arXiv:2611.29412v1 [math.QA] 22 Nov 2026

可容许层仿射顶点代数的主子空间

HAO LI 和 ANTUN MILAS

摘要。我们对所有单李代数的可容许仿射顶点代数的一般主子空间进行分类。非一般情形恰好出现在类型 B、C、F_4的分母二情形，以及类型 G_2的分母三情形。证明结合了幂零轨道的几何与正根零向量。令人惊讶的是，我们分类所需的零向量已被明确给出，并且早已在文献中得到研究。

随后，我们从其 C_2-代数和弧代数的角度研究例外主子空间。对于层级为 $-\frac{1}{2}$的 $\mathfrak{sp}_4$ 以及层级为 $-\frac{5}{3}$的 G_2，我们证明了经典自由性，并得到乘积特征标公式。在层级为 $-\frac{1}{2}$的类型 C_n 中，对于 $n \geq 4$，经典自由性不成立。对于 $n = 3$，我们结合 Feigin and Stoyanovsky 的函数模型方法，以及 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$显式实现的平坦退化，证明了乘积特征标公式；而此情形下的经典自由性仍属猜想。 $L_{-5/2}(F_4)$的主子空间也被猜想为经典自由。

1. 引言

主子空间将仿射李代数表示、分拆恒等式与交换代数联系起来。该概念由 Feigin and Stoyanovsky 提出 [30]；另见 [14, 15, 21]，它们由最高权向量经正根生成元生成。在正整数层级，可积性会在这些生成元之间施加关系。在非整数可容许层级，环境仿射顶点代数仍是其普遍对应物的真商，但其定义理想未必与普遍主子空间相交。

固定一个简单李代数 $\mathfrak{g}$的三角分解，其中正幂零子代数为$\mathfrak{n}_+$。我们记

$$W(k\Lambda_0) = U(\mathfrak{n}_+ \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])\mathbf{1} \subset L_k(\mathfrak{g}), \qquad N(k\Lambda_0) \subset V^k(\mathfrak{g}) \tag{1}$$

分别表示简单主子空间和普遍主子空间；李代数由上下文指定。由于不变形式在 $\mathfrak{n}_+$ 上消失， $N(k\Lambda_0) \cong V^0(\mathfrak{n}_+)$ 与 k 无关。当典范映射 $N(k\Lambda_0) \to W(k\Lambda_0)$ 是同构时，我们称 $W(k\Lambda_0)$ 一般。

我们的第一个主要结果是对层级可容许时此类情形的分类 .

定理 1.1. 设 $k = -h^\vee + p/q$ 是用最简分数表示的不可积可容许真空层级，主可容许性和余主可容许性均可。则 $W(k\Lambda_0)$ 恰好在以下情形下是非一般的：

$\mathfrak{g}$	q	k
B_ℓ $(\ell \geq 2)$	2	$-\ell + \frac{3}{2} + j$
C_n $(n \geq 3)$	2	$-\frac{1}{2} + j$
F_4	2	$-\frac{5}{2} + j$
G_2	3	$-\frac{5}{3} + j$ *or* $-\frac{4}{3} + j$

$(j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

2020 数学主题分类。主要分类 17B69；次要分类 14E18、17B67、05A17。关键词与短语。主子空间、可容许仿射顶点代数、幂零轨道、Li 滤过、弧代数、经典自由性。

特别地，类型 A、D、E 中所有不可积可容许主子空间都是一般的。在每一种一般情形下，

$$\operatorname{ch} W(k\Lambda_0)(q) = \prod_{r\geq 1} \frac{1}{(1-q^r)^{|\Delta_+|}}. \tag{2}$$

按照标准术语，这些例外族是余主可容许的；若限制为主可容许级，就会将它们排除在外。我们的分类允许任意可容许分子，而不仅限于边界级 [19]。

本文所需的几何学输入并非真正新颖，因为已有大量结果可应用于可容许层级的仿射顶点代数。我们基本上是将这些结果应用于主子空间。该分类结合了荒川对伴随簇的描述、Panyushev 的一般稳定子以及已知的零向量。

荒川的识别是 $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathbb{O}_q$ [6, 11]。在全文中，$\pi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}_+^*$ 表示线性泛函的限制；其在幂零轨道上的限制是 N_+的矩映射。利用 Li 滤过[20] 以及针对拟光滑顶点代数的约化奇异支撑定理 [10]，该限制的支配性蕴含了主子空间的一般性。

所需的一般稳定子可直接计算，也可由 Panyushev 得到 [25]。反过来，类型 B、C、F_4 [27, 9, 26] 和 G_2 [12] 中的正根零向量表明其具有非一般性。值得注意的是，所有这些情形中的零向量早在以前就已计算出来。容易看出，非一般性会在层级作非负整数平移时保持不变。这就证明了定理1.1。

接下来我们研究典范弧映射

$$\psi_V : J_\infty(R_V) \twoheadrightarrow \operatorname{gr}^F V, \qquad R_V = V/C_2(V). \tag{3}$$

经典自由性意味着该映射是同构：Li 伴随分次代数中的关系由 C_2-关系及其导数生成。一般主子空间由 PBW 定理可知是经典自由的。在例外情形中，我们证明

$\mathfrak{g}, k$	$R_{W(k\Lambda_0)}$	$\operatorname{ch} W(k\Lambda_0)$
$\mathfrak{sp}_4,\ -\frac{1}{2}$	$\mathbb{C}[x,y,z,u]/(xy-z^2)$	$\dfrac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^3}$
$G_2,\ -\frac{5}{3}$	$\mathbb{C}[a,b,c,d,e,f]/(\frac{1}{3}d^2-ce+af)$	$\dfrac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^5}$

并且这两种情形下都具有经典自由性。证明利用了二次曲面喷射概形的几何性质以及相应弧映射的单射性。对于 $\mathfrak{sp}_4$，该结果推广到所有非一般层级。对于每个 $\ell \geq 0$，我们证明 $W((\ell-\frac{1}{2})\Lambda_0)$ 是经典自由的，其中

$$R_W \cong \mathbb{C}[x,y,z,u]/\big((xy-z^2)^{\ell+1}\big), \qquad \operatorname{ch} W((\ell-\tfrac{1}{2})\Lambda_0) = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^3} \prod_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq 0,\pm 1 \pmod{2\ell+3}}} \frac{1}{1-q^m},$$

因此，特征标由安德鲁斯–戈登恒等式控制（定理5.10）。对于 G_2 在第二个初始层级 $-\frac{4}{3}$，二次关系的平方给出了一个满射，映至 R_W。我们猜想这是一个同构，并且 $W(-\frac{4}{3}\Lambda_0)$ 是经典自由的，这将给出一个罗杰斯–拉马努金型特征标（猜想6.5）。

在三阶情形中，辛玻色子实现 [18] 表现不同。内在的 C_2-代数含有一个非零幂零类 h，它在环境自由场商 $R_{\mathcal{B}_3}$中不可见。我们证明，八个二次关系和三个三次关系构成了它的表示：

$$R_W \cong \widetilde{T}[d], \qquad \widetilde{T} = \mathbb{C}[x,y,z,p,q,r,a,b]/\big(I_2 + (ah, bh, rh)\big).$$

任何进一步的关系都应具有 $hd^m = 0$的形式，而自由场实现中的符号计算排除了这种可能。接下来我们证明

$$\operatorname{ch} W(-\tfrac{1}{2}\Lambda_0) = \frac{(-q;q)_\infty^8}{(q;q)_\infty}. \tag{4}$$

去掉生成元 D_{12}后，得到一个由八个生成元构成的子代数 $\mathcal{A}$，其特征标为 $\operatorname{ch} W = \operatorname{ch}\ \mathcal{A}/(q;q)_\infty$，因此 (4) 等价于 $\operatorname{ch}\ \mathcal{A} = (-q;q)_\infty^8$。为证明下界，令 $\widehat{S} \subset J_\infty(R_{B_3})$ 为由这八个生成元的符号以及代表 h 的态所生成的微分子代数。于是$\widehat{\ }\operatorname{ch}\ \mathcal{A} \geq \operatorname{Hilb} S$。源自 Feigin–Stoyanovsky [30] 的函数模型方法$\widehat{\ }$将 S Hilb q约化为第 5 节的秩二弧代数以及 q二项式系数，而所得的和可由 Rogers' [29] -Mehler 公式求得。对于上界，受 Stoyanovsky [17], 提出并由 Creutzig 和 Garner $\mathcal{A}$进一步发展的变形方法启发， $\mathfrak{sl}_3$的流张成 $L_{-3/2}$的一个收缩。将$\mathfrak{sl}_3$([2, 3, 13]) $\mathcal{A}$ 的自由场实现退化后，可得到一个从 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)-q$的平坦退化的特殊纤维到 q的满射；根据 Kac–Wakimoto $^8_\infty$ ，其特征标为 ([19]; W)。两个界相等，由此证明 (4)。因此，是经典自由的，当且仅当

$$\operatorname{Hilb} J_\infty(\widetilde{T}) \leq (-q;q)_\infty^8$$

逐系数地，并且在这种情形下， $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$ 也是经典自由的。

对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ 和 $n \geq 4$，计算机辅助的秩四计算和终端 Levi 面论证证明了在层级 $-\frac{1}{2}$上经典自由性失效。关于 $W(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$ 在 F_4 型中的类似问题尚未解决，但投影的极小轨道提出了一个明确的候选表示。我们还猜想，对于所有可容许层，主子空间的约化伴随簇为 $\pi(\mathbb{O}_q)$ （猜想4.1）。这一几何猜想允许内在的 C_2-代数中存在幂零元，并且独立于经典自由性。在所有一般情形下该猜想均成立；我们的案例研究证实了它对 G_2在层级 $-\frac{5}{3}$下以及对 $\mathfrak{sp}_6$在层级 $-\frac{1}{2}$下成立，其中 R_W不是约化的。

第2 节确定通用记号和滤过工具。第3 节证明分类结果，第4节提出伴随簇猜想。关于$\mathfrak{sp}_4$、G_2和 $\mathfrak{sp}_6$ 的单节案例研究分别见第5、6和7节。第8 节讨论高秩障碍，第9 节讨论 F_4。

（人工智能的使用）本文源自我们于2021年发表的预印本，其中已写入本文的若干结果。我们最初的草稿中，利用自由场构造对主子空间 $\mathfrak{sp}(2n)_{-1/2}$ 的经典自由性给出了一个不完整的证明或猜想。最近，我们使用 ChatGPT 对 $\mathfrak{sp}(8)_{-1/2}$ 进行了实验，并发现了论证中的一个错误。在第7节中，证明的思路由 ChatGPT 提出；基于这一方法的证明由作者完成。ChatGPT 完成了 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$ 的显式实现退化所涉及的 OPE 计算，并由作者进行了核验。在完成结果的初稿后，我们使用 ChatGPT 对全文进行了编辑和校对。

致谢

H. Li 感谢冲绳科学技术大学院大学（OIST）提供 ChatGPT Edu 的使用权限。A. Milas 获得了 Simons基金会（数学家旅行支持，资助编号 709563）和美国国家科学基金会（资助编号 DMS-2101844）的部分资助。A. Milas 的工作也得到了欧盟通过普拉朱拉伊·多布里拉大学机构研究项目 IIP_UNIPU_010159 提供的下一代欧盟资金支持。

2. 记号、滤过与弧代数

2.1. 主子空间与分次。 固定 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ 并将不变形式归一化，使长根的平方长度为二。令 $a(r) = a \otimes t^r$；则层级为 k 时的仿射括号为

$$[a(r), b(s)] = [a, b](r+s) + rk(a, b)\delta_{r+s,0}.$$

记作 $\widehat{\mathfrak{n}_+} = \mathfrak{n}_+ \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 和 $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_+ \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$。式（1）中的主子空间是顶点子代数，由 $\mathfrak{n}_+$ 的一组基所对应的生成元强生成。我们使用典范商

$$\rho_k : N(k\Lambda_0) \twoheadrightarrow W(k\Lambda_0). \tag{5}$$

记号 $N(k\Lambda_0)$ 记录其所在的真空模；其抽象顶点代数为 $V^0(\mathfrak{n}_+)$，对每个 k 均成立。在固定情形下，我们将这些代数简记为 N 和 W。式（5）的核是顶点理想，而 $U(\widehat{\mathfrak{n}_+}) \to W$，$u \mapsto u\mathbf{1}$ 的核是左理想。

$a_1(-m_1) \cdots a_r(-m_r)\mathbf{1}$ 的继承仿射次数为 $\sum_i m_i$，其中 $m_i \geq 1$。即使环境共形向量不属于 W，我们仍使用此分次。特征标不作平移。在第 3–4 节中，q 是可容许分母，z 用于特征标；在后续的案例研究中，q 是特征标变量。我们记 $(a; q)_\infty = \prod_{r \geq 0}(1 - aq^r)$。

2.2. Li递减滤过与经典自由性。 对于顶点代数 V，Li递减滤过为

$$F^pV = \operatorname{span}\left\{ a^1_{(-r_1-1)} \cdots a^s_{(-r_s-1)} b : r_i \geq 0,\ \sum_i r_i \geq p \right\}.$$

置 $R_V = V/F^1V = V/C_2(V)$ 及 $\operatorname{gr}^F V = \bigoplus_{p \geq 0} F^pV/F^{p+1}V$。对于上述仿射李代数，$F^p$ 由满足 $\sum_i (m_i - 1) \geq p$ 的负流单项式张成。伴随分次是交换微分代数，而 $\mathrm{SS}(V) = \operatorname{Spec}(\operatorname{gr}^F V)$ 是奇异支撑概形。我们将 $X_V = \operatorname{Specm} R_V$ 记作 [5] 中引入的约化伴随簇。

对于 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]/I$，置 $x_a(t) = \sum_{r \geq 0} x_a^{(r)} t^r$ 并定义

$$J_m(R) = \frac{\mathbb{C}[x_a^{(r)} : 1 \leq a \leq s,\ 0 \leq r \leq m]}{([t^r] f(x(t)) : f \in I,\ 0 \leq r \leq m)}, \qquad J_\infty(R) = \varinjlim_m J_m(R). \tag{6}$$

平移导子为 $Tx_a^{(r)} = (r+1)x_a^{(r+1)}$。若 x_a 的权为 d_a，则 $x_a^{(r)}$ 的权为 $d_a + r$。有限喷射只施加所显示的系数方程，而不是截断到阶数 m 的导子的所有迭代。存在一个典范满射

$$\psi_V : J_\infty(R_V) \twoheadrightarrow \operatorname{gr}^F V, \qquad \bar{a}^{(r)} \longmapsto \sigma_r(T^r a / r!). \tag{7}$$

这里 σ_r 表示 $F^rV/F^{r+1}V$ 中的类。我们称 V 经典自由，当此映射是一个同构时。PBW 给出

$$R_{N(k\Lambda_0)} \cong S(\mathfrak{n}_+), \qquad \operatorname{gr}^F N(k\Lambda_0) \cong J_\infty(S(\mathfrak{n}_+)). \tag{8}$$

这里使用的所有滤过在每个仿射次数上都是有限的，因此取伴随分次会保留特征标。

2.3. 单射判据。 设 $j : A \hookrightarrow B$ 是顶点代数的嵌入，且 $_-j : R_A \to R_B$ 是诱导映射。函子性给出

$$\begin{array}{ccc} J_\infty(R_A) & \xrightarrow{\psi_A} & \operatorname{gr}^F A \\ {\scriptstyle J_\infty(\bar{j})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{gr}^F j} \\ J_\infty(R_B) & \xrightarrow{\psi_B} & \operatorname{gr}^F B. \end{array} \tag{9}$$

命题 2.1。 如果 B 是经典自由的，且 $J_\infty(j)$ 是单射的，那么 A 是经典自由的，且$\mathrm{gr}^F j$ 是单射的。

证明。 复合映射 $\psi_B J_\infty(\bar{j}) = (\mathrm{gr}^F j)\psi_A$ 是单射。由于 ψ_A 是满射的，两个断言均得证。 □

注记 2.2。 [8] 不能仅仅因为 $\bar{j}$ 或 $\mathrm{gr}^F j$ 是单射，就假定其为单射。根据该命题的假设，Li 滤过在各次数上有限，也可通过对过滤次数作归纳法得到 j 。仅有坐标环的单射是不够的：在 $F^pA = A \cap F^pB$下，$\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3) \hookrightarrow \mathbb{C}[t]$，$x \mapsto t^2$，$y \mapsto t^3$，非零弧元素 $2x\,Ty - 3y\,Tx$映射为零。给 x 和 y的所有导数赋予二和三的权，即可证明它非零：其权为五，而微分理想由权为六的元素生成。

3. 可容许层级的一般主子空间

3.1. **可容许层级**。 我们使用第 1.1 节的记号证明定理 2。令 $r^\vee$ 为连边数。可容许真空层级为

$$k = -h^\vee + \frac{p}{q}, \quad p,q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (p,q) = 1, \qquad \begin{cases} p \geq h^\vee, & (q, r^\vee) = 1, \\ p \geq h, & (q, r^\vee) = r^\vee. \end{cases} \tag{10}$$

对于单类型，这两种情形穷尽了所有可能性。它们分别称为主可容许和余主可容许（在单连类型中不作区分）。特别地，如果仅限于主可容许层级，就会排除下面讨论的分母为二和分母为三的例外。

备注 3.1。 当然，限制在非可积层级上是必要的。在可积层级$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，关系式 $e_\theta(-1)^{k+1}\mathbf{1} = 0$ 使主子空间成为非一般的。

3.2. **矩映射判据**。 令 G 为 $\mathfrak{g}$的连通伴随群，并利用非退化不变对称双线性形式 $(\cdot,\ \cdot)$ 将 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$与其对偶空间等同。根据 [6, 11], ，约化伴随簇为 $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathbb{O}_q$，其中

$$\overline{\mathbb{O}_q} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{g} : (\mathrm{ad}\, x)^{2q} = 0\}, & (q, r^\vee) = 1, \\ \{x \in \mathfrak{g} : \varrho_{\theta_s}(x)^{2q/r^\vee} = 0\}, & (q, r^\vee) = r^\vee. \end{cases} \tag{11}$$

这里 ϱ_{θ_s} 是最高短根对应的不可约表示。

对于幂零轨道 $\mathbb{O}$，令

$$d(\mathbb{O}) = \min_{x \in \mathbb{O}} \dim(\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{n}_+), \qquad \mathfrak{g}^x = \{a \in \mathfrak{g} : [a,x] = 0\}.$$

设 $\pi\colon\ \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}_+^*$ 为泛函限制。由于 $T_x\mathbb{O} = [\mathfrak{g}, x]$，其微分满足

$$\big(d(\pi|_{\mathbb{O}})_x([a,x])\big)(u) = ([a,x], u) = (a, [x,u]), \qquad a \in \mathfrak{g}, \quad u \in \mathfrak{n}_+.$$

因此，非退化性给出

$$\ker\big(d(\pi|_{\mathbb{O}})_x\big)^* = \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{n}_+,$$

从而

$$\operatorname{rank} d(\pi|_{\mathbb{O}})_x = \dim \mathfrak{n}_+ - \dim(\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{n}_+) = \dim(N_+ \cdot x). \tag{12}$$

这也是动量映射秩公式。事实上，采用约定

$$\omega_x([a,x],[b,x]) = (x, [a,b])$$

对于 Kirillov–Kostant形式，函数 $\pi^u(x) = \pi(x)(u) = (x,\ u)$ 满足

$$d\pi^u_x([a,x]) = (x,[u,a]) = \omega_x([u,x],[a,x]).$$

因此， $\pi|_{\mathbb{O}}$ 是 N_+作用的矩映射，而辛形式将其微分的转置与无穷小作用 $u \mapsto [u, x]$ 联系起来。

在 $\mathbb{C}$ 上，像的闭包的维数等于一般的（亦即最大的）微分秩。因此，

$$\dim \overline{\pi(\mathbb{O})} = \dim \mathfrak{n}_+ - d(\mathbb{O}). \tag{13}$$

这里， $d(\mathbb{O})$ 是 $\mathbb{O}$ 的稠密开子集上的稳定子维数；我们不需要对这些稳定子的共轭性作任何断言。由于复幺幂群的零维代数子群是平凡的， $\pi|_{\mathbb{O}}$ 是支配映射，当且仅当 N_+ 对 $\mathbb{O}$ 的作用一般自由，即

$$(N_+)_x = \{n \in N_+ : \mathrm{Ad}(n)x = x\} = \{1\}$$

对于 $\mathbb{O}$ 的稠密开子集中的 x ，且因此，当且仅当 $d(\mathbb{O}) = 0$ 时，该限制是支配映射。

当正根模 $u(-n)$、 $u \in \mathfrak{n}_+$、 $n \geq 1$ 在 $L_k(\mathfrak{g})$ 中不存在任何关系时，主子空间 $W(k\Lambda_0)$ 是一般的，也就是说，当 ρ_k 是单射时。在 C_2-代数中，只有模 $u(-1)$ 存留下来，而它们的符号限制为伴随簇$\mathbb{O}_q$上的线性函数 $\ell_u(x) = (x, u)$。因此，一般性的经典影像是指 ℓ_u 在 $\mathbb{O}_q$ 上不存在其他关系；等价地， $\pi|_{\mathbb{O}_q}$ 是支配映射，而由 (12) 可知，这意味着 $d_q = 0$。为了控制所有模 $u(-n)$，我们必须转而使用弧空间，并利用额外的信息。

引理 3.2. 若 $\mathbb{O}' \subset \mathbb{O}$, 则 $d(\mathbb{O}) \leq d(\mathbb{O}')$。

证明。 函数 $x \mapsto \dim\ker(\mathfrak{n}_+ \to \mathfrak{g},\ u \mapsto [u, x])$ 是上半连续的。存在一个开集，其上的函数值至多为 $d(\mathbb{O}')$，且该开集与稠密轨道 $\mathbb{O}$ 相交。□

下一个结果专家们当然已知，但为完整起见，我们仍给出证明 s.

引理 3.3。 设 $f\colon X \to Y$ 是域 $\mathbb{C}$ 上不可约仿射簇之间的主导态射，并假设每个喷射概形 J_mY 都是约化且不可约的（例如 $Y = \mathbb{A}^s$）。则拉回 $\mathbb{C}[J_\infty Y] \to \mathbb{C}[J_\infty X]_{\mathrm{red}}$ 是单射的。

证明。 由一般光滑性，存在非空开子集 $U \subset X_{\mathrm{sm}}$ 和 $V \subset Y$，使得$f|_U\colon U \to V$是光滑且满射的。设 γ 是一个以 V 为中心的 m-喷射，取 U 中位于 $\gamma(0)$ 上方的一个点；由形式光滑性， γ 可提升为 U 的一个 m-喷射，并且由于 U 光滑，该喷射可延拓为一条弧。$\mathbb{C}[J_\infty Y]$ 中的每个元素都是某个 $g \in \mathbb{C}[J_mY]$ 的像。若其拉回是幂零的，则 g 在所有以 V 为中心的 m-喷射上均为零。这些喷射构成不可约概形 J_mY 的一个非空开子集，因此该子集稠密。由于 J_mY 是约化的， $g = 0$。□

命题 3.4。 如果 k 是可容许的且 $d_q = 0$，那么 $W(k\Lambda_0)$ 是一般的。

证明。 令 $V = L_k(\mathfrak{g})$ 且令 $X = \overline{\mathbb{O}_{q^\circ}}$ 由于 X 只有有限个辛叶， V 是准光滑的。规范的约化奇异支撑识别 [10, 定理 9.2] 为

$$\eta : \mathbb{C}[J_\infty X]_{\mathrm{red}} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{gr}^F V)_{\mathrm{red}}.$$

考虑所诱导的复合映射

$$J_\infty(S(\mathfrak{n}_+)) = \mathrm{gr}^F N(k\Lambda_0) \longrightarrow \mathrm{gr}^F V \longrightarrow (\mathrm{gr}^F V)_{\mathrm{red}}. \tag{14}$$

对于 $u \in \mathfrak{n}_+$， 令 $\ell_u(x) = (x,\ u)$。拉回 π^* 将 u 映为 ℓ_u，其弧映射将 $u^{(r)}$ 映为 $\ell_u^{(r)}$。根据构造， η 将 $\ell_u^{(r)}$ 映为 $u(-r-1)\mathbf{1} = T^r(u(-1)\mathbf{1})/r$ 的约化李符号！这是

也是 $u^{(r)}$ 在（14）下的像。因此，该图为

$$\begin{array}{ccc} J_\infty(S(\mathfrak{n}_+)) & \xrightarrow{J_\infty(\pi^*)} & \mathbb{C}[J_\infty X]_{\mathrm{red}} \\ & \searrow^{(14)} & \Big\downarrow{\scriptstyle \sim\,\eta} \\ & & (\mathrm{gr}^F V)_{\mathrm{red}} \end{array}$$

在每个喷流生成元上都对易。如果 $d_q = 0$，则由（12）和引理 3.3，顶端箭头是单射的。因此（14）是单射的。若 核 ρ_k 中有一个非零齐次元素，由于 N（$k\Lambda_0$） 上的滤过在每个次数上都是有限的，该元素在其核中会有一个非零的首个 Li 符号。因此 核 $\rho_k = 0$。 □

引理 3.5。 设 W（$k\Lambda_0$） 是非一般的，并令 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。假设相关层级上的单仿射代数被定义为分次真空商。那么 W（（$k+\ell$）Λ_0） 是非一般的。特别地，这适用于可容许 k 及其非负整数平移。

证明。 由于 $W(k\Lambda_0)$ 是非一般的，存在 $0 \neq P \in U(\widehat{\mathfrak{n}_{+<0}})$ 使得 $P\mathbf{1} = 0$。令 $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_+ \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$，并令 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}$ 为由 P 中出现的根模生成的有限维幂零李代数。置

$$d = \dim \mathfrak{a}, \qquad m = \deg(P), \qquad E = U(\mathfrak{a})\mathbf{1} \subset L_\ell(\mathfrak{g}).$$

可积性意味着 E 是有限维的。记 $U(\mathfrak{a})_{\leq m}$ 为 $U(\mathfrak{a})$的 PBW 滤过。于是我们需要证明，存在足够大的 r 以及 $0 \neq Q \in U(\mathfrak{a})_{\leq r}$，使得 $Q(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = 0$，其中 Q 按对角方式作用。因此，

$$Q\mathbf{1} = 0 \quad \text{in} \quad W_{k+\ell}(\mathfrak{g}) \subset L_{k+\ell}(\mathfrak{g}).$$

为证明这一点，写作 $M = U(\mathfrak{a})\mathbf{1} \subset L_k(\mathfrak{g})$。由于 UP 湮灭真空，利用计算 PBW 向量基数的组合公式可得，对于 $r \geq m$,

$$\dim U_{\leq r}\mathbf{1} \leq \binom{r+d}{d} - \binom{r-m+d}{d}.$$

事实上，右乘 P 将 $U_{\leq r-m}$ 嵌入 $U_{\leq r}$，因为 U 是整环。在对角作用下，

$$U_{\leq r}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \subseteq (U_{\leq r}\mathbf{1}) \otimes E.$$

因此，其维数至多为

$$\dim(E) \cdot \left[\binom{r+d}{d} - \binom{r-m+d}{d}\right] \leq \frac{\dim(E) \cdot md}{r+d}\binom{r+d}{d}.$$

取 $r = \dim(E)md$，可使其严格小于 $\dim U_{\leq r}$。因此存在非零的 Q。 □

注 3.6。当李代数 $\mathfrak{a}$ 是交换的时，我们可以得到更强的结果，即对于某个 r，有 $P^r\mathbf{1} = 0$。这解释了为什么某些零向量会以更高次幂的形式传播。

3.3. A 型 A。

命题 3.7。 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N$、 $N \geq 2$，对每个 $q \geq 2$，均有 $d_q = 0$。

证明. 令 $m = \lfloor N/2 \rfloor$ 和 $x_0 = \sum_{i=1}^m E_{N+1-i,i}$。则 $x_0^2 = 0$。对于 $N = 2m$，记 J 为大小为 m 的反对角单位矩阵，并

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}_+.$$

方程 $[u, x_0] = 0$ 推出 $B = 0$ 和 $D = JAJ$。由于 A, D 是严格上三角矩阵，而 JAJ 是严格下三角矩阵，因此 $u = 0$。对于 $N = 2m + 1$，插入一个大小为一的中间块：

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} A & a & B \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

交换关系还迫使 $a = b = 0$，且再次有 $u = 0$。最后，$x_0^2 = 0$ 推出 $(\operatorname{ad} x_0)^3 y = x_0^3 y - 3x_0^2 y x_0 + 3x_0 y x_0^2 - y x_0^3 = 0$ 对每个 y均成立。因此，$x_0 \in \overline{\mathbb{O}_q}$对每个 $q \geq 2$ 由（11）可得，而引理 3.2 完成证明。□

3.4. 类型 C。

命题3.8. 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$，$n \geq 2$有

$$d_2 = (n-1)^2, \qquad d_q = 0 \quad (q \geq 3).$$

在每个分母为二的可容许层级上，主子空间都是非一般的。

证明。 使用辛实现

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{n}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} : A \text{ strictly upper triangular}, \ B = B^{\mathsf{T}} \right\}.$$

Then

$$\left[\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}, x_0 \right] = \begin{pmatrix} B & 0 \\ -A^{\mathsf{T}} - A & -B \end{pmatrix},$$

所以 $\mathfrak{g}^{x_0} \cap \mathfrak{n}_+ = 0$。由于 $x_0^2 = 0$，$(\operatorname{ad} x_0)^3 = 0$。小伴随表示是 $\Lambda^2 \mathbb{C}^{2n}$的本原部分。由 x_0 诱导的张量平方上的算子为 $x_0 \otimes 1 + 1 \otimes x_0$，其立方为零。因此，(11)将 x_0 置于$\mathbb{O}_q$ 中，对每个奇数 $q \geq 3$ 和每个偶数 $q \geq 4$均成立。这证明了消失断言。

对于 $q = 2$，轨道为 $\mathbb{O}_{\min}$，其分拆为 $(2,\ 1^{2n-2})$；参见 [11]。它通过 $v \mapsto (w \mapsto \omega(v,\ w)v)$与 $(\mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$ 等变同构。在标准表示上，$(0,\ e_1)$的 N_+-轨道的切空间由$(Be_1,\ -A^{\mathsf{T}} e_1)$构成，维数为 $n + (n-1)$。第二个块的第一个坐标是不变线性函数，因此没有一般轨道的维数更大。有限商保持轨道维数不变，从而得到 $d_2 = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$。

最后，(10表明，分母为二的层级恰好是 $k = -\frac{1}{2} + j$、$j \geq 0$。在适当的根向量归一化下，非零向量

$$\left(e_{2\varepsilon_1}(-1) e_{2\varepsilon_2}(-1) - e_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(-1)^2\right)^{j+1} \mathbf{1}$$

在简单商中消失；这就是 [9, 定理 4.2(3)]中回顾的奇异向量构造。它属于普遍主子空间，并且根据 PBW 在其中非零。或者，$j = 0$ 处的二次关系和引理 3.5 已足够。□

3.5. 正交型。

我们使用 Panyushev 的典范一般稳定子理论的以下推论 [25, 第 2.1 节和定理 5.3]。对于一个幂零轨道 $\mathbb{O} \subset \mathfrak{g}$，存在一个约化代数 $\mathfrak{s}_\star$ 使得

$$d(\mathbb{O}) = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{s}_\star - \operatorname{rank} \mathfrak{s}_\star\right). \tag{15}$$

对于 $N \geq 7$，所需的代数为

(16)

condition	$\mathfrak{s}_\star$
$x^2 \neq 0,\ \operatorname{rank} x \geq \lfloor N/2 \rfloor$	0
$x^2 \neq 0,\ r = \operatorname{rank} x < \lfloor N/2 \rfloor$	$\mathfrak{so}_{N-2r}$
partition $(2^{2m}, 1^{N-4m})$	$\mathfrak{so}_{N-4m} \oplus \mathfrak{sl}_2^{\oplus m}$.

一般 N_+-稳定子是相应的约化典范稳定子中的极大幂零子群，这解释了（15）。我们令 $\mathfrak{so}_1 = 0$ 并注意到 $\mathfrak{so}_2$ 是一维环面。

命题 3.9。对于 $\mathfrak{g} = B_\ell$，$\ell \geq 2$，有

$$d_2 = \left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil, \qquad d_q = 0 \quad (q \geq 3).$$

在每个分母为二的可容许层级 $k = -\ell + \frac{3}{2} + j, j \geq 0$ 上，主子空间都是非一般的。 –

证明。情形 $\ell = 2$ 由 $B_2 \cong C_2$得出，因此设 $\ell \geq 3$。小伴随表示是维数为 $2\ell + 1$ 的标准表示。因此 $\mathbb{O}_2 = \{x : \ x^2 = 0\}$，且其稠密轨道的分拆为

$$\lambda_2 = \begin{cases} (2^\ell, 1), & \ell \text{ even}, \\ (2^{\ell-1}, 1^3), & \ell \text{ odd}. \end{cases}$$

公式（15）–（16）给出 $\mathfrak{s}_\star = \mathfrak{sl}_2^{\oplus m}$当 $\ell = 2m$时，以及 $\mathfrak{s}_\star = \mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{sl}_2^{\oplus m}$当 $\ell = 2m+1$时。因此，分别有 $d_2 = m$或 $m + 1$。

对于其余分母，取 x，其分拆为

$$\lambda_* = \begin{cases} (3, 2^{\ell-2}, 1^2), & \ell \text{ even}, \\ (3, 2^{\ell-1}), & \ell \text{ odd}. \end{cases}$$

它的平方非零，且其秩至少为 ℓ；因此 $d(Gx) = 0$。由于 $x^3 = 0$，矩阵上的 $(\operatorname{ad} x)^5 = 0$。对于奇数 $q \geq 3$，这意味着 $(\operatorname{ad} x)^{2q} = 0$；对于偶数 $q \geq 4$，则有 $x^q = 0$。因此，两种情形下都有 $x \in \mathbb{O}_q$，由此通过半连续性证明了 $\overline{d_q} = 0$。

分母为二的层级由 (10) 得出。采用 Perše 归一化，令

$$Q_B = -\frac{1}{4} e_{\varepsilon_1}(-1)^2 + \sum_{i=2}^{\ell} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_i}(-1) e_{\varepsilon_1 + \varepsilon_i}(-1).$$

由 [27, 引理 3.2 和定理 3.3],，向量 $Q_B^{j+1}\mathbf{1}$ 在层级 $-\ell + \frac{3}{2} + j$ 处是奇异的，并且在简单商中为零。它是一个非零的正根 PBW 向量。这证明了其非一般性，也可由 $j = 0$ 根据引理 3.5 得出。□

命题 3.10。对于 $\mathfrak{g} = D_\ell$, $\ell \geq 4$，对每个 $q \geq 2$，都有 $d_q = 0$。

证明。可容许轨道公式 [6, 11] 给出

$$\mathbb{O}_2 = \mathbb{O}_{\lambda_2}, \qquad \lambda_2 = \begin{cases} (3, 2^{\ell-2}, 1), & \ell \text{ even}, \\ (3, 2^{\ell-3}, 1^3), & \ell \text{ odd}. \end{cases}$$

第一种情形的秩为 ℓ，因此 $\mathfrak{s}_\star = 0$。第二种情形的秩为 $\ell - 1$，因此 $\mathfrak{s}_\star = \mathfrak{so}_2$。其幂零部分为零，而（15）给出 $d_2 = 0$ 在两种情形下均成立。最后，类型 D 是单边的，并且

$$\overline{\mathbb{O}_2} = \{x : (\operatorname{ad} x)^4 = 0\} \subseteq \{x : (\operatorname{ad} x)^{2q} = 0\} = \overline{\mathbb{O}_q} \qquad (q \geq 2).$$

应用引理 3.2。 □

3.6. **例外型**。我们使用 [11] 中的轨道表以及 Panyushev 稳定子 [25, 第 2.1 节和定理 6。1]。公式（15）在此同样适用；特别地，环面典范稳定子的幂零部分是平凡的。

3.6.1. 类型 G_2。 设 α 为短单根， β 为长单根，并令 $\gamma = 2\alpha + \beta$和 $\theta = 3\alpha + 2\beta$。 [11, 表 1–2] 中的轨道列表为

(17)

q	$\mathbb{O}_q$	维数 $\mathbb{O}_q$
1	0	0
2	$\widetilde{A}_1$	8
3	A_1	6
4、5、6、9	$G_2(a_1)$	10
$q \geq 7,\ q \neq 9$	G_2	12.

~此处 A_1 是长根极小轨道， A_1 是短根轨道。

命题 3.11. 对于 G_2，有 $d_3 = 1$，且当 $q \geq 2$、 $q \neq 3$ 时， $d_q = 0$ 。

证明. 根串给出 $\mathfrak{g}^{f_\theta} \cap \mathfrak{n}_+ = \mathbb{C}e_\alpha$，因此 $d(A_1) \leq 1$。函数 $x \mapsto (x,\ e_\theta)$ 在 A_1 上非常数，且在 N_+ 下不变，因为 e_θ 在 $\mathfrak{n}_+$ 中是中心元。因此， N_+ 的一般轨道在这个六维簇上的维数至多为五。于是 $d(A_1) = 1$。

接下来取 $x = f_\gamma + f_\theta$。它与 f_γ 共轭，因为 $[f_{\alpha+\beta}, f_\gamma]$ 是 f_θ 和 $[f_{\alpha+\beta}, f_\theta] = 0$ 的非零倍数。对于六个正根， $[e_\rho, x]$ 的支撑为

ρ	nonzero components
α	$\mathfrak{g}_{-(\alpha+\beta)}$
β	$\mathfrak{g}_{-(3\alpha+\beta)}$
$\alpha+\beta$	$\mathfrak{g}_{-\alpha},\ \mathfrak{g}_{-\gamma}$
γ	$\mathbb{C}h_\gamma,\ \mathfrak{g}_{-(\alpha+\beta)}$
$3\alpha+\beta$	$\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_{-\beta}$
θ	$\mathfrak{g}_{\alpha+\beta},\ \mathbb{C}h_\theta.$

在线性相关关系中，依次比较 $\mathfrak{g}_\alpha$、 $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$、 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$、 $\mathfrak{g}_{-(3\alpha+\beta)}$、 $\mathbb{C}h_\gamma$、 ~和 $\mathfrak{g}_{-(\alpha+\beta)}$ 中的分量。所有系数均为零，因此 $\mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{n}_+ = 0$。于是 $d(A_1) = 0$。次正则和正则~轨道闭包包含 A_1，所以由（17）和半连续性可得所述结论。 □

为证明逆命题，必须分别处理两个分母为三的剩余类。固定 [12] 的归一化，并写作

$$a = e_\alpha, \quad b = e_\beta, \quad c = e_{\alpha+\beta}, \quad d = e_\gamma, \quad e = e_{3\alpha+\beta}, \quad f = e_\theta.$$

因此有 $[a, b] = c$、 $[a, c] = -2d$、 $[a, d] = -3e$、 $[b, e] = -f$ 和 $[c, d] = -3f$。记 $x_r = x(-r)$，并令

$$Q = \frac{1}{3}d_1^2 - e_1c_1 + f_1a_1 \in U(\mathfrak{u}). \tag{18}$$

By [12，命题 2。3]， $Q\mathbf{1}$ 在 $k = -\frac{5}{3}$ 处是奇异的。在 $k = -\frac{4}{3}$ 处，奇异态为

$$\begin{aligned} S = \Big(&\frac{2}{9}d_1^3 - d_1(e_1c_1 - f_1a_1) \\ &- 3\big(e_1^2b_1 - f_1e_1h_\beta(-1) - f_1^2f_\beta(-1)\big) + e_1f_2 - f_1e_2\Big)\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{19}$$

将 f 用作正最高根向量，与用记号 f_ρ 表示负根向量是不同的。

Le引理 3.12。 在泛仿射真空模中，采用上述归一化 ，

$$2Q^2\mathbf{1} = \big(d(-1) + e(-1)f_\alpha(0) + f(-1)f_{\alpha+\beta}(0)\big)S. \tag{20}$$

因此， $Q^2\mathbf{1} = 0$ 属于 $L_{-4/3}(G_2)$。

证明。 利用伴随作用，将右侧的零模作用移过 $f_{\alpha+\beta}=[f_\beta,f_\alpha]$，并将负模整理成PBW序。Cartan项和负根项相互抵消。具体验证如下，式（20）两边的有序表达式均为：

$$2a_1^2f_1^2-4a_1c_1e_1f_1+\frac{4}{3}a_1d_1^2f_1+2c_1^2e_1^2-\frac{4}{3}c_1d_1^2e_1+\frac{2}{9}d_1^4 \\ -4d_1e_1f_2+4d_1f_1e_2-4e_1f_1d_2.$$

这里只涉及零模与负模的括号，以及负模之间的括号，因此此恒等式与层级无关。在层级 $-\frac{4}{3}$，S根据 [12,Propositions 2.3–2.4], 属于极大理想，从而证明了最后一个断言。□

命题 3.13。 类型 G_2 中每个可容许的三分母主子空间都是非一般的。

证明。 可容许性条件给出如下不交并：

$$\left\{-\frac{5}{3}+j:j\in\mathbb{Z}_{\geq0}\right\}\sqcup\left\{-\frac{4}{3}+j:j\in\mathbb{Z}_{\geq0}\right\}.$$

向量 $Q\mathbf{1}$ 和 $Q^2\mathbf{1}$ 在 $N(k\Lambda_0)$ 中由 PBW 可知非零。根据 [12] 和引理 3.12，它们分别在两个初始级处消失。引理 3.5 涵盖所有整数平移。 □

3.6.2。 类型 E_6、 E_7 和 E_8。

命题 3.14。 设 $\mathfrak{g}$ 属于类型 E_6、 E_7 或 E_8。则对每个 $q\geq2$，都有 $d_q=0$ 。因此， $W(k\Lambda_0)$在每个不可积容许真空层级上都是一般的。

证明。 [11] 的表 5–7 列出了分母为二的轨道。将这些结果与 [25, 定理 6.1 及表 1] 结合，可得

$\mathfrak{g}$	$\mathbb{O}_2$	$\mathfrak{s}_\star$	d_2
E_6	$3A_1$	$\mathfrak{t}_2$	0
E_7	$4A_1$	0	0
E_8	$4A_1$	0	0.

这里 $\mathfrak{t}_2$ 表示一个二维环面代数。因此， d_2 的三个取值均由（15）得出为零。特别地，类型 E_6 中的非零典范稳定子并不妨碍一般性。S
ince t 这些李代数是单边的，可容许轨道闭包满足（见（11))

$$\overline{\mathbb{O}_q}=\{x\in\mathfrak{g}:(\operatorname{ad}x)^{2q}=0\}.$$

因此 $\mathbb{O}_2\subseteq\overline{\mathbb{O}_q}$ $(q\geq2)$。引理3.2 推出 $0\leq d_q\leq d_2=0$。关于主子空间的断言现在可由命题 3.4 得出。 □

3.6.3. 类型 F_4。

命题 3.15. 对于 $\mathfrak{g}$ 类型为 F_4，有

$$d_2=9,\qquad d_q=0\quad(q\geq3).$$

在不可积容许真空层级下，当且仅当分母为二时，主子空间是非一般的，等价地，当

$$k=-\frac{5}{2}+j,\qquad j\in\mathbb{Z}_{\geq0}.$$

证明。 [11]给出

$$\mathbb{O}_2 = A_1, \qquad \mathbb{O}_3 = \widetilde{A}_2 + A_1, \qquad \mathbb{O}_4 = A_2 + \widetilde{A}_1.$$

根据 [25, 定理 6.1 和表 1], 它们的典范稳定子代数分别为 $\mathfrak{sp}_6$，0，0。因此，公式（15）给出 $d_2 = \binom{21-3}{2} = 9$， $d_3 = d_4 = 0$. 令 ϱ_{θ_s}为小伴随表示。利用轨道闭包公式（11），可得

$$\overline{\mathbb{O}_3} \subseteq \overline{\mathbb{O}_q} \quad (q \geq 3 \text{ odd}), \qquad \overline{\mathbb{O}_4} \subseteq \overline{\mathbb{O}_q} \quad (q \geq 4 \text{ even}).$$

半连续性 性证明了对所有 $q \geq 3$， $d_q = 0$ 成立，因此这些分母下具有一般性 s.

剩下需要处理分母二。由于 $h^\vee = 9$ 和 $h = 12$，可容许性要求

$$k = -9 + \frac{p}{2}, \qquad p \geq 12, \qquad p \text{ odd}.$$

因此 $p = 13 + 2j$ 和 $k = -\frac{5}{2} + j$，其中 $j \geq 0$。

使用 [26], 的正根向量和归一化，并令

$$Q_F = -\frac{1}{4} e_{\varepsilon_1}(-1)^2 + \sum_{i=2}^{4} e_{\varepsilon_1 - \varepsilon_i}(-1) e_{\varepsilon_1 + \varepsilon_i}(-1).$$

由 [26, 引理 4.10 和定理 4.11]， $Q_F^{j+1}\mathbf{1}$ 是在层级 $-\frac{5}{2} + j$ 处的奇异向量，并且在简单商中消失。该表达式中出现的每个流都属于 $\mathfrak{n}_+$。此外，其最高 PBW 符号是一个非零二次多项式的 $(j+1)$ 次幂，因此该向量在普遍主子空间中非零。因此，对于任意 $j \geq 0$， $\underline{W}((-\frac{5}{2} + j)\Lambda_0)$都是非一般的。□

注记 3.16。 层级 $-\frac{5}{2}$ 是 F_4的最低可容许半整数层。它是余主可容许层；按照 [19]的术语，它不是边界主可容许层。

定理的证明 *1.1*。 命题 3.7、 3.8、 3.9、 3.10、 3.11、 3.14和 3.15 给出了 $d_q = 0$ 除所列例外之外的情形。命题3.4 证明了这些情形的一般性。类型 B、 C、 F_4 以及命题 3.13 确立了所有例外情形。特征标公式由 PBW 得出。 □

Cor推论 3.17。 在每个不可积容许真空层级，对于每个简单 $\mathfrak{g}$,

$$W(k\Lambda_0) \textit{ is generic} \iff d_q = 0 \iff \pi|_{\mathbb{O}_q} : \mathbb{O}_q \to \mathfrak{n}_+^* \textit{ is dominant}.$$

在这些情形下 $R_{W(k\Lambda_0)} \cong S(\mathfrak{n}_+)$ ，且主子空间是经典自由的。

4. 伴随簇：一个几何猜想

保留可容许层级 $k = -h^\vee + p/q$ 并记 $W = W(k\Lambda_0)$ 。第 3 节中确定的投影 $Y_q = \pi(\mathbb{O}_q) \subset \mathfrak{n}_+^*$。流代数包含诱导出一个满射

$$R_W \twoheadrightarrow \operatorname{im}\big(R_W \longrightarrow (R_{L_k(\mathfrak{g})})_{\mathrm{red}}\big) = \mathbb{C}[Y_q].$$

因此 $Y_q \subseteq X_W \subseteq \mathfrak{n}_+^*$，且（12）给出

$$|\Delta_+| - d_q = \dim Y_q \leq \dim X_W \leq |\Delta_+|.$$

猜想 **ure 4.1.** 对于每个可容许层，典范映射诱导出一个同构

$$(R_{W(k\Lambda_0)})_{\mathrm{red}} \cong \mathbb{C}[Y_q].$$

特别地， $\dim X_{W(k\Lambda_0)} = |\Delta_+| - d_q$。

因此，约化伴随簇只取决于 q，但非约化的C_2-结构可能取决于分子。此猜想并未断言经典自由性。当 $d_q = 0$ 时，由推论 3.17可知此结论成立。对于 $q = 1$，可积性使得每个正根生成元在 R_W中都是幂零的，因此 $X_W = Y_q = \{0\}$。其余投影维数已由几何方法确定，分别为

$\mathfrak{g}$	q	$\mathbb{O}_q$	$\dim Y_q$
B_ℓ	2	$(2^{2m}, 1^{2\ell+1-4m})$, $m = \lfloor \ell/2 \rfloor$	$\ell^2 - \lceil \ell/2 \rceil$
C_n	2	$(2, 1^{2n-2}) = \mathbb{O}_{\min}$	$2n - 1$
F_4	2	$A_1 = \mathbb{O}_{\min}$	15
G_2	3	$A_1 = \mathbb{O}_{\min}$	5.

5. 辛秩二主子空间

5.1. 辛玻色子约定。 我们首先固定一种适用于任意辛秩的实现。在本节中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$和 $W = W(-\frac{1}{2}\Lambda_0)$。

令 $\mathcal{B}_n$ 为由偶场 β_i，γ_i, $1 \le i \le n$生成的顶点代数，其奇异算子乘积为

$$\beta_i(z)\gamma_j(w) \sim \frac{\delta_{ij}}{z-w}, \qquad \gamma_i(z)\beta_j(w) \sim -\frac{\delta_{ij}}{z-w}, \tag{21}$$

其余所有两两 OPE 均为正则。赋予 β_i 和 γ_i 共形权 $1/2$。底层 Fock空间是由它们的负创造模构成的多项式空间。特别地，

$$R_{\mathcal{B}_n} = \mathbb{C}[b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n], \qquad \operatorname{gr}^F \mathcal{B}_n \cong J_\infty(R_{\mathcal{B}_n}). \tag{22}$$

这些二次场实现层级为 $-1/2$ [18]的仿射辛代数。由所有二次流从真空生成的子代数是简单真空代数 $L_{-1/2}(\mathfrak{sp}_{2n})$。我们只使用其正根流，并采用以下便于使用的重标度：

$$E_{ij} = :\beta_i\beta_j: \quad (1 \le i \le j \le n), \qquad D_{ij} = :\beta_i\gamma_j: \quad (1 \le i < j \le n). \tag{23}$$

它们的根权分别为 $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ 和 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$。这些场强生成 W .

式（23）中的归一化使秩一对称矩阵关系的系数为一。在约定 $X_{2\varepsilon_i} = -\frac{1}{2}:\beta_i^2:$ 中，则有 $E_{ii} = -2X_{2\varepsilon_i}$。

对于下面的秩二讨论，取 $n = 2$ 并令

$$X = E_{11}, \qquad Y = E_{22}, \qquad Z = E_{12}, \qquad U = D_{12}. \tag{24}$$

场 X、Y、Z 具有相互正则的算子乘积展开。这四个生成元之间唯一非零的奇异算子乘积展开（忽略反向）为

$$U(z)Y(w) \sim \frac{-2Z(w)}{z-w}, \qquad U(z)Z(w) \sim \frac{-X(w)}{z-w}.$$

存在一个精确的正规序关系

$$:XY: - :ZZ: = 0. \tag{25}$$

此恒等式中不发生收缩。

5.2. 二次曲面及其射流代数。 令 $Q = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy - z^2)$，并使用系数变量 x_r、y_r、z_r、$r \ge 0$。令

$$f_r = \sum_{a+b=r} (x_a y_b - z_a z_b), \qquad Q_m = \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_m, z_0, \dots, z_m]}{(f_0, \dots, f_m)}. \tag{26}$$

下一个结果是已知的；参见 [22, 定理 3.1]。

引理 5.1。 对于每个 $m \geq 0$， Q_m 都是维数为 $2(m+1)$的整完全交。过渡映射 $Q_m \to Q_{m+1}$ 是单射，并且 $J_\infty(Q)$ 是整环。

注 5.2。 该引理直接证明了 A_1 曲面奇点。这与 [23] 中确立的典范奇点与不可约喷射概形之间的一般关系相符。

标准单项式。方便起见，记作 $x[i] = x_{i-1}$、 $y[i] = y_{i-1}$和 $z[i] = z_{i-1}$，使得这些变量的权均为 i。

引理 5.3。 不能被整除的单项式的剩余类

$$z[i]^2 \quad or \quad x[i+1]y[i], \qquad i \geq 1, \tag{27}$$

构成 $J_\infty(Q)$ 的一组基。

证明。 固定 m，并对 Q_m 的变量采用分次反字典序，变量按降序排列

$$y[m+1] > z[m+1] > x[m+1] > \cdots > y[1] > z[1] > x[1].$$

对于通常次数相同的单项式，按以下顺序比较指数

$$x[1], z[1], y[1], x[2], z[2], y[2], \ldots;$$

第一个不同位置上的指数较小者对应较大的单项式。直接由 (26可得，首项单项式为

$$\mathrm{LM}(f_{2i-2}) = z[i]^2, \qquad \mathrm{LM}(f_{2i-1}) = x[i+1]y[i],$$

当所示关系出现在 $f_0, \ldots, f_m$ 中时，结论成立。事实上，极大项会避开尽可能小的指标；在剩余项中，所述变量顺序选出显示的这一项。这些首项单项式两两互素。因此，根据 Buchberger 乘积判据， $f_0, \ldots, f_m$ 是 Gröbner 基。通常的标准单项式构成 Q_m 的一组基。

转到弧时，固定任意一个权 d。权大于 d 的变量以及权大于 d 的关系不会影响这个齐次分量。因此，有限的标准单项式描述在每个权上都会稳定，并给出 (27)。 □

推论 5.4。令 $\mathrm{wt}(x_r) = \mathrm{wt}(y_r) = \mathrm{wt}(z_r) = r+1$,

$$\mathrm{Hilb}_q J_\infty(Q) = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^2}.$$

证明。 由引理 5.1， $m+1$ （26）中的方程构成一个权为 2、3、.....、 $m+2$ 的正则序列。因此

$$\mathrm{Hilb}_q Q_m = \frac{\prod_{r=0}^{m}(1-q^{r+2})}{\prod_{r=0}^{m}(1-q^{r+1})^3}.$$

取其 逐系数极限即可得到结果。等价地，引理 5.3给出了乘积

$$\prod_{i\geq 1}(1+q^i)\,\frac{1}{1-q}\prod_{i\geq 1}\left(\frac{1}{1-q^i}+\frac{1}{1-q^{i+1}}-1\right).$$

因子 $(1-q)^{-1}$ 计入了 $x[1]$; 每个括号都计数了 $y[i]$和 $x[i+1]$互斥的使用情况。由于括号为 $(1-q^{2i+1})/((1-q^i)(1-q^{i+1}))$，乘积可化简为相同的表达式。□

5.3. **秩二中的 C_2-代数**。令 $R = \mathbb{C}[x,y,z,u]/(xy - z^2)$。场按式（24）归一化。

命题 5.5。 将 x, y, z, u 映到 X, Y, Z, U 的类，诱导出一个同构 $R \cong R_W$。此外，映射 $R_W \to R_{\mathcal{B}_2}$ 是单射。

证明。 强生成和（25）给出一个满射 $R \twoheadrightarrow R_W$。与由 $W \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ 诱导的映射复合，得到

$$\iota_0 : R \longrightarrow \mathbb{C}[b_1, b_2, c_1, c_2], \qquad (x,y,z,u) \longmapsto (b_1^2, b_2^2, b_1 b_2, b_1 c_2). \tag{28}$$

我们证明这个复合映射是单射。

环 R 是一个整环。在 x 处局部化，得到 $R[x^{-1}] = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, z, u]$，其中 $y = z^2/x$。添加满足 $b_1^2 = x$ 的 b_1 后，公式 $b_2 = z/b_1$ 和 $c_2 = u/b_1$ 反演该参数化； c_1 是另一个自由变量。这个扩张是忠实平坦的（事实上，在添加 c_1 之前，它是秩二自由模）。因此，局部化映射是单射。由于 x 是 R 中的非零因子， ι_0 是单射。两个断言均由分解 $R \twoheadrightarrow R_W \to R_{\mathcal{B}_2}$ 得出。□

5.4. **弧单射性**。

命题 5.6. 对于任意 $m \geq 0$， 由 m-射流代数诱导的映射 (28) 是单射。特别地，

$$J_\infty(R) \hookrightarrow J_\infty\big(\mathbb{C}[b_1, b_2, c_1, c_2]\big).$$

证明。 记 $R_m = Q_m[u_0, \ldots, u_m]$。由引理 5.1，此环是一个整环。以下所有级数均在模 t^{m+1} 下截断。将 x_0 取逆后，方程

$$[t^r]\big(x(t)y(t) - z(t)^2\big) = 0, \qquad 0 \leq r \leq m,$$

递归地确定 y_0，……， y_m。因此

$$A := R_m[x_0^{-1}] = \mathbb{C}[x_0^{\pm 1}, x_1, \ldots, x_m, z_0, \ldots, z_m, u_0, \ldots, u_m].$$

引入一个新的不定元 s ，并构造

$$A' = A[s]/(s^2 - x_0).$$

环 A' 是一个以 $\mathbf{1}$， s 为基的自由 A-模，因此自然映射 $A \longrightarrow A'$ 是单射。此外， s 可逆，其逆为 sx_0^{-1}。存在唯一的截断级数

$$b_1(t) = s + \sum_{r=1}^{m} b_{1,r} t^r \in A'[t]/(t^{m+1})$$

具有常数系数 s 并满足 $b_1(t)^2 = x(t)$。事实上，其系数依次由下式确定：

$$b_{1,r} = \frac{1}{2s}\left(x_r - \sum_{a=1}^{r-1} b_{1,a} b_{1,r-a}\right), \qquad 1 \leq r \leq m.$$

由于其常数系数可逆， $b_1(t)$ 在 $A'[t]/(t^{m+1})$ 中可逆。因此，我们可以令 $b_2(t) = {}^{z}{}_{(t)\, b_1(t)}\ c_2(t) = {}^{u}{}_{(t)\, b_1(t)}$。手是，二次曲面方程给出 $b_2(t)^2 = {}^{z}{}_{(\ t^{\,2})()}{}_{x\ t} = y(t)$。 ——

Let

$$T_m = \mathbb{C}[b_{1,r}, b_{2,r}, c_{1,r}, c_{2,r} : 0 \leq r \leq m]$$

是目标喷射代数。在该参数化下， x_0 映射到 $b_{1,\,0}^2$，因此局部化映射的目标为 $T_m[b_{1,0}^{-1}]$。前面的公式给出了一个同构

$$T_m[b_{1,0}^{-1}] \cong A'[c_{1,0}, \ldots, c_{1,m}],$$

在此同构下，$b_{1,\ 0}$ 对应于 s ，而从 A 出发的映射是其自然包含。逆映射通过取.....中的系数得到

$$x(t) = b_1(t)^2, \qquad z(t) = b_1(t)b_2(t), \qquad u(t) = b_1(t)c_2(t).$$

因此，局部化喷射映射 $R_m[x_0^{-1}] \to T_m[b_{1,0}^{-1}]$ 是单射。由于 R_m 是整环且 $x_0 \neq 0$，所以 $R_m \longrightarrow R_m[x_0^{-1}]$ 是单射。由此可得，原映射 $R_m \longrightarrow T_m$ 是单射。最后，取直接极限即可证明弧代数的断言。□

定理 5.7。 主子空间 $W = W(-\frac{1}{2}\Lambda_0) \subset L_{-1/2}(\mathfrak{sp}_4)$是经典自由的，并且

$$\operatorname{gr}^F W \cong \frac{\mathbb{C}[x_r, y_r, z_r, u_r : r \geq 0]}{\left(\sum_{a+b=r}(x_a y_b - z_a z_b) : r \geq 0\right)}. \tag{29}$$

其特征标为

$$\operatorname{ch} W = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^3}.$$

嵌入 $W \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ 对于 Li 滤过是严格的。

证明。 命题 5.5 确定了 R_W 及其自由场符号映射。命题 5.6 证明了应用 J_∞后映射的单射性。由于 $\mathcal{B}_2$ 由 (22) 可知是经典自由的，定理 2.1 给出经典自由性和 (29)。严格性由注 2.2得出。

权为 u_r的独立变量 $r+1$贡献 $(q;\ q)_\infty^{-1}$。将其与推论 5.4结合，并利用每个共形次数中 Li 滤过的有限性，即可得到特征。□

推论 5.8。 令 s和 t分别记录 ε_1 和 ε_2 权。则

$$\operatorname{ch} W(s,t;q) = \frac{(s^2t^2q^2;q)_\infty}{(s^2q;q)_\infty (t^2q;q)_\infty (stq;q)_\infty (st^{-1}q;q)_\infty}.$$

这是解释为 形式幂级数，其中 q 的系数是关于 s、t的 $Laurent$ 多项式 .

证明。 式（29）中的四族变量具有根权 $2\varepsilon_1$、$2\varepsilon_2$、$\varepsilon_1+\varepsilon_2$和 $\varepsilon_1-\varepsilon_2$。每个$f_r$ 具有根权 $2\varepsilon_1+2\varepsilon_2$ 和共形次数 $r+2$。有限喷射正则序列公式接着取逐系数极限，即得到该表达式。□

5.5. **更高层级的** $sp(4)^{-\frac{1}{2}+\ell}$**主子空间**。 为了将上一节的结果推广到层级 $-\frac{1}{2}+\ell$，我们需要这一已知事实（参见 Eisenbud–Frenkel 附录中关于 [23]的定理 A.4）。

引理 5.9。 设 A 是一个非负分次的 $\mathbb{C}$-代数，且各分次分量均为有限维。假设 f_0、f_1、.....都是次数为正且趋于无穷大的齐次元素，并且每个有限初始序列都是正则序列。那么 f_i 代数独立，而 $A/$（f_0、f_1、.....）的任意齐次向量空间基，提升到 A 后，都是 A 关于 $\mathbb{C}[f_0, f_1, \ldots]$ 的一组基。

定理 5.10。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4$，并设

$$W_\ell := W\big((\ell - \tfrac{1}{2})\Lambda_0\big), \qquad \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

取正根向量

$$x = e_{2\varepsilon_1}, \qquad y = e_{2\varepsilon_2}, \qquad z = e_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \qquad u = e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2},$$

归一化，使得

$$[u,y] = 2z, \qquad [u,z] = x, \qquad [u,x] = 0.$$

Set

$$P = \mathbb{C}[x,y,z,u], \qquad F = xy - z^2.$$

于是，典范映射诱导出同构

$$R_{W_\ell} \cong P/(F^{\ell+1}), \qquad J_\infty\big(P/(F^{\ell+1})\big) \cong \operatorname{gr}^F W_\ell.$$

特别地， W_ℓ 是经典自由的。

将四个流的共形次数都设为一，其特征标为

$$\operatorname{ch} W_\ell(q) = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^3} \sum_{n_1,\dots,n_\ell \ge 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_\ell^2+N_1+\cdots+N_\ell}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_\ell}}, \qquad N_i = n_i + \cdots + n_\ell.$$

等价地，

$$\operatorname{ch} W_\ell(q) = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^3} \prod_{\substack{m\ge 1 \\ m\not\equiv 0,\pm 1 \pmod{2\ell+3}}} \frac{1}{1-q^m}.$$

F或者 $\ell = 0$，多重求和与附加乘积都解释为1。

证明。 $\ell = 0$这一情形就是上文证明的 $W(-\frac{1}{2}\Lambda_0)$ 的经典自由性定理。我们假设$\ell \ge 1$ 并写作

$$A_\ell = J_\infty\big(P/(F^{\ell+1})\big).$$

对角映射。根据 Adamović 的奇异向量公式 [1, 定理 3。1], 态

$$\big(x(-1)y(-1) - z(-1)^2\big)^{\ell+1}\mathbf{1}$$

在 W_ℓ 中消失。因此存在一个典范满射

$$A_\ell \twoheadrightarrow \operatorname{gr}^F W_\ell.$$

[1, 定理 3.4], 的对角嵌入迭代 ℓ 次并限制到主子空间后，得到

$$W_\ell \hookrightarrow W_0 \otimes W(\Lambda_0)^{\otimes \ell}.$$

主子空间 $W(\Lambda_0)$ 根据 [21, 推论 6.4], ，利用 $\mathfrak{sp}_4 \cong \mathfrak{so}_5$ 是经典自由的。由于经典自由性在张量积下保持不变，我们得到一个复合映射

$$A_\ell \longrightarrow \operatorname{gr}^F W_\ell \longrightarrow A_0 \otimes J_\infty(R_{W(\Lambda_0)})^{\otimes \ell}. \tag{30}$$

我们将证明这个复合映射是单射。

代数 $R_{W(\Lambda_0)}$ 由四个一次流类生成，且没有线性关系。因此，赋值

$$y \longmapsto s, \qquad x, z, u \longmapsto 0$$

定义了一个交换代数的满射

$$R_{W(\Lambda_0)} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[s]/(s^2).$$

事实上，每个齐次定义关系的次数至少为二，因此在此赋值下均为零。令

$$D_r = J_\infty\big(\mathbb{C}[v]/(v^{r+1})\big).$$

复合式（30）与弧代数上的诱导映射，得到

$$\Phi_\ell : A_\ell \longrightarrow A_0 \otimes D_1^{\otimes \ell}.$$

用系数记法表示，其对生成级数的作用为

$$x(t) \longmapsto x(t), \qquad z(t) \longmapsto z(t), \quad u(t) \longmapsto u(t),$$
$$y(t) \longmapsto y(t) + s_1(t) + \cdots + s_\ell(t),$$

其中每个 s_i 都来自某个 ℓ 张量因子。

接下来我们证明局部化后的单射性。将 x_0 取逆后，级数 $x(t)$ 是可逆的。变量替换

$$v(t) := y(t) - \frac{z(t)^2}{x(t)}$$

因此将方程 $F(t)^{\ell+1} = 0$ 识别为 $v(t)^{\ell+1} = 0$。于是

$$A_\ell[x_0^{-1}] \cong H \otimes D_\ell,$$

其中

$$H = \mathbb{C}[x_0^{\pm 1}, x_j \ (j \geq 1), z_j, u_j \ (j \geq 0)].$$

类似地， $A_0[x_0^{-1}] \cong H$。在这些识别下， Φ_ℓ 的局部化为

$$\mathrm{id}_H \otimes \delta_\ell : H \otimes D_\ell \longrightarrow H \otimes D_1^{\otimes \ell}, \qquad \delta_\ell(v(t)) = s_1(t) + \cdots + s_\ell(t).$$

该映射 δ_ℓ 是单射。事实上，层级r 真空主子$\widehat{\ }$空间的标准表示 $\mathfrak{sl}_2$ 将其作为交换微分代数识别为 D_r。层级ℓ 真空模到 ℓ 个层级-一真空模的张量积中的对角嵌入，随后恰好限制为 δ_ℓ；参见 [15,定理 3.1 和 5。1]因此，在 x_0处局部化后仍是单射。

最后，我们需要证明不存在 x_0-挠。我们证明乘以 x_0 在 A_ℓ上是单射的。令

$$S_m = \mathbb{C}[x_j, y_j, z_j, u_j : 0 \leq j \leq m], \qquad F(x(t), y(t), z(t)) = \sum_{j \geq 0} F_j t^j.$$

二次曲面 $xy - z^2 = 0$ 是一个有理双点。正如我们已经讨论过的，它的有限喷射概形是约化的不可约完全交。与 u 直线的喷射的乘积也具有这一性质。特别地， $S_m/(F_0, \ldots\ldots, F_m)$ 是一个整环，其中 x_0 非零。因此， $F_0, \ldots\ldots, F_m, x_0$ 是 S_m 中的正则序列。

采用正分次，令 $\deg x_j = \deg y_j = \deg z_j = \deg u_j = j + 1$。对前述齐次正则序列进行置换可知， $F_0, \ldots\ldots, F_m$ 的像在$S_m/(x_0)$ 中构成正则序列。因此，分次提升论证表明， S_m 和 $S_m/(x_0)$ 都是自由的，其系数环为

$$B_m = \mathbb{C}[F_0, \ldots, F_m].$$

因此， B_m-模的正合序列

$$0 \longrightarrow S_m \xrightarrow{x_0} S_m \longrightarrow S_m/(x_0) \longrightarrow 0$$

与 B_m 的任意商张量后仍然正合。

设 $K_{\ell,\ m} \subset B_m$ 由 $t^0, \ldots\ldots, t^m$ 在

$$(F_0 + F_1 t + \cdots + F_m t^m)^{\ell+1}.$$

Then

$$S_m/K_{\ell,m}S_m = J_m\big(P/(F^{\ell+1})\big).$$

前述的正合性证明了 x_0 是该有限射流代数中的非零因子。取直接极限可证明 A_ℓ也具有同样的性质。因此， $A_\ell \hookrightarrow A_\ell[x_0^{-1}]$，由已证明的局部化单射性可知， Φ_ℓ 是单射。由于 Φ_ℓ 经过满射 $A_\ell \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^F W_\ell$分解，该满射是同构。取Li次数零得到 $R_{W_\ell} \cong P/(F^{\ell+1})$。

现在很容易计算特征标。将引理 5.9 应用于 $F(t)^{\ell+1}$ 的系数，便得到

$$\mathrm{Hilb}\, A_\ell = \mathrm{Hilb}\, A_0 \ \mathrm{Hilb}\, D_\ell,$$

其中，在此公式中， D_ℓ 的生成元 v 的次数为二。我们有

$$\operatorname{Hilb} A_0 = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^3},$$

而 D_ℓ 的标准差分条件基给出

$$\operatorname{Hilb} D_\ell = \sum_{n_1,\dots,n_\ell \geq 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_\ell^2+N_1+\cdots+N_\ell}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_\ell}}.$$

乘积公式由 $i=1$ 安德鲁斯–戈登恒等式推出。 □

6. Classical freeness in type G_2

我们回到第 3.6.1 节的例外三分母族，并在其初始级 $-5/3$处证明引言中宣布的经典自由性结论。

取 $\mathfrak{g} = G_2$并保留第 a、 b、 c、 d、 e、 f节 3.6.1中的根向量归一化，使得

$$[a,b]=c, \quad [a,c]=-2d, \quad [a,d]=-3e, \quad [b,e]=-f, \quad [c,d]=-3f. \tag{31}$$

6.1. 情形 $\ell = -\frac{5}{3}$。 令 $V = L_{-5/3}(\mathfrak{g})$ 和 $W = W(-\frac{5}{3}\Lambda_0)$。字母 f是正的最高根向量，而不是负根向量。六个流的仿射次数均为一。

定理 6.1。设

$$A = \mathbb{C}[a,b,c,d,e,f]/(Q), \qquad Q = \frac{1}{3}d^2 - ce + af,$$

其中所有六个生成元的次数均为一。于是，自然映射给出

$$R_W := W/C_2(W) \cong A, \qquad J_\infty(A) \cong \operatorname{gr}^F W.$$

特别地， W 是经典自由的，并且

$$\operatorname{ch} W(q) = \frac{(q^2;q)_\infty}{(q;q)_\infty^6} = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^5}. \tag{32}$$

这里，喷射变量 $u^{(j)}$ 的次数为 $j+1$。

我们先记录证明中用到的两个几何步骤。

引理6.2。 利用不变非退化形式识别$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ 。限制映射

$$\pi : \overline{\mathbb{O}_{\min}} \longrightarrow \mathfrak{n}_+^*$$

其像在超曲面 $Y = \operatorname{Spec} A$ 中稠密。等价地，

$$\ker\bigl(S(\mathfrak{n}_+) \longrightarrow \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_{\min}}]\bigr) = (Q).$$

证明。 由 [12,命题 2.3 和 2.4]，向量

$$s = \left(\frac{1}{3}d(-1)^2 - e(-1)c(-1) + f(-1)a(-1)\right)\mathbf{1} \tag{33}$$

在 V 中消失。此公式中的乘积涉及彼此对易的元素，因此其 C_2 符号恰为Q。此外，

$$X_V = \overline{\mathbb{O}_{\min}}, \tag{34}$$

根据极小轨道定理（在 [7, 定理 6.2]中回顾；另见 [9]） ， Q 在 π 的像上消失。

取 $\xi \in \mathbb{O}_{\min}$ 为负最高根向量的一个非零倍数，并将其归一化，使得 $\xi(f) = 1$。那么 $\xi(a) = \xi(b) = \xi(c) = \xi(d) = \xi(e) = 0$。对于 $x \in \mathfrak{g}$，取其在某个线性函数 $u \in \mathfrak{g}$ 上的取值为 $\xi([u,x])$ 的切向量；改变整体符号不会影响其张成空间。

根据 (31)，方向 $x = e$、d、c、b 分别使坐标 b、c、d、e 产生独立变化，其系数为 -1、-3、3、1。在 ξ 处，它们在 a、b、c、d、e、f 中的其他坐标均为零。取 $h \in \mathfrak{h}$，使得 $\theta(h) = 1$。方向 $x = h$ 使 f 产生非零变化，而其他五个坐标的变化均为零。因此秩为 $d\pi_\xi \geq 5$。

二次型 Q 在变量 a, c, d, e, f 上的秩为五。它是不可约的，且 Y 的维数为五，其中 b 是自由变量。由于 π 的像包含于 Y 中且维数至少为五，其闭包就是 Y。这就证明了断言。□

引理 6.3。设 $Y = Spec(A)$。每个有限喷射概形 $J_m Y$ 都是约化的且不可约，其坐标环是完全交。弧代数 $J_\infty(A)$ 是一个整环。此外，由 π 诱导的拉回是单射：

$$J_\infty(A) \hookrightarrow \mathbb{C}[J_\infty \overline{\mathbb{O}_{\min}}]_{\mathrm{red}}. \tag{35}$$

引理 6.3 的证明。写作 $Y = \mathbb{A}^1 \times Z$，其中 $Z \subset \mathbb{A}^5$ 是 $Q = 0$ 中的五秩二次锥，位于a, c, d, e, f中。它唯一的奇点是一个有理的普通双重点。根据 [23, 定理 0.1 和命题 1.5]，，每个 $J_m Z$ 都是不可约且约化的。因此，它的维数为 $Z \setminus \{0\}$上的喷射概形维数 $4(m+1)$，所以 Q 的 $m+1$ 喷射在 $5(m+1)$ 个变量中构成正则序列，且 $J_m Z$ 是完全交。$J_m Y = \mathbb{A}^{m+1} \times J_m Z$也同样成立。截断映射是支配的，因此 $J_\infty(A) = \varprojlim_m \mathbb{C}[J_m Y]$ 是一个整环。最后，(35)由引理6.2和引理 3.3 应用于 π得到：$\mathbb{O}_{\min} \to \overline{Y}$。□

定理 *6.1* 的证明。这六个流强生成 W，且（33）在 W 中成立。因此存在一个自然满射 $A \twoheadrightarrow R_W$。它与由 $W \subset V$ 诱导的映射复合后为

$$A \twoheadrightarrow R_W \longrightarrow R_V \twoheadrightarrow (R_V)_{\mathrm{red}} = \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_{\min}}].$$

由引理 6.2，该复合映射是单射。因此 $A \cong R_W$。

对于经典自由性，应用典范的弧到 Li 分次映射以及 Li 滤过的函子性，可得

$$J_\infty(A) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^F W \longrightarrow \mathrm{gr}^F V \twoheadrightarrow (\mathrm{gr}^F V)_{\mathrm{red}}. \tag{36}$$

环境代数 V 是准光滑的，因为其伴随簇是极小幂零轨道的闭包，并且只有两个辛叶。根据 [10, 定理 9.2]，，其约化奇异支撑是其伴随簇的约化弧空间。用坐标环上的典范映射表示，这就得到

$$(\mathrm{gr}^F V)_{\mathrm{red}} \cong \mathbb{C}[J_\infty \overline{\mathbb{O}_{\min}}]_{\mathrm{red}}.$$

在此同构下，（36）中的复合映射恰好是（35）中的拉回：二者都将每个喷流生成元映射到相应的正根坐标的导数。因此该复合映射是单射。由于（36）中的第一个箭头是满射的，所以它是同构。

最后，在 $J_m(A)$ 中，对于每个 $j+1$，有六个权为 $0 \leq j \leq m$的变量，而 t^r 在 $Q(u(t))$ 中的系数的权为 $r+2$。引理 6.3 给出

$$\mathrm{Hilb}\, J_m(A) = \frac{\prod_{r=0}^{m}(1-q^{r+2})}{\prod_{j=0}^{m}(1-q^{j+1})^6}.$$

取逐系数极限即可证明（32），因为 Li 滤过在每个共形次数上都是有限的，因此保持分次维数不变。□

备注 6.4。该论证并未假设环境代数 V 是经典自由的，也未假设 R_V 是约化的。候选主弧代数需要满足约化性，而准光滑定理仅给出环境代数的约化奇异支撑。同样，$R_W \to R_V$ 和 $\mathrm{gr}^F W \to \mathrm{gr}^F V$ 的单射性是通过所示复合映射证明的，而非根据包含 $W \subset V$作出的假设。

6.2. **情形 层级** $-\frac{4}{3}$。令 $V = L_{-\frac{4}{3}}(\mathfrak{g})$ 和 $W = W(-\frac{4}{3}\Lambda_0)$。由第 3 节；引理 3.12可知

$$P/(F^2) \twoheadrightarrow R_W,$$

其中

$$P = \mathbb{C}[a,b,c,d,e,f], \qquad F = \frac{1}{3}d^2 - ec + fa,$$

使用与定理5.10 证明中相同的论证，可得

$$\operatorname{Hilb} J_\infty(P/(F^2)) = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^5} \sum_{r\geq 0} \frac{q^{r(r+1)}}{(q;q)_r} = \frac{1}{(1-q)(q;q)_\infty^5 (q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}.$$

这可由标准公式得到

$$H_{J_\infty(P/(F^2))} = H_{J_\infty(P/(F))} \cdot H_{J_\infty(\mathbb{C}[u]/(u^2))},$$

其中 u 的权重为二。

遗憾 因此，我们无法证明 $J_\infty(P/(F^2))$ 与 W 同构，所以暂且将其搁置。 a

猜想 6.5。 $W(-\frac{4}{3}\Lambda_0)$ 是经典自由的，并且 $W(-\frac{4}{3}\Lambda_0) \cong J_\infty(P/(F^2))$。

7. 辛秩三情形

从代数和组合的角度来看，本部分是本文中最为精细微妙的部分。

在本节中，令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6$、 $W = W(-\frac{1}{2}\Lambda_0)$以及 $N = N(-\frac{1}{2}\Lambda_0)$。我们使用第5.4节中的自由场，并记

$$(X,Y,Z,P,Q,R,A,B,D) = (E_{11},E_{22},E_{12},E_{13},E_{23},E_{33},D_{13},D_{23},D_{12}).$$

令 $\mathcal{A} \subset W$ 为由前八个生成元生成的顶点子代数，其中省略 D。我们确定 W 的 C_2-代数及特征标。特征标的计算结合了来自函数模型的下界与 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$ 的退化。随后，我们给出一个逐系数的希尔伯特级数判据，用于判定 $\mathcal{A}$ 的经典自由性，并解释其对 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$ 的影响。

7.1. **关系与候选 C_2-代数**。这八个二次零态为

$$\begin{aligned} &:XY:-:ZZ:, \quad :XR:-:PP:, \quad :YR:-:QQ:, \quad :XQ:-:ZP:, \\ &:ZQ:-:YP:, \quad :ZR:-:PQ:, \quad :XB:-:ZA:, \quad :ZB:-:YA:. \end{aligned} \tag{37}$$

对于以下三个三次零态，设 $U_i = U_{(-i)}$，并令每个显示的词作用于$\mathbf{1}$:

$$s_1 = (Q_1A_1^2 - P_1A_1B_1 + 2Z_1A_2 - 2X_1B_2)\mathbf{1}, \tag{38}$$

$$s_2 = (Q_1A_1B_1 - P_1B_1^2 + 2Y_1A_2 - 2Z_1B_2)\mathbf{1}, \tag{39}$$

$$s_3 = (Q_1R_1A_1 - P_1R_1B_1 + Q_1P_2 - P_1Q_2)\mathbf{1}. \tag{40}$$

它们为零可由自由场展开得出。导数修正是关系的一部分，不能省略。

令 x, y, z, p, $\mathfrak{q}$ r, a, b, d 表示相应的 C_2-类；符号 $\mathfrak{q}$ 用于区分 Q 的类与特征标变量 q。设 $h = pb - \mathfrak{q}a$，并且

$$\begin{aligned} I_2 = (\, &xy - z^2,\ xr - p^2,\ yr - \mathfrak{q}^2,\ x\mathfrak{q} - zp,\ z\mathfrak{q} - yp, \\ &zr - p\mathfrak{q},\ xb - za,\ zb - ya\,). \end{aligned}$$

零态给出了典范满射

$$R_{\mathrm{cand}} = \frac{\mathbb{C}[x,y,z,p,\mathfrak{q},r,a,b,d]}{I_2 + (ah, bh, rh)} \twoheadrightarrow R_W, \tag{41}$$

and

$$J_\infty(R_{\mathrm{cand}}) \twoheadrightarrow J_\infty(R_W) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^F W. \tag{42}$$

7.2. C_2-代数 W。 在这一部分中，我们确定 C_2 代数 R_W 及其伴随簇。

Let

$$S_8 = \mathbb{C}[x, y, z, p, \mathsf{q}, r, a, b], \quad I_T = I_2 + (h), \quad J = I_2 + (ah, bh, rh).$$

定义

$$T := S_8/I_T, \qquad \tilde{T} := S_8/J.$$

因此，我们有 $R_{\mathrm{cand}} = T \otimes \mathbb{C}[d]$. 设 $\alpha:\ R_{\mathrm{cand}} \twoheadrightarrow R_W$ 为式（41）中的映射，并设 $\varphi:\ R_W \to R_{\mathcal{B}_3}$由自由场嵌入诱导。

命题 7.1。 设 $\varphi_0:\ S_8 \to \mathbb{C}[b_1, b_2, b_3, c_3] \subset R_{\mathcal{B}_3}$ 为如下映射

$$x, \quad y, \quad z, \quad p, \quad \mathsf{q}, \quad r, \quad a, \quad b$$

to

$$b_1^2, \quad b_2^2, \quad b_1b_2, \quad b_1b_3, \quad b_2b_3, \quad b_3^2, \quad b_1c_3, \quad b_2c_3.$$

则，核 $\varphi_0 = I_T$.

证明。我们在 S_8 上赋予分次反字典序，其中 $x > y > z > p > \mathsf{q} > r > a > b$。那么，生成 I_2 的八个二次曲面以及 h 的首项为

$$xy, \quad p^2, \quad \mathsf{q}^2, \quad zp, \quad yp, \quad p\mathsf{q}, \quad za, \quad ya, \quad \mathsf{q}a. \tag{43}$$

令 E 为由这些首项生成的单项式理想。我们计算 S_8/E中次数为 n 的单项式数量。设 $\nu(n) = \binom{n+3}{3}$为四个变量中次数为 n 的单项式数量。我们将 S_8/E 中的次数为 n 的单项式分为4类：

- p 出现：此时 y， z，q不能出现，并且每个单项式都是 p 乘以 x中次数为 $n-1$ 的单项式，其中有 r，a， b。这类单项式的数量为 $\nu(n-1)$。
- p，q不出现，而 a至少出现一次：每个单项式都是 a 乘以 x中次数为 $n-1$ 的单项式，其中有 a， r， b。这类单项式的数量为 $\nu(n-1)$。
- q出现，而 p 不出现：于是 a 也不出现，并且每个单项式都是 q 乘以x中的单项式，其中有 y， z， r，b，且不被 xy整除。这类单项式的数量为 $\nu(n-1) + \nu(n-2)$。
- p， q， a 均不出现：因此每个单项式都是由 x， y， z， r， b 组成且不被xy整除的单项式。这类单项式的数量为 $\nu(n) + \nu(n-1)$。

次数为 n 的单项式总数为 $\nu(n) + 4\nu(n-1) + \nu(n-2) = (n+1)^3$。

将 $\mathrm{im}\,\varphi_0$ 中次数为 $2n$ 的单项式集合记为 S_{2n}。那么我们断言

$$\mathsf{S}_{2n} = \left\{ b_1^{e_1} b_2^{e_2} b_3^{e_3} c_3^k \;\middle|\; e_1 + e_2 + e_3 + k = 2n \quad \text{and} \quad k \le e_1 + e_2 \right\}. \tag{44}$$

事实上，S_{2n} 包含于（44）的右端。反之，给定（ $b_1^{e_1} b_2^{e_2} b_3^{e_3} c_3^k$ ）右端的任意44，我们可以将每个 c_3 与一个因子 b_1 或 b_2配对，这是可能的，因为 $k \le e_1 + e_2$，并任意配对剩余因子 b_j，其数目为偶数。然后，我们计算 $|\mathsf{S}_{2n}|$，即S_{2n}的基数。令 $s = e_1 + e_2$。有 $s+1$ 种 $b_1^{e_1} b_2^{e_2}$的选择。于是，有$\min\{s, 2n-s\} + 1$种 c_3^k的选择。因此，

$$\begin{aligned} |\mathsf{S}_{2n}| &= \sum_{s=0}^{2n} (s+1)(\min\{s, 2n-s\} + 1) \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

由于 $I_T \subset \ker \varphi_0$ 和 $E \subset \mathrm{in}(I_T)$，其中 $\mathrm{in}(I_T)$ 是关于 S_8 上的次序的首项理想，

$$(n+1)^3 = |\mathsf{S}_{2n}| = \dim(S_8/\ker\varphi_0)_n \le \dim(S_8/I_T)_n \le \dim(S_8/E)_n = (n+1)^3.$$

因此，$I_T = \ker \varphi_0 \text{ and } \mathrm{in}(I_T) = E$，这意味着生成 I_T 的九个二次曲面构成一个 Gröbner 基。□

推论 7.2。 T 是一个整环，并且

$$\mathrm{Hilb}\, T = \frac{1+4t+t^2}{(1-t)^4}.$$

特别地，$\dim(\mathrm{Spec}(T)) = 4$。

证明。 T 是多项式环的子环，因而是一个整环。由命题7.1的证明，$\dim(T_n) = \dim |\mathsf{S}_{2n}| = (n+1)^3$。因此我们很容易得到

$$\mathrm{Hilb}(T) = \sum_{n\ge 0}(n+1)^3 t^n = \frac{1+4t+t^2}{(1-t)^4}. \tag{45}$$

由于希尔伯特级数在 $t=1$ 处的极点为 4，最后一个断言由希尔伯特-塞尔定理得出。□

˜令 ψ： $T \to T$ 表示自然映射。

引理 7.3. 我们有 核 $\psi = \mathbb{C}h$。

证明。 直接计算可得

$$\begin{aligned}
&p(xb-za) - a(x\mathsf{q}-zp) = xh, \quad r(xb-za) + a(zr-p\mathsf{q}) - b(xr-p^2) = ph,\\
&p(zb-ya) - a(z\mathsf{q}-yp) = zh, \quad r(zb-ya) + a(yr-\mathsf{q}^2) - b(zr-p\mathsf{q}) = \mathsf{q}h,\\
&\mathsf{q}(zb-ya) - b(z\mathsf{q}-yp) = yh.
\end{aligned}$$

由此可得 $(x,\ y,\ z,\ p,\ \mathsf{q}\ r,\ a,\ b)h \subset J$。我们还注意到 $h \notin J$，并且

$$I_T = J + \mathbb{C}h + (x,y,z,p,\mathsf{q},r,a,b)h.$$

因此，$I_T/J = \mathbb{C}h$。结果随即得出。 □

根据命题 7.1，我们可以将 T 与其在 $\mathbb{C}[b_1,b_2,b_3,c_3]$中的像等同起来。利用 T的这一实现，复合映射

$$\varphi\circ\alpha : R_{\mathrm{cand}} \twoheadrightarrow R_W \to R_{\mathcal{B}_3},$$

可识别为映射

$$\tilde{T}[d] \longrightarrow T[b_1c_2],$$

b ˜将 T 映至 T 通过 ψ 以及 d 映至 b_1c_2。根据引理 7.3，我们进一步有 e

$$\ker\alpha \subset \ker(\varphi\circ\alpha) = h\mathbb{C}[d]. \tag{46}$$

因此，接下来只需证明 $hd^m \neq 0$ 属于 R_W。为此，我们引入一些记号。我们为 R_{cand} 中的每个单项式赋予一个双次数，其第一分量为多项式次数，第二分量为其 $\mathfrak{g}$-权，并规定权在乘法下可加。生成元的权列于下表。特别是，

R_{cand}中的类	x	y	z	p	q	r	a	b	d
根权	$2\varepsilon_1$	$2\varepsilon_2$	$\varepsilon_1+\varepsilon_2$	$\varepsilon_1+\varepsilon_3$	$\varepsilon_2+\varepsilon_3$	$2\varepsilon_3$	$\varepsilon_1-\varepsilon_3$	$\varepsilon_2-\varepsilon_3$	$\varepsilon_1-\varepsilon_2$

hd^m 的双次数为 $(m+2,\ (m+1)\varepsilon_1 + (1-m)\varepsilon_2)$。这些次数两两不同。回顾

即， $J_\infty(R_{\mathcal{B}_3}) = \mathbb{C}[b_i^{(k)}, c_i^{(k)}]$。我们将单项式的喷射阶定义为 k之和。对于$v \in J_\infty(R_{\mathcal{B}_3})$，令$\sigma_j(v)$为其喷射阶为 j的分量。

引理 7.4. 设 $U^1, ..., U^k$，其类为 $u^1, ..., u^k$，属于 R_W。设 $n_i \geq 1$, $\mathsf{U} = U^1(-n_1)\cdots U^k(-n_k)\mathbf{1}$。设 ι 是从 W 到 $\mathcal{B}_3$ 的嵌入。那么，$\iota(\mathsf{U})$ 在 $\overline{\mathrm{gr}^F}(\mathcal{B}_3)$ 中没有喷射阶小于 $\sum_i(n_i-1)$ 的分量。

证明。设 ϵ 和 η 是两个场。那么，$U(-n) = \sum_{r+s=-n}\epsilon(r)\eta(s)$。若 ϵ 和 η 不共轭，则 $\epsilon(r)$ 与 $\eta(s)$ 对易。因此，$U(-n)$ 的纯产生部分通过乘以$T^{n-1}(\epsilon\eta)_{(n-1)!}$起作用。在其他每一项中，恰有一个因子（例如 $\eta(\frac{1}{2}+s)$，其中 $s \geq 0$）是湮灭模。它通过降低喷射阶 s，消去项 $\epsilon(-\frac{1}{2}-s)$。在$U(-n)$ 的表达式中，$:\eta(\frac{1}{2}+s):$ 总是与 $\epsilon(-n-\frac{1}{2}-s)$ 一同出现；$\epsilon(-n-\frac{1}{2}-s)$ 将喷射阶增加 $n+s$。二者合起来将喷射阶增加 n。从右向左依次作用这些因子，即得所述结论。□

我们现在证明以下定理。

定理 7.5。 C_2-代数 W 同构于 R_{cand}。

证明。根据前面的讨论，只需证明 $hd^m \neq 0$ 属于 R_W。类 hd^m 由 $v_m := P(-1)B(-1)D(-1)^m\mathbf{1} - Q(-1)A(-1)D(-1)^m\mathbf{1} \in W$ 表示，我们必须证明 $v_m \notin C_2(W)$。hd^m 的双次数为 $(m+2,(m+1)\varepsilon_1+(1-m)\varepsilon_2)$。通过直接计算，在双次数 $(i+2,(m+1)\varepsilon_1+(1-m)\varepsilon_2)$ $(i \leq m)$ 下，$C_2(W)$ 由以下向量张成：其因子为 ZD^m 或 PAD^{m-1} 且带有一个模 -2，以及因子为 XD^{m-1} 的向量。

现在我们用反证法证明该定理。假设 $v_m \in C_2(W)$。由 W 的自由场实现可知，$\iota(v_m)$ 的喷射阶至少为 1。由引理 7.4，$\sigma_1(\iota(v_m))$ 属于以下元素的张成空间：

$$\begin{aligned}
&\text{from } ZD^m: && s_1 = T(b_1b_2)(b_1c_2)^m, \quad s_2 = b_1b_2\,T(b_1c_2)(b_1c_2)^{m-1},\\
&\text{from } PAD^{m-1}: && s_3 = T(b_1b_3)\,b_1c_3\,(b_1c_2)^{m-1}, \quad s_4 = b_1b_3\,T(b_1c_3)(b_1c_2)^{m-1},\\
& && s_5 = b_1b_3\,b_1c_3\,T(b_1c_2)(b_1c_2)^{m-2}.
\end{aligned}$$

注意，$\mathcal{B}_3 \cong J_\infty(R_{\mathcal{B}_3})$ 作为向量空间。令 π 为 $J_\infty(R_{\mathcal{B}_3})$ 的环自同态，它将每个 $b_3^{(k)}$ 和 $c_3^{(k)}$ 映为零。直接计算可得

$$\begin{aligned}
\pi\circ\sigma_1(\iota(v_m)) &= \left[\beta_3(\frac{1}{2}),\gamma_3(-\frac{1}{2})\right]\left(\beta_1(-\frac{3}{2})\beta_2(-\frac{1}{2}) - \beta_2(-\frac{3}{2})\beta_1(-\frac{1}{2})\right)\left(\beta_1(-\frac{1}{2})\gamma_2(-\frac{1}{2})\right)^m\mathbf{1}\\
&= \left(\beta_1(-\frac{3}{2})\beta_2(-\frac{1}{2}) - \beta_2(-\frac{3}{2})\beta_1(-\frac{1}{2})\right)\left(\beta_1(-\frac{1}{2})\gamma_2(-\frac{1}{2})\right)^m\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

我们可以将右边看作 $M := (Tb_1b_2 - b_1Tb_2)(b_1c_2)^m \in J_\infty(R_{\mathcal{B}_3})$。我们注意到，$M$ 不能写成 s_1 和 s_2 的线性组合。这产生矛盾，因为 $\pi\sigma_1(\iota(v_m))$ 应当属于 $\pi(s_i)$ $(1 \leq i \leq 5)$ 的张成空间，而 $\pi(s_3) = \pi(s_4) = \pi(s_5) = 0$。因此，$v_m \notin C_2(W)$，证明完毕。□

推论 7.6. 猜想 *4.1*对 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6$在 $k = -\frac{1}{2}$成立。

证明。由定理 7.5，$R_W = T[d]$. 根据引理 7.3，$T/(h) \cong T$。由于 T 是一个整环且 h 是幂零的，T 的幂零根为 (h)，因此

$$(R_W)_{\mathrm{red}} \cong T[d].$$

根据推论 7.2，伴随簇的维数为 5。

第 $(R_W)_{\mathrm{red}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[Y_2]$ 节中的满射 4 具有素核， $\mathbb{C}[Y_2]$ 是一个整环。根据第 4 节中的表，维数 $Y_2 = 5$。有限生成整环中的零高度素理想为零，因此核为零。故结论得证。□

7.3. 的特征标 W。这里的目标是计算 W的特征标。我们首先从函数模型中得到 $\mathcal{A}$的特征标下界。接着，我们构造$L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$的平坦退化，其特殊纤维满射到 $\mathcal{A}$。这两个特征标界将会一致。

7.3.1. 来自函数模型的下界。定义 S 为$\sim J_\infty(R_{\mathcal{B}_3})$的微分子代数，由 $\operatorname{im}\ \varphi_0$和 $Tb_1b_2 - b_1Tb_2$生成。 S属于 四种颜色 b_1、 b_2、 b_3、 c_3的喷射所构成的多项式环。扇区是颜色中的一个多重度 $\mathsf{n} = (k_1, k_2, k_3, l_3)$，且 $S = \oplus_{\mathsf{n}} S_{\mathsf{n}}$. 每个生成元的总次数都是 2，因此 $S_{\mathsf{n}} = 0$ ，除非 $|\mathsf{n}| = 2m$，此时 S_{n} 具有共形权$m+$ 喷射阶。令 $H_{\mathsf{n}}(q) = \sum_d \dim(\widehat{S}_{\mathsf{n}})_d q^d$，

$$\operatorname{Hilb} \widehat{S} = \sum_{\mathsf{n}} q^m H_{\mathsf{n}}(q).$$

回忆一下， $\mathcal{A}$由 X、 Y、 Z、 P、 Q、 R、 A、 B生成，省略 D。令 $\operatorname{gr}^F(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 关于诱导滤过 $\mathcal{A} \cap F^p(\mathcal{B}_3)$ 的伴随分次代数，其中将 $\mathcal{A}$ 视为其在 $\mathcal{B}_3$ 中的自由场像。不难看出 $\widehat{S} \subset \operatorname{gr}^F(\mathcal{A})$，因此

$$\operatorname{ch} \mathcal{A} = \operatorname{ch} \operatorname{gr}^F \mathcal{A} \geq \operatorname{Hilb} \widehat{S}. \tag{47}$$

我们使用 [30] 中的函数模型来计算 S_{n}。固定一个扇区 $\mathsf{n} = (k_1, k_2, k_3, l_3)$，其中$|\mathsf{n}| = 2m$。为每个因子取一个变量：

$$\xi_1, \dots, \xi_{k_1} \ (\text{for } b_1), \qquad \eta_1, \dots, \eta_{k_2} \ (b_2), \qquad \zeta_1, \dots, \zeta_{k_3} \ (b_3), \qquad \vartheta_1, \dots, \vartheta_{l_3} \ (c_3).$$

令 Φ 为由这些变量构成、在四个组内分别对称的多项式空间。令喷流单项式的对偶基

$$b_1^{(r_1)} \cdots b_1^{(r_{k_1})} b_2^{(s_1)} \cdots b_2^{(s_{k_2})} b_3^{(t_1)} \cdots b_3^{(t_{k_3})} c_3^{(u_1)} \cdots c_3^{(u_{l_3})}$$

是.....的类

$$\xi_1^{r_1} \cdots \xi_{k_1}^{r_{k_1}} \eta_1^{s_1} \cdots \eta_{k_2}^{s_{k_2}} \zeta_1^{t_1} \cdots \zeta_{k_3}^{t_{k_3}} \vartheta_1^{u_1} \cdots \vartheta_{l_3}^{u_{l_3}},$$

其在每组内所有不同置换之和。为每个变量 χ 配备一个独立的形式变量 ω_χ，其颜色为 κ_χ。对于 $F \in \Phi$，展开这些弧可得

$$\Big\langle \prod_\chi \kappa_\chi(\omega_\chi), F \Big\rangle = F((\omega_\chi)_\chi), \tag{48}$$

对于每个变量 χ，在 χ 坐标为 ω_χ 的点处， F 的值。

允许匹配 μ 是将 $2m$ 个变量分拆成 m 对、且每对属于以下八种类型之一的方式$\{\xi,\xi\}$， $\{\xi,\eta\}$， $\{\eta,\eta\}$， $\{\xi,\zeta\}$， $\{\eta,\zeta\}$， $\{\zeta,\zeta\}$， $\{\xi,\vartheta\}$， $\{\eta,\vartheta\}$。令 L_μ 为配对变量相等的子空间。配对 $\pi = \{\xi_a, \eta_c\}$ 称为混合对；令 $D_\pi = \partial_{\xi_a} - \partial_{\eta_c}$。

引理 7.7。 </style>对于 ,, 当且仅当 $(\prod_{\pi \in \Theta} D_\pi F)|_{L_\mu} = 0$ 对每个允许匹配 μ 以及 μ 的每个混合对集合 Θ 都成立。因此，若 $J \subset \Phi$ 是 S_{n} 的正交补，则 $H_{\mathsf{n}} =$ 希尔伯特概形(Φ/J)。

证明。令 g 为 S_8的变量， $g(\omega)$为 g的弧。每个 g 都映射到 $\kappa\kappa'$，因此$g(\omega) = \kappa(\omega)\kappa'(\omega)$，且 $h(\omega) = \frac{d}{d\omega} b_1(\omega) b_2(\omega) - b_1(\omega) \frac{d}{d\omega} b_2(\omega)$。于是， $\widehat{S}_{\mathsf{n}}$中的每个元素都由级数 $\prod_{\nu=1}^m g_\nu(\omega_\nu)$的一些系数张成，其中遍历总多重次数为的所有生成元 g_1，..... g_m

n。然后我们对变量 $D_\pi\ \ \omega$，其中 $\pi \in \Theta$，应用于（48），然后将 ω的 ν-th 对中的两个 ω_ν设为相等：

$$\langle \prod_\nu g_\nu(\omega_\nu), F\rangle = (\prod_{\pi\in\Theta} D_\pi F)|_{L_\mu}(\omega_1, ..., \omega_m).$$

每一对（μ，Θ）都以这种方式出现，这就证明了第一个断言。第二个断言成立是因为配对在每个次数上都是完美的。□

忽略这两种 b颜色。我们将 b_1 和 b_2 视为相同，也就是说，我们不再区分 b_1 的 $k = k_1 + k_2$ 个因子中哪个是哪一个。这样便将 $\widehat{S}$ 化为由 $b_1^2,\ b_1b_3,\ b_3^2,\ b_1c_3$ 生成的微分代数 E。对于 (b_1，b_3，c_3) 中的多重度 $\mathsf{n}' = \{k_1 + k_2, k_3, l_3\}$，令 $E_{\mathsf{n}'}$ 表示 $\mathrm{E}_{\mathsf{n}'}$ 按喷射阶计的级数。

命题 7.8。令 s、u、g 分别记录 b_1、b_3、c_3 中的次数。那么

$$\sum_{\mathsf{n}'} E_{\mathsf{n}'}(q)s^k u^{k_3} g^{l_3} = \frac{(s^2u^2;q)_\infty}{(s^2;q)_\infty(u^2;q)_\infty(su;q)_\infty(sg;q)_\infty}.$$

证明。令 $R_{13} = \mathbb{C}[x, r, p, a]/(xr - p^2)$。为变量赋予权，其中喷射阶为 i 时满足 q^i：

$$x_i \mapsto s^2q^i, \quad r_i \mapsto u^2q^i, \quad p_i \mapsto suq^i, \quad a_i \mapsto sgq^i.$$

$J_\infty(\mathbb{C}[x, r, p, a])$的希尔伯特级数为

$$\frac{1}{(s^2;q)_\infty(u^2;q)_\infty(su;q)_\infty(sg;q)_\infty}.$$

将指标 2 重命名为 3 后，定理 5.7 表明 $\mathrm{gr}^F(\mathsf{E}) \cong J_\infty(R_{13})$。关系的喷射 $[t^n](x(t)r(t)-p(t)^2)$ 的权为 $s^2u^2q^n$。结论可由与推论 5.8的证明相同的论证得出。□

恢复颜色。取一个无色匹配 μ 和一点 $o \in L_\mu$，其 m 对位于彼此不同的位置。–在 o处，颜色为 b_1 或 b_2 的 $k = k_1 + k_2$ 个粒子占据这些位置，每处至多两个。我们用除子 $D = \sum_p D(p)p$,deg $D = k$, 记录它们，其中若两个这样的粒子在 p处配对，则为 $D(p) = 2$；若其中一个与 b_3 或 c_3配对，则为 $D(p) = 1$。

为了恢复一个允许匹配，我们选择这 k_2 个粒子中哪些 k 个属于 b_2。在 F 的对称性下，只有它们的位置重要，而这些位置构成一个次数为 k_2 的除子 $D_2 \le D$。设 $\Phi(\eta_1, \ldots, \eta_{k_2})$ 为一个对称多项式。将变量 η_j 放在 D_2 的各点上，并按重数计数，将所得的值记为 $\Phi(D_2)$。对于一个由点组成的集合 Θ，若 $D(p) = 2$ 且 $D_2(p) = 1$，令 $\eta_{j(p)}$ 为放置在 $p \in \Theta$ 处的变量，并令

$$(\partial_\Theta\Phi)(D_2) = \left(\prod_{p\in\Theta} \partial_{\eta_j(p)}\Phi\right)(D_2).$$

例 7.9. 在扇区 (2，1，0，1) 中，令 μ 将两个 b 配对在 0 处，并将第三个 b 与位于 1 处的 c_3 配对。于是 $D = 2\cdot[0] + [1]$，且 D_2 为 $[0]$ 或 $[1]$。若 $D_2 = [0]$，则 $\Theta \subset \{[0]\}$。

引理 7.10。设 Φ 是关于 $\eta_1, ..., \eta_{k_2}$ 的对称多项式，且关于每个变量的次数至多为 k_1。若$(\partial_\Theta\Phi)(D_2) = 0$ 对每个次数为 k_2 的 $D_2 \le D$ 以及每个由 D_2 构成的集合 Θ 均成立，则 $\Phi = 0$。

证明。我们对 k_2 进行归纳。令 $\Phi_p = \Phi(\eta_1, \ldots\ldots, \eta_{k_2-1}, p)$。我们检查 Φ_p 满足关于 $D - p$ 的引理假设。令 $D_2' \le D - p$ 的次数为 $k_2 - 1$，并令 Θ' 为相对于 $D - p$ 的 D_2' 的集合。于是 $p \notin \Theta'$，因为 $(D - p)(p) \le 1$；因此，对于相对于 D 的 $D_2' + p$，Θ' 属于 Θ。所以根据归纳假设，我们有

$$(\partial_{\Theta'}\Phi_p)(D_2') = (\partial_{\Theta'}\Phi)(D_2' + p) = 0.$$

根据归纳法，我们得到 $\Phi_p = 0$。根据对称性， Φ 可被 $\prod_j (\eta_j - p)$ 整除。

现在考虑 $D(p) = 2$ 的情形。令 $\Phi'_p = (\partial_{\eta_{k_2}}\Phi)(\eta_1, \ldots\ldots \eta_{k_2-1}, p)$。令 D'_2 和 Θ' 如上所述。若 $D'_2(p) = 0$，则 p 属于相对于 D 的 Θ，其中 $D'_2 + p$。因此，

$$(\partial_{\Theta'}\Phi'_p)(D'_2) = (\partial_{\Theta'\cup\{p\}}\Phi)(D'_2 + p) = 0.$$

若 $D'_2(p) = 1$，则某个满足 $j < k_2$ 的 η_j 位于 p。根据上一段， Φ 有一个因子 $\eta_j - p$。此因子经过 $\partial_{\eta_{k_2}}$，这意味着 Φ'_p 等于 0。结合上一段的结果和对称性， Φ 可被 $(\eta_j - p)^2$ 整除。

总之， Φ 可被 $\prod_p (\eta_1 - p)^{D(p)}$ 整除，其在 η_1 中的次数为 $k > k_1$。因此， Φ 必须为零。归纳法至此完成。□

引理 7.11. 令 Λ 为关于 $\eta_1, ..., \eta_{k_2}$ 的次数在每个变量中都不超过 k_1 的对称多项式空间。每个 $F \in \Phi$ 都可以唯一地写成 $F = \sum_\lambda f_\lambda m_\lambda(\eta)$，其中 $f_\lambda \in \Phi'$，而 $m_\lambda(\eta)$ 是 Λ 的一个基，且 λ 位于 $k_2 \times k_1$ 盒中。

证明。 根据 [4,定理 3。1],

$$\operatorname{Hilb}\Lambda = \frac{(q;q)_k}{(q;q)_{k_1}(q;q)_{k_2}}.$$

因此，$\operatorname{Hilb}\Phi = \operatorname{Hilb}\Phi' \cdot \operatorname{Hilb}\Lambda$。只需证明 $\sum_\lambda f_\lambda m_\lambda(\eta) = 0$ 迫使所有 $f_\lambda = 0$。取 o 中的一个点 $U = \mathbb{C}^{2m} \setminus \cup_{i<j}\{x_i = x_j\}.$。那么每个 b粒子恰好占据一个点。对于每个次数为 k_2的 $D_2 \le D$，我们选取 k_2 b个粒子为 η，其余为 ξ。根据假设，$\sum_\lambda f_\lambda(o)m_\lambda$ 在每个 D_2处都为零。由引理 7.10， $f_\lambda(o)$ 为零。由于 U 在 $\mathbb{C}^{2m}$中稠密，结论得证。□

令 $\binom{k}{k_1}_q$ =希尔伯特概形 Λ。令 Φ'为在 $\{\xi_1, ..., \xi_k\}$、$\{\zeta_1, ..., \zeta_{k_3}\}$ 和 $\{\vartheta_1, ..., \vartheta_{l_3}\}$ 内对称的多项式。令 $I \subset \Phi'$使得 $\langle I, \mathsf{E}_{\mathsf{n}'}\rangle = 0$。

命题 7.12。 对于任意扇区 n， $H_{\mathsf{n}}(q) \ge \binom{k}{k_1}_q E_{\mathsf{n}'}(q)$ 逐系数。

证明。 令

$$\Phi_I = \left\{ \sum_\lambda f_\lambda m_\lambda(\eta) \mid f_\lambda \in I \right\}.$$

由引理7.11,

$$\operatorname{Hilb}(\Phi/\Phi_I) = \binom{k}{k_1}_q \operatorname{Hilb}(\Phi'/I) = \binom{k}{k_1}_q E_{\mathsf{n}'}(q).$$

由引理 7.7， H_{n} =希尔伯特概形(Φ/J)。因此只需证明 $J \subset \Phi_I$。

令 $F = \sum_\lambda f_\lambda m_\lambda(\eta) \in J$。固定一个未着色匹配 μ 以及$-L_\mu$ 中的一个点，其 m位置两两不同。令 D 为记录未着色 b粒子的除子。令 $D_2 \le D$为给 b_2着色的子除子。令 $o' \in L_\mu$ 使坐标 η位于 D_2。令 Θ 为上文定义的集合，针对 D_2 相对于 D。引理 7.7 给出

$$0 = \left(\prod_{p\in\Theta} D_{\pi(p)}F\right)(o') = (-1)^{|\Theta|}\sum_\lambda f_\lambda(o)(\partial_\Theta m_\lambda)(D_2).$$

对于第二个等式，我们使用莱布尼茨法则以及这一事实：$\prod_{p\in\Theta} D_{\pi(p')}\ f_\lambda\ (o') = 0$。由引理 7.10， $\sum_\lambda f_\lambda\ (o)\ m_\lambda = 0$，因此 $f_\lambda\ (o) = 0$。这样的 o 在 L_μ中稠密，因此 $f_\lambda \in I$。□

接下来我们需要一个对所有扇区求和的恒等式。令 $\sum_{k_1+k_2=k}\binom{k}{k_1}_q = G_k$。

推论 7.13. $q^{r+2p}G_rG_{r+2p}$ 希尔伯特概形 $\widehat{S} \geq \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_r$.

$p\geq 0$ $q\ q\ r$ $(;)$

证明。 由命题7.12，可得

$$\operatorname{Hilb}\widehat{S} = \sum_{\mathsf{n}} q^m H_{\mathsf{n}} \geq \sum_{\mathsf{n}'} q^{(k+k_3+l_3)/2} G_k E_{\mathsf{n}'} = \sum_{k\geq 0} G_k q^{k/2} [s^k] E(s),$$

其中 $E(s)$ 是命题 7.8 在 $u = g = q^{1/2}$ 处的级数。我们计算得

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{(s^2q;q)_\infty}{(s^2;q)_\infty (q;q)_\infty (sq^{\frac{1}{2}};q)_\infty (sq^{\frac{1}{2}};q)_\infty} = \frac{1}{1-s^2}\frac{1}{(q;q)_\infty (sq^{\frac{1}{2}};q)_\infty^2} \\ &= \frac{1}{(1-s^2)(q;q)_\infty}\sum_{i,j}\frac{(sq^{\frac{1}{2}})^{i+j}}{(q;q)_i(q;q)_j} = \frac{1}{(1-s^2)(q;q)_\infty}\sum_r \frac{(sq^{\frac{1}{2}})^r}{(q;q)_r}\sum_{i+j=r}\binom{r}{i}_q \\ &= \frac{1}{(1-s^2)(q;q)_\infty}\sum_r \frac{G_r}{(q;q)_r}(sq^{\frac{1}{2}})^r, \end{aligned}$$

其中第三个等式由 q-二项式定理得出。于是

$$[s^k]E(s) = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{r+2p=k}\frac{G_r q^{\frac{r}{2}}}{(q;q)_r}.$$

综合以上各式，即得所述结果。 □

引理 7.14. 对于 $k \geq 0$, $\sum_{r\geq 0} q^r G_r G_{r+k}$ $q\ q$ $(;)_r$ $= \frac{k+1}{1-q^{k+1}\quad ()(q;\quad q)_\infty^3}$.

证明。 根据罗杰斯–塞格ő多项式的迈勒公式 [4, 第 3 章，例 9，第 50],页，我们得到

$$M(x,y;t) := \sum_{r\geq 0} h_r(x)h_r(y)\frac{t^r}{(q;q)_r} = \frac{(t^2xy;q)_\infty}{(t;q)_\infty (tx;q)_\infty (ty;q)_\infty (txy;q)_\infty},$$

其中 $h_r(x) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j}_q x^j$ 是罗杰斯–塞格ő多项式。 q-范德蒙德恒等式 [4, (3.3.10)，第 37] 页， $\binom{r+k}{l}_q = \sum_{i+j=l}\binom{r}{i}_q\binom{k}{j}_q q^{(r-i)j}$ 给出

$$h_{r+k}(x) = \sum_{j=0}^{r+k}\binom{r+k}{j}_q x^j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}_q x^j q^{rj} h_r(xq^{-j}).$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_r h_r(y)h_{r+k}(x)\frac{t^r}{(q;q)_r} &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}_q x^j M(xq^{-j},y;tq^j) \\ &= M(x,y;t)\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j \frac{(t;q)_j (ty;q)_j}{(t^2xy;q)_j}, \end{aligned}$$

其中最后一个等式基于如下恒等式

$$(aq^j;q)_\infty = \frac{(a;q)_\infty}{(a;q)_j}.$$

令 $x=y=1, t=q$，上面的恒等式变为

$$\sum_{r\geq 0}\frac{q^r G_r G_{r+k}}{(q;q)_r}=\frac{1}{(q;q)_\infty^3}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}_q\frac{(q;q)_j}{1-q^{j+1}}. \tag{49}$$

现在我们计算 $\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}_q(1-q^{j+1};)$。它等于 $\sum_{j=0}(q;\ q)_k(q;\ q)^{k-j}(1-q^{j+1})$，根据欧拉恒等式 [4, (2.2.5)，第 19] 页，这就是 x^k 在 $(q;q)_\infty\sum_{j\geq 0}^{k}1-q^{j+1}(x;\ q)$ 中的系数。另一方面，

$$\frac{1}{(x;q)_\infty}\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{1-q^{j+1}}=\frac{1}{(x;q)_\infty}\sum_{i\geq 0}\frac{q^i}{1-xq^i}=\frac{d}{dx}\frac{1}{(x;q)_\infty}=\sum_{k\geq 0}\frac{(k+1)x^k}{(q;q)_{k+1}},$$

其中最后一个恒等式再次由欧拉恒等式得出。综合以上结果，我们得到

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}_q\frac{(q;q)_j}{1-q^{j+1}}=\frac{k+1}{1-q^{k+1}}. \tag{50}$$

该结果由（49）和（50）得出。 □

定理 7.15。

$$\sum_{r,p\geq 0}\frac{q^{r+p}G_rG_{r+2p}}{(q;q)_r}=\frac{(q^2;q^2)_\infty^8}{(q;q)_\infty^7}.$$

证明。 由引理 7.14 结合 $k=2p$，左侧为 $(q;q)_\infty^{-3}$倍

$$\sum_{p\geq 0}\frac{(2p+1)q^p}{1-q^{2p+1}}=\sum_{n\geq 0}\sigma(2n+1)q^n=\left(\sum_{m=0}^{\infty}q^{m(m+1)/2}\right)^4=\left(\frac{(q^2;q^2)_\infty^2}{(q;q)_\infty}\right)^4.,$$

其中 $\sigma(2n+1)=\sum_{d^{|2n+1}}d$，并且我们使用了勒让德四个三角数定理 [24, 定理 3] 以及高斯恒等式 [4, 推论 2.10]。

□

我们现在可以证明本小节的主要结果。

定理 7.16。 我们有，逐系数地，

$$\operatorname{ch}\mathcal{A}\geq(-q;q)_\infty^8,\qquad \operatorname{ch}W\geq\frac{(-q;q)_\infty^8}{(q;q)_\infty}.$$

证明。 根据（47）、推论 7.13和定理7.15，我们有

$$\operatorname{ch}\mathcal{A}\geq\operatorname{Hilb}\widehat{S}\geq\frac{(q^2;q^2)_\infty^8}{(q;q)_\infty^8}=(-q;q)_\infty^8.$$

第二个不等式由引理 7.17 得出。 □

7.3.2。 八生成元因子及其变形。

引理 7.17。 存在一个分次向量空间同构

$$\mathbb{C}[d_1,d_2,\ldots]\otimes\mathcal{A}\xrightarrow{\sim}W,\qquad\prod_m d_m^{j_m}\otimes v\longmapsto\prod_m D(-m)^{j_m}v,\qquad\deg d_m=m.$$

特别地，$\operatorname{ch}W=(q;q)_\infty^{-1}\operatorname{ch}\mathcal{A}$。

证明。 八个流生成元在 $\mathfrak{n}_+$ 中张成一个理想，因此由 PBW 可知该映射是满射。为证明单射，按 γ_2 产生算子的个数对 Fock 空间作过滤。 $\mathcal{A}$ 的向量既不涉及 γ_1，也不涉及 γ_2。若 b_r， g_r 是 β_1， γ_2 的产生变量，则 $D(-m)$ 的首项作用是乘以 $\delta_m = \sum_{r+s=m-1} b_r g_s$。在其余产生变量的分式域上，这些元素代数独立：它们对 g_r 的依赖关系是三角形的，对角项为 b_0。在一个有限关系中取最高的 γ_2-次数，再逐次向下考察，即可证明它们代数独立。□

这八个流的非零括号为

$$[A,R]=-2P,\quad [B,R]=-2Q,\quad [A,P]=-X,\quad [A,Q]=[B,P]=-Z,\quad [B,Q]=-Y. \tag{51}$$

它们的李代数 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{sl}_3$ 的一种收缩。对于矩阵单位 E_{ij}，令 $h = E_{11} - E_{22}$、 $H = E_{11} + E_{22} - 2E_{33}$，并使用格基

$$\begin{aligned} &X_t = 2t^3 E_{12}, && Z_t = -t^3 h, && Y_t = -2t^3 E_{21}, \\ &P_t = t^2(E_{13} - E_{32}), && Q_t = t^2(E_{23} + E_{31}), \\ &A_t = t(E_{13} + E_{32}), && B_t = t(E_{23} - E_{31}), && R_t = \tfrac{2}{3} t H. \end{aligned} \tag{52}$$

其 $\mathbb{C}[t]$-张成空间在括号运算下封闭；模 t约化得到（51），且迹配对在 $t = 0$处消失。特化指自由格的约化，而非对其矩阵元素求值。令 $L = L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$，令 $\mathscr{L}$为由该基和真空生成的 $\mathbb{C}[t]$-顶点子代数 $L \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$，并令 $\mathcal{B} = \mathscr{L}/t\mathscr{L}$。

命题 7.18。 每个 $\mathscr{L}$ 的仿射次数分量都是有限自由的 $\mathbb{C}[t]$模，其秩等于 L的相应维数。非零纤维为 L，且 $\mathcal{B}$ 具有流括号 （51）和特征标

$$\operatorname{ch}\mathcal{B} = \operatorname{ch} L = \frac{1}{(q;q^2)_\infty^8} = (-q;q)_\infty^8.$$

证明。 根据PBW，次数多项式流括号给出每个次数中的有限生成。每个分量都是 $L \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 的子模，因此是无挠的，故在 $\mathbb{C}[t]$上自由。将 t 取逆可恢复所有 $\mathfrak{sl}_3$ 流，并证明秩断言。在非零参数处求值是满射的，因此逐次数是同构。特征标是Kac–Wakimoto [19, Remark 1]的边界可容许公式。□

7.3.3. 显式自由场实现。 我们回顾一种适用于此变形的 L 实现。以下形式的极大理想生成元将确定其核。令 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}E_{13} \oplus \mathbb{C}E_{32} \oplus \mathbb{C}E_{12}$ 为关于序 $1 > 3 > 2$的Borel子代数，其最高根为 $\theta = \epsilon_1 - \epsilon_2$。

引理7.19 ([28])。 在 $V^{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$中，向量

$$S = E_{12}(-1)H(-1)\mathbf{1} + \frac{3}{2}(E_{13}(-1)E_{32}(-1) + E_{32}(-1)E_{13}(-1))\mathbf{1}$$

是生成极大理想的奇异向量。

设 $\Pi^{1/2}(0) = M_{c,\,\delta}(1) \otimes \mathbb{C}[\mathbb{Z}_2^c]$ 为具有 Heisenberg场 c， δ和顶点算子 $e^{nc/2}$、 $n \in \mathbb{Z}$的半格顶点代数，其中

$$\langle c, c\rangle = 0, \quad \langle c, \delta\rangle = 2, \quad \langle \delta, \delta\rangle = 3.$$

令 S 为由偶场 b, b^* 生成的 $\beta\gamma$-系统，其中 $b(z)b^*(w) \sim 1/(z-w)$，并令$\mathcal{F} = \Pi^{1/2}(0) \otimes$S。

定理 7.20 ([2, 13, 3])。 定义 $J_x \in \mathcal{F}$，对于 x 取自 $\mathfrak{sl}_3$的基中的元素，定义如下：

$$J_{12} = e^c, \qquad J_{13} = :b\, e^{c/2}:, \qquad J_{32} = :b^* e^{c/2}:, \qquad J_h = \delta - \tfrac{3}{2}c, \qquad J_H = -3\,:bb^*:,$$

$$J_{21} = :\big(-\tfrac{1}{4}\delta^2 + \tfrac{1}{4}\partial\delta + \tfrac{1}{4}b^2 b^{*2} - \tfrac{1}{2}(\partial b)b^* + \tfrac{1}{2}b\,\partial b^*\big)e^{-c}:,$$

$$J_{23} = :\big(-\tfrac{1}{2}\delta b + \partial b - \tfrac{1}{2}b^2 b^*\big)e^{-c/2}:,$$

$$J_{31} = :\big(\tfrac{1}{2}\delta b^* - \partial b^* - \tfrac{1}{2}bb^{*2}\big)e^{-c/2}:,$$

其中 $J_{ij} = J_{E_{ij}}$、 $h = E_{11} - E_{22}$ 和 $H = E_{11} + E_{22} - 2E_{33}$。线性延拓后，这些场满足

$$J_x(z)J_y(w) \sim -\frac{3}{2}\frac{\operatorname{tr}(xy)}{(z-w)^2} + \frac{J_{[x,y]}(w)}{z-w} \qquad (x, y \in \mathfrak{sl}_3).$$

诱导同态 ρ： $V^{-3/2}(\mathfrak{sl}_3) \to \mathcal{F}$、 $x(-1)\mathbf{1} \mapsto J_x$ 的核为极大理想 I；因此 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3) \hookrightarrow \mathcal{F}$。

7.3.4. 实现的特化。置 $s = t^{1/2}$。在 $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}]$ 中，集合

$$v^j = s^{3j} e^{jc/2}\ (j \in \mathbb{Z}), \qquad \tilde{\delta} = s^6\delta, \qquad \varphi = s(b - b^*), \qquad \varphi^* = s^{-1}(b + b^*).$$

它们的模满足

$$[\tilde{\delta}(m), \tilde{\delta}(n)] = 3s^{12} m\, \delta_{m+n,0}, \qquad [c(m), \tilde{\delta}(n)] = 2s^6 m\, \delta_{m+n,0}, \qquad [\varphi(r), \varphi^*(r')] = 2\,\delta_{r+r',0},$$

而 $[c(m)\ c(n)] = [\varphi(r)\ \varphi(r')] = [\varphi^*(r)\ \varphi^*(r')] = 0$。此外， $\tilde{\delta}(z)v^j(w) \sim s^6 j\, v^j(w)/(z-w)$， c 与 v^j 对易，且 $\partial v = \frac{1}{2}:cv:$，其中$^- v = v^1$。所有结构常数都属于 $\mathbb{C}[s]$，尽管φ^* 包含 s^{-1}。

引理 7.21. 令 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}]$ 为由 $v^{\pm 1}$、 c、 $\tilde{\delta}$、 φ、 φ^* 生成的 $\mathbb{C}[s]$-顶点子代数。那么

$$\mathcal{F}_s / s\mathcal{F}_s \cong \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}',$$

其中 $\mathcal{C} = \mathbb{C}[J_\infty(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C})]$ 是交换的，其坐标为 v 和 $v_2 := -\tilde{\delta}\, v^{-1}$，而 $\mathcal{S}'$ 是由 φ、 φ^* 生成的 $\beta\gamma$-系统，其中 $\varphi(z)\varphi^*(w) \sim 2/(z-w)$。

证明。 PBW 向量是指如下形式的向量

$$c(-n_1)\cdots c(-n_a)\,\tilde{\delta}(-m_1)\cdots\tilde{\delta}(-m_b)\,\varphi(-r_1)\cdots\varphi(-r_e)\,\varphi^*(-r'_1)\cdots\varphi^*(-r'_f)\,v^j,$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$、所有 $n_i, m_i \geq 1$、所有 $r_i, r'_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$，且每种指标均按非递增顺序排列。令 P 为这些 PBW 向量的 $\mathbb{C}[s]$-张成空间。

我们首先证明 $\mathcal{F}_s = P$。对产生模重新排序只需用到上文列出的对易子，其系数属于 $\mathbb{C}[s]$。 $v^{\pm 1}$ 的模与 c、 φ 、 φ^* 的模对易；与 $\tilde{\delta}$ 的模对易时，除 $\pm s^6 v^{\pm 1}(\cdot)$ 项外亦然。在 v^j 上，格顶点算子给出

$$v^{\pm 1}(z)v^j = v^{j\pm 1} \exp\Big(\pm \sum_{k \geq 1} \frac{c(-k)z^k}{2k}\Big),$$

没有奇异因子，因为 $\langle c,\ c\rangle = 0$。因此， P 在生成元的所有模作用下保持不变。由于 P 包含 $\mathbf{1} = v^0$ ，且 $\mathcal{F}_s$ 由生成元的迭代模作用于 $\mathbf{1}$ 所张成，我们得到 $\mathcal{F}_s = P$。

这些 PBW 向量在 $\mathbb{C}[s]$ 上线性无关。事实上，将 s 求逆后，每个向量都是一个单位倍数的 Fock向量；这些 Fock向量由 c、 δ、 $b - b^*$、 $b + b^*$ 的模构成，并作用于 $e^{jc/2}$ 上。由于 (b、b^*) $\mapsto$ ($b - b^*$、 $b + b^*$) 可逆，这些 Fock向量构成 $\mathcal{F}$ 的一组基。因此， $\mathcal{F}_s$ 是以这些 PBW 向量为基的自由 $\mathbb{C}[s]$-模，而它们的类构成 $\mathcal{F}_s/s\mathcal{F}_s$ 的一组基。特别地，没有 PBW 向量属于 $s\mathcal{F}_s$。

由此可知，将上面的交换子中的 $s=0$ 设定为 $s=0$，即可得到 $\mathcal{F}_s/s\mathcal{F}_s$ 的顶点代数结构。在 $s=0$ 处，除 $[\varphi,\varphi^*]$ 外，所有交换子都消失，$\tilde{\delta}(z)v^j(w)$ 的奇异部分也随之消失。因此 $\mathcal{F}_s/s\mathcal{F}_s=\mathcal{C}\otimes\mathcal{S}'$，其中 $\mathcal{C}=\mathbb{C}[v^{\pm1},\partial^n c,\partial^n\tilde{\delta}:\ n\geq 0]$ 是交换的。最后，关系 $\partial v=\frac{1}{2}cv$ 允许进行三角替换 $c=2v^{-1}\partial v$，从而得到

$$\mathcal{C}=\mathbb{C}[v^{\pm1},\partial v,\partial^2 v,\dots,\tilde{\delta},\partial\tilde{\delta},\dots]=\mathbb{C}[J_\infty(\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C})].$$ □

直接计算得到以下结果。

引理 7.22。在 ρ下，通过 $t\mapsto s^2$ 扩张，格生成元（52）变为

$$X_t=2v^2,\qquad P_t=:\varphi v:,\qquad A_t=:\varphi^* v:,\qquad R_t=\tfrac{1}{2}:\varphi^2:-\tfrac{1}{2}s^4:\varphi^{*2}:,\qquad Z_t=-\tilde{\delta}+\tfrac{3}{2}s^6 c,$$

$$\begin{aligned}
Y_t&=:\big(\tfrac{1}{2}\tilde{\delta}^2-\tfrac{1}{2}s^6\partial\tilde{\delta}-\tfrac{1}{32}s^8\varphi^4+\tfrac{1}{16}s^{12}\varphi^2\varphi^{*2}+\tfrac{1}{2}s^{12}\big((\partial\varphi)\varphi^*-\varphi\,\partial\varphi^*\big)-\tfrac{1}{32}s^{16}\varphi^{*4}\big)v^{-2}:,\\
Q_t&=:\big(-\tfrac{1}{2}\tilde{\delta}\varphi+s^6\big(\partial\varphi+\tfrac{1}{8}\varphi^2\varphi^*\big)-\tfrac{1}{8}s^{10}\varphi^{*3}\big)v^{-1}:,\\
B_t&=:\big(-\tfrac{1}{2}\tilde{\delta}\varphi^*+\tfrac{1}{8}s^2\varphi^3+s^6\big(\partial\varphi^*-\tfrac{1}{8}\varphi\varphi^{*2}\big)\big)v^{-1}:.
\end{aligned}$$

特别地，它们属于 $\mathcal{F}_s$。模 s后，它们变为

(53)
$$X\equiv 2v^2,\quad Z\equiv vv_2,\quad Y\equiv\tfrac{1}{2}v_2^2,\quad P\equiv v\varphi,\quad Q\equiv\tfrac{1}{2}v_2\varphi,\quad A\equiv v\varphi^*,\quad B\equiv\tfrac{1}{2}v_2\varphi^*,\quad R\equiv\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

在……之下

$$\beta_1=\sqrt{2}\,v,\qquad \beta_2=v_2/\sqrt{2},\qquad \beta_3=\varphi/\sqrt{2},\qquad \gamma_3=\varphi^*/\sqrt{2},$$

对于 $\beta_3(z)\gamma_3(w)\sim 1/(z-w)$，这些恰好就是流 $\mathcal{A}$。

7.3.5. 特征标公式。现在，我们可以将特殊纤维与 $\mathcal{A}$ 进行比较。

定理 7.23。八个特化流与其自由场对应物之间的对应关系诱导出一个分次顶点代数 $\mathcal{B}\cong\mathcal{A}$ 的同构。因此，

$$\operatorname{ch} W=\frac{(-q;q)_\infty^8}{(q;q)_\infty}.$$

证明。映射 $\rho:\ L\mapsto\mathcal{F}$ 可以通过将 t 发送到 s^2 扩展为 $L\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\to\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}[s,s^{-1}]$。由于 $\rho(\mathscr{L})\subset\mathcal{F}_s$，$\rho$ 下降为一个同态

$$\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{F}_s/s\mathcal{F}_s.$$

根据引理 7.22，八个格流（52）分别被映射到（53）中的八个约化对象，并且其像同构于 $\mathcal{A}$。因此，我们得到一个顶点代数的满射同态 $\phi:\ \mathcal{B}\to\mathcal{A}$。另一方面，根据定理 7.16 和命题 7.18，我们有

$$\operatorname{ch}(\mathcal{A})\geq(-q;q)_\infty^8=\operatorname{ch}\mathcal{B}.$$

因此 $\phi:\ \mathcal{B}\twoheadrightarrow\mathcal{A}$ 是一个同构。第二个断言随即由引理 7.17得出。 □

7.4. 经典自由性的判据。最后，我们讨论 L 和W（$-\frac{1}{2}\Lambda_0$）的经典自由性。

命题 7.24. $\mathcal{A}$ 是 W 的子代数，当且仅当希尔伯特概形 $J_\infty(R_{\mathcal{A}})$ $\leq(-q;q)_\infty^8$ 逐系数成立时，它是经典自由的。若此条件成立，则 $L_{-\frac{3}{2}}(\mathfrak{sl}_3)$ 是经典自由的。

证明. 结合满射 $J_\infty(R_{\mathcal{A}}) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^F(\mathcal{A})$ 与定理7.23，可得

$$\mathrm{Hilb}\big(J_\infty(R_{\mathcal{A}})\big) \geq \mathrm{ch}(\mathcal{A}) \geq (-q;q)_\infty^8.$$

第一个断言得证。

定义 $R_{\mathscr{L}} = \mathscr{L}/C_2(\mathscr{L})$，其中 $C_2(\mathscr{L})$ 是由 $a_{(-2)}b$ for $a, b \in L$ 张成的 $\mathbb{C}[t]$。那么 $R_{\mathscr{L}}$ 是 $\mathbb{C}[t][x_1, ..., x_8]$ 除以齐次理想的商，且 $\deg(x_i) = 1$。固定一个权 Δ，令$M = J_\infty(R_{\mathscr{L}})_\Delta$。在 $x_i^{(r)}$ 中，权为 Δ 的单项式只有有限多个，因此M 在 $\mathbb{C}[t]$ 上有限生成。写作 $M \cong \mathbb{C}[t]^r \oplus T$，其中 T 是挠部分。根据命题 7.18，$\dim(J_\infty R_L)_\Delta = r$，并且

$$\dim J_\infty(R_{\mathcal{B}})_\Delta = \dim M/tM = r + \dim T/tT \geq r.$$

现在我们假设 $\mathcal{A}$ 是经典自由的。根据定理7.23， $\mathcal{B}$ 也如此。因此，我们有

$$\mathrm{ch}\, L \leq \mathrm{Hilb}(J_\infty(R_L)) \leq \mathrm{Hilb}(J_\infty(R_{\mathcal{B}})) = \mathrm{ch}\, \mathcal{B} = \mathrm{ch}\, L.$$

因此，$\mathrm{Hilb}(J_\infty(R_L)) = \mathrm{ch}\, L$ 给出了 L 的经典自由性。 □

注 7.25。 主子空间具有经典自由性，是 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$ 具有经典自由性的充分条件，因为我们沿一个方向使用退化：对 $L_{-3/2}(\mathfrak{sl}_3)$ 取一般纤维，对 $\mathcal{A}$ 取特殊纤维。

8. 辛秩至少为四时经典自由性的失效

仅为比较不同秩，记 $W_{(r)}$和 $N_{(r)}$分别表示 $W(-\frac{1}{2}\Lambda_0)$和 $N(-\frac{1}{2}\Lambda_0)$,- 其中$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2r}$- 令 $\rho^{(r)}: N^{(r)} \to W_{(r)}$为典范商，并令 $\psi^{(r)}$ 为其主子空间的典范弧映射。使用 (23) 中的自由场流。

8.1. 秩四情形下经典自由性的一个障碍。

引理 8.1 （计算机辅助）。 对于 $W^{(4)}$，有

N	0	1	2	3	4
$\dim(W^{(4)})_N$	1	16	119	645	2859
$\dim J_\infty(R_{W^{(4)}})_N$	1	16	119	645	2861.

特别是，

$$\dim(\ker \psi^{(4)})_4 = 2.$$

8.2. 推广到更高秩。 接下来，我们说明为何四阶秩障碍会在所有更高秩情形中持续存在。相关性质比存在顶点代数嵌入更强：较小的主子空间是正根分次的一个面。

对于类型 C_n，取

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \quad (i < n), \qquad \alpha_n = 2\varepsilon_n,$$

并令

$$Q_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i.$$

代数 $W^{(n)}$ 是 Q_+ 分次的，其中

$$\mathrm{wt}_{\mathrm{root}}\, E_{ij} = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \qquad \mathrm{wt}_{\mathrm{root}}\, D_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j.$$

引理 8.2。令 $1 \leq m \leq n$，并设

$$F_m = \sum_{i=n-m+1}^{n} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i.$$

$W^{(n)}$ 中权属于 F_m 的根齐次分量之和自然同构于 $W^{(m)}$。此外，限制到该面可将.....对应起来

$$(R_{W^{(n)}})_{F_m} \cong R_{W^{(m)}}, \qquad (\mathrm{gr}^F W^{(n)})_{F_m} \cong \mathrm{gr}^F W^{(m)},$$

and

$$J_\infty(R_{W^{(n)}})_{F_m} \cong J_\infty(R_{W^{(m)}}).$$

在这些识别下， $\psi^{(n)}$ 的限制为 $\psi^{(m)}$。

证明。 Q_+ 中元素的和只有在每个加项都属于 F_m时，才属于 F_m 。因此，根权属于 F_m 的流单项式只使用终端C_m 子系统中的正根流。在自由场实现中，这些恰好是涉及最后 m对辛玻色子的流。这将面子代数识别为 $W^{(m)}$。

同样的正性论证适用于张成 C_2（$W^{(n)}$）的每一项，以及定义 Li 滤过的每一项：若其总根权属于 F_m，则其所有因子都属于 F_m。平移保持根权不变。因此，取面与 C_2商以及 Li 伴随分次相交换。

最后，选取 $R_{W^{(n)}}$ 的根齐次多项式表示。其喷射变量与相应生成元具有相同的根权。根权为 F_m 的多项式只能涉及面变量，而面之外的齐次关系无法对面内的关系有所贡献。因此，取面这一操作与构造弧代数可交换。自然性给出最后一个断言。□

利用引理 8.1，现在可得

定理 8.3。 对于每个 $n \geq 4$，主子空间

$$W(-\frac{1}{2}\Lambda_0) \subset L_{-1/2}(\mathfrak{sp}_{2n})$$

都不是经典自由的。

证明。由引理 8.1，映射 $\psi^{(4)}$ 在共形权为四时具有非零核。应用引理 8.2 ，令 $m = 4$。将 $\psi^{(n)}$ 限制到终端 C_4 面上，恰好得到 $\psi^{(4)}$。因此，其非零核在$\ker \psi^{(n)}$中仍然非零。□

结合秩一和秩二的结果，这些发现表明，在所提出的分类中，三阶仍是尚待处理的情形：

$$W(-\frac{1}{2}\Lambda_0) \subset L_{-1/2}(\mathfrak{sp}_{2n}) \text{ is classically free} \quad \Longrightarrow \quad n \leq 3.$$

9. 类型 F_4 中层级 $-\frac{5}{2}$ 的主子空间

Set

$$V = L_{-5/2}(F_4), \qquad W = W(-\frac{5}{2}\Lambda_0), \qquad \mathfrak{g} = F_4.$$

V 的伴随簇是最小幂零轨道闭包 [6, 9]。令

$$Y = \overline{\pi(\mathbb{O}_{\min})} \subset \mathfrak{n}_+^*, \qquad \pi(x)(u) = (x, u).$$

由于 $\dim \mathfrak{n}_+ = 24$ 和 $d(\mathbb{O}_{\min}) = 9$，根据动量映射秩公式可得 $\dim Y = 15$。

最高根分次将其识别为

$$\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_+(C_3) \oplus E \oplus \mathbb{C}e_\theta, \qquad E \cong \Lambda^3_0\mathbb{C}^6.$$

这里， E是一个十四维辛表示。在C_3(*)$\mathfrak{n}_+$上选取坐标 $x_1, \dots, x_9$，在 E^*上选取坐标 $v_1, \dots, v_{14}$，并选取最高根坐标 z。在最小轨道图表 $z \neq 0$上，约瑟夫关系表示为

$$x_i = \frac{\nu_i(v)}{z} \qquad (1 \le i \le 9),$$

其中 ν_i 是相应的二次矩映射分量；参见 [13, 第 3 节。2]因此，

$$\mathbb{C}[Y] \cong P/I, \qquad P = \mathbb{C}[z, v_1, \dots, v_{14}, x_1, \dots, x_9], \qquad I = (zx_i - \nu_i(v) : 1 \le i \le 9) : z^\infty. \tag{54}$$

多项式次数为二和三时的精确有理数计算得到

$$\dim I_2 = 15, \qquad \dim I_3 = 346, \qquad \dim(P_1 I_2) = 343.$$

因此， I 有十五个极小二次生成元和三个极小三次生成元。这些计算并未排除更高次数下存在其他生成元的可能性。

猜想 9.1. 典范满射

$$R_W \longrightarrow \mathbb{C}[Y]$$

是一个同构。此外，理想 I 在（54）中由 I_2 以及 I_3/P_1I_2的基的三个代表元生成。

共同的约瑟夫理想构造促使我们提出更强的工作猜想：如同 W 在 G_2型中的情形，它是经典自由的。上述额外关系使证明更加复杂，但并不构成障碍。此断言独立于猜想 9.1。若猜想 9.1成立，且 J_∞（$\mathbb{C}[Y]$）是一个整环，那么优势投影 $\mathbb{O}_{\min} \to Y$结合约化奇异支撑定理 [10], 可得

$$J_\infty(\mathbb{C}[Y]) \twoheadrightarrow \operatorname{gr}^F W \longrightarrow \mathbb{C}[J_\infty\overline{\mathbb{O}_{\min}}]_{\mathrm{red}},$$

从而得到经典自由性。作为对 $J_\infty(\mathbb{C}[Y]) \cong W(-\frac{5}{2}\Lambda_0)$ 的支持，我们使用 Macaulay2 证明了

$$\operatorname{Hilb}_q J_\infty(\mathbb{C}[Y]) \equiv \operatorname{Hilb}_q \operatorname{gr}^F W \mod q^4.$$

参考文献

[1] D. Adamović, 《一些有理顶点代数》, Glas. Mat. Ser. III 29(49) (1994), 25–40；arXiv:q-alg/9502015。[2] D. Adamović, 《超共形代数及仿射李代数 $A_2^{(1)}$ 的某些模的一种实现》, Transform. Groups 21 (2016), no. 2, 299–327；arXiv:1407.1527。[3] D. Adamović, T. Creutzig, N. Genra, 《$\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ 的松弛模与对数模》, Math. Ann. 389 (2024), 281–324；arXiv:2110.15203。[4] G. E. Andrews, 《分拆理论》, 剑桥数学文库, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1998。[5] T. Arakawa, 《关于顶点代数的 C_2-余有限条件的一点说明》, Math. Z. 270 (2012), 559–575；arXiv:1004.1492。[6] T. Arakawa, 《Kac–Moody代数上模的伴随簇及 C_2-余有限性与 W 代数》, Int. Math. Res. Not. IMRN 2015 (2015), 11605–11666；arXiv:1004.1554。[7] T. Arakawa and K. Kawasetsu, 《拟光滑顶点代数与模线性微分方程》, 载于：李群、几何与表示论, Progr. Math. 326, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018, 第 41–57 页；arXiv:1610.05865。[8] T. Arakawa and A. R. Linshaw, 《顶点代数的奇异支撑及其伴随概形的弧空间》, 载于：李代数系统的表示与幂零轨道, Progr. Math. 330, Birkhäuser/Springer, Cham, 2019, 第 1–17 页；arXiv:1804.01287。

[9] T. Arakawa and A. Moreau, 《Joseph 理想与光滑极小 W 代数》, J. Inst. Math. Jussieu 17 (2018), 397–417；arXiv:1506.00710。[10] T. Arakawa and A. Moreau, 《弧空间与手征辛核》, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 57 (2021), 795–829；arXiv:1802.06533。[11] T. Arakawa, J. van Ekeren, and A. Moreau, 《容许仿射顶点代数所对应的幂零轨道》, Proc. London Math. Soc. (3) 125 (2022), no. 3, 681–699；arXiv:2010.08429。[12] J. D. Axtell and K.-H. Lee, 《与 G 型仿射李代数相关的顶点算子代数》, J. Algebra 337 (2011), 195–223；arXiv:1011.3473。[13] C. Beem, C. Meneghelli, and L. Rastelli, 《来自希格斯支的自由场实现》, J. High Energy Phys. 2019, no. 9, 058；arXiv:1903.07624。[14] C. Calinescu, J. Lepowsky, and A. Milas, 《某些$A_1^{(1)}$ 模的主子空间的顶点代数结构，I：一级情形》, Internat. J. Math. 19 (2008), no. 1, 71–92；arXiv:0704.1759。[15] C. Calinescu, J. Lepowsky and A. Milas, 《某些$A_1^{(1)}$ 模的主子空间的顶点代数结构，II：高等级情形》, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), no. 8, 1928–1950；arXiv:0710.1527。[16] C. Calinescu, J. Lepowsky, and A. Milas, 《 A、 D、 E 型非扭曲仿射李代数一级模的主子空间的顶点代数结构》, J. Algebra 323 (2010), 167–192；arXiv:0908.4054。[17] T. Creutzig and N. Garner, 《李超代数变形中的 Warnaar–Zudilin 猜想》, Res. Math. Sci. 13 (2026), Paper No. 33；arXiv:2501.11509。[18] A. J. Feingold and I. B. Frenkel, 《经典仿射代数》, Adv. Math. 56 (1985), 117–172。[19] V. G. Kac and M. Wakimoto, 《关于边界等级容许表示的一点说明》, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 355 (2017), 128–132；arXiv:1612.07423。[20] H. Li, 《顶点代数阿贝尔化》, Comm. Math. Phys. 259 (2005), 391–411；arXiv:math/0409140。[21] H. Li and A. Milas, 《喷射概形、量子二对数与 Feigin–Stoyanovsky 主子空间》, J. Algebra 640 (2024), 21–58；arXiv:2010.02143。[22] H. Mourtada, 《有理双点奇点的喷射概形》, 载于《赋值理论的交互》, 第 373–388 页。European Mathematical Society-EMS-Publishing House GmbH, 2014。[23] M. Mustaţă, 《局部完全交典范奇点的喷射概形》, 附录由 D. Eisenbud 和 E. Frenkel 撰写, Invent. Math. 145 (2001), 397–424；arXiv:math/0008002。[24] K. Ono, S. Robins, P. T. Wahl, 《关于将整数表示为三角数之和》, Aequationes Math. 50 (1995), 73–94。[25] D. I. Panyushev, 《幂零轨道及其割线簇》, J. Algebra 682 (2025), 689–722；arXiv:2412.20809。[26] O. Perše, 《将 B_4 嵌入 F_4 的顶点算子代数类比》, J. Pure Appl. Algebra 211 (2007), 702–720；arXiv:math/0701040。[27] O. Perše, 《容许半整数等级上与 B 型仿射李代数相关的顶点算子代数》, J. Algebra 307 (2007), 215–248；arXiv:math/0512129。[28] O.Perše, 《与 A 型仿射李代数的某些容许模相关的顶点算子代数》, Glas. Mat. 43(1) (2008), 41–57。[29] A.V. Stoyanovsky, 《李代数变形与特征标公式》, Functional Analysis and Its Applications. 1998;32(1):66-8。[30] A. V. Stoyanovsky and B. L. Feigin, 《流代数表示的函数模型与半无限舒伯特胞腔》, Funct. Anal. Appl. 28 (1994), 55–72；doi:10.1007/BF01079010。电子邮件地址：hao-li@oist.jp

电子邮件地址：amilas@albany.edu