arXiv:2611.29405v1 [math.RA] 22 Nov 2026

轴根

LOUIS HALLE ROWEN*

ABSTRACT. 一种 *axial algebra*是由一组 X 半单幂等元生成、并满足指定融合规则的代数。某些轴代数（例如 Jordan 型 $_1$ $_2$ 的本原轴代数）具有 Frobenius 型，因此可以定义 Frobenius 型的根 Rad(A)。最近，Mamontov、S. Shpectorov 和 V. Zhelyabin 将根 $R(A;X)$ 定义为不包含X任何轴的最大理想；它总是包含于 Rad(A) 中。他们还证明，当 Frobenius 型是各向异性时， $R(A;X)$ =Rad(A)。在这种情况下，他们还证明了 $A/R(A;X)$ 是半单的，从而为具有各向异性 Frobenius 型的本原轴代数建立了一套优雅的结构理论。我们的目标是在去除 Frobenius 型这一假设的情况下，重新得到这些结果。我们给出了根的其他刻画，包括一种 Jacobson 型根（与他们的 Jacobson 根并不相同）。我们还以更一般的正交性概念取代 Frobenius 型。最后，我们引入一种 Baer 型根，并将其与 $R(A;X)$ 和 Rad(A) 进行比较。

1. INTRODUCTION

轴代数——由半单幂等元生成的代数——很久以前就已由 Peirce（在结合性情形下）和 Albert [A2、A3、A4]进行研究。自从发现轴代数与顶点算子代数、3-换位群、有限单非阿贝尔群的分类以及流形上的向量流之间的关系以来，轴代数已成为一个活跃的研究领域，McInroy [McI]的出色综述对此有所介绍。

近年来，研究重点转向用根来描述轴代数的结构。在存在各向异性 Frobenius 型的情形下，一种尤为成功的方法见于 [MSZ]。Jordan 代数的根理论是一个重要的特殊情形，数十年来一直得到广泛研究，参见 [J2、McC、HM]。

本文受 [GS]，中一系列精彩问题的启发，旨在从各种根的概念出发，理解那些

Date：2026年11月24日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：17A65、17A30；次要分类号：16N20、17A05、17C27。*Key words and phrases.* 轴代数、轴恒等式、轴、融合规则、Jordan 代数、Jordan 型、恒等式、Matsuo 代数、幂等元、幂等恒等式。作者获 Anshel Pfeffer 讲席资助。

不一定具有各向异性 Frobenius 型的轴代数的结构，并以此重现和拓展［MSZ］。

2. Fundamental notions

在本文中，C 始终表示一个交换诺特整环，其中包含元素1_2。（在文献中，C 通常是无限域 F，但更一般的情形有助于处理泛代数。）下文始终假设给定一个有限集 $S \subset C$，其中包含 0、1，并且对于每个不同的 μ，$\mu - \nu$ 在 C 中可逆。$\nu \in S$. 特别地，当 $S = \{0, 1, \rho\}$时，我们假设 $\rho(1-\rho)$在 C中可逆。A始终假设为忠实的交换（不一定具有结合性）C-代数。

定义与记号 2.1。我们回顾一些熟悉的定义。

(1) 对于 $a \in A$，用 L_a 表示左乘映射 $z \mapsto az$。我们用 $L_a^k(y)$表示 $a(a(\dots(ay)))$，其中 k 表示重复次数。(2) 对于 $\rho \in S$，a 的 ρ-特征子空间 $A_\rho(a)$为 $\{y \in A : L_a y = \rho y\}$.（允许 $A_\rho(a) = 0$.的可能性。）(3) 关于 S的轴 a 是一个非零幂等元，且 L_a是半单的，即 $\prod_{\lambda \in S}(L_a - \lambda) = 0$.（$\lambda$ 表示 λ倍恒等映射。）显然，$1 \in S$，因为 $L_a(a) = a^2 = a$.。(4) 若幂等元 a 满足 $A_1(a) = Ca$，则称其为本原；此时，对于 $\varphi_a(y) \in C$.，我们记作$y_1 = \varphi_a(y)a$ 。(5) 若代数 A 由一组轴 X 生成，则称其为关于可数[1] 集 X 的轴代数。有时我们在记号中省略 X，但许多结果取决于 X的选择。此时我们记作$X = \{a_i : 1 \le i \le N\}$.。(6) 若轴代数 A 定义在 X 上，且 X 中的每个轴都是本原的，则称其为本原轴代数。(7) 对于 $t > 2$，记号$(a_1 \dots a_t)y$ 表示$L_{a_1} L_{a_2} \dots L_{a_t}(y)$；也就是说，归纳地，$a_1((a_2 \dots a_t)y)$. $a_1 \dots a_t$ 表示$(a_1 \dots a_{t-1})a_t$.。(8) 单项式是形如 $a_1 \dots a_t$ 的乘积，其中 $a_i \in X$.

注 2.2. A 中的每个元素都是单项式乘积的线性组合，因此 A 由可数多个元素张成。

注 2.3. 融合规则 是形如 $A_\mu(a)A_\nu(a) \subseteq \sum_{\rho \in S_{\mu,\ \nu}} A_\rho(a)$ 的规则，其中对所有 $a \in X$，，都有 $S_{\mu,\ \nu} \subseteq S$。

关于轴 a 的**基本融合规则** 有以下三条，记 $A_{0,\ 1} = A_0 + A_1$:

(1) $A_0(a)^2 \subseteq A_0(a)$; (2) $A_{0,\ 1}(a)$ 是一个 C子代数 A;

[1]可以任取 X，但这样偶尔会遇到超限归纳的问题。

(3) $A_{0,\ 1}(a)A_\rho(a) \subseteq A_\rho(a)$ 对每个 $\rho \in S$ 都成立。换句话说，对于所有 $\rho \neq 0,\ 1$。，$S_{0,\ \rho} = S_{1,\ \rho} = \rho$

例 2.4. 以下是一些著名的融合规则。可在 [GS] 中查阅这些表格。

(i) 结合性轴代数满足**皮尔斯融合规则**，这是 $S = \{0, 1\}$. 的基本融合规则。(ii) Jordan 型**轴代数** S，称为**Jordan 型轴代数** ρ，当 $S = \{0, 1, \rho\}$, 是一个 S-轴代数，且其中每个 $a \in X$ 都满足 $A_\mu(a)A_\nu(a) = 0$，对于 $\mu \neq \nu$ 中的 $S \setminus \{1\}$，并满足基本融合规则以及融合规则 $S_{\mu,\ \mu} \subseteq \{0, 1\}$，对所有 $\mu \in S$ 均成立。(iii) [A1] 所有由本原幂等元生成的 Jordan 代数都是 Jordan 型 $_{1\ 2}$. 的本原代数。(iv) Monster 型**轴代数**(α, β) 是一种滤过代数，其中$S = \{0, 1, \alpha, \beta\}$.

注 2.5。 [Row3] 证明了，对于域上的任意本原 Jordan 型轴代数，基本融合规则 (a) 可由 (b) 和 (c) 推出。我们想知道这对其他本原轴代数是否也成立。

2.0.1. 交换环论的应用。 为便于后文引用，我们回顾交换环论中的一些基本事实，这些事实会对轴代数产生影响。

注 2.6。 设 λ 为 C.上的交换结合不定元

(i) $C[\lambda]$ 是一个诺特整环。(ii) 对任意轴 $a \in A$，A 可通过作用 $f(\lambda)y = f(L_a)(y)$视为 $C[\lambda]$ 上的模。因此，可以应用交换诺特环上的模理论。(iii) 当 C 是域时，$C[\lambda]$ 是一个主理想整环，在其上任意有限生成模都是循环模的有限直和，参见 [Row2，定理 2.54]。

注 2.6(iii) 大大简化了域上有限维轴代数的理论，但我们仍能恢复任意轴代数的许多结果。

命题 2.7. （中国剩余定理的简易版本）将 ρ 视为 ρ 倍恒等映射，假设 $\prod_{\rho \in S}(L_a - \rho) = 0$.

(i) $A = \bigoplus_{\rho \in S} A_\rho(a)$。任意元素 $y \in A$ 都可以唯一地写成

$$y = y_1 + \sum_{\rho \in S \setminus \{1\}} y_\rho, \qquad ay_\rho = \rho y_\rho. \tag{2.1}$$

(ii) $A_\nu(a) = \prod_{\rho \neq \nu}(L_a - \rho)A$, *for each* $\nu \in S$.

证明。对于任意给定的 $\nu \in S$，设 $\beta_\nu = \prod_{\rho\neq\nu}(\nu-\rho)$，根据假设，它是可逆的。于是

$$\pi_\nu := \frac{1}{\beta_\nu}\prod_{\rho\neq\nu}(L_a-\rho) : A \to A_\nu$$

是一个投影。事实上，对于每个 $y \in A$，$(L_a-\nu)(\pi_\nu(y)) = \frac{1}{\beta_\nu}\prod_{\rho\in S}(L_a-\rho)(y) = 0$，这意味着 $\pi_\nu(y) \in A_\nu$，而对于 $y \in A_\nu$，$\beta_\nu = \prod_{\rho\neq\nu}(\nu-\rho)$ $\pi_\nu(y) = \frac{\beta_\nu}{\beta_\nu}y = y$. 因此我们得到 (i)，并由此分解可知，投影 π_ν 均为满射，从而得到 (ii)。□

推论 2.8。若 $\mathcal{I} \trianglelefteq A$，则 A_λ 在 $A = A/\mathcal{I}$ 中的像为 A_λ。

证明。 $\subseteq$ 显然成立，但该和是直和，因为根据 (ii)，取分量与同态像相交换。□

定义 2.9。满足基本融合规则的轴代数 A 是

（1）若 $|S_\mu$按分次分解$_\nu| = 1$，则对 $\mu \neq \nu$， S 中的每个元素都满足 S_μ, $_\mu \subseteq \{0,1\}$；特别地， A 是2-分次的，其中 $A^+ = A_{0,\ 1}(a)$，且 $A^- = \sum_{\rho\neq 0,\ 1} A_\rho$。

（2）若我们可以列出元素 $S = \{0,1,\rho_1,\dots,\rho_t\}$，使得对每个 $a \in X$，以及 S_{ρ_i}, $_{\rho_j} = \{\rho_j\}$，只要 i 在 j 之前，便有 $S_{\rho_i,\ \rho_i} \subseteq \{\rho : \rho$ 在 $\rho_i\}$. 之前，则称其为过滤的

2.0.2. 宫本映射。以下介绍一种构造新轴的方法。

定义 2.10。（1）设 a 是 A 的一个 S-轴。取非空的 $S' \subseteq S\setminus\{0,1\}$，定义映射 $\tau_{a,\ S'}$：$A \to A$，其定义为 $y \mapsto \sum_{\rho\in S\setminus S'} y_\rho - \sum_{\rho\in S'} y_\rho \circ \tau_{a,\ S'}$，称为 a 的一个**宫本映射**，显然它是 A 上的 C-线性映射，其平方为恒等映射。（2）**宫本对合**是代数自同构的宫本映射。（3）**宫本轴**是指其所有宫本映射都是宫本对合的轴 a。

如 [HSS2、定义 4.1],中所述，我们注意到：

引理 2.11。任意 *Jordan* 型轴代数 A都由轴在 X *Miyamoto* 对合下的像张成。

证明。（略）关于 2-分次代数的一个简单观察是：注意对任意 $S' \subseteq S\setminus\{0,1\}$，$A$ 都是 2-分次的，其中 $A_\rho(a)$ 对于 $\rho \in S'$ 是奇的，而 a 的所有其他特征子空间都是偶的；这表明 $ab = \sum \lambda b_\lambda$ 由a 以及 b的 Miyamoto 像张成，随后对轴中一个单词的长度使用归纳法即可得出结论。□

由轴张成的代数理论尤其稳健。

2.0.3. *Frobenius* 型。

定义 2.12. (1) 一个**结合双线性型**$(\ ,\ ):\ A\times A\to C$ 满足

$$\Big(\sum \alpha_i x_i, \sum \beta_j y_j\Big) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j (x_i, y_j), \quad (xy, z) = (x, yz), \qquad \forall x, y, z \in A.$$

(2) **Frobenius型**是一个对称的结合双线性型。[2](3) 若轴 a 满足 $(a, a) = 0$, 则称其为**各向同性**；否则 a 为**各向异性**。若来自 X 的每个轴都是各向异性的，则称 Frobenius 型为 X-**各向异性**。若对于每个本原轴 a., $(a, a) = 1$，则称 Frobenius 型为**正规**。(4) 域 A上 Frobenius 型的**根**rad A 称为**Frobenius 根**，即 $\{x \in A : (x, A) = 0\}$.

引理2.13 ([Row3, Lemma2.7(ii)])**.** 设 a 是一个带有 *Frobenius* 型的 S-轴代数 A 中的一个轴，其中 $y, y' \in A$。记号同(2.1)，

(i) 对所有 $\mu \neq \nu \in S$，有 $(y_\mu, y'_\nu) = 0$。*(ii)* 若 a 是本原的，则 $(a, a)\ y_1 = (a, y)\ a$。因此，对于 a 各向异性且C 是一个域的情形，$y_1 = (a,y)\ (a,a)\ \overline{a}$。*(iii)* 若 A 由一组本原轴 X 张成，则以下条件等价：*(a)* $y \in rad\, A$。*(b)* 对每个 $a \in X$., 有 $(a, y) = 0$

根据 [HSS1, 定理 4.1], , 域上的每个 Jordan 型 ρ本原轴代数 A 都有一个正规 Frobenius 型，其定义为 $(a, y) = \varphi_a(y)$，对每个本原轴 a 和所有 $y \in A$都成立。

根据 [RS3, 定理 2.3], , 这对许多 Jordan 型 S的本原轴代数也普遍成立，但该形式具有对称性的必要条件显然是：对所有本原轴 $a, b.$, 均有 $\varphi_a(b) = \varphi_b(a)$。此外， [RS3, 引理2.5]的证明利用 Miyamoto 对合证明不同分量之间的正交性；根据引理 2.13(i)，这是一个必要条件。

注记2.14。 (i) [HRS1]研究具有 Frobenius 型的"Monster 型"轴代数。正如 [McI, 猜想 8.15],中所述，Franchi、Mainardis 和 Shpectorov 猜想每个 Monster 型轴代数都有 Frobenius 型。(ii) A 上的 Frobenius 型会传递到子代数，但不一定传递到同态像 $A/\mathcal{I}$, 因为它可能定义不良。Frobenius 型在 $A/\operatorname{rad} A$.上定义良好

2.0.4. *Jordan* 代数。 Jordan 代数由恒等式 $((xx)y)x = (xx)(yx)$ 定义。轴 Jordan 代数具有 Jordan 型 $1\ 2$，其中所有极小非零幂等元都是本原的，并具有双线性算子$U_{a,\ b} = L_aL_b + L_bL_a - L_{ab}$ 它给出相应的二次算子 $U_a = U_{a,\ a} = 2L_a^2 - L_{a^2}$. 此外，还有 Jordan三重积

[2]交换轴代数上的任意结合双线性型都是对称的，参见 [HRS1，命题 3.5]。

$\{a_1a_2a_3\} = (a_1a_2)a_3 + (a_2a_3)a_1 - (a_1a_3)a_2$，我们在任意轴代数中定义该积。

注 2.15. 对于 Jordan 型为 $1\ 2$ 的轴代数中的任意轴 a，我们有 $U_a(y) = 2a(ay) - ay = 2y_1 + \frac{1}{2}y_{\frac{1}{2}} - y_1 - \frac{1}{2}y_{\frac{1}{2}} = y_1$.。特别地，如果 a是本原的，则 $U_a(A) = Fa$.

3. $C[\lambda]$-SUBMODULES OF A

我们先考察 A上的 $C[\lambda]$-模结构，它取决于对$a \in X$的选择。

注 3.1. 我们通过作用 $f(\lambda)y = f(L_a)(y)$，将 $\mathcal{M}_a := A$ 视为一个 $C[\lambda]$-模。一个关键结果本质上是 [MSZ，引理 2.6]，；用我们的术语来说，它指出，$C[\lambda]$-子模 $\mathcal{N}$ 中的任意元素的每个分量都属于 $\mathcal{N}$.。

相应地，我们称 A 的 C-子模 $\mathcal{N}$ 为 **a-齐次的**，如果对所有 $\lambda \in S.$，$y \in \mathcal{N}$ 蕴含 $y_\lambda \in \mathcal{N}$

由此可知，如果 $y \in \mathcal{N}$ 那么对于a的任意 Miyamoto 对合 τ，$\tau(y) \in \mathcal{N}$。

定义 3.2。

(i) 定义投影 π_a ： 将 $A \to A_0(a)$ 投影到 0 分量上，即$\pi_a(y) = y_0$.

(ii) 定义 $A'_\rho(a) = \sum_{\mu \neq \rho} A_\mu(a)$，$A_\rho(a)$ 的互补 $C[\lambda]$-子模。

3.0.1. 模子模。模左理想在结合代数的 [J1] 中定义，用以避免单位元。二次理想在 Jordan 代数的 [J2] 中定义，并在其结构理论中发挥关键作用。类似地，我们称 A 的一个 a-齐次子模 $\mathcal{N}$ 是关于 $a \notin \mathcal{N}$ 的 **a-模**，如果 $ay - y \in \mathcal{N}$ 对每个 $y \in \mathcal{A}.\ \mathcal{N}$ 都成立；若存在 X 中的一个轴 $a \notin \mathcal{N}$，使得 $\mathcal{N}$ 是 a-模的，则称其为 ***X*-轴模**，

引理 3.3. 在域上的轴代数 A 中，对于任一本原轴 a，唯一的 a-模子模 $\mathcal{N}$ *of* A 是 $A'_1(a)$。

证明。 根据假设，对于任意 $y \in \mathcal{A}.$，$(L_a - 1)(y) = ay - y \in \mathcal{N}$。但是 $(L_a - 1)A = A'_1(a)$，这意味着 $\mathcal{N} \supseteq A'_1(a)$。此外， $A'_1(a)$ 是 a-模的，因为$ay - y = \sum_{\rho \in S}(\rho - 1)y_\rho$ 满足 $\varphi_a(ay - y) = 0$.

$A'_1(a)$ 是极大的 a-模，因为若 $z \in A \setminus A'_1(a)$，则 $z_1 \neq 0$，这意味着$a \in Ca$，并且 $Ca + A'_1(a) = A.$。因此 $\mathcal{N} = A'_1(a)$. □

3.1. **正交性**。 让我们弱化Frobenius型的概念，以了解在 [MSZ, §5] 中需要哪些假设。

定义 3.4。 轴代数上的**正交关系**[3] $\perp$ 满足以下条件，其中将 $a^{\perp}$ 记作 $\{y \in A : a \perp y\}$， $V^{\perp}$ 对于 $\{w \in A : v \perp w\}$；并且，如果对于所有 $v \in V$， $v \perp w$，则 $V \perp W$， $w \in W$:

(1) 对每个 $a \in X$，只要 $\mu \neq \nu.$，就有 $A_\mu(a) \perp A_\nu(a)$（因此正交关系非平凡。）**(2)** $v \perp w$ 当且仅当 $w \perp v$。**(3)** 若 $v_i \perp w$ 对 v_i， v_2, $w \in A$ 成立，则 $\sum \alpha_i v_i \perp w$ 对 $\alpha_i \in C.$ 成立。**(4)** 若 $u \perp yv$ 对 $y \in A$，成立，则 $yu \perp v.$

从直观上看，**(1)**体现了某种齐次性，而**(2)**、**(3)**和**(4)**则表明正交性具有交换性、双线性和结合性。（这让人联想到张量积；正交关系可以看作 $A \otimes_C A$ 的一个同态像。）

引理 3.5。(i) 如果每个单项式的乘积都与 $y \in A$ 正交，那么 $y \in A^{\perp}$。
(ii) $A^{\perp} \trianglelefteq A.$

证明。 **(i)** 根据定义 3.4(3),(4)。

(ii) 根据定义 3.4(2),(3)， $A^{\perp}$ 是一个 C-子模。如果 $y \in A^{\perp}$ 和 $z \in A$，那么 $Az \perp y$，因此 $yz \perp A.$ □

根据定义，每个 Frobenius型都定义了一个正交关系，但我们希望得到一个典范的正交关系（相对于生成集 X）。我们将始终使用最小正交关系，它可以通过取所有正交关系的交集得到；其构造如下，逐步进行：

定义 3.6。 在每一步，如果 $y \perp_i z$ ，我们就声明 $y \perp_{i+1} z$，并作如下定义：定义 $\perp_1$ 使其满足：对于每个 $a \in X$，只要 $\mu \neq \nu.$，就有 $A_\mu(a) \perp A_\nu(a)$。给定 $\perp_{3i-2}$ 且 $i \geq 1$，定义 $\perp_{3i-1}$ 使其满足线性，即如果对于 $w_i \in A$有 $v \perp_{3i-2} w_i$ ，那么对于 $\alpha_i \in C.$ 有 $v \perp_{3i-1} \sum_i \alpha_i w_i$ 。给定 $\perp_{3i-1}$，若 $yv \perp_{3i-1} w.$，则定义 $v \perp_{3i} yw$ 。给定 $\perp_{3i}$，若 $w \perp_{3i} v$，则定义 $v \perp_{3i+1} w$ 。

现在定义 $y \perp z$ 当 $y \perp_i z$ 对于某个 $i.$

显然，**(1)**、**(2)**、**(3)** 和 **(4)** 根据构造成立，而且这是最小的此类正交关系。与 Frobenius型相比，正交性有一些优点。

引理 3.7. 设 $\mathcal{I} \trianglelefteq A$。

(i) 如果 $v \perp w$ 属于 A，那么 $\bar{v} \perp \bar{w}$ 属于 $A := A/\mathcal{I}.$
(ii) 反过来，对于 $\mathcal{I} \subseteq A^{\perp}$，如果 $\bar{v} \perp \bar{w}$ 那么 $v \perp w$。

证明。**(i)** 在 A 上构造 $\perp$ 的步骤，已包含在在 A.上构造 $\bar{\perp}$的步骤之中

(ii) 在 A 上构建 $\perp$ 的步骤，与在 $A.$ 上构建 $\perp^{-}$ 的步骤相同。更明确地说，如果 $\bar{v} \perp \bar{w}$，那么提升产生正交性的步骤

[3]我们定义一种对称正交关系；也可以不要求对称性，但证明会变得更加复杂。

表明，对于 $\bar{v}$ 的相应代表元 v'，w'，有 $v' \perp w'$。令 $y = v - v' \in A^\perp$，则 $z = w - w' \in A^\perp$ 得出 $v = (y + v') \perp w'$，当然也有 $v \perp z$，因此 $v \perp (w' + z) = w$. □

引理 3.8. 对于 C 域，设 N 是 A 的 $C[\lambda]$子模。那么$a \perp N$ 对于任意本原轴 $a \notin N$。

证明。对于 $y \in N$，$a \perp y_\lambda$ 对所有 $\lambda \neq 1$，且 $y_1 = 0$ 否则 $a = \varphi_a^{-1} y_1 \in N$. 因此 $a \perp y$. □

定义 3.9. 轴 a 是 $\perp$-**各向同性的** 若 $a \perp A_1(a)$。

(当 a 是本原轴且 C 是域时，这意味着 $a \perp a$。)

引理 3.10. 轴 a 是 $\perp$-各向同性的，当且仅当 $a \perp A$.

证明。 $a \perp A_1'(a)$，根据定义。因此，断言 $a \perp A_1(a)$ 等价于 $a \perp A$. □

注 3.11. 正交性是一种很有前景的工具，其中 $A^\perp$ 包含在每个 Frobenius 根中。另一方面，也可能存在这样的例子，其中 $A^\perp = A$.

定义 3.12. 轴代数 A 是 X-各向异性的，当且仅当 X 中的每个轴都是$\perp$-各向异性的。

3.2. A **的理想。**

引理 3.13. （同 [MSZ, 引理 5。1]）设 $\mathcal{I} \trianglelefteq A$，并令 A° 为由所有满足 $\mathcal{I} \subseteq A_1'(a)$ 的轴 a 生成的轴代数。（对于 a 本原，这意味着 $a \notin \mathcal{I}$.）那么

(i) $A^\circ \perp \mathcal{I}$。

(ii) $\mathcal{I}A^\circ \perp A$.

证明。(i) 首先，我们通过归纳法证明，对于任意 $t \geq 1$.，$a_1 \dots a_t \perp I$。若 $t = 1$，则此结论成立，因为 $a_1 \in A_1(a_1)$。对于 $t > 1$，我们有 $a_t\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$，因此根据归纳法，$a_1 \dots a_{t-1} \perp a_t\mathcal{I}$，这意味着根据定义 3.4(4)，$a_1 \dots a_t \perp \mathcal{I}$。继续这一论证可得，对于所有单项式 $z_1, \dots, z_m$.，$z_1 \dots z_m \perp \mathcal{I}$

(ii) $\mathcal{I} \perp A^\circ A$ 意味着对于所有 a_i，$\mathcal{I} \perp (a_t \dots a_1)A$，因此 $\mathcal{I}a_1 \dots a_t \perp A$。继续归纳可得，对于每个由单项式构成的乘积 $z_1 \dots z_m$，$\mathcal{I}z_1 \dots z_m \perp A$；因此 $\mathcal{I}A^\circ \perp A$. □

3.2.1. 子模的核。

注 3.14. 假设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{A}$. 的一个子模。那么，$\mathcal{N}$ 的任意两个子模之和都包含于 $\mathcal{N}$ 中。因此，A 中所有包含于 $\mathcal{N}$ 的理想之和，是 A 中包含于 $\mathcal{N}$ 的唯一最大理想，我们将其记作 core($\mathcal{N}$)。

引理 3.15. 核$(A_1'(a))$ 是与 $A_1(a)$平凡相交的 A 的唯一最大理想。

证明。 显然， $A_1'(a)$ 是 a-齐次的，因此它是与 $A_1(a)$ 平凡相交的最大 $C[\lambda]$-子模，所以我们取核。□

引理 3.16。 对于 A 的任意子模 $\mathcal{N}_i$ ， 核$(\cap \mathcal{N}_i) = \bigcap$核$(\mathcal{N}_i)$。

证明。 显然， $\bigcap$核$(\mathcal{N}_i)$ 是包含于 $\cap \mathcal{N}_i$ 中的一个理想，因此包含于核$(\cap \mathcal{N}_i)$。 反过来，核$(\cap \mathcal{N}_i)$ 包含于每个核$(\mathcal{N}_i)$，因而包含于 $\bigcap$核$(\mathcal{N}_i)$

. □

3.2.2. 块。 按照 [MSZ], , 我们将**块** $\mathcal{I}_a$ 定义为由 a 生成的 A 的理想， 并称 a **支配** 轴 a' ， 若 $\mathcal{I}_a \supseteq \mathcal{I}_{a'}$.

引理 3.17。 $A_0'(a) \subseteq \mathcal{I}_a$，对于每个轴 a.

证明。 $\mathcal{I}_a$， 作为一个理想，是 a-齐次的。对于任意 $y = \sum y_\lambda \in A$, $\sum \lambda y_\lambda = ay \in \mathcal{I}_a$， 根据齐次性可得 $y_\lambda \in \mathcal{I}_a$。 因此 $A_0'(a) \subseteq \mathcal{I}_a$. □

推论 3.18. 要么 $\mathcal{I}_a \cap A_0(a) \neq 0$，要么 $\mathcal{I}_a = A_0'(a)$。

引理 3.19. 对于任意 $a \in X$，以及 A 的任意理想 $\mathcal{I}$ ， π_a 限制为从 $\mathcal{I}$ 到 $\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_0(a)$ 的投影。

证明。 对于 $y \in \mathcal{I}$， $ay = \sum_{0 \neq \rho \in S} \rho y_\rho$，这意味着对每个 $\rho \neq 0$， $y_\rho \in \mathcal{I}$ ，因此$\pi_a(y) = y_0 \in \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_0(a)$. □

引理 3.20. 对于 $a, a' \in X$ ， 以下条件等价:

(i) a支配 a'(ii) π_a $(a') \in \pi_a(\mathcal{I}_a)$。(iii) $\pi_a($ $\mathcal{I}_{a'}) \subseteq \pi_a(\mathcal{I}_a)$。

证明。 $((i) \Rightarrow (ii))$ 显然。

$((ii) \Rightarrow (i))$ 根据假设， $a_0' \in \pi_a(\mathcal{I}_a)$，因此 $\sum_{\rho \in S} a_\rho' \in \pi_a(\mathcal{I}_a) + A_0'(a) \subseteq \mathcal{I}_a$.$((ii) \Leftrightarrow (iii))$ 显然。

□

引理 3.21. 当 C 是域时， a' 支配本原轴 a 当且仅当 $\mathcal{I}_{a'} \not\subseteq A_1'(a)$。

证明。 $(\Leftrightarrow)$ 每个条件都表示，对于某个 $y \in \mathcal{I}_{a'}$., $y_1 \neq 0$ □

3.2.3. 旁论：内理想。

定义 3.22. 对于 y_1， $y_2 \in A$，定义算子 $U_{y_1,\ y_2}$： $A \to A$ 为

$$U_{y_1,y_2}(z) = y_1(y_2 z) + y_2(y_1 z) - (y_1 y_2)z.$$

A 的二**次理想** 是满足条件 $U_{y_1,\ y_2}(A) \subseteq Q$ 的子空间 Q ， 其中对每个 y_1, $y_2 \in Q$均成立。 A 的**内理想** 是满足$y^2 \in Q$ 对所有 $y \in Q$.均成立的二次理想 Q

例 3.23。 根据注 2.15，在 Jordan 型 $_1{}_2$的轴代数 A中，任意轴 a 都是 A 的二次理想。⁻

注 3.24。 通过将二次算子线性化，并注意到$U_{a,a} = 2U_a$, 是其极化，可以看出，这一定义专门化为线性 Jordan 代数中二次理想的定义。Jacobson [J2, Chapter 4]论述了满足二次理想极小条件的线性 Jordan 代数理论，因此，人们自然会尝试将其推广到 Jordan 型轴代数。目前为止，我们尚未能沿此方向获得有用的结果。

4. Radicals

本节将描述轴代数 A. 的各种根 X.定义通常取决于生成集的选择 C 从现在起，我们假设 C 是一个域 F，以简化讨论。

4.1. $A^{\perp}$。我们已经定义了 $A^{\perp}$ （相对于某个 X 的选择），它包含于 Frobenius 根中。因此，当存在非奇异 Frobenius 型时， $A^{\perp} = 0$ 。

引理 4.1。 $(A/A^{\perp})^{\perp} = 0$. 特别地， $A/A^{\perp}$ 是 X-各向异性的，并且 $A^{\perp}$ 包含 X 的所有各向同性轴。

证明。 立即由引理 3.7 得出。 □

4.2. **轴根**。

定义 4.2. 设 A是一个轴代数，其生成集为 X。

(1) 对每个 $a \in X$，**轴根** $R(A; X)$都是包含在 $A_1'(a)$中的最大理想。

注 4.3. $R(A; X)$有定义，它是 $\cap_{a\in X} A_1'(a)$的核，也是轴根最稳健的定义。然而，它取决于 X. 的选择。显然，当 $X \subseteq X'$时， $R(A; X) \supseteq R(A; X')$, 因此我们可以定义^ ^“全”根 $R(A) = R(A; X)$，其中取遍所有 S-轴组成的集合 X 。因此，$R(A) = \cap R(A; X)$取遍所有生成集 X. 。类似地，也可以定义 $R_{\mathrm{prim}}(A) = \cap R(A; X)$，其中取遍所有本原$S$- X 轴组成的集合。

$R(A; X)$ 的定义对应于 [KMS, MSZ] ，当 A 是域上的本原轴时，因为 $y \in \mathcal{I}\backslash A_1'(a)$ 意味着 $y_1 \neq 0$，因此 $a = \varphi_a(y)^{-1} y_1 \in \mathcal{I}$.

引理 4.4. $R(A; X)$ 是 $\mathcal{A}$. 的极大 X-轴模子模的核的交集

证明。如同 [MSZ，命题 4.2] 中所述。 □

4.2.1. 骨架元素。以下概念可作为拟可逆性的替代。

定义 4.5. $Z(A;\ X) = \cap_{a\in X} A_1'(a)$，$A.$ 的极大模子模的交集。元素 $y \in A$ 称为**骨架的**，若 $y \in Z(A; X)$，即相对于每个轴 $a \in X$，其分量 y_1 为 0。

理想 $\mathcal{I}$ 称为**骨架的**，若 $\mathcal{I} \subseteq Z(A; X)$。

引理 4.6. $R(A;\ X)$ 包含每个骨架理想 $\mathcal{I}$。

证明。 $\mathcal{I} \subseteq Z(A; X)$，因此 $\mathcal{I} = \mathsf{core}(\mathcal{I}) \subseteq \mathsf{core}(Z(A; X))$。 □

引理 4.7. $\bar{R}(A;\ X) = 0$，其中 $\bar{A} = A/R(A;\ X)$。

证明。 写出 $\bar{R}(A;\ X) = \mathcal{I}/R(A; X)$，对于 $R(A;\ X) \subseteq \mathcal{I} \trianglelefteq A.$ 若 $y \in \mathcal{I}$，则，对于每个 $\bar{a} \in X$，$0 = (\bar{y})_1 \equiv y_1$，这意味着 $y_1 = 0$，因为 $R(A; X)$ 是骨架的。因此 $\mathcal{I} = 核(\mathcal{I}) \subseteq 核(Z(A; X)) = R(A; X).$ □

4.2.2. 应用正交关系。

引理 4.8. 对于任意轴代数 A，其生成集为 X，

(i) $R(A;\ X) \subseteq A^{\perp}$.(ii) $R(A;\ X) = A^{\perp}$ 若 A 是 X-各向异性的。

证明。 (i) 对每个 $a \in X$，$a \perp Z(A;\ X)$，因为 $Z(A; X) \subseteq A_1'(a)$，因此对每个单项式 z，$z \perp R(A;\ X)$。因此，根据引理 3.5(i)，$R(A; X) \subseteq A^{\perp}$。(ii) 若 $R(A; X) \neq A^{\perp}$，则理想 $A^{\perp}$ 将包含一个轴 $a \in X$，这与引理 3.10 矛盾。因此 $R(A; X) = A^{\perp}$。□

因此，X-各向异性条件非常强大，使我们能够应用 [MSZ]的理论。

命题 4.9。（如 [MSZ，命题 5。3] 中所述）设 A 相对于一组 X 本原轴具有正交关系，其中 $A^{\perp} = 0$，并取 $A.$ 的任意理想 $\mathcal{I}$。令 $X_1 = X \cap \mathcal{I}$ 且 $X_2 = X \setminus X_1.$。则 $\mathcal{I}$ 是由 X_1 生成的轴代数 A_1，并且与由 X_2 生成的轴代数 A_2垂直。换言之，$A = A_1 \oplus A_2$，因此 $\mathcal{I} \cap A_2$ 不包含 X 的任何轴（因为 $X_2 \cap \mathcal{I} = \emptyset$）。于是 $\mathcal{I} \cap A_2 \subseteq R(A;\ X) = 0$，从而得到 $\mathcal{I} \subseteq A_1 \subseteq \mathcal{I}$，进而得到 $\mathcal{I} = A_1.$

证明。 $R(A;\ X)$ 根据引理 4.8，$= 0$，因此每个非零理想都包含 X 的一个轴。此外，根据引理 3.13，对于 $y \in \mathcal{I}_1$ 和 $z \in X_2$，有 $y \perp z$，这也意味着 $AA_1 \perp A_2$，从而得到 $A_1A_2 \subseteq A^{\perp} = 0.$。但是 $X \subseteq A_1 \cup A_2$，从而得到$A = A_1 + A_2.$。因此 A_1，$A_2 \trianglelefteq A$ 都成立。$(A_1 \cap A_2)^{\,2} = 0.$ 因此 $A_1 \cap A_2$ 不包含任何非平凡幂等元，所以包含于 $R(A;\ X) = 0.$ □

现在可以应用 [MSZ]。如果块 $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_{a'}$，我们称两个轴 a 和a' 为**等价**。因此，仿照 [MSZ、引理 6.1 和命题 6.2], 的证明，我们可以证明，若 $A^{\perp} = 0$，则 $A = \oplus_{a\in X'} I_a$，取遍 X中的轴的一个横截集 X'。

4.3. **ρ-贝尔根**。引理 2.13 给出了 ρ-轴代数的根的另一种表述，无需使用 Frobenius 型。

由于可以直接描述 $Z(A;X)$，因此 Baer型构造可能有助于使 $Z(A;X)$ 与 $R(A;X)$ 相等。

定义 4.10。 **ρ-Baer 根** $\mathcal{R}(A;X)$ 按如下方式归纳定义： $\mathcal{R}_0$ 是由 $Z(A;X)$ 生成的理想，以及 $Z_0 = Z(A;X)$。

对于任意 $i \in \mathbb{N}$，令 $\bar{A} = A/\mathcal{R}_i$，$\mathcal{R}_{i+1} \supseteq \mathcal{R}_i$，其中 $\mathcal{R}_{i+1}/\mathcal{R}_i$ 是由 $Z(\bar{A};\bar{X})$ 生成的理想；X 是 X 的轴的非零像的集合。$\mathcal{R}(A;X) = \cup_{i\geq 0}\mathcal{R}_i$.

我们来看，对于 X 有限的情形，该过程必定终止。

引理4.11。 </style}沿用上述记号，对于 (*A)</style}*,

(i) 如果 $Z(\bar{A};\bar{X})$ 已经是一个理想，那么 $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i$，因此该过程停止。(ii) 如果 $Z(\bar{A};\bar{X})$ 不是一个理想，那么它所生成的理想 $\mathcal{R}_{i+1}/\mathcal{R}_i$ 严格包含$\mathrm{core}(Z(\bar{A};\bar{X})) = R(\bar{A},\bar{X})$，因而包含 $\bar{X}$的一个轴；在转到 $\bar{A}/\mathcal{R}_{i+1}$.时，该轴被吸收。(iii) 归纳过程的阶段数不超过 $|X|$.

证明。 (i) 显然 $Z(\bar{A};\bar{X}) = R(\bar{A};\bar{X})$，因此 $\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i$.

(ii) 根据定义，$R(\bar{A};\bar{X}) = \mathrm{core}(Z) \neq Z$，因此 $\mathcal{R}_{i+1}$ 在 $\bar{X}$中包含一个非零轴，其像变为 0。

(iii) 对 (ii) 作归纳应用。 □

根据构造，$\mathcal{R}(A;X) \supseteq Z(A;X) \supseteq R(A;X)$，当 C为域且 X 为本原时，等式成立当且仅当 $X \cap \mathcal{R}(A;X) = \emptyset$。

4.4. **特殊情形：Jordan代数的根。**

定义 4.12. [参见 J2，练习 1.11.5，第 55]] 页。元素 $y \in A$ 称为**准可逆**[4]，其**准逆**为 z，若 $y^2z - y^2 = yz = y + z$。若一个理想由准可逆元素组成，则称其为**准可逆**理想。

显然，准可逆理想不能包含幂等元，因此当 X 由本原轴组成时，它包含于 $R(A;X)$ 中。另一方面，$R(A)$ 可能包含幂等元，因此一般而言并非准可逆。

Jacobson [J2，《练习 1.11》6] 断言，在所有元素均为代数元的 Jordan 代数中，理想是准可逆的，当且仅当它是幂零的。这一结论适用于 Clifford Jordan 代数和局部有限维 Jordan 代数。McCrimmon [McC]证明了准可逆理想之和仍是准可逆的，因此存在一个极大准可逆理想，我们称之为**准可逆根基** $QI(A)$。

Hogben 和 McCrimmon [HM]定义了关于模数 a 的 a-模内理想，并称若某个模数下它是极大a-模的，则该模内理想为极大模内理想 a. 。随后他们证明，$QI(A)$ 是

[4]McCrimmon [McC] 更一般地为二次 Jordan 代数定义了拟可逆性，但我们仍采用线性情形，因为我们假设 $\frac{1}{2} \in F$.

极大模内理想的交集，因此也是极大模理想的交集。

4.4.1. 同位体。本小节的内容大多是否定性的。约当理论中的一个主要工具是 Jordan 代数的 a-**同位体** (A, a)，其乘法由 $a_1 \cdot_a a_2 = \{a_1 a a_2\}$. 给出。对于本原轴 $a, a \cdot_b a = 2a(ab) - ab = \sum_{\lambda \in S} (2\lambda^2 - \lambda) b_\lambda$, 当且仅当 $2\lambda^2 - \lambda = 0$（即 Jordan 型 $\{\frac{1}{2}\}$）且 $\varphi_a(b) = 1$, 它才是 a，因此这似乎只对 Jordan 型 1_2 有用。

5. Some further questions

Question 5(1) *Under what conditions is $Z(A; X)$ an ideal?*

(2) 关于在没有 *Frobenius* 型的情况下，我们如何判定 A 是否是 X-各向异性的？特别是，对于合适的生成集 X，*Monster* 型轴代数是否 X-各向异性？(3) 是否存在一个非平凡的例子，使得 $A^\perp = A$? (4) 在什么条件下， $R(A; X) = R(A)$? (5) $R(A; X)$ 是否包含 A 的每个骨架二次理想？(6) 如果问题 *(5)* 的答案是否定的，那么轴代数中“正确”的内理想类比是什么（或许是 *Jordan* 型的，这样便可以使用 *Miyamoto* 对合）？

值得进一步深入研究的一类可能是 [GGu], 引入并由 $\varphi_a(b) \neq 1$ 定义的准定 primitive Jordan 型轴代数 1_2, $^-$适用于任意轴 $a \neq b$.

References

[A1] A.A. Albert, *A structure theory for Jordan algebras*, 《数学年刊》第二辑，**48**（1947），546–567。https://doi.org/10.2307/1969128，MR 0021546。[A2] A.A. Albert, *Power-associative rings*, 《美国数学会汇刊》**64**，第3期（1948），552–593。[A3] A.A. Albert, *A Theory of Trace-admissible Algebras*, 《美国国家科学院院刊》35，第6期（1949），317–322。[A4] A.A. Albert, *A theory of power-associative commutative algebras*, 《美国数学会汇刊》**69**（1950），503–527。[AL] M. Arenas 和 A. Labra, *On nilpotency of generalized almost-Jordan algebras*, 《代数讨论》**15**（2008），69–82。[CaHP] L. Carin、I. R. Hentzel 和 G.M. Piacentini Cattaneo, *Degree four identities not implied by commutativity* **16** 2 1988 339 356 ，《代数通讯》（），（），–。https://doi.org/ 10 1080 00927878808823575 。/ ChG M. [ ] Chayet 和 S. Garibaldi, *A class of continuous nonassociative algebras arising from algebraic groups including E_8* **9** 6, 2021 ，《Forum Math. Sigma》：论文编号 e（）。[CuH] F. Cuypers、J. Hall, *The 3-transposition groups with trivial center*，《代数学杂志》**178**（1995），149–193。[Des] J. Desmet, *Jordan algebras* **153** 2025 1461 1479 ，《美国数学会会刊》（），–。https://doi.org/10.1090/proc/17111。

[DMRe] T. De Medts 和 F. Rehren, *Jordan algebras and 3-transposition groups*, 《代数学杂志》, 478（2017）, 318–340。[DMRoS] *Primitive 4-generated axial algebras of* T. De Medts、L. *Jordan type* **152** 2024 537 551 Rowen 和 Y. Segev, , 《美国数学会会刊》（）, –。[FMS] C. Franchi、M. Mainardis 和 S. Shpectorov, *2-generated axial algebras of Monster type* 2β β **663** 2023 123 170 (,), 《代数学杂志》（）, –。[GGu] I.B. Gorshkov 和 V.Yu. Gubarev, *Quasi-definite primitive axial algebras of Jordan type half* 20 2 2023 , 《西伯利亚电子数学新闻》, 第 卷, 第 期（）, 页数 833 846 10 33048 2023 20 050 –。doi.org/ . / semi. . . GMS I. Gorshkov、A. Mamontov 和 A. Staroletov, *On Jordan algebras that are factors of Matsuo algebras* **37** 2025 70 90 10 24330 1488467 , IEJA（）–。https://doi.org/ . /ieja. . [GS] I. Gorshkov 和 S. Shpectorov, *Axial Algebras: Questions and Conjectures*（2026）, https://doi.org/ 10 48550 2606 30048 。/arXiv. . HRS J.I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov, *Universal axial algebras and a theorem of Sakuma* **421** 2015 394 424 , 《代数学杂志》（）, –。[HRS2] J. I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov, *Primitive axial algebras of Jordan type*, 《代数学杂志》437（2015）, 79–115。[HSS1] J. Hall、Y. Segev 和 S. Shpectorov, *On primitive axial algebras of Jordan type*, 《中华民国数学会会刊》13（2018）, 第4期, 397–409。arXiv:1705.03492v1（2017）。[HSS2] J. Hall、Y. Segev、S. Shpectorov, *Miyamoto involutions in axial algebras of Jordan type half* **223** 2018 261 308 , 《以色列数学杂志》（）, –。[HM] L. Hogben 和 K. McCrimmon, *Maximal Modular Inner Ideals and the Jacobson Radical of a Jordan Algebra* 68 1981 155 169 , 《代数学杂志》（）, –。[J1] N. Jacobson, *Structure of Rings*, 第二版, 美国数学会丛书第37卷, 普罗维登斯, 罗得岛州（1964）。[J2] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, 美国数学会丛书第39卷, 普罗维登斯, 罗得岛州（1968）。[KMS] S. Khasraw、J. McInroy 和 S. Shpectorov, *On the structure of axial algebras*, 《美国数学会汇刊》373, 第3期,（2020）, 2135–2156。[MSZ] A. Mamontov、S. Shpectorov 和 V. Zhelyabin, *Radicals in primitive axial algebras* 2026 2602 11984 10 48550 2602 （）, arXiv: . . https://doi: . /arXiv. . 11984 [ ] *3-Transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras* Ma A. Matsuo,（第1版）, arXiv:math/0311400v1（2003年11月）。[McC] K. McCrimmon, *The radical of a Jordan algebra*, 《美国国家科学院院刊》。1969年3月；62(3):671-8。doi: 10.1073/pnas.62.3.671。PMID: 16591736；PMCID: PMC223650。[McI] J. McInroy, *Axial algebras*, 30页, 布里斯托大学讲义与综述, 2020年5月, https://people.maths.bris.ac.uk/ jm13603/docs。[McIS] J. McInroy 和 S. Shpectorov, *Axial algebras of Jordan and Monster type*。载于：C.M. Campbell、M.R. Quick、E.F. Robertson、C.M. Roney-Dougal 和 D.I. Stewart 编, *Groups St Andrews 2022 in Newcastle*。伦敦数学会讲义丛书496。剑桥大学出版社，2024：246–294。[RB] C. Rojas-Bruna, *Trace forms and ideals on commutative algebras satisfying an identity of degree four* **43** 2013 1325 1336 , RMJM（）, –。[Row2] L. Rowen, *Graduate algebra: commutative view*, 数学研究生丛书73（2006）, 美国数学会。[Row3] L. Rowen, *Axial identities*（2025）, arXiv:2508.16427, 2011.11702。[RS3] L. Rowen 和 Y. Segev, *Frobenius forms on weakly primitive axial algebras of Jordan type* **51** 2025 3 4, 315 330 , Serdica数学杂志（）, 第–期–。https://doi.org/10.55630/serdica.2025.51.315-330。

[Sc] R.D. Schafer, *Noncommutative Jordan Algebras of Characteristic 0*, 《美国数学会会刊》**6**, 第3期（1955），472–475。[Si1] A.V. Sidorov, *Lie triple algebras*（英文；俄文原文）Zbl 0492.17001《代数与逻辑》**20**（1981），72–87；译自《代数与逻辑》**20**（1981），101–108。[Si2] A.V. Sidorov, *On noncommutative Lie triple algebras*（俄文）Zbl 0446.17010《代数系统》，校际科学论文集，伊万诺沃，1978，81–86（1978）。[W] M. Whybrow, *An infinite family of axial algebras*, 《代数学杂志》**577**（2021），1–31。[Z] E.I. Zelmanov, *On prime Jordan triple systems*, 《西伯利亚数学杂志》，24，第4期（1983），23–37。

Louis Rowen, Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan,Israel

Email address: rowen@math.biu.ac.il