arXiv:2611.29404v1 [math.KT] 22 Nov 2026

悬挂空间上 UHF Brauer 类的指定矩阵大小

Andrei V. Ershov

2026年11月22日

摘要

设 Y 为连通有限 CW 复形，$L = M_{l^\infty}$ 对于 $l \geq 2$，且 k 为与 l 互素的正整数。ΣY 上的稳定 L-扭曲具有归一化拼接不变量 $1 + x$，其取值于 $K^0(Y)[1/l]$。我们证明，当且仅当 $kx = 0$ 在加法意义下成立时，此类扭曲才是一个含单位的 $M_k(L)$-丛的稳定化。对于每个可容许的大小，我们都用两个平凡的 $M_k(\mathbb{C})$-丛，以及在它们重叠部分嵌入到 $M_{kl^N}(\mathbb{C})$ 中所张成的跨度，构造一个代表元。每个满足 $2l^N \geq$ 维数 Y 的 $N \geq 0$ 都足够。对于 $Y = S^{2m-1} \cup_p e^{2m}$、$m \geq 2$，以及与 l 互素的素数 $p \geq m$，生成元的最小含单位大小为 p，且在该大小下的最小重叠指数为 $\lceil \log_l m \rceil$。在五维情形下，对于每个满足 $q > 1$ 与 l 互素的 Moore 空间 $S^4 \cup_q e^5$，最小大小为 q，最小指数为一。在 $\Sigma\mathbb{RP}^{2d}$ 上，当 l 为奇数时，周期为二的扭曲的最小含单位大小为 2^d。

1 固定大小问题

设 $L = M_{l^\infty} = \bigotimes_{n \geq 1} M_l(\mathbb{C})$，令 K 表示可分无限维 Hilbert 空间上的紧算子，并记 $M_k(L) = M_k(\mathbb{C}) \otimes L$。一个含单位元的 $M_k(L)$-丛 E 通过取 $E \otimes \mathbb{K}$ 得到一个稳定扭曲。对于连通紧致可度量空间 X，Dadarlat 和 Pennig 将 $\mathrm{Br}_L(X)$ 识别为可定向稳定扭曲的挠子群 [3, 定理2.15(ii)]。在此处考虑的悬挂空间上，赤道 Y 是连通的，因此 $X = \Sigma Y$ 是单连通的。于是，每个稳定扭曲的定向障碍 $\delta_0 \in H^1(X; \mathbb{Z}[1/l]^\times_+)$ 都消失 [3, 命题 2.3]。对于$k \geq 2$，Dadarlat 和 Pennig 还证明，若一个可定向稳定扭曲被k 的某个幂所湮灭，则它有一个大小为 k^r 的含单位元代表元，其中 r [3, 定理 2.11 和推论 2.12]。对于给定的扭曲，哪些指定大小可行?

在悬挂 $X = \Sigma Y$ 上，回答这个问题的不变量是赤道的普通复 K 环中的一个元素。在 Y 中固定一个基点，并令

$$R_Y = K^0(Y) \otimes \mathbb{Z}[1/l], \qquad I_Y = \widetilde{K}^0(Y) \otimes \mathbb{Z}[1/l].$$

全文中，Y 都是连通有限 CW 复形。我们使用带有两个锥的非约化悬挂。带基点的 CW 模型的约化悬挂与之同伦等价。稳定扭曲是指在丛同构意义下的局部平凡 $L \otimes \mathcal{K}$-丛。我们使用 [7, 第 4 节。2]中的悬挂拼接构造。评价定理 [2, 定理 2。22], 随后再取遗忘锥平凡化的商，将稳定扭曲对应为一个归一化单位元 $1 + x \in 1 + I_Y$（第2节）。双片松代数丛（LAB）的有限数据是来自.....的两个嵌入
将锥代数嵌入赤道上的同一个矩阵代数中。

定理 1.1 (指定大小与有限重叠)。 设 $l \geq 2$、 $k \geq 1$ 和 $\gcd(k,l) = 1$。对于 ΣY 上具有归一化不变量 $1 + x$ 的稳定扭曲，以下条件等价。

(i) 对于一个局部平凡的含单位元 $M_k(L)$-丛 E，该扭曲同构于 $E \otimes \boldsymbol{K}$。(ii) $kx = 0$ 属于加法群 I_Y。(iii)该扭曲由一个大小为 k 的双片 $\boldsymbol{LAB}$ 表示，在某个有限阶段的交叠部分上具有一个标准嵌入。

当这些条件成立时，可以指定任意阶段 $N \geq 0$，使得 $2l^N \geq$ 维数 Y。

因此，如果 x 的加法阶有限，则最小可取矩阵大小就是 x 的加法阶；对于 $x = 0$，矩阵大小为一。该扭曲的周期是 $1 + x$ 的乘法阶。这两个数可能不同。指定 k 意味着要求丛类上某个稳定化映射的像。不同的含单位元代表元可能具有相同的稳定类。

该构造使用一族矩阵嵌入的重数丛。它在标架空间作用于 K-理论中的作用见 [4, 命题 30 和定理 33]。这类嵌入的跨度出现在松代数丛理论中，见 [5, 例 3。6]。在这里，两个锥足以从有限几何得到稳定不变量，无需依赖关于一般覆盖的分类定理。

2 稳定粘合与单位角

所有自同构群都赋予点范数拓扑。令 $G_{\mathrm{st}} = \mathrm{Aut}(L \otimes \mathcal{K})$，并选取秩一投影 $e \in \mathcal{K}$。 [2, 定理 2.22] 的求值同构将连续族 $\gamma : Y \to G_{\mathrm{st}}$ 映为

$$[\, y \longmapsto \gamma_y(1_L \otimes e)\,] \in K_0(C(Y) \otimes L)^{\times}_{+}. \tag{1}$$

族的复合诱导单位元的乘法。识别 $K_0(C(Y) \otimes L) = R_Y$ 由 $[1_L] = 1$ 规范化。事实上，在矩阵莫里田等价下，从 M_{l^N} 阶段到 $M_{l^{N+1}}$ 阶段的 $K^0(Y)$ 上的过渡映射是乘以 l。因此，在 N 阶段值域丛为 η 的投影贡献 $[\eta]/l^N$。

要粘合一个丛，先在各个锥上选取平凡化，再取从负锥到正锥的过渡映射。改变任一平凡化都会使其在 $[Y, G_{\mathrm{st}}]$ 中的类乘上一个常值族，因为锥上的映射同伦于常值映射。反过来，这些改变以及过渡映射的同伦都会给出同构的丛。群 $[Y, G_{\mathrm{st}}]$ 由（1）可知是阿贝尔群。因此，将常值族取商等价于用基点处的秩去除求值单位元。常值正单位元恰为 $\mathbb{Z}[1/l]^{\times}_{+}$。

为证明归一化正单位元全都属于 $1 + I_Y$，取满足 $x \in I_Y$ 的 $v = 1 + x$。骨架过滤使 I_Y 幂零，因此 v^{-1} 存在，且秩也为一。对于 $w = v$ 或 $w = v^{-1}$，选取足够大的 m，使得 $l^m w$ 在 $K^0(Y)$ 中有一个整提升，并且 $2l^m \geq \dim Y$。该提升的秩为 l^m，因此复稳定范围定理（定理 1.1 的证明中所用）可将其表示为一个实际的向量丛。用阶段代数的某个矩阵放大中的投影来表示该向量丛。在阶段-m 的归一化下，该投影的类为 w。这证明了 v 及其逆元均为正。在约化坐标中，张量律为 $x \star y = x + y + xy$，因为 $(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$。

写作 $D_k = M_k(L)$。为固定 $D_k \otimes \mathcal{K} \cong L \otimes \mathcal{K}$，将 M_k 因子吸收到 $\mathcal{K}$ 中，所用的希尔伯特空间酉算子将秩一投影 $e_{11} \otimes e$ 映到 e。

引理 2.1。 令 $\alpha :\ Y \to$ 自同构群(D_k) 粘合一个含单位元的丛。在莫里塔识别 $K_0(C(Y) \otimes D_k) = R_Y$ 中，采用归一化 $[e_{11} \otimes 1_L] = 1$。该稳定化丛具有归一化不变量

$$u = [\, y \longmapsto \alpha_y(e_{11} \otimes 1_L)\,], \qquad ku = k.$$

证明。 公式 (1) 应用于 $\alpha \otimes$ 恒等$_{\mathcal{K}}$ 给出了所述投影类。由偏等距 k 族 $\alpha(e_{ii}\otimes 1_L)$可知它们彼此等价 $\alpha(e_{ij}\otimes 1_L)$。它们的和是 D_k的常值单位元，其类为 k。因此 $ku=k$。在一点处，该等式成立于 $\mathbb{Z}[1/l]$这一无挠群中，因此 u 的秩已经为一。 □

3 通过有限跨度实现

记作 $M_t = M_t(\mathbb{C})$。大小为 k 、阶段为 N 的双片 LAB 在此由以下部分构成：每个锥上各有一个平凡的 M_k-丛，赤道上有一个平凡的 M_{kl^N}-丛，以及从每个受限锥代数到赤道代数的连续含幺嵌入。沿赤道领圈拉回，可得到定义在开锥邻域上的相应跨度。对于稳定扭曲和固定的锥大小 k，其大小为 k 时的最小重叠指数，是指在存在此类跨度的前提下，使某个此类跨度经稳定化后表示该扭曲的最小 $N \geq 0$ 。最小值在两个嵌入支上取遍，其中也包括两支都不是标准嵌入的跨度。

对于 $t = l^N$，令 $\mathrm{Fr}_{k,\,t} = \mathrm{Emb}(M_k,\ M_{kt})$ 表示含幺 $*$-嵌入空间。其拓扑由矩阵单位上的范数收敛决定。标准嵌入为 $\iota(a) = a \otimes 1_t$。

引理 3.1 (重数丛)。 连续映射 $f\colon Y \to \mathrm{Fr}_{k,\,t}$ 确定一个秩为 t 的丛 η_f及其酉平凡化。反过来，配备此类平凡化的秩为 t 的厄米丛 η 给出一个满足 $\eta_f \cong \eta$ 的标架族 f。平凡的 M_{kt}-丛中 $f(M_k)$ 的交换子丛典范同构于$\mathrm{End}(\eta_f)$。

证明。 取 $(\eta_f)_y = f_y(e_{11})\mathbb{C}^{kt}$。这些投影连续变化，且秩为 t。若 $v_1,\dots,v_k$是 $\mathbb{C}^k$的标准基，则规则 $v_i \otimes w \mapsto f_y(e_{i1})w$ 给出了平凡化。它将 $f_y(M_k)$与作用于第一个张量因子的算子对应起来，因此交换子作用于第二个张量因子。反过来，通过给定的平凡化传递作用 $a \mapsto a \otimes 1_\eta$。 □

命题 3.2 (跨度的粘合公式)。 对于一个由 Y 参数化的跨度 $M_k \xrightarrow{f_-} M_{kt} \xleftarrow{f_+} M_k$，存在一个良定义的 ΣY上的含单位元 D_k-丛同构类。其稳定化粘合不变量为

$$u = \big([\eta_{f_+}]/t\big)^{-1}\big([\eta_{f_-}]/t\big). \tag{2}$$

特别地，对于 $f_+ = \iota$，不变量为 $[\eta_{f_-}]/t$。

证明。 对于任一标架 f，将环境代数与 L 作张量积后，其交换子为 $\mathrm{End}(\eta_f)\otimes L$。这是一个纤维为 $M_t \otimes L \cong L$的局部平凡丛。由于 Y是仿紧空间，且 $\mathrm{Aut}(L)$ 可缩[2, 定理 2.3]，，它存在平凡化，并且任意两个平凡化彼此同伦。选取一个方向为 $L \to \mathrm{End}(\eta_f)_y \otimes L$的平凡化。现在与 $f_y(M_k)\otimes 1$ 相乘，得到一族连续同构

$$\widetilde{f}_y : D_k \longrightarrow M_{kt} \otimes L, \qquad \widetilde{f}_y(a\otimes 1) = f_y(a)\otimes 1.$$

固定由 $M_{kt} = M_k \otimes M_t$ 和 $M_t \otimes L \cong L$ 为 $t = l^N$ 诱导的尾部识别 $\theta\colon M_{kt}\otimes L \to D_k$。令 $\alpha_f = \theta \circ \widetilde{f}\colon Y \to \mathrm{Aut}(D_k)$，其中复合按纤维进行。对于标准标架，取 $\widetilde{\iota} = \theta^{-1}$，于是 $\alpha_\iota = \mathrm{id}$。从负锥到正锥的过渡映射为

$$\gamma = \alpha_{f_+}^{-1}\alpha_{f_-} = \widetilde{f}_+^{-1}\widetilde{f}_-.$$

交换子平凡化的选择会随同伦变化，因此 γ 确定一个含幺丛的同构类。

在映射锥和粘合上使用 Mayer–Vietoris 序列，即得到 K_0 坐标。

在张量积的 $\widetilde{\text{a}}$秩一矩阵角。由于 $p = e_{11}\otimes 1_L$ 属于 D_k，像 $f(p) = f(e_{11}) \otimes 1_L$ 在目标中具有类 $[\eta_f]$。诱导映射在 K_0 上与对 Y 上的丛进行张量积相交换

因为该族是 $C(Y)$-线性的。因此它是 $K^0(Y)$-线性的，故在将 l 取逆后是 R_Y-线性的。它在 $1=[p]$ 上的取值表明，在这些坐标下它的作用是乘以 $[\eta_f]$。

在 θ下，常秩为 t 的角 $e_{11}\otimes 1_t\otimes 1_L$ 映到 p。其 t 秩一直和项彼此等价，因此 θ_* 将每个直和项映到 $1/t$。应用引理 2.1 即可得到 $u(\alpha_f) = [\eta_f]/t$。(1) 的乘法性给出 $u(\gamma)=u(\alpha_{f_+})^{-1}u(\alpha_{f_-})$，证毕。

□

引理 3.3。对于任意阿贝尔群 A 以及 $(k,l)=1$，局部化诱导出同构 $A[k]\to A[1/l][k]$，其中 $A[k]=\ker(k:\ A\to A)$。

证明。$\mathbb{Z}[1/l]$ 的平坦性将局部化后的核识别为 $A[k]\otimes\mathbb{Z}[1/l]$。根据贝祖等式，乘以$l$ 在 $A[k]$上已经可逆。

□

定理 *1.1* 的证明。引理 2.1 给出 (i)⇒(ii)，因为 $k(1+x)=k$。命题 3.2 给出 (iii)⇒(i)。

设 $kx=0$。由引理 3.3，x 有唯一的提升 $a\in\widetilde{K}^0(Y)[k]$。固定满足 $2t\geq\dim Y$ 的 $t=l^N$。在整数 $K^0(Y)$ 中，构造秩为 t 的类 $v=t[\mathbf{1}]+ta$，其中 $\mathbf{1}$ 表示平凡复直线丛。在维数至多为 $2s$ 的 CW 复形上，秩为 s 的复向量丛由其稳定类分类。事实上，$BU(s)\to BU$ 是 $(2s+1)$-连通的，这可由 $U(s+1)/U(s)=S^{2s+1}$ 和稳定化得出。因此，v 可由秩为 t 的丛 η 表示。由于 $ka=0$，k 重直和 η 的稳定类为 $kt[\mathbf{1}]$。将同一范围应用于秩为 kt 的情形，可得一个实际同构

$$\eta^{\oplus k}\ \cong\ Y\times\mathbb{C}^{kt}.$$

选取一个酉平凡化。引理 3.1 给出 $f:\ Y\to\mathrm{Fr}_{k,\ t}$ 其重数丛为 η。取$f_-=f$ 和 $f_+=\iota$。公式（2）给出 $u=[\eta]/t=1+x$。这证明了 (iii)，且具有所断言的阶段界。

□

推论 3.4. 若 x 的加法阶有限，为 a，则正整数 s 恰在满足 $a\mid s$时，才是 $1+x$ 的一个代表元的含单位大小。若 x 的加法阶无限，则不存在任何大小的含单位代表元。随着 k 变化，所得到的稳定类恰为 $1+I_Y$的挠元。

证明。引理 2.1 对每个含单位大小 s都给出 $sx=0$，无须任何互素假设。I_Y 中的有限加法阶 a 与 l互素，因为每个整除 l 的素数对应的乘法均可逆。因此，定理 1.1 给出一个大小为 a的代表元。将其与一个常矩阵代数作张量积，便可用同一个稳定化丛实现 a 的每个倍数，因为对每个$b\geq 1$，都有 $M_b\otimes\mathbf{K}\ \cong\mathbf{K}$。若 x的加法阶有限，则幂 x、x^2、.....生成一个有限加法群，因为它们都是阶有界的扭元，且 I_Y是幂零的。$1+x$ 的幂落在一个有限集合中，而 $1+x$ 是单位元。反过来，若对某个 $m\geq 1$有$(1+x)^m=1$，则

$$x\left(\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}x^{j-1}\right)=0.$$

该和的常数项为 m，且余项幂零，因此它是 $\mathbb{Q}$上的单位元。因此，x 是加法扭元。

□

4 两个例子

4.1 一个需要一次扩大的高阶 Brauer 类

定理 4.1. 设 $q>1$，$(q、\ l)=1$、$Y=S^3\cup_q e^4$ 和 $X=\Sigma Y\simeq S^4\cup_q e^5$，其中附着映射的度为 q。则 $\mathrm{Br}_L(X)\ \cong\mathbb{Z}/q$。一个生成元的最小含单位大小为 q，且可由一个跨度实现

$$M_q\longrightarrow M_{ql}\longleftarrow M_q.$$

在该大小下，它在 l 次幂塔中的最小重叠指数为 $N=1$。任何大小的普通有限矩阵代数丛，都不能通过扩张到 L 并进行稳定化来得到这个生成元。

证明。 $S^3 \xrightarrow{q} S^3 \to Y$ 的约化 K理论正合序列将 $\widetilde{K}^0(Y)$识别为 q 的余核： $\widetilde{K}^{-1}(S^3) \to \widetilde{K}^{-1}(S^3)$，因此由 Bott 周期性可识别为 $\mathbb{Z}/q$。空间 Y 在同伦意义下是一个悬挂，因此其约化对角映射是零同伦的。于是，约化 K^0类的乘积均为零。在 l 处局部化保持 $\mathbb{Z}/q$。由此可知， $1+I_Y$在乘法下是一个阶为 q的循环群。根据定理2.15(ii)]，每个这样的类都属于 $\mathrm{Br}_L(X)$ [3,。生成元 $1+x$ 的加法坐标的阶为 q，因此其最小大小为 q。

定理 $2l \geq 4 =$ 维数 Y 给出的界 1.1 在 $N=1$处给出了所示的跨度。更明确地说，取一个秩为l、类为 $l[\mathbf{1}]+la$的向量丛，其中 a 是 x的整提升，并将其 q重直和平凡化。由此得到跨度中可变的一边。

在 $N=0$，两条腿都是 M_q 的同构。将其中一条与另一条的逆复合，便得到一个普通的 M_q-粘合映射。但 $H^3(X;\mathbb{Z}) = 0$ 由胞腔上链复形计算得到。对于 X上的任意普通 M_s-丛 B，将其主 PU(s)-丛提升为 $U(s)$ 的障碍位于此群中，因而必然消失。因此，对于向量丛 V，有 $B \cong \mathrm{End}(V)$，且 $B \otimes \mathcal{K}$ 的 Dixmier–Douady 类为零。于是 $B \otimes L \otimes \mathcal{K}$ 是平凡的。由于 $1+x$ 是非平凡的，所以每一种 $N=0$表示都被排除，即使允许锥大小发生变化也是如此。 □

这里，一个更高阶的类通过其不属于普通拓扑 Brauer 群像的性质被检测出来。Dadarlat 和 Pennig 对 $q=3$使用同一个五维 Moore 空间，并配以 Jiang–Su 系数，以研究逆代数运算 [3,例 3。5]。定理4.1 确定了展示一个生成元的两个有限矩阵代数的大小。

变化的一边还检测到标架空间中的典范例 [5, 例 3.6]。在 $\Sigma\mathrm{Fr}_{q,l}$ 一边使用标架恒等族，另一边使用标准嵌入。对于上文构造的映射 $f: Y \to \mathrm{Fr}_{q,l}$ 沿 Σf 对该跨度进行拉回即可得到 Moore 空间的生成元。如果稳定化的典范类来自某个普通的有限矩阵丛，那么其拉回也会具有相同性质。因此，有限标架空间在悬挂之后便已经携带了一个处于经典像之外的 Brauer 类。

扭曲的 K-理论秩映射。对于定理 4.1 中的一个生成元 τ，记 $1+g$为其粘接单位，并记 $R=\mathbb{Z}[1/l]$。用 $KU[1/l]^i(X;\tau)$ 表示表示 τ的稳定丛的截面代数的 K_i-群。Pennig 的悬挂计算 [7, 定理 4.5] 将锥点处的求值与 Mayer–Vietoris 序列联系起来。在此，根据余纤维序列有 $K^1(Y)[1/l]=0$，并且$K^0(Y)[1/l] = R \oplus (R/qR)g$。借助两个锥平凡化，相关的正合序列为

$$0 \longrightarrow KU[1/l]^0(X;\tau) \longrightarrow R \oplus R \xrightarrow{\delta} R \oplus (R/qR)g \longrightarrow KU[1/l]^1(X;\tau) \longrightarrow 0.$$

在坐标的排列使第二个锥映到第一个锥的情况下， $\delta(a,\ b) = a-(1+g)b = (a-b,\ -bg)$。该映射是满射，其核由满足 $a \in qR$ 的对 $(a,\ a)$ 构成。因此，投影到任一锥坐标上可得

$$KU[1/l]^0(X;\tau) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{ev}} qR \subset R, \qquad KU[1/l]^1(X;\tau) = 0.$$

求值记录纤维秩被 q整除的情况。定理4.1 中的大小为q 的代表元的单位元 q达到正整数秩。

4.2 周期二与无界的最小大小

命题 4.2。设 l 为奇数， $d \geq 1$，且 $Y = \mathbb{RP}^{2d}$。设 λ 为典范实直线丛的复化。在 ΣY 上的稳定扭曲，其粘接单位为 $[\lambda]$，周期为2，最小含单位大小为 2^d。在该大小下，它已在 $N=0$处有一个表示。

证明。 标准复 K-理论计算给出 $\widetilde{K}^0(\mathbb{RP}^{2d}) = \mathbb{Z}/2^d$，由以下元素生成 $a = [\lambda] - 1$[8, 定理 4.6。1]。其阶在任意奇数 l处局部化后仍保留。由于 $\lambda^{\otimes 2} \cong \mathbf{1}$，单位元 $[\lambda]$ 的阶为二。其最小大小由推论3.4得出。

令 $k = 2^d$。整体而言 $k[\lambda] = k[\mathbf{1}]$，且 $2d \le 2k$。秩 k 中的消去给出了$\lambda^{\oplus k}$的平凡化。应用引理 3.1 ，取 $t = 1$ 和 $\eta = \lambda$。这给出映射 $Y \to$ 自同构群(M_k)。因此，以恒等映射为另一支的跨度粘合出一个普通的 M_k-丛，其不变量满足要求。 □

在这个例子中，最小代表元本身已经是一个普通矩阵丛。这说明，添入奇数 UHF尾部后，经典的周期–指标间隙依然存在。关于普通矩阵丛的一般拓扑周期–指标问题，参见 Antieau 和 Williams [1]。在定理 4.1中，周期与最小含单位大小相等，但仍有必要在重叠部分作有限扩张。因此，最小含单位大小和最小重叠阶段衡量的是有限表示的不同方面。

5 高阶Moore空间上的尖锐重叠指数 s

定理1.1 中的维数界可在任意高维数下达到。对每个嵌入支而言，障碍已出现在其重数丛的顶陈类中。

定理5.1。 令 $m \ge 2$，令 $p \ge m$ 为素数，并假设 $p \nmid l$。置 $Y = S^{2m-1} \cup_p e^{2m}$ 和$X = \Sigma Y$。则 $\mathrm{Br}_L(X) \cong \mathbb{Z}/p$。每个生成元的最小含单位大小为 p。当锥大小为 p时，其最小重叠指数为

$$N_{\min} = \min\{N \ge 0 : l^N \ge m\} = \lceil \log_l m \rceil.$$

最小值取遍跨度，其中两个嵌入均可变化。

证明。令 $c\colon\ Y \to S^{2m}$ 塌缩底部球面，并选择一个 Bott生成元 $b \in \widetilde{K}^0(S^{2m})$。附着映射的余纤维序列将约化 K^0 中的 c^* 识别为商 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p$。因此， c^*b 生成 $\widetilde{K}^0(Y)$，而在 l 处局部化保持其阶。空间 Y在同伦意义下是一个悬挂，因此其约化 K-环中的乘积为零。所以， I_Y 中的加法对应于 $1 + I_Y$中的乘法。拼接描述和 [3, 定理2.15(ii)] 给出 $\mathrm{Br}_L(X) \cong \mathbb{Z}/p$。推论 3.4给出了生成元的最小大小 p 。由于 $\dim Y = 2m$，定理 1.1在 $l^N \ge m$时以大小 p实现它。

反过来，所有 $H^{2i}(Y;\mathbb{Z})$ 都为零。因此，Whitney和公式表明陈类

$$c_m : \widetilde{K}^0(Y) \longrightarrow H^{2m}(Y;\mathbb{Z})$$

对虚拟类具有可加性。令 z 生成 $H^{2m}(S^{2m};\mathbb{Z})$。Bott 整性定理给出 $c_m(b) = \pm(m-1)!\, z$ [6,第 308 页，推论 9.8]。胞腔上链序列将 c^*z 识别为 $H^{2m}(Y;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p$的一个生成元。由自然性， c_m 将 c^*b 映到 $\pm(m-1)!\, c^*z$。由于 $p \ge m$，这是一个生成元，且 c_m 是单射。

现在假设 $t = l^N < m$。对于任意秩为 t 的丛 η在 Y上，都有 $c_m([\eta] - t[\mathbf{1}]) = c_m(\eta) = 0$，因为 $m > t$。单射性给出 $[\eta] = t[\mathbf{1}]$ 在整数 $K^0(Y)$中。特别地，阶段 N 任意跨度所对应的两个重数向量丛具有相同的类 $t[\mathbf{1}]$。公式（2）于是给出粘接单位元 1。因此，生成元要求 $l^N \ge m$。 □

对于 $l = 2$ 和 $p = m = 3$，基底为 $X \simeq S^6 \cup_3 e^7$。在最小锥大小 3 时，第一个实现生成元的重叠代数是 M_{12}，位于 $N = 2$。 M_6 重叠位于 $N = 1$ 时，其秩二重数向量丛的第三陈类为零。更一般地，固定 l，并令 m 任意增大，同时取与 l 互素的素数 $p \ge m$，即可得到无界的最小重叠指数。

对于固定的素数 $p \nmid l$ 和 $m > p$，同样的计算给出零同态 c_m，因为$p \mid (m-1)!$ 。定理 1.1 的上界仍然适用。要确定此范围内的最小阶段，需要了解哪些约化 K-类可由 Y 上的低秩丛产生。

生成式人工智能的使用。 OpenAI 的 ChatGPT 协助推导和检查论证、检索文献，并起草说明文字和 LaTeX 源文件。数学验证、参考文献和最终文本均由作者负责。

参考文献

[1] B. Antieau 和 B. Williams，《扭曲拓扑 K-理论的周期–指标问题》，Geom. Topol. 18 (2014), 1115–1148。arXiv:1104.4654。[2] M. Dadarlat 和 U. Pennig，《强自吸收 C^*-代数的 Dixmier–Douady 理论》，J. Reine Angew. Math. 718 (2016), 153–181。doi:10.1515/crelle-2014-0044，arXiv:1302.4468。[3] M. Dadarlat 和 U. Pennig，《强自吸收 C^*-代数的 Dixmier–Douady 理论 II：Brauer 群》，J. Noncommut. Geom. 9 (2015), 1137–1154。doi:10.4171/JNCG/218，arXiv:1403.1234。[4] A. V. Ershov，《将矩阵代数丛嵌入平凡丛的拓扑障碍》。arXiv:0807.3544v14。[5] A. V. Ershov，《拓扑 Brauer 群的推广》。arXiv:2004.05710v19。[6] D. Husemoller，《纤维丛》，第 3 版，Graduate Texts in Mathematics，第 20 卷，Springer，纽约，1994。doi:10.1007/978-1-4757-2261-1。[7] U. Pennig，《高阶扭曲 K-理论的一个非交换模型》，J. Topol. 9 (2016), 27–50。doi:10.1112/jtopol/jtv033，arXiv:1502.02807。[8] O. Randal-Williams，《特征类与 K-理论》，讲义，第 4.6 节。剑桥大学。