影为 $\pi_j : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_j$。令

$$F_{ij} = \pi_i F \iota_j, \qquad G_{ji} = \pi_j G \iota_i.$$

由于 $F \dashv G$ 和 $\iota_j \dashv \pi_j \dashv \iota_j$，我们有 $F_{ij} \dashv G_{ji}$。此外，对于 $X = (X_1, \ldots\ldots, X_n) \in \mathcal{B}$，存在自然同构

$$(FX)_i \cong \bigoplus_{j=1}^{n} F_{ij}X_j, \qquad (GX)_j \cong \bigoplus_{i=1}^{n} G_{ji}X_i.$$

定义 4.5。 裂分扩张 $\mathcal{A} = \mathcal{B} \ltimes_\eta F$ 称为关于给定积分解的有限有向，如果

$$F_{ij} = 0 \qquad \text{whenever } i \le j. \tag{4.4}$$

对于这样的扩张，我们有

$$(FX)_i \cong \bigoplus_{j<i} F_{ij}X_j, \qquad (GX)_j \cong \bigoplus_{i>j} G_{ji}X_i.$$

迭代这些公式可得 $F^n = 0$ 和 $G^n = 0$。

本小节的目的是将余挠对从范畴 $\mathcal{B}_j$ 提升到 $\mathcal{A}$。我们固定以下记号。扩张 $\mathcal{A} = \mathcal{B} \ltimes_\eta F$ 是有限有向的，其中 $F \dashv G$ 和 $\eta\colon F^2 \to F$ 任意结合自然变换，且每个 $\mathcal{B}_j$ 都有足够多的投射对象和内射对象。对于每个 j，设 $(\mathcal{C}_j,\mathcal{Y}_j)$ 是 $\mathcal{B}_j$中的一个挠余对。乘积类 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{Y}$ 构成 $\mathcal{B}$中的一个余挠对 $(\mathcal{C},\mathcal{Y})$，记

$$\mathcal{S} = \Delta(\mathcal{C}), \qquad \mathcal{T} = e^{-1}(\mathcal{Y}).$$

第一步是 由仅支撑于单个坐标的对象构成的$\mathcal{A}$ 对象滤过 .

引理 4.6。 每个 $M = ((M_a)_{a=1}^n, f) \in \mathcal{A}$ 都有一个滤过

$$0 = M_{\ge n+1} \subseteq M_{\ge n} \subseteq \cdots \subseteq M_{\ge 1} = M, \qquad M_{\ge j}/M_{\ge j+1} \cong i\iota_j(M_j), \tag{4.5}$$

其中 $M_{\ge j}$ 的底层对象为$(0, \ldots\ldots, 0, M_j, \ldots\ldots, M_n)$，结构映射由 f诱导。

证明。 令 $X \in \mathcal{B}$ 满足：对所有 $k < j$都有 $X_k = 0$。根据定向条件，对所有 $k \le j$都有 $(FX)_k = 0$。因此，f限制为 $(0, \ldots\ldots, 0, M_j, \ldots\ldots, M_n)$ 上的结构映射，从而 $M_{\ge j}$是 M的一个子对象。商 $M_{\ge j}/M_{\ge j+1}$ 的底层对象为 $\iota_j(M_j)$。其结构映射为零，因为 $F\iota_j(M_j)$在第 j个坐标处消失。因此 $M_{\ge j}/M_{\ge j+1} \cong i\iota_j(M_j)$。□

利用这个滤过，我们证明$\mathcal{S} = {}^\perp\mathcal{T}$，并确定何时 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 是遗传余挠对。

命题 4.7. (1) $\mathcal{S} = {}^\perp\mathcal{T}$。
(2) $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的挠余对，当且仅当 $L_1F(\mathcal{C}) = 0$.(3) </style}若 $(\mathcal{C}) = 0$ 且每个
$(\mathcal{C}_j, \mathcal{Y}_j)$ 都是遗传的，则$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 是遗传的。

证明。 (1) 令 $M \in \mathcal{T}$。每个 M_j 都属于$\mathcal{Y}_j$，因此滤过 (4.5) 的因子 $i\iota_j(M_j)$ 都属于 $i\mathcal{Y}$。结论由推论 4.4(2) 得出。
(2) B由 (1)，这对 $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 是 $({}^\perp e^{-1}(\mathcal{Y}),\ e^{-1}(\mathcal{Y}))$，结论即为推论 4.4(3) .
(3) 由于每个 $(\mathcal{C}_j,\mathcal{Y}_j)$ 都是遗传的，类$\mathcal{Y}$ 对单态射的余核封闭。因此，由于 e 是正合的，$\mathcal{T}$也对单态射的余核封闭。此外，由于 $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 根据 (2) 是一个挠余对，$\mathcal{T}$包含 A 的所有内射对象，而 $\mathcal{A}$ 由引理 2.1 知有足够多的内射对象。因此，对所有 $m \ge 1$，维数平移给出 $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},\mathcal{T}) = 0$，从而 $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 是遗传的。□

现在我们转而讨论 $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 的完备性，这将通过对 n 的归纳法加以证明。该归纳法使用了通过舍弃第一个坐标所得到的扩张，我们先介绍这些扩张。

固定 $1 \le j < n$ 并置 $\mathcal{B}_{>j} = \prod_{k>j}\mathcal{B}_k$。令 $\iota^{\mathcal{B}}_{>j}$ 和 $\pi_{>j}$ 分别表示坐标嵌入和投影。根据定向条件，对于任意对象 $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{B}$，若$X_k = 0$ 对于 $k \le j$成立，则对于 $k \le j$我们也有 $(FX)_k = 0$。因此， F 和 η 限制为 $\mathcal{B}_{>j}$，从而得到一个扩张

$$\mathcal{A}_{>j} = \mathcal{B}_{>j} \ltimes_{\eta_{>j}} F_{>j}, \qquad F_{>j} = \pi_{>j}F\iota^{\mathcal{B}}_{>j},$$

其中，$\eta_{>j}$ 由 η诱导。函子 $F_{>j}$ 具有右伴随 $G_{>j} = \pi_{>j}G\iota^{\mathcal{B}}_{>j}$。此扩张是有限有向的。

在前 j 个坐标中添加零对象定义了一个正合函子 $\iota_{>j}^{\mathcal{A}}:\ \mathcal{A}_{>j}\to\mathcal{A}$。由于添加零坐标与取核、像和余核可交换， q 和L_1q 的公式给出

$$q\iota_{>j}^{\mathcal{A}}\cong\iota_{>j}^{\mathcal{B}}q_{>j},\qquad L_1q\,\iota_{>j}^{\mathcal{A}}\cong\iota_{>j}^{\mathcal{B}}L_1q_{>j}.$$

设 $N\in\Delta_{>j}(\prod_{k>j}\mathcal{C}_k)$。根据定义， $L_1q_{>j}(N)=0$和 $q_{>j}(N)\in\prod_{k>j}\mathcal{C}_k$。上述同构给出

$$L_1q(\iota_{>j}^{\mathcal{A}}N)\cong\iota_{>j}^{\mathcal{B}}L_1q_{>j}(N)=0$$

and

$$q(\iota_{>j}^{\mathcal{A}}N)\cong\iota_{>j}^{\mathcal{B}}q_{>j}(N).$$

$\iota_{>j}^{\mathcal{B}}q_{>j}(N)$ 的前 j 个坐标为零，且对每个 $k>j$，其第 k 个坐标都属于 C_k 。由于对 $k\le j$ 有 $0\in\mathsf{C}_k$ ，因此 $\iota_{>j}^{\mathcal{B}}q_{>j}(N)\in\mathsf{C}$。于是 $\iota_{>j}^{\mathcal{A}}N\in\Delta(\mathsf{C})=\mathsf{S}$，这意味着 $\iota_{>j}^{\mathcal{A}}\Big(\Delta_{>j}(\prod_{k>j}\mathsf{C}_k)\Big)\subseteq\mathsf{S}$。令 $e_{>j}$ 表示 $\mathsf{A}_{>j}$ 的遗忘函子。同样，令$N\in e_{>j}^{-1}(\prod_{k>j}\mathsf{Y}_k)$。于是 $e(\iota_{>j}^{\mathcal{A}}N)\cong\iota_{>j}^{\mathcal{B}}e_{>j}(N)$。该对象的前 j 个坐标为零，且对每个 $k>j$，其第 k 个坐标都属于 Y_k 。由于每个 Y_k 都包含零对象，$e(\iota_{>j}^{\mathcal{A}}N)\in\mathsf{Y}$。因此 $\iota_{>j}^{\mathcal{A}}N\in e^{-1}(\mathsf{Y})=\mathsf{T}$，这意味着 $\iota_{>j}^{\mathcal{A}}\Big(e_{>j}^{-1}(\prod_{k>j}\mathsf{Y}_k)\Big)\subseteq\mathsf{T}$。

下面的引理是归纳法的关键步骤。它为对象$i\iota_j(X)$提供了特殊的 S-预覆，其中 $X\in\mathcal{B}_j$。

引理 4.8。设 $L_1F(\mathcal{C})=0$，因此根据命题 *4.7(2)*，$(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 是一个挠余对。令 $1\le j\le n$ 满足 $(\mathcal{C}_j,\mathcal{Y}_j)$ 是完备的，并且若 $j<n$，则满足

$$\Big(\Delta_{>j}(\prod_{k>j}\mathcal{C}_k),\ e_{>j}^{-1}(\prod_{k>j}\mathcal{Y}_k)\Big)$$

是一个完成的 在 $\mathcal{A}_{>j}$ 中。于是，对于每个 $X\in\mathcal{B}_j$， $i\iota_jX$ 都有一个特殊 $\mathcal{S}$-预覆盖 .

证明。对于 $X\in\mathcal{B}_j$，$(\mathcal{C}_j,\mathcal{Y}_j)$ 的完备性给出了一个特殊的 $\mathcal{C}_j$-预覆盖序列

$$0\longrightarrow Y\longrightarrow C\xrightarrow{a}X\longrightarrow 0,\qquad C\in\mathcal{C}_j,\quad Y\in\mathcal{Y}_j.$$

令 $\widetilde{a}:l\iota_jC\to i\iota_jX$ 为在 $l\dashv e$ 下对应于 ι_ja 的态射。在分解 $el\iota_jC\cong\iota_jC\oplus F\iota_jC$ 下，我们有 $e(\widetilde{a})=(\iota_ja,\ 0)$：$\iota_jC\oplus F\iota_jC\longrightarrow\iota_jX$。事实上，设 $e(\widetilde{a})=(u,\ v)$。由伴随关系， $e(\widetilde{a})\nu_{\iota_jC}=\iota_ja$。由于在上述分解下 $\nu_{\iota_jC}=\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\0\end{pmatrix}$，我们得到 $u=\iota_ja$。此外，

$$l\iota_jC=\left(\iota_jC\oplus F\iota_jC,\begin{pmatrix}0&0\\\mathrm{id}_{F\iota_jC}&\eta_{\iota_jC}\end{pmatrix}\right),\qquad i\iota_jX=(\iota_jX,0).$$

由于 $\widetilde{a}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射，与这些结构映射的相容性给出

$$(u,v)\begin{pmatrix}0&0\\\mathrm{id}&\eta_{\iota_jC}\end{pmatrix}=(v,v\eta_{\iota_jC})=0.$$

因此 $v=0$，从而 $e(\widetilde{a})=(\iota_ja,\ 0)$。

由于 a 是满态射， $e(\widetilde{a})=(\iota_ja,\ 0)$ 也是满态射。由于 e 反映满态射， $\widetilde{a}$ 是满态射。令 $K=$ 核 $\widetilde{a}$。由于 e 是正合的， $eK\cong$核$(\iota_ja,\ 0)\cong\iota_jY\oplus F\iota_jC$。根据定向条件，$(F\iota_jC)_k=0$ 对于 $k\le j$。因此

$$(eK)_j\cong Y,\qquad (eK)_k=0\quad(k<j).$$

若 $j=n$，定向条件给出 $F\iota_nC=0$。因此 $l\iota_nC\cong i\iota_nC$ 和 $K\cong i\iota_nY\in\mathcal{T}$.

由于 $\iota_nC\in\mathcal{C}$ 和 $l\mathcal{C}\subseteq\Delta(\mathcal{C})=\mathcal{S}$，我们有 $l\iota_nC\in\mathcal{S}$。于是，正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow l\iota_nC\xrightarrow{\widetilde{a}}i\iota_nX\longrightarrow 0$$

是一个特殊的 $\mathcal{S}$-预覆盖序列。

因此我们可以假设 $j < n$。由于 $(eK)_k = 0$ 对 $k < j$ 以及 $(eK)_j \cong Y$，坐标滤过给出一个正合列

$$0 \longrightarrow K_{>j} \longrightarrow K \longrightarrow i\iota_j Y \longrightarrow 0,$$

其中 $K_{>j} = K_{\geq j+1}$ 通过嵌入 $\iota^{\mathcal{A}}_{>j}$ 被视为$\mathcal{A}_{>j}$ 中的一个对象。根据假设，在$\mathcal{A}_{>j}$ 中选取一个特殊预包络列

$$0 \to K_{>j} \xrightarrow{u} T_{>j} \to S_{>j} \to 0, \qquad T_{>j} \in \mathcal{T}, \quad S_{>j} \in \mathcal{S}.$$

依次作出以下两个推出：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{>j} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & i\iota_j Y \longrightarrow 0 \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & T_{>j} & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & i\iota_j Y \longrightarrow 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & l\iota_j C & \longrightarrow & i\iota_j X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & i\iota_j X \longrightarrow 0 \end{array}$$

第一个图表的底行是正合的。由于 $T_{>j}$，$i\iota_j Y \in \mathcal{T}$且$\mathcal{T}$对扩张封闭，因此有 $K' \in \mathcal{T}$。此外，诱导映射 $K \to K'$ 是一个余核为

$$K'/K \cong \operatorname{Coker} u \cong S_{>j}.$$

因此，第二个推出给出一个正合列

$$0 \longrightarrow l\iota_j C \longrightarrow P \longrightarrow S_{>j} \longrightarrow 0.$$

由于 $l\iota_j C$，$S_{>j} \in \mathcal{S}$ 且$\mathcal{S}$ 对扩张封闭，$P \in \mathcal{S}$。因此，第二个图表的底行，

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P \longrightarrow i\iota_j X \longrightarrow 0,$$

是所需的特殊$\mathcal{S}$-预覆盖序列。 □

对于有限有向扩张，我们为所诱导的余挠对完备且遗传的充要条件建立了刻画。

定理 4.9。设 $A = B \ltimes_\eta F$ 为有限有向的，其中 $F \dashv G$ 和 $\eta\colon F^2 \to F$ 为任意结合自然变换，并假设每个 B_j 都有足够多的投射对象和内射对象。对于每个 j，令 (C_j, Y_j) 和 (X_j, D_j) 为 B_j 中的完备遗传余挠对，并将乘积类记为 C、Y、X、D。

(1) $(\Delta(C)\ e^{-1}(Y))$ 是 A 中的完备遗传余挠对，当且仅当 $L_1F(C) = 0$。(2) $(e^{-1}(X)\ \nabla(D))$ 是 A 中的完备遗传余挠对，当且仅当 $R^1G(D) = 0$。

这两个消失条件可以逐分量检验：它们分别等价于$L_1F_{ij}(C_j) = 0$ 以及 $R^1G_{ji}(D_i) = 0$ 对所有 $i > j$ 成立。

证明。只需证明 (1)。如果 $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 是一个挠余对，则根据推论 4.4(3)，$L_1F(C) = 0$。反之，假设 $L_1F(C) = 0$。则根据命题 4.7，$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ 是一个遗传余挠对。

我们通过对 n 使用归纳法来证明完备性。如果 $n = 1$，则定向条件给出 $F = 0$。因此$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}_1,$，在此条件下 $(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = (\mathcal{C}_1, \mathcal{Y}_1)$。令 $n > 1$ 和 $1 \leq j < n$。逐坐标投射分解表明，$L_1F_{>j}\left(\prod_{k>j}\mathcal{C}_k\right) = 0$。因此，归纳假设适用于 $\mathcal{A}_{>j}$。于是，引理 4.8 对每个 $1 \leq j \leq n$ 都适用。

因此，每个满足 $X \in \mathcal{B}_j$ 的对象 $i\iota_j X$ 都有一个特殊的 $\mathcal{S}$-预覆盖。由于（$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$）是遗传余挠对，$\mathcal{A}$ 中具有特殊$\mathcal{S}$-预覆盖的对象类根据[18, 命题 2.6(1)]在扩张下封闭。对于任意 $M \in \mathcal{A}$，滤过（4.5）给出正合列

$$0 \longrightarrow M_{\geq j+1} \longrightarrow M_{\geq j} \longrightarrow i\iota_j(M_j) \longrightarrow 0.$$

从 $M_{\geq n+1} = 0$ 开始，并对 j作反向归纳，我们得出 $M = M_{\geq 1}$存在一个特殊的$\mathcal{S}$-预覆盖。由于根据引理 2.1，$\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象，且每个对象

都存在一个特殊的$\mathcal{S}$-预覆盖，因此，[9, 证明中的拉回论证命题7.1.7] 为$\mathcal{A}$中的每个对象给出了一个特殊的$\mathcal{T}$-预包络。因此，$(\mathcal{S},\mathcal{T})$是完备的。

命题（2）可对偶地推出。逐分量等价由逐坐标分解得出。□

注 4.10。 对于一般的 η扩张，关于$({}^{\perp}e^{-1}(\mathcal{Y})\ e^{-1}(\mathcal{Y}))$以及$(\Delta(\mathcal{C})\ \Delta(\mathcal{C})^{\perp})$的已知完备性结果需要满足诸如 $F(\mathcal{C})\ \subseteq\mathcal{Y}$之类的额外条件；参见 [18, 定理 3.13], [23,定理 4.13] 以及 [5, 定理 3.21 和 3.23]。定理 4.9 无需此类条件。对于$n=2$ 该扩张是一个逗号范畴，定理 4.9 的（1）和（2）部分中的充分性分别由 [19, 引理 3.3 和命题 3.4] 以及 [30, 定理 4.2 和命题 4.3],证明。对于广义线性 Reedy 范畴上的模，在投射性假设下，[7, 定理 9.3]证明了这种提升。

下面的例子展示了带有非零乘法的定理 4.9，以及包含式 (4.2) 的严格性。这里，Add 表示对任意直和和直和项取闭包。

例 4.11. 设 $A=k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 是域 k 上的，并设 $Q:1\to2\to3$。遗忘函子 $e:\mathrm{Rep}(Q,A\text{- Mod})\to(A\text{- Mod})^3$ 使 $\mathrm{Rep}(Q,A\text{- Mod})$ 成为 $(A\text{- Mod})^3$的有限有向裂缝扩张，其

$$F(X_1,X_2,X_3)=(0,X_1,X_2\oplus X_1),\quad F^2X=(0,0,X_1),\quad F^3=0,$$

且第三个坐标上的非零乘法为 $\eta_X:\ x\mapsto(0,x)$。对于 $X=(X_1\xrightarrow{a}X_2\xrightarrow{b}X_3)$，结构复形的非平凡部分为

$$0\to X_1\xrightarrow{a}X_2,\qquad X_1\xrightarrow{\binom{a}{-1}}X_2\oplus X_1\xrightarrow{(b,ba)}X_3.$$

映射 $(y,x)\ \mapsto\ y+ax$ 将 $X_2\oplus X_1$ 对 $\mathrm{Im}\ \binom{a}{-1}$ 取商后所得的对象同 X_2等同。因此，对于$\mathcal{B}=(A\text{- Mod})^3,$，类 $\Delta(\mathcal{B})$ 由单态射链构成，而 $\nabla(\mathcal{B})$ 由满态射链构成。由于 A 是拟 Frobenius 的，定理 4.9 得到了完备遗传余挠三元组

$$\big(\mathrm{Mon}(Q,A),\mathrm{Rep}(Q,\mathrm{Proj}\,A),\mathrm{Epi}(Q,A)\big)$$

的 [12, 推论 6.6]。

设 $S=A/(\varepsilon)$ 为简单的 A-模，设 $\sigma:\ S\to A$ 由 $\sigma(\bar{a})=a\varepsilon$ 给出，并设 $\pi:\ A\to S$为商映射。则

$$M=(S\xrightarrow{\sigma}A\xrightarrow{\mathrm{id}}A),\qquad N=(A\xrightarrow{\mathrm{id}}A\xrightarrow{\pi}S)$$

分别属于 $\Delta(\mathcal{B})$ 和 $\nabla(\mathcal{B})$。正合列 $0\to S\xrightarrow{\sigma}A\xrightarrow{\pi}S\to0$ 不分裂： $\varepsilon a=0$ 蕴含 $a\in\varepsilon A=$ 核 π。另一方面，诱导对象的所有箭头都是分裂单态射，而余诱导对象的所有箭头都是分裂满态射；这些性质在任意直和与直和项下保持。因此，对于 $\mathcal{B}=(A\text{-模})^3$,

$$\mathrm{Add}(l\mathcal{B})\subsetneq\Delta(\mathcal{B}),\qquad\mathrm{Add}(r\mathcal{B})\subsetneq\nabla(\mathcal{B}),$$

分别由 M 和 N 可见。

有限有向条件给出了证明定理 4.9 所用的滤过。以下例子表明，仅有幂零性时，这种提升可能失败，即使 F是正合的且 $F^2=0$。

例 4.12。 令 $R=k(2\xrightarrow{a}1)$，并令 $\Lambda=k(2\overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}}1)$ 为克罗内克代数。投影$\Lambda\to R$ 消去 b，其核为 $J=kb$，其中 ${}_RJ\cong Re_1$、$J_R\cong e_2R$ 和 $J\otimes_RJ=0$。因此 $\Lambda=R\ltimes J$和 $F=J\otimes_R-$ 是正合的，其中 $F^2=0$ 和 $\eta=0$。

考虑完备遗传余挠对 $(R\text{-}$ 模，内射 $R)$ 以及由$N_1 = N_2 = k$ 和 $a_N = b_N = \mathrm{id}$. 给出的 Λ-模 N。其限制 $eN = (k \xrightarrow{\mathrm{id}} k)$ 是内射的，且其结构映射$F(eN) \to eN$是单的。因此

$$N \in \Delta(R\text{-}\operatorname{Mod}) \cap e^{-1}(\operatorname{Inj} R).$$

然而， N 有一个非分裂的自身扩张：令 $E_1 = E_2 = k^2$ 和

$$a_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第一坐标给出一个子模 N，其商为 N。一个分量为 $(u_1,\ 1)^t$和 $(u_2,\ 1)^t$ 的截面将满足 $u_1 = u_2$，由 a_E得出，并且 $u_1 = u_2 + 1$ 由 b_E得出。因此 $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(N,\ N) \neq 0$，所以 $(\Delta(R\text{-}\operatorname{Mod})\ e^{-1}(\operatorname{Inj}\ R))$ 不正交，并且

$${}^{\perp}e^{-1}(\operatorname{Inj} R) \subsetneq \Delta(R\text{-}\operatorname{Mod}).$$

此外， $N \notin i(\operatorname{Inj} R)$，因为 $b_N \neq 0$，且其唯一的非零真子模限制为顶点 1 处的非内射简单 R-模。因此， N 没有一个因子属于 $i(\operatorname{Inj} R)$ 的有限滤过。

现在我们可以证明定理 C。

定理 4.13. 在定理 *4.9* 的设定下，假设

$$L_1F(\mathcal{C}) = 0, \qquad R^1G(\mathcal{D}) = 0, \qquad \mathcal{C}_j \cap \mathcal{Y}_j \subseteq \mathcal{X}_j, \quad \mathcal{X}_j \cap \mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{Y}_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

则下列命题等价：

(1) $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ 在 $\boldsymbol{B}$ 中具有容许平衡性；(2) $(\operatorname{add}(l\boldsymbol{C}), \operatorname{add}(r\boldsymbol{D}))$ 在 $\boldsymbol{A}$ 中具有容许平衡性；(3) $(\Delta(\boldsymbol{C})\ \nabla(\boldsymbol{D}))$ 在 $\boldsymbol{A}$ 中具有容许平衡性；(4) $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$；(5) $\Delta(\boldsymbol{C})^{\perp} = {}^{\perp}\nabla(\boldsymbol{D})$。

证明。等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 即为定理 3.2。由于乘积类满足 (4.3)，其余等价关系由定理 4.9 和定理 4.2 得出。□

5. 应用

在本节中，环均为带单位的结合环，环同态保持单位，所有模均为幺模左模。

5.1. 环的裂扩张。 设 $\alpha\colon R \to S$ 和 $\beta\colon S \to R$ 为环同态，使得$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_R$。我们称三元组 (S, β, α) 为 R 的裂分扩张 。沿 $\alpha\,\mathsf{g}$ 进行标量限制给出一个忠实正合函子

$$e : S\text{-}\operatorname{Mod} \longrightarrow R\text{-}\operatorname{Mod},$$

沿 β 进行标量限制给出一个正合函子 $i\colon$ R-模 $\to S$-模，并满足 $ei = \mathrm{id}_{R\text{-}\operatorname{Mod}}$。归纳函子和余归纳函子

$$l = S \otimes_R -, \qquad r = \operatorname{Hom}_R({}_RS, -)$$

满足 $l \dashv e \dashv r$。因此，$(R$-模 S-模 $i,\ e,\ l)$ 是模范畴的裂分扩张，以下结果直接由定理 3.2 得出。

推论 5.1。 设 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 是 R-模 的子范畴。那么，$(\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D})$ 是 R-模 中的可容许平衡对，当且仅当

$$(\operatorname{add}(S \otimes_R \mathcal{C}), \operatorname{add}(\operatorname{Hom}_R({}_RS, \mathcal{D})))$$

是 S-模中的一个可容许平衡对。

令 $J = \operatorname{Ker}\beta$，并将其视为一个 R-双模，其中的作用由 α给出。 S 中的乘法诱导出一个结合的R-双模映射 $\theta\colon J\otimes_R J \longrightarrow J$。令 $F = J\otimes_R -$ 和 $\eta = \theta\otimes_R -$。那么存在一个等价关系S- 模 $\simeq$(R- 模) $\ltimes_\eta F$，参见 [1, 第 3] 节。

作为一个应用，考虑一个 Morita 环境环

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$$

其配对 $N\otimes_B M \to A$ 和 $M\otimes_A N \to B$ 均为零。对角投影 $\Lambda \to A\times B$ 是一个由对角嵌入分裂的环同态。

令 $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{D}_1$ 为 A-模的子范畴，且令 $\mathcal{C}_2$,$\mathcal{D}_2$ 为 B-模的子范畴。在规范的 1 等价下

$$(A\times B)\text{- Mod} \simeq A\text{- Mod}\times B\text{- Mod},$$

逼近和平衡条件都是逐分量确定的。因此，推论 5.1 表明，$(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$ 和 $(\mathcal{C}_2$,$\mathcal{D}_2)$ 分别是其模范畴中的可容许平衡对，当且仅当

$$\big(\operatorname{add}(l(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)), \operatorname{add}(r(\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2))\big)$$

是 Λ- Mod 中的可容许平衡对。这里， l 和 r 是沿对角嵌入 $A\times B\to\Lambda$的归纳函子和余归纳函子。

当 $N = 0$时， Λ 是形式三角矩阵环。

5.2. 逗号范畴与三角矩阵环。设$\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 是阿贝尔范畴，并设 $H:\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2$ 是一个具有右伴随 K 的加性右正合函子。逗号范畴 $(H\downarrow\mathcal{B}_2)$ 是 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$, 的一个裂分扩张，其

$$e(X,Y,\varphi) = (X,Y), \qquad i(X,Y) = (X,Y,0).$$

相应的自函子为

$$F(X,Y) = (0,HX), \qquad G(X,Y) = (KY,0),$$

因此 $F^2 = G^2 = 0$。归纳函子和余归纳函子为

$$\mathbf{p}(X,Y) = (X, HX\oplus Y, \kappa), \qquad \mathbf{h}(X,Y) = (X\oplus KY, Y, \mathrm{ev}), \tag{5.1}$$

其中 $\kappa = \left(\mathrm{id}_0^{HX}\right)$，且 $\mathsf{ev}\colon H(X\oplus KY)\to Y$ 是在 $H\dashv K$ 下与投影 $(0,\ \mathsf{id}_{KY})\colon X\oplus KY\to KY$ 对应的态射。

对于逗号对象 $(X,\ Y,\ \varphi)$，将 $\widetilde{\varphi}\colon X\to KY$ 记作 $\varphi\colon HX\to Y$ 的伴随。对于子范畴 $\mathcal{C}_j,\ \mathcal{D}_j\subseteq\mathcal{B}_j$, 定义

$$\Phi(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \{(X,Y,\varphi)\in(H\downarrow\mathcal{B}_2)\mid \varphi \text{ is a monomorphism},\ X\in\mathcal{C}_1,\ \operatorname{Coker}\varphi\in\mathcal{C}_2\},$$
$$\Psi(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2) = \{(X,Y,\varphi)\in(H\downarrow\mathcal{B}_2)\mid \widetilde{\varphi} \text{ is an epimorphism},\ \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}\in\mathcal{D}_1,\ Y\in\mathcal{D}_2\}.$$

由 (2.5) 和 (2.8)，我们有

$$\Phi(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \Delta(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2), \qquad \Psi(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2) = \nabla(\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2).$$

根据我们的既定约定，子范畴对同构和直和项封闭，类 $\mathbf{p}(\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2)$ 和 $\mathbf{h}(\mathcal{D}_1$,$\mathcal{D}_2)$ 对直和项封闭。事实上，设 $(X',\ Y'$,$\varphi')$ 是 $\mathbf{p}(X,\ Y)$ 的一个直和项，其中 $X\in\mathcal{C}_1$，且 $Y\in\mathcal{C}_2$。那么 φ' 是一个分裂单态射，因此

$$(X',Y',\varphi')\cong\mathbf{p}(X',\operatorname{Coker}\varphi').$$

此外， X' 和余核 φ' 分别是 X 和余核 $\kappa\cong Y$ 的直和项。因此（$X',\ Y'$,φ'）$\in\mathbf{p}$（$\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$）。对$\mathbf{h}$ 的论证是对偶的。

由于子范畴 $\mathcal{C}_j$ 和 $\mathcal{D}_j$ 对有限直和封闭，$\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{h}$的可加性给出

$$\operatorname{add}\big(\mathbf{p}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)\big) = \mathbf{p}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2), \qquad \operatorname{add}\big(\mathbf{h}(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)\big) = \mathbf{h}(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2).$$

由于$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ 中的逼近和平衡条件是逐分量确定的，定理 3.2 得出以下结果。

推论 5.2。 对于子范畴 $\mathcal{C}_j$、$\mathcal{D}_j \subseteq B_j$、 $j = 1$、2，以下各项等价：
(1) $(\mathcal{C}_j$、$\mathcal{D}_j)$ 是 B_j *for* $j = 1$、2中的可容许平衡对；(2) $(\mathbf{p}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$，$\mathbf{h}($
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2))$ 是$(H \downarrow B_2)$中的可容许平衡对。

现在将定理 4.9 和定理 4.13 应用于逗号范畴。

推论 5.3。 设 B_1 和 B_2 具有足够多的投射对象和内射对象。对于 $j = 1$、2，令$(\mathcal{C}_j$、$\mathcal{Y}_j)$ 和$(\mathcal{X}_j$、$\mathcal{D}_j)$ 为 B_j中的完备遗传余挠对。若

$$L_1H(\mathcal{C}_1) = 0, \qquad R^1K(\mathcal{D}_2) = 0, \tag{5.2}$$

then

$$(\Phi(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), e^{-1}(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)), \qquad (e^{-1}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2), \Psi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2))$$

它们是$(H \downarrow B_2)$中的完备遗传余挠对。此外，若 $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{Y}_j \subseteq \mathcal{X}_j$ 且 $\mathcal{X}_j \cap \mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{Y}_j$对于 $j = 1$、2成立，则以下各项等价：
(1) $(\mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j)$ 在 B_j 中对 $j = 1, 2$ 具有容许平衡性；
(2) $(p(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), h(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2))$ 具有容许平衡性；*(3)* $(\Phi(\mathcal{C}_1,$
$\mathcal{C}_2)$ $\Psi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2))$ 具有容许平衡性；*(4)* $\mathcal{Y}_j = \mathcal{X}_j$ 对
$j = 1, 2$；*(5)* $\Phi(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)^{\perp} = {}^{\perp}\Psi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$。

证明。 逗号范畴是 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, 的有限有向扩张，其中有 $F_{21} = H$ 和 $G_{12} = K$。由于

$$L_1F(X, Y) \cong (0, L_1H(X)), \qquad R^1G(X, Y) \cong (R^1K(Y), 0),$$

条件 (5.2) 给出 $L_1F(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = 0$ 和 $R^1G(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2) = 0$。因此，定理 4.9 连同恒等式

$$\Delta(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = \Phi(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), \qquad \nabla(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2) = \Psi(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2),$$

得到所断言的完备遗传余挠对。

在附加包含条件下，定理 4.13 给出了 (1)–(5) 的等价性。 □

推论 5.3 的余挠对断言就是注 4.10 中回顾的 [19] 和 [30] 。

特别地，取 $N = 0$ 并将 $U = M$ 写入小节5.1的 Morita 环境环中，可得到三角矩阵环 $T = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ U & B \end{smallmatrix}\right)$。其模范畴 T- Mod 是关于 $H = U \otimes_A -$ 的逗号范畴，其右伴随为 $K = \mathrm{Hom}_B(U, -)$，而 (5.2) 变为

$$\mathrm{Tor}_1^A(U, \mathcal{C}_1) = 0, \qquad \mathrm{Ext}_B^1(U, \mathcal{D}_2) = 0. \tag{5.3}$$

由于 $\mathcal{C}_1$ 是分解闭的，且 $\mathcal{D}_2$ 是余解闭的，维数平移给出 $\mathrm{Tor}_m^A(U, \mathcal{C}_1) = 0$ 以及 $\mathrm{Ext}_B^m(U, \mathcal{D}_2) = 0$ 对所有 $m \geq 1$ 都成立；这些正是 [25] 中所使用的消失条件。在此情形下，推论 5.2 对本文所考虑的加性且对直和项封闭的类恢复了 [25, 定理 2.2] ，而推论 5.3 恢复了 [25, 定理 2.5]。接下来我们考虑 $\mathcal{B}$ 上的箭范畴 $\mathrm{Arr}(\mathcal{B})$，其对象是 $\mathcal{B}$ 中的态射 $X \to Y$。这是与 $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ 相关联的逗号范畴。

推论 5.4. 设 B 有足够多的投射对象和内射对象，并假设$(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\perp})$ 和$({}^{\perp}\mathcal{D}, \mathcal{D})$ 是完备遗传余挠对。以下条件等价：
(1) $(\Phi(\mathcal{C},\mathcal{C})$ $\Psi(\mathcal{D}, \mathcal{D}))$ 在$\mathrm{Arr}(B)$中是容许平衡的；(2) $\mathcal{C}$
$^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{D}$。
在此情况下$(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{D})$ 是完备遗传余挠三元组，且 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 具有容许平衡性。

证明。假设 (2) 成立。由于恒等函子是正合的，推论 5.3 中的余挠对断言给出一个完备遗传余挠三元组

$$(\Phi(\mathcal{C},\mathcal{C}), e^{-1}(\mathcal{C}^{\perp}\times\mathcal{C}^{\perp}), \Psi(\mathcal{D},\mathcal{D}))$$

在 Arr($\mathcal{B}$) 中。因此，(1) 由引理 2.5 得出。

Co反过来，假设 (1) 成立。令 $M\in\mathcal{B}$。考虑短正合序列 e

$$0\longrightarrow(0\to M)\longrightarrow(M\xrightarrow{\mathrm{id}_M}M)\longrightarrow(M\to 0)\longrightarrow 0. \tag{5.4}$$

对于单态射 $u\colon U\to V$，将 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Arr}(\mathcal{B})}((U\xrightarrow{u}V)\ -)$ 应用于 (5.4)，得到映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(V,M)\xrightarrow{u^*}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U,M).$$

对偶地，对于满态射 $v\colon V\to W$，将 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Arr}(\mathcal{B})}(-,(V\xrightarrow{v}W))$ 应用后得到映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M,V)\xrightarrow{v_*}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M,W).$$

序列 (5.4) 是 $\mathrm{Hom}((U\xrightarrow{u}V)\ -)$-正合的，当且仅当 u^* 是满射；它是 $\mathrm{Hom}(-,(V\xrightarrow{v}W))$-正合的，当且仅当 v_* 是满射。

设 $M\in{}^{\perp}\mathcal{D}$。对于每个 $(V\xrightarrow{v}W)\in\Psi(\mathcal{D},\mathcal{D})$，我们有 $\mathrm{Ker}\ v\in\mathcal{D}$，因此 v_* 是满射。所以 (5.4) 是 $\mathrm{Hom}(-,\Psi(\mathcal{D},\mathcal{D}))$-正合的。根据平衡性，它也是 $\mathrm{Hom}(\Phi(\mathcal{C},\mathcal{C})\ -)$-正合的。

对于 $C\in\mathcal{C}$，取一个短正合列

$$0\longrightarrow L\xrightarrow{u}P\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

其中 P 是投射的。由于 $\mathcal{C}$ 是分解闭的，$L\in\mathcal{C}$，因此 $(L\xrightarrow{u}P)\in\Phi(\mathcal{C},\mathcal{C})$。于是，$u^*$ 是满射，并且

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(C,M)\cong\mathrm{Coker}\,u^*=0.$$

因此 ${}^{\perp}\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}^{\perp}$。

现在设 $M\in\mathcal{C}^{\perp}$。对于每个 $(U\xrightarrow{u}V)\in\Phi(\mathcal{C},\mathcal{C})$，我们有 $\mathrm{Coker}\,u\in\mathcal{C}$，因此 u^* 是满射。于是 (5.4) 是 $\mathrm{Hom}(\Phi(\mathcal{C},\mathcal{C})\ -)$-正合的，并且根据平衡性，是 $\mathrm{Hom}(-,\Psi(\mathcal{D},\mathcal{D}))$-正合的。

对于 $D\in\mathcal{D}$，取一个短正合列

$$0\longrightarrow D\longrightarrow I\xrightarrow{v}L\longrightarrow 0$$

其中 I 是内射的。由于 $\mathcal{D}$ 是余解闭的，因此 $L\in\mathcal{D}$，于是 $(I\xrightarrow{v}L)\in\Psi(\mathcal{D},\mathcal{D})$。因此，$v_*$ 是满射，并且

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(M,D)\cong\mathrm{Coker}\,v_*=0.$$

因此 $\mathcal{C}^{\perp}\subseteq{}^{\perp}\mathcal{D}$，从而证明了 (2)。

最后，等式 $\mathcal{C}^{\perp}={}^{\perp}\mathcal{D}$ 及这些假设给出了完备遗传余挠三元组 $(\mathcal{C},\mathcal{C}^{\perp},\mathcal{D})$。因此，根据引理 2.5，$(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是一个可容许平衡对。□

对于 $\mathcal{B}=R$-模，推论 5.4 得出了 [25, 推论 2.6] 中的 (2) 与 (3) 等价。它将这一等价关系推广到了具有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴。

5.3. **Gorenstein 特化**。记 $\mathrm{GProj}\,R$ 和 $\mathrm{GInj}\ R$ 分别为 Gorenstein 投射左 R-模和 Gorenstein 内射左 R-模组成的类。沿用第 5.2 小节中的三角矩阵环 T，并假设 U_A 具有有限平坦维数，且 ${}_BU$ 具有有限投射维数。于是

$$\mathrm{GProj}\,T=\Phi(\mathrm{GProj}\,A,\mathrm{GProj}\,B),\qquad \mathrm{GInj}\,T=\Psi(\mathrm{GInj}\,A,\mathrm{GInj}\,B).$$

第一个等式是 [21, 定理 1.1], 中针对上三角矩阵环 $\left(\begin{smallmatrix}B & U\\ 0 & A\end{smallmatrix}\right)\cong T$ 给出的，第二个等式则见于 [30, 命题 3.3、5.2 和 5.5]。

回顾一下，若一个环 R 是左虚拟 Gorenstein 的，则

$$(\mathrm{GProj}\,R)^{\perp}={}^{\perp}(\mathrm{GInj}\,R)$$

[12,节 4]。将 [11, 推论 3.11], 应用于对环，可知这等价于 (GProj R，GInj R) 的平衡，并且由此得到一个完备遗传余挠三元组。我们得到关于 T 的如下刻画。

推论 5.5. 设 A 和 B 是环，并假设 U_A 具有有限平坦维数，且 ${}_BU$ 具有有限投射维数。以下条件等价:

(1) (GProj A, GInj A) 和 (GProj B,GInj B) 是容许平衡的；(2) (GProj T, GInj T) 是容许平衡的；(3) ($\mathbf{p}$(GProj A, GProj B), $\mathbf{h}$(GInj A, GInj B)) 是容许平衡的；(4) A 和 B 都是左虚拟 *Gorenstein*；(5) T 是左虚拟 *Gorenstein*。

特别地，定理 *D* 成立。

证明。由于 GProj $R \supseteq$ Proj R 且 GInj $R \supseteq$ Inj R，每个 GProj R-预覆盖都是满的，且每个 GInj R-预包络都是单的。因此，按照定义 3.1] 的意义，平衡性就是引理 2.4 意义下的容许平衡性。推论 5.2 给出 (1) $\Leftrightarrow$ (3)。将 A^{op}、B^{op} 和 T^{op} 对环上的 [11, 推论 3.11] 应用于，可得 (1) $\Leftrightarrow$ (4) 和 (2) $\Leftrightarrow$ (5)。剩下只需比较 (1) 和 (2)。

取非负整数 d, p，使得 fd(U_A) $\leq d$ 且 pd($_BU$) $\leq p$。对于 $C \in$ GProj A 和 $D \in$ GInj B，完备投射分解和完备内射余分解给出正合列 $0 \to C \to P \to C^1 \to 0$ 和 $0 \to D^{-1} \to I \to D \to 0$，其中所有相继的循环仍分别是 Gorenstein 投射和 Gorenstein 内射。维数平移给出

$$\mathrm{Tor}_1^A(U, C) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(U, C^d) = 0, \qquad \mathrm{Ext}_B^1(U, D) \cong \mathrm{Ext}_B^{p+1}(U, D^{-p}) = 0,$$

从而 (5.3) 成立。若 (1) 成立，[11, 推论 3.11]给出完备遗传余挠三元组

$$(\mathrm{GProj}\, R, \mathcal{W}_R, \mathrm{GInj}\, R), \qquad \mathcal{W}_R = (\mathrm{GProj}\, R)^{\perp} = {}^{\perp}(\mathrm{GInj}\, R) \quad (R = A, B).$$

根据推论 5.3 以及上文对 GProj T 和 GInj T 的描述，

$$(\mathrm{GProj}\, T, e^{-1}(\mathcal{W}_A \times \mathcal{W}_B), \mathrm{GInj}\, T)$$

是一个完备遗传余挠三元组，而引理 2.5 证明了 (2)。反过来，(2) $\Rightarrow$ (1) 是引理 4.1。□

对于 Artin 代数，(4) 与 (5) 等价由 [10, 命题 3.3]给出；该命题对 U 提出的四个条件可由我们的假设通过维数平移推出。(2) $\Rightarrow$ (1) 蕴含关系由 [25, 推论 2.7], 给出，而推论 5.5 在 U_A 为平坦、${}_BU$ 为投射，且 A 和 B 为具有有限左自内射维数的左 Noether 环时，恢复了 [25, 定理 2.8]；这里不需要这些假设。

推论 5.6. 设 R 是一个环，且 $n \geq 1$，令 $T_n(R)$ 为 R上的下三角 $n \times n$矩阵环。那么 $T_n(R)$ 是左虚拟 *Gorenstein* 当且仅当 R 是左虚拟 *Gorenstein*。

证明. $n = 1$ 的情形显然。对于 $n \geq 2$,

$$T_n(R) = \begin{pmatrix} T_{n-1}(R) & 0 \\ U & R \end{pmatrix},$$

其中 $U = R^{n-1}$ 是 $T_n(R)$的最后一行去掉对角元素后所得的行。作为左 R-模，U 是自由的；作为右 $T_{n-1}(R)$-模，它同构于 $T_{n-1}(R)$的最后一行，而后者是 $T_{n-1}(R)$的一个直和项。因此，${}_RU$ 和 $U_{T_{n-1}(R)}$ 都是投射的。由推论 5.5 可知，$T_n(R)$是左虚拟 Gorenstein 当且仅当 $T_{n-1}(R)$和 R 都是左虚拟 Gorenstein。通过对 n使用归纳法即可得出结论。□

对于 $n = 2$，这就得到了 [25, 推论 2.9], 中 (4) 与 (5) 的等价性，且无需假设 R 是左诺特的或具有有限左自内射维数。对于 $n = 2$，若 R 是一个 Artin 代数，则这就是 [10, 例 3.4]。

人工智能使用声明

在稿件准备的最后阶段，使用了 Claude Fable 5.2（Anthropic）来核对符号、改进措辞，并协助查找证明中可能存在的漏洞和缺失的参考文献。所有结果和证明均由作者完成；作者独立核查了每一项论证，并对稿件承担全部责任。

致谢

第一作者和第三作者分别获得中国国家留学基金管理委员会资助（项目编号：202606620154 和 202606620170）。第一作者感谢穆尔西亚大学在本文撰写期间给予的热情接待。

参考文献

[1] A. Beligiannis, 《阿贝尔范畴的裂分扩张及其在环论中的应用》, Comm. Algebra 28 (2000), 4503–4546.[2] A. Beligiannis, 《环与阿贝尔范畴裂分扩张的相对同调》, J. Pure Appl. Algebra 150 (2000), 237–299. [3] A. Beligiannis and I. Reiten, 《挠理论的同调与同伦方面》, Mem. Amer. Math. Soc. 188 (2007), no. 883. [4] X.-W. Chen, 《由平衡对诱导的同伦等价》, 《代数学杂志》324 (2010), 2718–2731. [5] P. Chen, Y. Qin and J. Yang, 《η 扩张中的余挠对及其在 θ扩张环与张量环中的应用》, arXiv:2611.19449v1 (2026). [6] G. Dalezios and J. Šťovíček, 《线性 Reedy 范畴、拟遗传代数与模型结构》, Adv. Math. 481 (2025), Paper No. 110550. [7] Z. Di, L. Li and L. Liang, 《广义线性 Reedy 范畴的表示与阿贝尔模型结构》, arXiv:2601.01187v2 (2026). [8] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, B. Torrecillas and J. Z. Xu, 《相对于 Ext 的挠理论》, Technical Report 98-11, Department of Mathematics, 肯塔基大学, 1998. [9] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, 《相对同调代数》, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 30, Walter de Gruyter, Berlin, 2000. [10] H. Eshraghi, R. Hafezi, Sh. Salarian and Z. W. Li, 《三角矩阵环上的 Gorenstein投射模》, Algebra Colloq. 23 (2016), 97–104. [11] S. Estrada, J. Hu and J. Trlifaj, 《平衡对、几乎 Gorenstein 环与余挠挠三元组》, arXiv:2602.18818v2 (2026). [12] S. Estrada, M. A. Pérez and H. Zhu, 《平衡对、余挠三元组与箭图表示》, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 63 (2020), 67–90. [13] R. M. Fossum, P. A. Griffith and I. Reiten, 《阿贝尔范畴的平凡扩张》, 数学讲义, vol. 456, Springer-Verlag, Berlin, 1975. [14] X. Fu, J. Hu, D. Zhang and H. Zhu, 《三角范畴上的平衡对》, Algebra Colloq. 30 (2023), 385–394. [15] E. L. Green, C. Psaroudakis and Ø. Solberg, 《有限维数的约化技术》, Trans. Amer. Math. Soc. 374 (2021), 6839–6879. [16] J. He and P. Zhou, 《具有负一阶扩张的外三角范畴中的平衡对与再拼接》, J. Algebra Appl. 24 (2025), Paper No. 2550110. [17] H. Holm and P. Jørgensen, 《箭图表示范畴中的余挠对》, Kyoto J. Math. 59 (2019), 575–606.[18] D. Hu, 《阿贝尔范畴扩张中的余挠对》, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 49 (2026), Paper No. 58. [19] J. Hu and H. Zhu, 《逗号范畴中的特殊预覆盖类》, 《中国科学：数学》65 (2022), 933–950. [20] P. Kostas, 《环的裂分扩张与奇异性范畴》, 《代数学杂志》685 (2026), 160–224. [21] H. Li, Y. Zheng, J. Hu and H. Zhu, 《三角矩阵环上的 Gorenstein投射模与再拼接》, Comm. Algebra 48 (2020), 4932–4947. [22] L. Liang, Y. Ma and G. Yang, 《裂分扩张下的同调不变量性质》, arXiv:2506.02691v2 (2025). [23] D. Liu and H. Gao, 《阿贝尔范畴的像幂零 η扩张上的高阶余挠对》, arXiv:2609.39003v1 (2026). [24] Y. Ma, J. Zheng and Y.-Z. Liu, 《裂分扩张下的三个同调不变量》, 《代数学杂志》694 (2026), 287–323.[25] L. Mao, 《形式三角矩阵环上的可容许平衡对》, Bull. Korean Math. Soc. 58 (2021), 1387–1400.

[26] N. Marmaridis, 阿贝尔范畴的扩张及其在环论中的应用, J. Algebra **156** (1993), 50–64. [27] Y. Qin, 裂分扩张上的 *Gorenstein* 投射对象, arXiv:2507.09109v1 (2025). [28] J. Wang, H. Li and Z. Huang, 阿贝尔范畴中正合结构的应用, 《德布勒森数学出版物》 **88** (2016), 269–286. [29] R. Xu and X. Fu, 外三角范畴中的理想平衡对, 《中国科学：数学》 **68** (2025), 271–284. [30] Y. Yuan, J. He and D. Wu, 逗号范畴中的余挠对, 《捷克斯洛伐克数学杂志》 **74(149)**(2024), 715–734. [31] G.-Q. Zhao and J.-X. Sun, 阿贝尔范畴裂分扩张中的 *silting* 与 *tilting* 对象, arXiv:2602.07368v1 (2026).

JUNPENG REN
东北师范大学数学与统计学院，中国长春 130024 电子邮箱:
renjp@nenu.edu.cn

ZHENG-GANG WU
北京师范大学数学科学学院，中国北京 100875，电子邮箱:
202631130011@mail.bnu.edu.cn

MENGZHEN ZHU
东北师范大学数学与统计学院，中国长春 130024。电子邮箱:
mzzhu@nenu.edu.cn