量子参考系中由涨落定理导出的广义第二定律

Feng-Li Lin[1], * 和 Sayid Mondal[2], †[1]国立台湾师范大学物理系，台北 *11677*，台湾[2]阿图罗·普拉特大学精确与自然科学研究所，*Playa Brava 3256*，*1111346*，伊基克，智利（日期：2026年11月3日）

我们证明，在固定的半有限代数上经历幺正驱动和弛豫的黑洞外部区域满足广义第二定律（GSL）。Wall 的著名证明假设半经典几何，并将固定母态限制在一系列连续视界切面的代数上。我们则在固定的着装外部代数上演化态。在特征数据完备的情况下，同一个半经典外部区域支持这两种描述，类似于通过态—算符对偶联系起来的海森堡绘景和薛定谔绘景。我们将引力荷用作量子时钟，构造一个模交叉积，其中的密度算符所对应的迹熵，除时钟贡献外可重现广义熵。我们的方法与正则化场论中的热力学相呼应，并通过开放外部区域的量子信道涨落定理（FT）来表述 GSL。在特定动力学假设下，我们提出三种互补的表述。将分离的幺正驱动和弛豫结合起来，可利用模功、联系视界吸收与面积增益的物理过程第一定律，以及通过数据处理得到的相对熵收缩。时间局域描述则可处理同时发生的幺正驱动与耗散。双时刻惊异度涨落定理针对完整通道，识别出非幺正修正，并在无需解析中间动力学的情况下，为幺正的着装演化给出广义第二定律界。若弛豫不混合不同的着装荷扇区，且保持完整的着装参考态，则其具有幺正性。幺正性是此涨落定理证明的充分条件，但并非特定演化满足 GSL 的必要条件。这些熵界在受控的慢时钟极限下确立了 GSL，并量化了有限宽度时钟修正。

arXiv:2611.29415v1 [hep-th] 22 Nov 2026

目录

I. 引言 2
A. Wall 的按切面索引证明 B. 固定着装代数与广义第二定律的三种表述 3
C. 共同外部区域代数与态 – 可观测量二元性 4

II. 右楔区可观测量与广义熵：综述 5
A. 标量视界代数与通量平衡 7
1. 体可观测量与特征数据 7
2. Killing 流作为模流 8
3. Raychaudhuri 方程与渐近视界荷 8
B. 视界上的度规扰动 9
1. 规范不变可观测量 9
2. 剪切／新闻代数与通量 9
C. Tomita–Takesaki 理论与量子参考系 10
D. 交叉积、密度算符与广义熵 11
1. 模交叉积 11
2. 量子参考系中的熵与广义熵 12

III. 幺正驱动与弛豫：条件广义第二定律 13
A. 带紫外截断的分离式广义第二定律论证 13
B. 惊异度涨落定理 14
C. 完整修饰熵平衡 15
1. 子系统、态与两种不同的熵 15
2. 精确收缩与时钟修正 16
3. 面积响应与视界边界条件 16
4. 用功、能量、物质熵及时钟修正表示相对熵 17
D. 条件广义第二定律与高斯时钟界 17
1. 有限宽度与渐近广义第二定律判据 18
2. 修正项的物理来源 18
3. 宽高斯参考态的误差界 18
4. 幺正驱动过程中的平均时钟荷 19

IV. 修饰代数上的开放系统动力学所导出的广义第二定律 19
A. 幺正驱动与弛豫同时进行 20
B. 熵产生与广义视界响应 20
C. 条件广义第二定律与幺正驱动的作用 21

V. 黑洞量子通道涨落所导出的广义第二定律定理 22
A. 幺正量子通道的涨落定理与广义第二定律 22

* fengli.lin@gmail.com
† sayid.mondal@gmail.com

1. 开放系统信道及其逆过程222. 迹保持与幺正性223. 双时刻意外度统计与涨落关系234. 从涨落关系到广义第二定律23B. 作为量子通道的黑洞动力学的幺正约束241. 荷守恒与平稳参考态242. 分离的时间局域演化253. 低能解释与具体模型26

VI. 结论 26致谢 27A. 迹公式、密度算符与慢时钟极限 271. 迹与密度算符 272. 慢时钟下的相对熵极限 27B. 高斯时钟修正与误差界 28C. 幺正驱动后的参考减法与态依赖性 291. 隐式参考减法 292. 幺正驱动与关于态的信息 293. 面积响应与物理功解释 29D. 输运的视界荷与物理生成元匹配 301. 正则化期望值与表示协变性 302. 物理右楔区生成元必须满足的检验 30参考文献 31

I. 引言

黑洞热力学探讨的是，当物质和量子信息穿越视界时，第二定律如何依然成立。物质落入黑洞时，外部场的熵本身可能减少；而霍金辐射则会使视界面积本身减少。广义第二定律（GSL）关注的是几何与外部场的总熵，而非单独关注其中任何一项 [1, 2]。对于半经典黑洞外部区域，广义熵为

$$S_{\rm gen} = \frac{\langle A \rangle}{4G} + S_{\rm out}, \tag{1}$$

我们使用 $\hbar = c = k_B = 1$。广义第二定律断言，这种熵在未来的适当变化是非负的。理解为何这一组合遵循第二定律，是检验黑洞热力学解释以及量子场与引力之间相互作用的一项基本测试。

构建证明比将普通第二定律应用于约化密度算符更为微妙。量子场论（QFT）连续理论中的式（1）所含的物质熵存在紫外发散，其重整化必须与引力贡献保持一致。此外，外部场代数通常是III型的，不存在内禀的约化密度算符，尽管相对熵仍有意义 [3–5]。因此，证明必须明确所比较的外部区域可观测量，定义总熵，并将其变化与一个符号确定的量联系起来。即使完整的物质–引力系统以幺正方式演化，约化的外部区域描述仍会遗漏环境可观测量及其关联。因此，完整系统精细熵的守恒本身并不能确定外部区域广义熵的变化。

Wall颇具影响力的证明将嵌套视界代数的相对熵单调性与几何模流和聚焦方程结合起来 [6]。在半经典几何中，该证明比较固定母态在连续视界切面之外可用的可观测量上的限制。后续进展包括引力有效场论中的第二定律、针对视界切面的交叉积构造，以及涉及动力学切面的推广[7–10]。

本文提出一种受量子涨落定理启发的互补方法。量子涨落定理将功和熵产生的统计与通常的第二定律联系起来 [11–15]。我们保持着衣右楔形代数不变，并追踪态在物理幺正驱动和弛豫过程中的演化。基于 Witten 及其合作者提出的引力交叉积构造 [16–20], ，我们将渐近视界荷用作量子时钟。这个量子参考系支持一种密度算符描述，其中的熵包含面积和外部场贡献，以及明确的时钟修正。它使广义第二定律的论证与正则化量子场论中的热力学推理相平行，并允许以量子信道涨落统计的形式进行表述。我们发展了三种互补的设定：首先分别考察幺正驱动和弛豫，然后允许同时发生开放系统动力学，最后考虑针对完整通道的双时刻惊异度涨落定理。每种表述都将熵平衡与物理演化的特定性质联系起来。

以下各小节将阐释这些观点及其相互关系。第 IA 节回顾 Wall 基于切面的证明；第 IB 节概述我们的固定代数方案及其三种通道表述；第 IC 节讨论它们共有的半经典外部区域，以及与海森堡–薛定谔态–可观测量对偶性的类比，图 1对此作了说明。

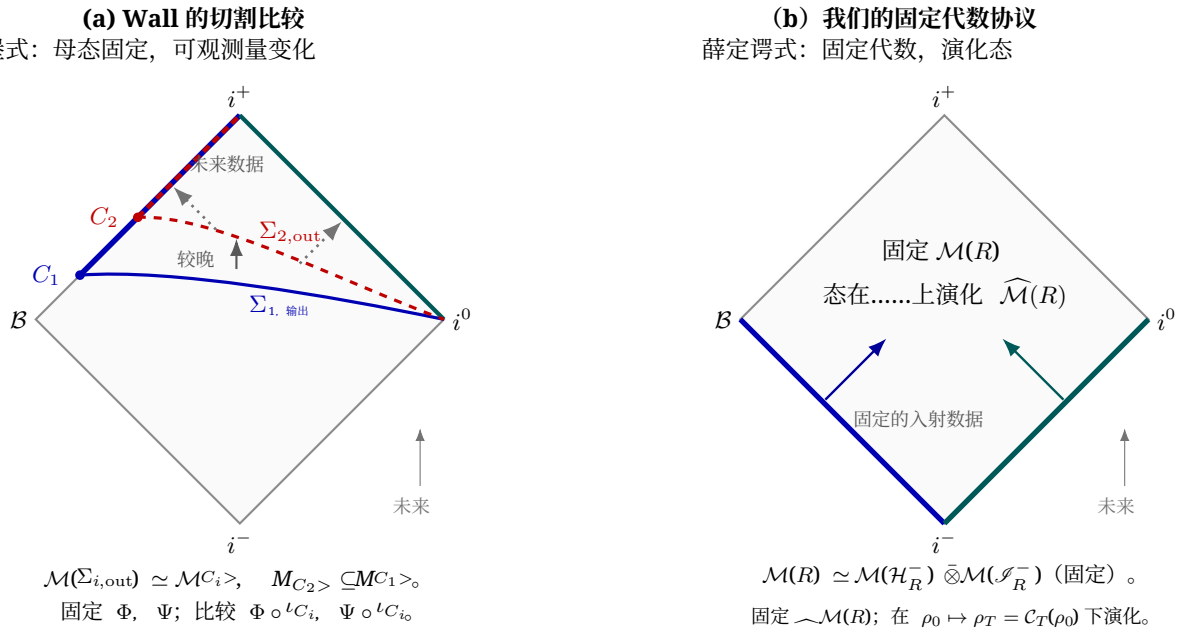


图 1. 双分叉黑洞右外部区域中互补的态–可观测量描述，类似于海森堡绘景和薛定谔绘景。图中省略了角向以及柯西曲面的内部延伸。(a) 在 Wall 的海森堡式比较中，$\Sigma_{i,\text{ out}}$ 在未来视界 C_i处相交。实线蓝色和虚线红色分别标示较早和较晚的切片及其嵌套的视界尾部，两种比较均包含相同的未来无穷代数。母态 Φ, Ψ 保持固定，而它们经由包含映射 ι_{C_i} 的限制会随可访问代数而改变。(b) 在我们的薛定谔式协议中，入射数据代数及其修饰交叉积 $\widehat{\mathcal{M}}(R)$ 保持固定，而态在 $\mathcal{C}_T$作用下演化。这种类比涉及态–可观测量二元性；它并不意味着将切割限制等同于结合幺正驱动与弛豫的物理信道。参见第 I C节。这里，$\mathcal{B}$ 表示分岔面，而 $i^{\pm}$ 和 i^0 分别表示类时无穷远和类空无穷远。

A. Wall 按切面索引的证明

Wall 对广义第二定律的证明避开了并不存在的密度算符 [6]。未来因果视界的一个切面 C 决定了一个由未来边界数据构成的代数$\mathcal{M}_{C>}$，其中包括下文所指定的共同渐近扇区。如果 C_2在任何地方都不位于 C_1的过去，那么较晚切面的代数就包含于较早切面的代数中，而 Araki 相对熵的单调性 [3]给出

$$\mathcal{M}_{C_2>} \subseteq \mathcal{M}_{C_1>}, \qquad D_{C_1}(\Phi\|\Psi) \geq D_{C_2}(\Phi\|\Psi). \quad (2)$$

这里， D_C 表示两个态限制在$\mathcal{M}_{C>}$上的相对熵。无需为 III 型代数引入约化密度算符。

图 1(a) 将这一边界描述与柯西曲面 Σ联系起来。令 $C = \Sigma \cap \mathcal{H}_R^+$，并令 Σ_{out} 为其外部部分，即一个部分柯西曲面。在 Wall 的决定论假设下，可以将其上的数据演化到上方的视界 C 以及未来无穷远 [6]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\Sigma_{\text{out}}) &:= \mathcal{M}\big(D(\Sigma_{\text{out}})\big) \simeq \mathcal{M}_{C>}, \\ \mathcal{M}_{C>} &:= \mathcal{M}(\mathcal{H}^+_{R,C>}) \vee \mathcal{M}(\mathscr{I}^+_R). \end{aligned} \quad (3)$$

其中， D 表示依赖域， $\vee$表示所生成的冯·诺依曼代数；对于相互独立的完整边界扇区， $\vee$ 是它们的冯·诺依曼张量积。因此， C 标记了边界代数：数据并不只存在于余维二切面上。所需的任何类时无穷远数据或零模数据都包含在式（3）的渐近扇区中。

当 Σ 在图中向上移动时，其切面沿视界向前移动。未来视界部分逐渐缩小，而渐近扇区保持不变，从而得到式（2）。从这个意义上说，可访问代数随之演化。这是对嵌套子代数的限制，而不只是对同一代数进行幺正传输。若变形同时保持 C 和依赖域不变，则代数不会改变。

Wall 的假设包括：由视界和零无穷远数据决定演化、沿不同生成线的超局域性、局部洛伦兹不变性，以及稳定性条件。参考文献 [6]对若干自由场和选定的二维共形理论检验了这些假设。

量子能流的快速变化本身并不意味着几何会发生巨大改变。例如，短促而微弱的脉冲可以快速变化，却只导致视界面积发生微扰性改变。Wall 的分析并不要求通量缓慢变化：它在经典背景上使用量子场，并根据期望应力张量半经典地计算主要的几何响应 [6, 第 2 节。2]因此，在此处相关的经典稳态情形中，背景视界为比较不同切面提供了共同的生成元，尽管面积会对通量作出响应。这种描述

预设反作用始终保持微扰性。

取 Ψ 为视界真空与一个固定的忠实渐近参考态的乘积。对于任意态 Φ，写成

$$D_C(\Phi\|\Psi) = \Delta\langle K_C\rangle - \Delta S_{\text{out}}[C]. \tag{4}$$

这里， K_C 包含固定的渐近模生成元；其视界部分生成几何 boost 流。在线性化 Raychaudhuri 方程以及共同的未来平稳边界条件下，可概略地写为

$$\Delta\langle K_C\rangle = C_{\text{future}} - \frac{\Delta\langle A[C]\rangle}{4G}. \tag{5}$$

该量 C_{future} 与比较中所选的切面无关；它包含与切面无关的渐近模能贡献。方程（4）和（5）蕴含

$$D_C(\Phi\|\Psi) = C_{\text{future}} - \Delta S_{\text{gen}}[C]. \tag{6}$$

因此，方程（2）中的包含关系反转为 $S_{\text{gen}}[C_2] \geq S_{\text{gen}}[C_1]$。该论证结合了几何模流、 [21, 22], 聚焦/面积平衡以及相对熵的单调性。

Faulkner 和 Speranza 将这种基于切面的框架扩展到了与 Killing 视界的任意切面相关的交叉积引力代数 [8]。给定一个在视界上具有几何模流的参考态，他们证明，在半经典极限下，引力代数的迹熵会重现该切面的广义熵。切面之间的比较仍然源于底层量子场代数的相对熵单调性。因此，他们的结果为 Wall 的切面比较提供了引力代数形式化。本文提出了一种与广义第二定律互补的方法，下一小节将对此作概述。我们使用交叉积构造一个固定的着衣右楔形代数，并研究态在经历物理过程而演化时广义熵如何变化。

B. 固定着装代数与广义第二定律的三种表述

在本文中，外部区域、右外部区域和右楔区 均指与所选右侧渐近区域 R 相关联的同一区域。该区域不包括黑洞内部和另一侧的外部区域；图4明确展示了这一区别。对于本文所讨论的无质量辐射扇区，我们假定过去视界 $\mathcal{H}_R^-$ 和过去零无穷远 $\mathscr{I}_R^-$ 上的数据能够唯一确定外部区域解，并穷尽所选的辐射相空间。由于两个初始面均为零面，这些数据是特征数据。完备性还要求，在极限截面或类时无穷远处没有遗漏额外模态或辛通量。在给定衰减条件且两个边界扇区彼此独立的情况下，这给出 [20, 23]

$$\mathcal{M}(R) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{H}_R^-) \bar{\otimes} \mathcal{M}(\mathscr{I}_R^-). \tag{7}$$

横线表示相互独立的完整入射扇区的冯·诺依曼张量积。方程（7）确定了母外部代数的一种表述，如图 1（b）所示。第 IC 节将其与 Wall 的切割代数联系起来。分岔面以及渐近视界端点处的引力荷参与了可观测量及其熵的构造。

我们使用渐近视界荷作为量子时钟 [24–29]。模交叉积给出一个固定的$\widehat{\ }$II型$_\infty$ 修饰代数 $\mathcal{M}(R)$，它具有忠实正规半有限迹 τ [16–20]。半有限性意味着正算符可以由有限迹的正算符从下方逼近，尽管 $\tau(\mathbf{1})$ 可能是无穷大。普通的 I 型量子力学和 II 型修饰代数都允许归一化密度算符，并且具有相同的基于迹的熵和测量概率公式。这一共同框架使量子涨落定理得以应用于着装外部区域。其迹熵在慢时钟极限下再现广义熵，时钟贡献除外。第 II节将阐述这一构造及其熵的解释。

我们将着装外部区域视为一个开放量子系统，它与约化描述中排除的自由度相互作用，例如落入模进入黑洞内部之后。这样，即使完整的物质—引力动力学是幺正的，仅限于外部区域可观测量的描述仍可能呈现非幺正演化。我们用固定着装代数上的量子信道来描述这种演化，而不假设视界两侧存在张量积分解。引力时钟仍是系统的一部分，到达 $\mathscr{I}_R^+$ 的辐射仍计入外部区域能量平衡。图3 总结了三种表述，以及每种广义第二定律论证所依据的熵不等式：

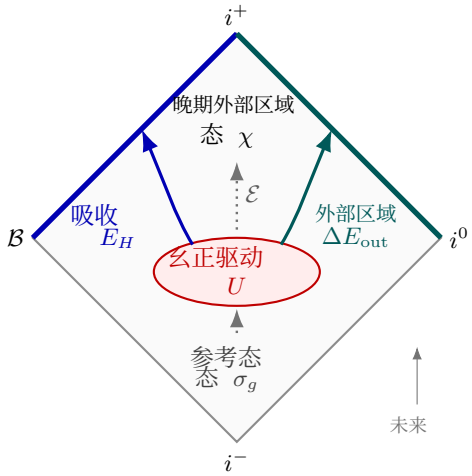
1.分离的幺正驱动与弛豫(第III节)。幺正驱动将初始着装参考态σ_g 变为 ω，而保参考态弛豫$\mathcal{E}$ 得到 χ:

$$\sigma_g \xrightarrow{U} \omega \xrightarrow{\mathcal{E}} \chi, \qquad \mathcal{E}(\sigma_g) = \sigma_g. \tag{8}$$

幺正涨落定理（FT）将平均模功与 $D_\tau(\omega\|\sigma_g)$联系起来。数据处理不等式（DPI）为弛豫后保留的可区分性设定上界。将视界能量与面积响应相匹配，并控制时钟项，便可将这种收缩转化为条件广义第二定律。图2展示了这一协议；第III A 节中的截断计算给出了基本的能量平衡。

2. 同时进行幺正驱动与视界交换（第IV节）。时间局域有效动力学允许

(a) 右外部区域中的幺正驱动



同一态上的阶段 $\widehat{\mathcal{M}(R)}$。

(b) 态协议与能量平衡

$$\sigma_g \xrightarrow{U} \omega \xrightarrow{\mathcal{E}} \chi, \qquad \mathcal{E}(\sigma_g) = \sigma_g.$$

1. 平衡态制备。 从平稳正规着装参考态 σ_g 开始。2. 幺正驱动。 局域幺正驱动产生 $\rho_\omega = U\rho_{\sigma_g}U^\dagger$。3. 外部区域弛豫。 在限制于外部区域可观测量后，有效通道给出 $\rho_\chi = \mathcal{E}(\rho_\omega)$。

Killing 能量平衡：

$$W = \underbrace{E_H}_{\text{horizon}} + \underbrace{\Delta E_{\text{out}}}_{\text{exterior}}.$$

物理过程面积响应：

$$\Delta\left(\frac{A}{4G}\right) = \beta_H E_H.$$

图 2。第 III 节所用分离协议的时空与态描述。幺正驱动将 Killing 能量注入外部场。在随后的弛豫过程中，一部分能量经由未来视界被吸收，另一部分保留在外部区域能量账目中，其中包括到达未来零无穷远的辐射。物理过程第一定律将视界吸收与面积增益联系起来。态标签表示一个修饰代数上的各个阶段。第 IV 节和V 节不需要在幺正驱动之后设置单独的弛豫阶段。

在同一时间区间内进行幺正驱动和弛豫。幺正驱动与弛豫之间不存在明确区分的态 ω。积分后的耗散熵产生取代了分离协议中的相对熵收缩。视界响应必须与归因于动力学耗散部分的面积变化相匹配。

3.双时刻惊异度涨落定理 （第 V 节）。对实际初始和最终惊异度的测量，其均值等于迹熵变化。一般通道会在指数平均中产生非幺正修正，因此仅凭这一关系未必能证明广义第二定律。幺正性消除了该修正，并使逆向实验归一化。随后，我们确立了修饰弛豫为幺正的充分物理条件，从而在给定时钟误差的情况下得到广义第二定律界，而无需对中间演化作时间局域描述。

表 I 比较了三种表述的作用与假设。分离协议是主要结果。局域时间表述将其熵平衡推广到重叠的幺正驱动与耗散，而双时刻表述则探讨完整通道的哪种性质能使惊异度涨落定理推出广义第二定律。一个充分条件是幺正性；第 VB 节在严格的着装荷守恒以及完整参考态保持不变的条件下确立了这一点。这些充分条件比平均能量—面积平衡更强。它们约束完整着装态的重新分布，包括其时钟依赖性，而不仅仅是物质扇区。对于所有允许的输入态，幺正性都会消除涨落定理修正。对于某一特定演化而言，幺正性并非必要条件；第 III 节和第 IV 节也未作此假设。物理信道和熵估计必须为各表述所采用的假设提供依据。这些表述以涨落关系和引力代数方面的研究为基础 [30–34] ，并补充了关于零无穷远广义第二定律及开放系统黑洞热力学的研究 [35, 36]。

C. 共同外部代数与态–可观测量二元性

Wall 的切割比较与我们的固定代数协议使用相同的半经典外部区域及其母场代数。在 Wall 的方法中，假定 $\mathcal{H}_R^+ \cup \mathscr{I}_R^+$ 上的完整出射数据能够确定外部区域的解，不存在遗漏模或边界通量；视界截面选取未来视界尾部及相同的渐近扇区 [6, 8]。我们的方法则使用 $\mathcal{H}_R^- \cup \mathscr{I}_R^-$ 上的完整入射数据，为永恒 Schwarzschild 外部区域及其无质量辐射扇区定义固定母代数，如式（7）所示。散射将这一表述与 Wall 的出射表述联系起来 [23]。因此，固定母代数能够容纳不断变化的可访问可观测量代数。

移动未来视界截面或切片的出射部分，不会重新定义入射代数。在微扰理论中，未来几何的变化仍可能改变散射、通量以及出射可观测量的对应关系。我们的 E_{out} 包括到达 $\mathscr{I}_R^+$ 的辐射；使用有限出射切面进行比较时，必须计入中间通量。Wall 在每个视界截面上都保持相同的未来无穷代数，因此

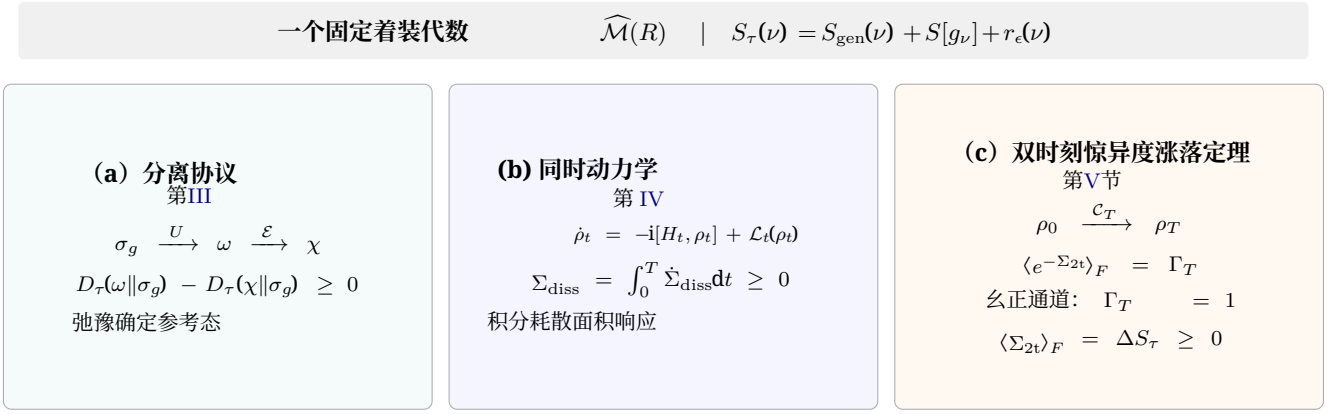


图3。在同一个引力修饰的右楔代数上，三种表述的熵不等式。（a）保持参考态的弛豫通过数据处理给出非负的相对熵损失。（b）时局域模型给出非负的积分耗散熵产生。（c）一般双时关系包含 $\Gamma_T = \tau[\rho_T \mathcal{C}_T(\mathbf{1})]$。对于幺正通道，$\Gamma_T = 1$，詹森不等式给出$\langle\Sigma_{2t}\rangle_F = \Delta S_\tau \geq 0$，这是该表述中所使用的非负量。幺正性还使逆向实验得到归一化；该实验从 ρ_T开始，并不一定返回到 ρ_0。熵字典、方程（67）和（68），以及给定的引力和时钟条件，将这些不等式转化为相应的广义第二定律界。

表I. 图中三种表述的作用3。它们构成循序渐进的教学过程；各自的动力学假设各不相同。

表述	所探讨的问题	非负熵量及其作用
分离协议（第 III节）	幺正驱动的功、视界吸收和外部熵如何协调一致?	幺正涨落定理给出模工作统计。对于保参考态弛豫，数据处理不等式给出非负的相对熵损失，并将其纳入广义第二定律平衡。
同时动力学（第IV节）	什么取代了中间态 ω 在幺正驱动与弛豫重叠时?	数据处理不等式给出了非负的耗散产生率。积分平均平衡要求匹配耗散能量和面积变化与视界响应。
双时刻惊异度涨落定理（第 V节）	全通道惊异度涨落定理意味着广义第二定律吗?	一般通道给出 $\Delta S_\tau \geq -\log \Gamma_T$。幺正性给出 $\Delta S_\tau = \langle\Sigma_{2t}\rangle_F \geq 0$，并使逆向实验归一化；随后，熵字典给出带有时钟误差 ·

它对参考模能量的贡献与切面无关。改变该渐近代数，就需要重新审视这一抵消。

图 1 展示了海森堡–薛定谔类比。Wall 的包含关系改变了哪些可观测量可以访问，同时保持母态不变。相较之下，我们的方案指定一个通道，以及固定修饰代数上演化的约化态。这是态–可观测量二元性的互补用法，并未将切割限制等同于物理弛豫。

薛定谔描述通过幺正驱动、能量交换和视界响应，将广义第二定律与开放系统热化联系起来。对于完整场–时钟代数上的幺正通道，双时刻惊异度涨落定理意味着迹熵不会减少。熵字典将此转化为广义第二定律，误差仅为受控的时钟修正。该涨落定理证明所需的充分幺正性条件，对黑洞动力学的量子通道模型施加了物理约束。与 Wall 的方法相比，这种与幺正量子通道的直接联系是我们方案在概念上的优势。

第II节回顾修饰代数与熵词典。第III–V 节发展通道表述，第VI 节作总结。附录A–D 给出支持性推导和时钟误差估计。

II. 右楔区可观测量与广义熵：综述

本节汇集早期工作中确立的要素，而非提出新的视界代数或广义熵构造 [16–20]。我们明确涨落定理方案所适用的可观测量、荷和熵。以下所有视界公式均假定具有第IB节所规定意义上的完整零边界数据，并满足所述的渐近衰减条件、规范约化和微扰区间。

图 4 利用最大延拓的永恒史瓦西时空确定视界的记号。在克鲁斯卡尔坐标中，R 是区域 $U < 0 < V$。我们采用参考文献 [20]中的完整片层约定：$\mathcal{H}^- := \{V = 0\}$

延伸穿过分岔面 $\mathcal{B}$，其中

$$\mathcal{H}_R^- := \{V = 0,\ U < 0\}, \qquad \mathcal{H}_L^- := \{V = 0,\ U > 0\}.$$

因此 $\mathcal{H}^- = \mathcal{H}_R^- \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{H}_L^-$。上标 $-$ 标记这一完整的类光片层；其 $U > 0$ 分支是左侧外部区域的未来视界。只有 $\mathcal{H}_R^-$ 属于 R的过去边界。第二个完整片层是 $\mathcal{H}^+ = \{U = 0\}$，其右侧分支 $V > 0$ 是 R的未来视界。

对于下文所使用的视界参考态，右视界代数的完整模生成元由遍及整个$\mathcal{H}^-$的Killing 通量表示，而单侧能量只涉及$\mathcal{H}_R^-$：

$$K_{\Psi,\mathcal{H}^-} = \beta_H F_\xi^{\mathcal{H}^-}, \qquad k_\Psi = \beta_H F_\xi^{\mathcal{H}_R^-}.$$

在视界扇区公式中，我们将 $K_{\Psi,\ \mathcal{H}^-}$ 简写为 K_Ψ。这一区别涉及积分区域以及完整模生成元对代数及其交换子的作用；它并不意味着任一分支具有内禀的III型密度算符。单侧能量通过经过调节并减去参考态的期望值来使用。当需要完整的外部区域模生成元时，还必须纳入独立的无穷远扇区，详见下文。

之所以需要这一简短的回顾章节，是因为冯·诺伊曼代数的分类涉及以下事实。I 型代数具有极小投影和通常的矩阵迹。II 型II_1 因子没有极小投影，但具有有限的归一化迹。II 型II_∞ 因子则具有忠实正规半有限迹 $\tau(\mathbf{1}) = \infty$。III 型因子完全没有忠实的半有限迹 [4, 37]。局域量子场论代数通常属于 III_1 型；忠实正规态的模作用所生成的交叉积是半有限的 [38]。它为正规态提供密度算符 ρ_ν、它们的惊异度 $k_\nu = -\log \rho_\nu$，以及下文所使用的双时刻测量统计。

因此，本节回顾如何通过在$\mathcal{H}^-$上定义的量子时钟进行着装，为标量微扰和度规微扰构造右楔区上的 II 型交叉积密度算符。

A. 标量视界代数与通量平衡

本小节回顾 [20] 中的构造，但仅介绍广义第二定律论证所需的要素。该构造在具有分岔 Killing 视界、Killing 场 ξ^a 和表面引力 κ的平稳背景上进行。令 $\beta_H = 2\pi/\kappa$。

1. 体可观测量与特征数据

对于满足方程 $P\phi = 0$ 的实 Klein–Gordon 场 ϕ，紧支撑测试函数 f 定义了涂抹可观测量的等价类

$$\phi_f = \int_M f\phi\, \epsilon_{\bar{g}}, \qquad f \sim f + Pf_0\,, \tag{9}$$

这里，$\epsilon_{\bar{g}} = \sqrt{-\bar{g}}\ {}^4x$ 是平稳背景度规，$\det \bar{g}_{ab}$ d 是其时空体积形式，而 $f_0 \in C_0^\infty(M)$。下文所有协变导数均相对于 $\bar{g}$（或其在横截面上的诱导度规）定义；我们用 $\nabla = \nabla$ 表示背景 Levi-Civita 联络。令 $G = G_{\mathrm{ret}} - G_{\mathrm{adv}}$ 为因果传播子。柯西曲面 Σ 上的协变辛形式为

$$\begin{aligned} \Omega_\Sigma(\phi_1, \phi_2) &= \int_\Sigma (\phi_1 \nabla^a \phi_2 - \phi_2 \nabla^a \phi_1)\, \mathrm{d}\Sigma_a, \\ \phi_f &= \Omega_\Sigma(\tilde{G}f, \phi). \end{aligned} \tag{10}$$

将此双线性形式作用于两个解上，称为辛配对；在第二行中，它由 Gf 和场 ϕ构造出涂抹可观测量。在壳上，辛流是守恒的。将 Σ 变形为完备的过去特征边界、过去视界$\mathcal{H}_R^-$ 和过去零无穷远 $\mathscr{I}_R^-$，在满足衰减与完备性假设的条件下，得到

$$\phi_f = \Omega_{\mathcal{H}_R^-}(\tilde{G}f, \phi) + \Omega_{\mathscr{I}_R^-}(\tilde{G}f, \phi). \tag{11}$$

此公式假设辐射散射数据完备，且特征边界两端具有适当的衰减条件；它也是式（7）的基础：全局楔区态由一个完备的零边界上的数据确定，而视界截面只选取其中一部分数据。对于有质量场、束缚态或零模，特征描述中必须纳入额外数据（必要时包括类时无穷远处的数据）。仅写作$\mathcal{H}_R^- \cup \mathscr{I}_R^-$ 时，我们采用无质量辐射情形。

令 U 在图$\mathcal{H}^-$ 的完整片上为仿射参数，图中所示见 4，其中 $U < 0$ 位于其右支，$U = 0$ 位于分岔面$\mathcal{B}$上。记 $\varphi = \phi|_{\mathcal{H}^-}$ 并记 $\Pi = \partial_U \varphi$。令$\mathrm{d}\mu$为背景横向面积测度，则辛形式的视界部分为

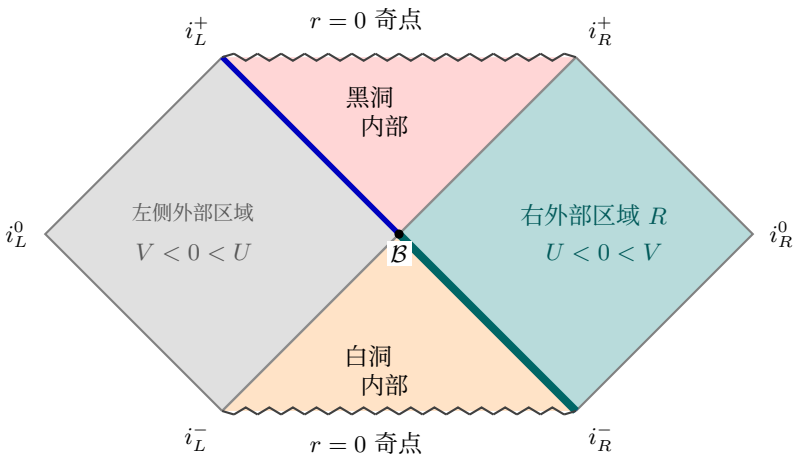
$$\Omega_{\mathcal{H}^-}(\varphi_1, \varphi_2) = \int \mathrm{d}U\, \mathrm{d}\mu\, (\varphi_1 \Pi_2 - \varphi_2 \Pi_1). \tag{12}$$

视界因子与完整楔区代数的区别在于

$$\mathcal{M}_H := \mathcal{M}(\mathcal{H}_R^-) = \{e^{\mathrm{i}\Pi(s)} : s \in C_0^\infty(\mathcal{H}_R^-, \mathbb{R})\}'', \tag{13}$$

$$\mathcal{M}(R) \simeq \mathcal{M}_H \overline{\otimes} \mathcal{M}_\infty, \quad \mathcal{M}_\infty := \mathcal{M}(\mathscr{I}_R^-). \tag{14}$$

张量积预设了彼此独立的完整边界扇区；否则应使用它们生成的代数。在记法中省略 $\mathcal{M}_\infty$ 并不意味着消除了它的动力学、熵或其与视界扇区的关联。



完整视界片

蓝色和青绿色结合起来得到

$$\mathcal{H}^-: \quad V=0, \quad U\in\mathbb{R}.$$

视界模生成元为

$$K_\Psi = \beta_H F_\xi^{\mathcal{H}^-}.$$

右侧过去视界分支

青绿色标记 $\mathcal{H}_R^-$，其中有 $U<0$。其单侧能量为

$$k_\Psi = \beta_H F_\xi^{\mathcal{H}_R^-}.$$

R 的入射边界是$\mathcal{H}_R^-\cup\mathscr{I}_R^-$。

图4。永恒史瓦西时空的彭罗斯图，角方向已省略。右侧阴影菱形为 R；黑洞内部与左侧外部区域是不同的区域。完整片层$\mathcal{H}^-$ ($V=0$)从 i_R^- 经由$\mathcal{B}$ 延伸至 i_L^+，并包含青绿色的右支和蓝色的左支。另一条对角线是$\mathcal{H}^+$ ($U=0$)。 $\pm$ 标签遵循完整片层约定；特别地，$\mathcal{H}_L^-$ 从$\mathcal{B}$ 指向未来，是左侧外部区域的未来视界。 K_Ψ 中的视界贡献采用完整的 U 范围，而 k_Ψ 仅采用 $U<0$。后者通过正文中规定的经调节、减除后的期望值来理解。

*2. Killing*流作为模流

对于高斯仿射真空，视界二点函数为

$$\langle \Pi(U,y)\Pi(U',y')\rangle_\Psi = -c_\Pi \frac{\delta_\mu(y,y')}{(U-U'-\mathrm{i}0)^2}, \tag{15}$$

其中 $c_\Pi>0$ 由辛归一化确定。这是对真空关联函数的规定，而不仅仅是对其Hadamard奇异性的规定。在标准局域量子场论假设下，视界代数是III型$_1$因子。仅凭Hadamard短程奇异性，无法确立任意态的KMS性质。

过去视界上的基灵矢量为

$$\xi = -\kappa U\partial_U. \tag{16}$$

该变换对应的辛动量映射为

$$F_{\xi,\phi}^{\mathcal{H}^-} = -\tfrac{1}{2}\Omega_{\mathcal{H}^-}(\varphi,\mathcal{L}_\xi\varphi) = -\kappa\int_{\mathcal{H}^-} \mathrm{d}U\,d\mu\,U\,\Pi^2. \tag{17}$$

引入 Killing 时间 u 将 $U=-e^{-\kappa u}$ 的膨胀转化为平移。式（15在条带 $0<\mathrm{Im}\,u<2\pi/\kappa$ 内的解析性给出 Kubo-Martin-Schwinger (KMS) 条件 [39–41]。因此，比索尼亚诺–威奇曼逻辑确定了

$$K_{\Psi,\phi} = \beta_H F_{\xi,\phi}^{\mathcal{H}^-}. \tag{18}$$

这是 boost模流 [42–44] 在弯曲时空中的基灵视界类比。该自同构在 III 型代数上是外自同构；将实现它的平移算符添入代数，正是交叉积步骤。

3. Raychaudhuri 方程与渐近视界荷

令 θ 表示生成元相对于 U的$\mathcal{H}^-$膨胀。我们选择不含独立的一阶度规微扰的标量扇区，并施加一阶平稳视界边界条件。于是$\theta^{(1)}=0$；这是对扇区和边界条件的选择，并非仅由背景平稳性所导致。二阶零测地线瑞恰杜里方程为

$$\partial_U\theta^{(2)} = -8\pi G\,\Pi^2. \tag{19}$$

为确定二阶约定并避免因子 2 的歧义，取一族 $Y(\lambda)$，并定义

$$\begin{aligned} Y(\lambda) &= Y^{(0)} + \lambda Y^{(1)} + \lambda^2 Y^{(2)} + O(\lambda^3),\\ Y^{(2)} &= \tfrac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_0 = \tfrac{1}{2}\delta^2 Y. \end{aligned} \tag{20}$$

符号 δ 表示关于 λ 的变分； λ 是小参数。我们比较具有相同背景和一阶荷的辐射态制备，因此它们的几何熵差从二阶开始。更高微扰阶数与下文讨论的时钟宽度修正相互独立。

定义局部视界荷

$$q_U = \frac{1}{4G}\int_{S_U} \mathrm{d}\mu_U\,(1-U\theta). \tag{21}$$

这里，$\mathrm{d}\mu_U$ 是 S_U上的扰动面积元，其中$\partial_U\mathrm{d}\mu_U=\theta\mathrm{d}\mu_U$；在二阶通量积分中，$\mathrm{d}\mu$仍表示其背景值。在平稳衰减条件$U\theta\to 0$ 下，当 $U\to\pm\infty$时，渐近视界荷

$$q_R := \lim_{U\to-\infty} q_U^{(2)}, \qquad q_L := \lim_{U\to\infty} q_U^{(2)} \tag{22}$$

等于相应的面积系数。这些荷定义在完整零视界的渐近端。仿射坐标的选取使得$\mathcal{B}$ 位于$U=0$，而右侧过去视界分支为 $-\infty<U<0$。因此 q_R 由极限截面 S_U 在 $U\to-\infty$处定义，位于示意性渐近平坦图中的 i_R^- 端；q_L 则定义在完整视界的相反仿射端$U\to+\infty$ 。分岔面是一个有限截面，并非任一渐近端。取这些极限需要满足所述的渐近衰减条件和正则性；它们并非普通时空点 [20]处的额外局域可观测量。

结合公式（19）和公式（21）可得

$$\partial_U q_U^{(2)} = 2\pi \int \mathrm{d}\mu\, U\, \Pi^2 \,. \tag{23}$$

将其从 $U=-\infty$ 积分到 ∞，得到全视界约束

$$q_L = q_R - K_{\Psi,\phi}, \tag{24}$$

其中我们使用了公式（18）。因此，渐近视界荷就是通量的引力记忆。根据黑洞第一定律，从概念上说，它们是极限视界截面 [45–47] 所对应的面积变化。

B. 视界上的度规扰动

本小节回顾 [48, 49]中关于视界上度规扰动的辛形式构造。

1. 规范不变可观测量

设 $h_{ab}:=\delta g_{ab}=\partial_\lambda g_{ab}(\lambda)|_{\lambda=0}$ 是线性化爱因斯坦方程的一个解，其中 $g_{ab}(0)=\bar{g}_{ab}$。紧支撑的对称张量 f^{ab} 定义了规范不变的涂抹可观测量

$$h_f=\int_M f^{ab}h_{ab}\,\epsilon_{\bar{g}}, \qquad \bar{\nabla}_a f^{ab}=0, \qquad f\sim f+P_{\bar{g}}f_0, \tag{25}$$

其中 f_0 是紧支撑检验张量，$P_{\bar{g}}$ 是在适当商空间上的规范固定的线性化爱因斯坦算子。Lee–Wald 辛流给出

$$h_f=\Omega_\Sigma(\tilde{G}_{\bar{g}}f,h). \tag{26}$$

在控制规范、角点和渐近项后，守恒关系再次允许进行边界分解

$$h_f=\Omega_{\mathcal{H}}(\tilde{G}_{\bar{g}}f,h)+\Omega_{\mathscr{I}}(\tilde{G}_{\bar{g}}f,h). \tag{27}$$

完整的构造需要参考文献 [46, 50, 51] 中的协变相空间和诺特荷技术；此处我们只需关注辐射视界扇区。

2. 剪切／新闻代数与通量

选择一种视界适配规范，使得 $\mathcal{H}^-$ 及其仿射生成元 $\ell^a=(\partial_U)^a$ 保持不变，并且在视界 [48, 52]上 $h_{ab}\ell^b=0$。令 e_A^a 切于其二维截面，并沿 ℓ^a输运。它们的背景度规为 $q_{AB}=\bar{g}_{ab}e_A^a e_B^b$，逆度规为 q^{AB}，面积测度为 $\mathrm{d}\mu$；这些张量用于升降横向指标。拉回 $h_{AB}=h_{ab}e_A^a e_B^b$ 是截面度规的微扰。其无迹部分就是辐射度规数据

$$C_{AB}^{\mathcal{H}}:=h_{AB}-\tfrac{1}{2}q_{AB}q^{CD}h_{CD}.$$

由于背景 Killing 视界上 $\partial_U q_{AB}=0$，将零外挠曲率分解为膨胀和剪切并对其变分，可得 $\delta\theta=\frac{1}{2}\partial_U(q^{AB}h_{AB})$ 和

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{AB}&=\tfrac{1}{2}\partial_U h_{AB}-\tfrac{1}{2}q_{AB}\delta\theta=\tfrac{1}{2}\partial_U C_{AB}^{\mathcal{H}},\\ N_{AB}^{\mathcal{H}}&:=2\delta\sigma_{AB}=\partial_U C_{AB}^{\mathcal{H}}, \quad q^{AB}N_{AB}^{\mathcal{H}}=0.\end{aligned} \tag{28}$$

因此，$N_{AB}^{\mathcal{H}}$ 是视界新闻，用于衡量辐射度规沿零生成元的变化。线性化 Raychaudhuri 方程在此扇区给出 $\partial_U\delta\theta=0$；平稳的一阶边界条件设定$\delta\theta=0$ [48, 52]。

将 Einstein–Hilbert Lee–Wald 辛形式流拉回到 $\mathcal{H}^-$ 在此规范下，会留下 $C_{AB}^{\mathcal{H}}$ 及其仿射导数的反对称化乘积。按照式（12）所采用的定向，辐射部分为 [50, 52]

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathcal{H}}(h_1,h_2)=\frac{1}{32\pi G}\int_{\mathcal{H}^-}&\mathrm{d}U\,d\mu\\ &\times\left(C_1^{AB}\partial_U C_{2AB}-C_2^{AB}\partial_U C_{1AB}\right),\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $C_{iAB}=C_{AB}^{\mathcal{H}}[h_i]$。式（29）假设满足辐射衰减条件，或施加了可消除边界项的边界条件；独立零模和边界电荷需要另行处理。由涂抹新闻构造的 Weyl 算子会生成引力视界因子，如式（13）所示；完整的右楔形代数还包括无穷远处的任何独立数据。辐射仿射真空具有相应的高斯视界关联，并且在正则性和 Killing 视界假设下，提供几何 KMS 模流。仅有共同的 Hadamard 短程奇异性，并不足以证明任意引力子态具有 KMS 性质。

由方程（29）得到的引力 Killing生成元为

$$F_{\xi,\mathrm{grav}}^{\mathcal{H}^-}=-\frac{\kappa}{8\pi G}\int_{\mathcal{H}^-}\mathrm{d}U\,d\mu\,U\,\delta\sigma_{AB}\delta\sigma^{AB}. \tag{30}$$

以及相应的模哈密顿量

$$K_{\Psi,\mathrm{grav}}=\beta_H F_{\xi,\mathrm{grav}}^{\mathcal{H}^-}. \tag{31}$$

包含标量微扰和度规扰动的二阶Raychaudhuri方程为

$$\partial_U\theta^{(2)}=-8\pi G\,T_{UU}^{(2)}. \tag{32}$$

其中我们定义

$$T^{(2)}_{UU} := \Pi^2 + \frac{1}{8\pi G}\delta\sigma_{AB}\delta\sigma^{AB}. \tag{33}$$

因此，总能量通量

$$F^{\mathcal{H}^-}_{\xi} := F^{\mathcal{H}^-}_{\xi,\phi} + F^{\mathcal{H}^-}_{\xi,\mathrm{grav}} = -\kappa \int_{\mathcal{H}^-} dU\, d\mu\, U\, T^{(2)}_{UU}\ . \tag{34}$$

因此，式（24）在物质通量与剪切通量之和的情况下成立：

$$q_L = q_R - K_\Psi \tag{35}$$

with

$$K_\Psi := K_{\Psi,\phi} + K_{\Psi,\mathrm{grav}} = \beta_H F^{\mathcal{H}^-}_{\xi}. \tag{36}$$

这篇简要的辐射综述并未解决边缘模、焦散或渐近匹配问题 [49, 52, 53]。更完整的对称性与边缘模构造可能会增加与态有关的熵项 [48]；当这些模处于激活状态时，必须将这些熵项纳入熵平衡与电荷平衡。

对于完整外部区域代数上的忠实乘积参考态，完整模生成元为 $K_{\Psi,\ \mathcal{H}^-} + K_{\Psi,\ \mathscr{I}^-}$。刚才推导的通量公式针对视界因子，我们将其记作$K_\Psi = K_{\Psi,\ \mathcal{H}^-}$。在下文的交叉积公式中，$\mathcal{M}$ 和 K_Ψ 必须始终指向同一个选定的场代数及其完整模生成元。视界综述提供了$\mathcal{M}_H$的荷字典。要将其应用于完整外部区域，就需要相应的总荷字典，并纳入所有激活的渐近扇区；这是一个物理匹配假设，并非仅凭视界约束就能得出的结论。只有当独立扇区的贡献及其关联不发生变化时，才能在熵差中忽略这些扇区。

对于广义第二定律的应用，有两点区别很重要：

1. 全视界通量是一个定义良好的生成元，作用于 $\mathcal{H}^-$ 的两个分支，如图 4所示；它并非与右侧外部区域的面积平衡相关的单侧能量通量。后者形式上为

$$F^{\mathcal{H}^-_R}_{\xi} = -\kappa \int_{\mathcal{H}^-_R} \mathrm{d}U\, \mathrm{d}\mu\, U\, T^{(2)}_{UU}\ , \tag{37}$$

对于边界项消失的经典微扰，该量是正定的。然而，严格局限于单侧的量子通量未必能定义一个具有有限涨落的正自伴算符。

2. III型模算符是良好定义的，但未必存在内禀的右楔区模哈密顿量，即不能保证存在一个定义为密度算符负对数的右楔区模哈密顿量。因此，我们将符号保留给

$$k_\Psi := \beta_H F^{\mathcal{H}^-_R}_{\xi} \tag{38}$$

单侧能量，并通过其经调节后的参考态相减后的期望值来使用。不主张将其分解为两个由内禀的 III 型密度算符定义的单侧模哈密顿量 [42–44]。

为得到右分支面积约束，对式（21中的荷求导。利用 $\partial_U \mathrm{d}\mu_U = \theta \mathrm{d}\mu_U$ 以及 $\theta^{(1)} = 0$，膨胀的二次项在二阶微扰中没有贡献。因此

$$\begin{aligned}\partial_U q^{(2)}_U &= \frac{1}{4G}\int \mathrm{d}\mu\, [\theta^{(2)} - \theta^{(2)} - U\partial_U\theta^{(2)}] \\ &= 2\pi \int \mathrm{d}\mu\, U T^{(2)}_{UU},\end{aligned} \tag{39}$$

其中，式（32）包含物质通量和剪切通量。从 $U = -\infty$ 到 $U = 0$，并利用式（38），再结合式（ $U\theta^{(2)} \to 0$ 22）中的渐近衰减条件消去 $U = -\infty$处的膨胀边界项，可得

$$q_{\mathcal{B}} = q_R - k_\Psi, \qquad q_{\mathcal{B}} := \frac{A^{(2)}_{\mathcal{B}}}{4G}. \tag{40}$$

这里 $q_{\mathcal{B}}$ 是分岔面积荷，其二阶上标按 q_R 和q_L的惯例省略。这个关系将渐近视界荷与分岔面积联系起来。在量子理论中，我们通过使用共同调节器和荷约定的有限参考态扣除期望值来运用这一关系，而不将其视为独立定义的裸算符之间的等式。它不同于全视界关系（35），后者包含的是 K_Ψ，而非单侧能量 k_Ψ。

C. Tomita–Takesaki 理论与量子参考系

对于循环分离向量 Ψ，$S_\Psi a\Psi = a^\dagger\Psi$的闭包具有极分解 $S_\Psi = J_\Psi \Delta_\Psi^{1/2}$ 。模自同构为 [21, 22]

$$\alpha^\Psi_t(a) = \Delta^{it}_\Psi a \Delta^{-it}_\Psi, \qquad K_\Psi = -\log\Delta_\Psi. \tag{41}$$

与 Killing 流的几何识别需要视界真空/KMS 条件和正则性假设；对于任意态 [42–44]，这一识别并不成立。完整的标准形生成元作用于代数及其交换子。采用 $K_\Psi = \beta_H F_\xi$ 时，上述约定对应于模参数 t 下的 Killing时间 $-\beta_H t$ 。

对于第二个向量 Φ，相对 Tomita 算子最初定义在稠密定义域$\mathcal{M}\,|\Psi\rangle$ 上，定义为$S_{\Phi\Psi} a\Psi = a^\dagger\Phi$，且 $\Delta_{\Phi\Psi} = S^\dagger_{\Phi\Psi} S_{\Phi\Psi}$。相对模算子能够表征可区分性，而无需使用 III型密度算子。交叉积引入模时钟，为正规态提供半有限迹和密度算子。

在通量平衡公式 Eq. (35) 中，荷 q_R和 q_L 与时钟读数 p_R 和 p_L共轭，且$[q_I, p_J] = -\mathrm{i}\delta_{IJ}$。因此，渐近视界荷是物理时钟动量，其共轭量则提供关系性 boost 时间。这实现了文献 [24–29]的参考系思想。对于忠实参考态 Ψ，从量子时钟 q_R 的视角看，相关交叉积代$\widehat{}$数 $\mathcal{M}$的对角约束为 q_R 是

$$C_\Psi := -q_L = K_\Psi - q_R, \tag{42}$$

$\widehat{}$因此，对于 $\hat{a} \in \mathcal{M}$,

$$[\hat{a}, C_\Psi] = 0. \tag{43}$$

与 $a \in \mathcal{M}$ 相关的不变关系观测量为

$$O_R^t(a) = e^{\mathrm{i}(p_R - t)K_\Psi} a e^{-\mathrm{i}(p_R - t)K_\Psi}. \tag{44}$$

这意味着“ a 时钟读数为t时的场观测量”，并且在理想时钟极限下，它与对角约束对易。这就是应用于视界荷 [26, 28, 29] 的佩奇–伍特斯关系机制。

量子时钟并不仅仅是辅助性的超紫外截断。算符 q_R 是一个物理的渐近视界荷，通过式（22）与面积变化相关，而其共轭量 p_R 提供关系性推动时间。我们分别用 $|q\rangle$和 $|p\rangle$表示它们的本征态，其中 $q_R|q\rangle = q|q\rangle$。在全文中， q_R 表示该算符，而 q 表示其真实谱值；波函数 $g(q)$是该谱值的函数。一个归一化的量子时钟波包

$$|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\, g(q)\,|q\rangle\,, \qquad \int \mathrm{d}q\,|g(q)|^2 = 1, \tag{45}$$

是对该荷的物理制备。其宽度衡量渐近视界荷/面积的不确定性，并且根据共轭关系，也衡量时钟读数的不确定性。该波包规定了参考系的物理制备。当熵展开适用于某一协议的初态和末态时，在两个态中使用相同的量子时钟波包，会抵消它们显式贡献之差$S[g]$。这种抵消并不能控制动力学平衡中其他依赖波包的项；制备和通道必须分别进行检查。

D. 交叉积、密度算符与广义熵

第 IIC 节的时钟为外部场的模演化提供了一个量子参考。与式（44）中一样，我们用一个以时钟读数为条件的关系观测量，取代在指定坐标时间处的场观测量。时钟的联合平移与场的模演化使这一关系保持不变。交叉积描述了以下对象的代数:

这类着装可观测量，包括渐近视界荷。因此，量子参考系就是物理时钟及其制备；交叉积则是相对于该参考系的外部区域观测量代数 [29]。其半有限迹使我们能够为正规着装态指定一个密度算符，并比较该态沿下文协议演化时的熵。

1. 模交叉积

我们将量子参考系 简称为 QRF，并对着装外部区域使用两个酉等价表示。在 QRF$_1$，中，场生成元是关系可观测量 $O_R^0(a)$，视界荷由 q_R表示。在 QRF$_0$，中，场生成元为 $a \in \mathcal{M}$，同一荷由 X表示。变换 $U_\Psi = e^{-\mathrm{i}K_\Psi p_R}$ 对可观测量进行共轭，并作用于态矢量，从而建立这两个表示之间的联系。

QRF$_1$ 中的修饰代数为 [54]

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \{e^{\mathrm{i}K_\Psi p_R} a e^{-\mathrm{i}K_\Psi p_R}, e^{\mathrm{i}sq_R} : a \in \mathcal{M}, s \in \mathbb{R}\}'', \tag{46}$$

其交换子为

$$\widehat{\mathcal{M}}_1' = \{a', e^{\mathrm{i}sC_\Psi} : a' \in \mathcal{M}', s \in \mathbb{R}\}''. \tag{47}$$

QRF$_0$ 中的变换后荷为

$$X := U_\Psi q_R U_\Psi^\dagger = q_R + K_\Psi. \tag{48}$$

QRF$_0$ 中的修饰代数及其交换子为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}_0 &:= U_\Psi \widehat{\mathcal{M}}_1 U_\Psi^\dagger \\ &= \{a, e^{\mathrm{i}sX} : a \in \mathcal{M}, s \in \mathbb{R}\}'',\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}_0' &:= U_\Psi \widehat{\mathcal{M}}_1' U_\Psi^\dagger \\ &= \{e^{-\mathrm{i}K_\Psi p_R} a' e^{\mathrm{i}K_\Psi p_R}, e^{-\mathrm{i}sq_R} : \\ &\qquad a' \in \mathcal{M}',\ s \in \mathbb{R}\}''.\end{aligned} \tag{50}$$

此后，我们在 QRF$_0$ 中表示可观测量和态，并$\widehat{}$ $\widehat{}$写作 $\mathcal{M} := \mathcal{M}_0$。这种参考系变换不同于后文讨论的物理幺正驱动。$\mathcal{M}$ 的模流在交叉积中是内的；当$\mathcal{M}$ 为 III 型$_1$ [16, 38]时，该交叉积是一个 II 型$_\infty$ 因子。

对于形式上的平坦时钟制备 $|\Psi\rangle \otimes |p = 0\rangle$，未归一化的伴随权可表示为

$$\begin{aligned}\rho_{\widehat{\Psi}} &= e^{-X}, \qquad \rho'_{\widehat{\Psi}} = e^{-q_R}, \\ \Delta_{\widehat{\Psi}} &= \rho_{\widehat{\Psi}} (\rho'_{\widehat{\Psi}})^{-1} = e^{-K_\Psi}.\end{aligned} \tag{51}$$

平坦时钟向量无法归一化。该代数存在一个忠实正规半有限迹 τ，且在相差一个正比例因子的意义下唯一，其归一化方式见附录 A。特别地，

$$\tau(\mathbf{1}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^q \mathrm{d}q = \infty. \tag{52}$$

表 II. 模交叉积的量子参考系解释。

物理要素	代数描述
时钟	视界荷 q_R 及其共轭阅读 p_R。
着装后的可观测量	关系场与视界荷生成 $\widehat{\mathcal{M}}$。
正规态	$\nu(A) = \tau(\rho_\nu A)$，其中 $\tau(\rho_\nu) = 1$。
时钟制备	波包 g 指定了荷分布，并对 $S[g]$ 做出了贡献熵。

因此， τ 不是归一化的迹态。归一化波包 g 则通过 QRF$_0$ 中的向量 $U_\Psi(|\Psi\rangle \otimes |g\rangle)$ 定义了正规参考态 σ_g。其密度算符和惊异度为

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma_g} &= |g(X)|^2 e^{-X}, \qquad \tau(\rho_{\sigma_g}) = 1, \\ k_g &:= -\log \rho_{\sigma_g} = X + h_g(X), \\ h_g(X) &:= -\log |g(X)|^2. \end{aligned} \tag{53}$$

对于 $g \neq 0$ 几乎处处，σ_g 是忠实的，并且满足自身模流的 KMS 条件；但它不必满足由 X生成的几何流的 KMS 条件。因子 $|g(X)|^2$ 使参考密度算符相对于 τ可归一化；若无此因子， $\tau(e^{-X}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}q = \infty$。

量子参考系 QRF$_0$ 中的着装分岔面积荷和单侧模哈密顿量为

$$\mathsf{q}_{\mathcal{B}} := U_\Psi q_{\mathcal{B}} U_\Psi^\dagger, \qquad \mathsf{k}_\Psi := U_\Psi k_\Psi U_\Psi^\dagger. \tag{54}$$

对积分约束（40）进行共轭变换，得到

$$\mathsf{q}_{\mathcal{B}} = U_\Psi (q_R - k_\Psi) U_\Psi^\dagger = X - \mathsf{k}_\Psi. \tag{55}$$

此后，这些可观测量及其取值所对应的态均用QRF$_0$表示。单侧k_Ψ 不同于惊异度 k_g；其有限的参考态相减解释，以及与外部 Killing 能量的对应关系，将在附录D中讨论。

表II 概述了交叉积的物理解释。迹属于代数，而时钟波包则规定了制备方式。

2. 量子参考系中的熵与广义熵

考虑一个归一化态 $|\Phi\rangle \otimes |g\rangle$ 并在 QRF$_1$，中计算其广义熵。在 QRF$_0$ 中，

$$\begin{aligned} \left|\Phi_g^{(0)}\right\rangle &= U_\Psi(|\Phi\rangle \otimes |g\rangle), \\ \nu(\widehat{A}) &= \left\langle \Phi_g^{(0)} \right| \widehat{A} \left| \Phi_g^{(0)} \right\rangle = \tau(\rho_\nu \widehat{A}), \qquad \widehat{A} \in \widehat{\mathcal{M}}. \end{aligned} \tag{56}$$

这里 ν 是正规态， ρ_ν 是其密度算符，其中 $\rho_\nu \geq 0$ 且 $\tau(\rho_\nu) = 1$。该算符可能是无界的；其谱投影属于 $\mathcal{M}$。附录A 给出了自然锥制备态的显式构造。参考态σ_g 使用相同的波包和物质态 Ψ；我们取 $g \neq 0$ 几乎处处成立，从而该参考态是忠实的。

由于 $U_\Psi^\dagger X U_\Psi = q_R$，在该制备中 X 的分布恰好为 $|g(x)|^2$:

$$\langle f(X) \rangle_\nu = \int \mathrm{d}x \, |g(x)|^2 f(x). \tag{57}$$

对于有界的 f，以及在积分绝对收敛时对于无界的 f，该结论均成立。特别地，

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_\nu &= \int \mathrm{d}x \, x |g(x)|^2, \\ \langle h_g(X) \rangle_\nu &= S[g] := -\int \mathrm{d}x \, |g(x)|^2 \log |g(x)|^2. \end{aligned} \tag{58}$$

波包熵是着装熵的一项贡献，而不是纯时钟向量的冯·诺依曼熵。假设所显示的矩和相对熵均为有限值。将 $k_g = X + h_g(X)$代入 D_τ 的定义，可得精确恒等式

$$S_\tau(\nu) = \langle X \rangle_\nu + S[g] - D_\tau(\nu \| \sigma_g). \tag{59}$$

不要求 ρ_ν 与ρ_{σ_g} 之间具有可交换性。

对于慢时钟极限，固定 Φ，使其满足$D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) < \infty$ ，并按照下式展宽时钟波包

$$g_\epsilon(x) = \sqrt{\epsilon}\, g_0(\epsilon(x - q_0)), \qquad \epsilon \to 0, \tag{60}$$

其中， g_0 是固定的归一化轮廓函数， q_0 是固定的荷偏移。在满足上述有限性和支撑条件的情况下，数据处理和下半连续性意味着，对于相应的着装态 ν_ϵ,

$$\begin{aligned} D_\tau(\nu_\epsilon \| \sigma_{g_\epsilon}) &= D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) - r_\epsilon(\nu_\epsilon), \\ 0 \leq r_\epsilon(\nu_\epsilon) &\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{61}$$

附录 A2 证明了所述乘积制备在该极限下成立。将式（61）代入式（59），并省略 ϵ在 ν 和 g上的标签，可得交叉乘积熵公式 [16, 17, 20, 54]

$$S_\tau(\nu) = \langle X \rangle_\nu - D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) + S[g] + r_\epsilon(\nu). \tag{62}$$

余项满足 $r_\epsilon = o(1)$，其中 $\epsilon \to 0$。这里$f(\epsilon) = o(1)$表示 $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = 0$，但未指定收敛速率；相比之下， $O(1)$仅表示有界性，并不一定趋于零。

为识别几何贡献，将 ν与固定的参考制备 $\sigma_{g_{\mathrm{ref}}}$进行比较。在整个比较过程中， Δ 表示参考减法，而非微扰导数。用输运能量表示的物质相对熵恒等式为

$$D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) = \Delta \langle \mathsf{k}_\Psi \rangle - \Delta S_{\mathrm{out}}. \tag{63}$$

确实，$\langle \mathsf{k}_\Psi\rangle_\nu = \langle k_\Psi\rangle_\Phi$ 通过对算符和态同时取共轭得到。这里 $\Delta S_{\rm out} = S_{\rm out}(\Phi) - S_{\rm out}(\Psi)$ 使用共同的调节器或有限差分方案 [55]。物质标签 Φ，Ψ 用于指定制备态；在有限 ϵ，Φ不必等于限制 $\nu|_{\mathcal{M}}$。必须计入所有活跃的边界能量和熵贡献；仅视界的记法假定渐近修正没有变化。

输运约束（55）与几何识别给出

$$\begin{aligned}\Delta\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle &= \Delta\langle X\rangle - \Delta\langle \mathsf{k}_\Psi\rangle \\ &= \frac{\Delta\left\langle A^{(2)}_{\mathcal{B}}\right\rangle}{4G}.\end{aligned} \tag{64}$$

从中减去参考态对应的式（62）；其物质相对熵为零，因此得到

$$\begin{aligned}\Delta S_\tau &= \Delta\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle + \Delta S_{\rm out} + \Delta S[g] + \Delta r_\epsilon \\ &= \Delta S_{\rm gen} + \Delta S[g] + \Delta r_\epsilon,\end{aligned} \tag{65}$$

其中

$$S_{\rm gen}(\mathcal{B};\nu) = \frac{\langle A_{\mathcal{B}}\rangle_\nu}{4G} + S_{\rm out}(\nu). \tag{66}$$

对于上述制备态，$S_{\rm out}(\nu)$ 表示式（63）中指定的物质贡献。将共同的、与态无关的常数吸收到广义熵约定中，并固定 τ，可得

$$S_\tau(\nu) = S_{\rm gen}(\nu) + S[g_\nu] + r_\epsilon(\nu). \tag{67}$$

对于一般的信道输出，这一关系要求有合理依据的物质—时钟描述，并对其熵余项加以控制；针对输运乘积制备的证明并不足够。渐近熵、边缘熵或其他参考系熵若独立变化，则必须另行纳入。

对于任意可容许的比较 $\nu_i \to \nu_f$，定义$\Delta S[g]:= S[g_{\nu_f}] - S[g_{\nu_i}]$和 $\Delta r_\epsilon := r_\epsilon(\nu_f) - r_\epsilon(\nu_i)$。于是

$$\Delta S_{\rm gen} = S_\tau(\nu_f) - S_\tau(\nu_i) - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon. \tag{68}$$

我们将式（67）和（68）称为熵字典：它们将修饰迹熵与广义熵联系起来，并分别列出波包贡献和余项。初态和末态的波包可以不同。所有比较均采用相同的迹归一化和加性熵约定。

III. 幺正驱动与弛豫：有条件的广义第二定律

本节的主要结果是：对于第II节构造的半有限着装右楔代数上的分离协议，推导出条件广义第二定律：先进行幺正驱动，随后发生弛豫。第IIIA 节以紫外调节后的量子场论作为教学示例，展示功、外部能量和视界面积如何进入论证。第IIIB 节采用半有限迹记号推导幺正惊异度涨落定理，并指出其均值等于幺正驱动产生的相对熵。第IIIC 节结合数据处理与着装熵字典，并将弛豫能量平衡与视界面积响应联系起来，同时明确保留时钟贡献。第IIID 节陈述条件广义第二定律的假设，并估算慢速高斯时钟所产生的修正。

A. 采用紫外截断的分离式广义第二定律论证

我们首先在经过调节的外部量子场论中给出论证，在那里密度算符和冯·诺依曼熵均有定义。施加紫外截断 Λ，并加入任何为使配分函数有限所需的额外红外调节器。初态 σ_Λ 具有吉布斯密度算符

$$\begin{aligned}\rho_{\sigma_\Lambda} &= Z_\Lambda^{-1} e^{-\beta_H H_{{\rm out},\Lambda}}, \\ Z_\Lambda &:= {\rm Tr}\, e^{-\beta_H H_{{\rm out},\Lambda}},\end{aligned} \tag{69}$$

其中 $H_{{\rm out},\,\Lambda}$ 是经过调节的外部 Killing 哈密顿量。幺正驱动制备出 ω_Λ，其密度算符为 $\rho_{\omega_\Lambda} = U_\Lambda \rho_{\sigma_\Lambda} U_\Lambda^\dagger$；随后弛豫得到$\rho_{\chi_\Lambda} = \mathcal{E}_\Lambda(\rho_{\omega_\Lambda})$。我们假设 $\mathcal{E}_\Lambda$ 是完全正且保迹的，并且 $\mathcal{E}_\Lambda(\rho_{\sigma_\Lambda}) = \rho_{\sigma_\Lambda}$。所有能量变化均采用相同的背景算符$H_{{\rm out},\,\Lambda}$，且所有量均在相同的截断下计算。我们用 $S(\nu_\Lambda)$和 $D(\mu_\Lambda\|\nu_\Lambda)$分别表示调节后各态的冯·诺依曼熵和相对熵，它们由相应的密度算符计算；特别地，$\Delta S_{{\rm out},\,\Lambda} = S(\chi_\Lambda) - S(\sigma_\Lambda)$。

1.功与能量平衡。幺正驱动期间的热传递可以忽略，其平均输入功为 $W = {\rm Tr}[(\rho_{\omega_\Lambda} - \rho_{\sigma_\Lambda}) H_{{\rm out},\,\Lambda}]$。幺正驱动保持熵不变，$S(\omega_\Lambda) = S(\sigma_\Lambda)$。将吉布斯对数代入相对熵，得到

$$\beta_H W = D(\omega_\Lambda\|\sigma_\Lambda) = \beta_H(E_H + \Delta E_{\rm out}). \tag{70}$$

第一个等式也是第 III B 节推导出的平均惊异度–功恒等式。第二个等式用到了 Killing 能量平衡：弛豫期间不再输入功，E_H 是视界吸收的能量，而 $\Delta E_{\rm out} = {\rm Tr}[(\rho_{\chi_\Lambda} - \rho_{\sigma_\Lambda}) H_{{\rm out},\,\Lambda}]$是外部区域 Killing 能量总量的变化，其中包括未来零无穷远处的辐射。没有未计入的通量流向无穷远。

2.视界响应。在二阶微扰下，采用适当的视界边界条件和共同背景归一化，物理过程第一定律给出

$$\frac{\Delta A}{4G} = \beta_H E_H. \tag{71}$$

这一步引入了引力响应；QFT 截断并不意味着这一点。

3. 留在外部区域中的相对熵。 末态不必是热态。用同一个参考吉布斯对数展开 $D(\chi_\Lambda\|\sigma_\Lambda)$，得到

$$D(\chi_\Lambda\|\sigma_\Lambda) = \beta_H \Delta E_{\rm out} - \Delta S_{{\rm out},\Lambda}. \tag{72}$$

4.广义熵与数据处理不等式。 从式（70）中减去式（72）（71）。于是

$$\begin{aligned}\Delta S_{{\rm gen},\Lambda} &:= \frac{\Delta A}{4G} + \Delta S_{{\rm out},\Lambda} \\ &= D(\omega_\Lambda\|\sigma_\Lambda) - D(\chi_\Lambda\|\sigma_\Lambda) \geq 0.\end{aligned} \tag{73}$$

该不等式由数据处理不等式应用于$\mathcal{E}_\Lambda$得出，因为$\mathcal{E}_\Lambda(\rho_{\sigma_\Lambda}) = \rho_{\sigma_\Lambda}$。

这个证明说明外部能量项如何抵消，留下视界面积增益以及外部熵变。它假设存在正则化吉布斯参考态、保参考态弛豫，以及相匹配的引力响应。它既没有构造连续统外部区域密度算符，也没有证明某个物理信道具有所需的不动点，更没有论证如何去除截断。在修饰表述中，参考惊异度还包含时钟波包，而迹熵已经包含面积项。以下小节将使用第II节的熵字典，并明确纳入时钟修正；式（73）不能直接应用于 III 型代数。

B. 惊异度涨落定理

涨落定理比较正向过程与指定逆向过程的统计，从而得到具有第二定律形式的平均不等式。熟知的例子涉及功统计 [11–15]。对熵观测量 $-\log\rho_\sigma$ 进行重复测量，在熵涨落理论及其模表述中也已得到充分研究 [56, 57]；相关工作明确讨论了惊异度熵产生统计 [58]。我们将固定参考态版本称为惊异度涨落定理。其基于迹的推导既适用于普通的I型量子力学，也适用于我们的II型修饰代数：前者使用通常的算符迹，后者使用半有限迹 τ。在这两种情况下，归一化和迹的循环性都会得到相同的涨落定理恒等式。对于修饰代数，必须控制所需的算符定义域、有限迹表达式和谱极限，而熵字典则将所得的平均熵平衡与包含时钟修正的广义熵联系起来。

令 τ 表示通常的 I 型迹或忠实正规半有限迹，并令 ρ_σ 为一个忠实密度算符，满足 $\tau(\rho_\sigma) = 1$。惊异度算符及其期望值为

$$k_\sigma := -\log\rho_\sigma, \qquad S_\tau(\sigma) = \tau(\rho_\sigma k_\sigma). \tag{74}$$

这是与概率为 p 的测量结果相关的信息$-\log p$的量子对应物。它也是由密度算符定义的模哈密顿量，与完整生成元 $-\log\Delta_\sigma$不同。记

$$k_\sigma = \sum_n k_n P_n, \qquad \rho_\sigma = \sum_n e^{-k_n} P_n. \tag{75}$$

谱结果 n 的概率为 $e^{-k_n}\tau(P_n)$。为清晰起见，我们写出求和形式；连续谱需要受控的谱极限。下文使用的所有迹表达式、熵和指数矩均假定定义良好。

一个主体施加幺正驱动 U，产生 $\rho_\omega = U\rho_\sigma U^\dagger$。在幺正驱动之前和之后立即测量同一个参考可观测量 k_σ。两个测量结果 n, m 定义了无量纲的惊异度变化，即模功， $w = k_m - k_n$。其联合概率及分布为

$$p_F(m,n) = \tau(P_m U P_n \rho_\sigma P_n U^\dagger), \tag{76}$$

$$P_F(w) = \sum_{mn} p_F(m,n)\delta(w - k_m + k_n). \tag{77}$$

因此， w 会在双测量实验的重复实现之间发生波动，尽管 U 保持不变。与量子功统计一样，它通过两次测量定义，而不是由单个功观测量 [59]定义。

由于 $[k_\sigma, \rho_\sigma] = 0$，第一次测量不会改变未条件化的初态。因而，特征函数采取全计数统计的形式

$$\begin{aligned}G(u) &:= \left\langle e^{{\rm i}uw}\right\rangle_F \\ &= \tau(e^{{\rm i}uk_\sigma} U e^{-{\rm i}uk_\sigma}\rho_\sigma U^\dagger) \\ &= \tau(\rho_\sigma^{-{\rm i}u} U \rho_\sigma^{1+{\rm i}u} U^\dagger).\end{aligned} \tag{78}$$

对于逆向实验，再次制备 σ 并将U替换为 $U^\dagger$。其联合概率分布为 $p_R(n,m) = \tau(P_n U^\dagger P_m \rho_\sigma P_m U)$。利用式（75）和迹的循环性可得 $p_F(m,n) = e^{k_m - k_n} p_R(n,m)$。逆向测量结果对的变化为$-w$，因此在共同支集上

$$P_F(w) = e^w P_R(-w), \qquad \left\langle e^{-w}\right\rangle_F = \sum_{mn} p_R(n,m) = 1. \tag{79}$$

积分恒等式也可通过如下设置得到： $u = {\rm i}$代入式（78）。这定义了一种逆幺正反向协议；若要将其认作物理时间反演，可能还需要反转外部控制。

詹森不等式意味着 $\langle w\rangle_F \geq 0$。为理解这个平均值，注意到密度算符的幺正共轭保持其谱不变，因此

$$S_\tau(\omega) = S_\tau(\sigma). \tag{80}$$

取一阶矩并利用这一熵等式可得

$$\begin{aligned}\langle w\rangle_F &= -{\rm i}G'(0) = \langle k_\sigma\rangle_\omega - \langle k_\sigma\rangle_\sigma \\ &= \tau[\rho_\omega(\log\rho_\omega - \log\rho_\sigma)] \\ &= D_\tau(\omega\|\sigma) \geq 0.\end{aligned} \tag{81}$$

这个正均值量化的是偏离参考态的程度，而不是精细熵的增加。对于式（69）中的受规制的吉布斯密度算符，$k_{\sigma_\Lambda} = \beta_H H_{\text{out},\,\Lambda} + \log Z_\Lambda$。因此，在幺正驱动前后测量相同的$H_{\text{out},\,\Lambda}$可得$\langle w \rangle_F = \beta_H W$，其中 $W = \mathrm{Tr}[(\rho_{\omega_\Lambda} - \rho_{\sigma_\Lambda}) H_{\text{out},\,\Lambda}]$ 在幺正驱动期间热传递可忽略时，正如式（70）所示，它就是平均输入功。该关系退化为相应的功涨落定理，其中非负平均功表示热被动性 [60]。一般的惊异度恒等式只要求两次测量中使用相同的参考惊异度，而不要求对驱动幺正算符作任何吉布斯诠释或限制。

对于方程（53）中的修饰态制备，相同的公式适用，其中 $k_\sigma = k_g = X + h_g(X)$。因此，归一化时钟波包会明确地进入测量可观测量及其统计量。以下小节将说明这种模功与物理能量传递和广义熵的关系，包括视界响应和受控慢波包修正。

C. 完整的着装熵平衡

现在，我们将惊异度涨落定理与广义熵联系起来。首先，我们将外部区域描述为一个开放系统，并说明其演化在何种情况下可分解为一次短暂的幺正驱动，随后是弛豫。接着，我们利用数据处理不等式，在完整的交叉积上推导熵平衡，其中包括时钟和参考系贡献。最后，我们利用视界能量／面积响应，确定这一平衡中的几何项，并说明在何种额外假设下模功会化为物理功。

1. 子系统、态与两种不同的熵

固定修饰代数 $\mathcal{M}(R)$ 及其忠实正规半有限迹 τ。正规态 ν 具有密度算符ρ_ν，且 $\tau(\rho_\nu) = 1$，并且

$$\langle O \rangle_\nu = \tau(\rho_\nu O), \tag{82}$$
$$S_\tau(\nu) = -\tau(\rho_\nu \log \rho_\nu), \tag{83}$$
$$D_\tau(\mu \| \nu) = \tau[\rho_\mu(\log \rho_\mu - \log \rho_\nu)]. \tag{84}$$

这里 S_τ 是方程（67）中的完整修饰熵，而S_{out} 仅表示其中受规制的物质贡献。相对熵公式不假设密度算符具有可交换性。

从物理上说，约化的外部区域描述不必包含参与散射的所有自由度。在一个受规制系统中，令 R 包含外部场及其引力时钟，并令 B 汇集第IB节所述的被省略自由度，例如穿越后可观测量位于黑洞内部的落入模。相互作用之后，我们对 B 取迹。初始时不相关的制备与联合幺正散射算符 V 给出

$$\rho_{RB}^{\text{fin}} = V(\rho_R \otimes \eta_B)V^\dagger,$$
$$\mathcal{C}_{\text{BH}}(\rho_R) = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{RB}^{\text{fin}}.$$

环境态 η_B 独立于输入 ρ_R固定。物理黑洞应用必须根据微扰散射动力学指定 V。其中可以包含相互重叠的幺正驱动和弛豫；二者的区分并非一般通道的固有属性。舍弃 B 意味着外部观察者无法再获取联合关联，尽管整体演化是幺正的。

这一构造说明了酉膨胀：通过与更大的系统耦合来表示开放演化，再将预测限制在着装外部区域的可观测量上。其代数对应形式是斯廷斯普林表示，即将海森堡信道表示为更大希尔伯特空间上某个表示的压缩。在这一更大的空间中，所构造的只是数学实现，不必对应物理黑洞内部。在连续统量子场论中，因此我们直接在 $\mathcal{M}(R)$ 上表述该通道，而不假设存在物理的内外张量积，也不假设存在跨越视界的内禀偏迹。

我们首先讨论分离协议，因为它将论证的两个要素区分开来：幺正驱动产生第IIIB节中测得的模功，而弛豫则降低与参考态的可区分性。我们首先将这一分离协议作为外部演化的一种近似来研究，前提是在幺正驱动期间耗散效应可以忽略不计。幺正驱动的持续时间远短于弛豫时间尺度，这使得上述近似具有合理性。下文将说明用于比较视界响应的几何方法，以及模功与物理功之间的关系。记作

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{BH}} &= \mathcal{E} \circ \mathrm{Ad}_U, \\ \rho_\omega &= U \rho_{\sigma_g} U^\dagger, \qquad \rho_\chi = \mathcal{E}(\rho_\omega). \end{aligned} \tag{85}$$

这里，$\mathrm{Ad}_U(\rho) := U\rho U^\dagger$表示在薛定谔绘景中作用于密度算符的幺正通道。相应的态序列为

$$\rho_{\sigma_g} \xrightarrow{\mathrm{Ad}_U} \rho_\omega \xrightarrow{\mathcal{E}} \rho_\chi.$$

演化后的态 ω 和 χ 不一定具有因子化或保持不变的时钟波包。在正则化绘景中，弛豫映射本身可表示为$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_B[V_{\text{rel}}(\rho \otimes \eta_B)V_{\text{rel}}^\dagger]$。

假设薛定谔绘景映射$\mathcal{E}$ 是完全正且保迹的，并且具有正规海森堡伴随映射，且

$$\mathcal{E}(\rho_{\sigma_g}) = \rho_{\sigma_g}. \tag{86}$$

这意味着弛豫不会改变所选的缀饰参考态制备。这是对物理信道的额外假设，并非

仅由 KMS 条件就能推出的结论。完整通道（包括幺正驱动和弛豫）不必保持 σ_g不变。幺正驱动与弛豫同时发生的情形将在第 IV节讨论。

除非另有说明， Δ比较 χ与σ_g， $\Delta_{\rm rel}$比较 χ 与 ω，而 $\Delta_{\rm drv}$ 比较 ω 与 σ_g。下文所有熵、期望值和差值均满足必要的支撑集和定义域条件。

2. 精确收缩与时钟校正

定义参考态相对熵损失

$$\Sigma_D := D_\tau(\omega\|\sigma_g) - D_\tau(\chi\|\sigma_g) \geq 0. \tag{87}$$

该不等式由数据处理不等式和方程（86）得出。代数上，

$$D_\tau(\nu\|\sigma_g) = \langle k_g\rangle_\nu - S_\tau(\nu). \tag{88}$$

此处隐含进行了参考减法：$\langle k_g\rangle_{\sigma_g} = S_\tau(\sigma_g)$。附录C详细说明了减去参考态后的等价恒等式。对$\omega$和 χ减去这个恒等式。结合 $S_\tau(\omega) = S_\tau(\sigma_g)$，可得

$$\Delta S_\tau = \Sigma_D + \Delta_{\rm rel}\langle k_g\rangle. \tag{89}$$

要得到广义熵，将由方程（67）推导出的通用差值恒等式（67）应用于初态σ_g 和末态 χ。相应的波包差值和余项差值为 $\Delta S[g] = S[g_\chi] - S[g]$ 和$\Delta r_\epsilon = r_\epsilon(\chi) - r_\epsilon(\sigma_g)$。这些比较的是整个协议，而 $\Delta_{\rm rel}$ 比较 χ 与幺正驱动所制备的态 ω 。

由于 $k_g = X + h_g(X)$，将式（89）与其结合，可得修正后的广义熵平衡关系 (68)

$$\begin{aligned}\Delta S_{\rm gen} = \Sigma_D + \Delta_{\rm rel}\langle X\rangle + \Delta_{\rm rel}\langle h_g(X)\rangle \\ - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon.\end{aligned} \tag{90}$$

在施加面积—能量平衡之前，弛豫可能改变平均着装荷和波包势的期望值，而完整协议可能改变波包熵和熵展开余项。对于下文建立的物理过程比较，平均电荷项会消失。对于实际的初态和末态，且其他熵扇区保持不变，这一平衡关系严格地由熵字典（68）推出。它允许时钟演化，而余项之差 Δr_ϵ 则需要独立的收敛性估计或有限宽度界。

3. 面积响应与视界边界条件

在量子参考系$_0$，中，式（55）中已经推导出的视界约束表示，修饰后的渐近荷为

$$X = \mathsf{q}_{\mathcal{B}} + \mathsf{k}_\Psi. \tag{91}$$

这里，$\mathsf{q}_{\mathcal{B}}$ 和k_Ψ 分别是式（54）中定义的分岔面积荷和单侧模能量；k_Ψ 不同于完整模生成元 K_Ψ。对于完整外部区域，该恒等式要求进行第IIB节所述的总荷匹配，包括每一项有效的渐近贡献。我们省略共同参考扣除，并在必要时通过有限期望值差来理解荷恒等式（附录D）。

定义外部区域 Killing 哈密顿量及其对应的 Killing 能量期望值：

$$\mathsf{k}_\Psi = \beta_H H_{\rm out}, \qquad E_{\rm out}(\nu) := \langle H_{\rm out}\rangle_\nu. \tag{92}$$

将 $H_{\rm out}$ 识别为物理的外部区域 Killing 生成元，需要满足附录D中讨论的电荷—散射对应关系。假设这一对应关系成立，且弛豫期间所有其他边界电荷均保持不变，则式（91）意味着

$$\Delta_{\rm rel}\langle X\rangle = \Delta_{\rm rel}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle + \beta_H \Delta_{\rm rel} E_{\rm out}. \tag{93}$$

我们计算从规则的分岔截面 C_i 到截面 C_f 在平稳的未来极限中的视界响应。在 $\mathcal{H}_R^+$ 上，令 V为仿射参数，其中 $V_i = 0$且 $\xi = \kappa V\partial_V$；它不同于过去视界参数 U，后者定义了入射代数。在第 IIA 节所用的二阶微扰阶数下， $\theta^{(1)} = 0$，并且

$$\begin{aligned}\partial_V\theta^{(2)} &= -8\pi G\, T^{(2)}_{VV}, \\ E_H &= \kappa\int_{V_i}^{V_f} {\rm d}V \int {\rm d}\mu_0\, V T^{(2)}_{VV},\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}\mu_0$是背景面积元， $T^{(2)}_{VV}$包括物质通量和剪切贡献 $\sigma^{(1)}_{AB}\sigma^{(1)AB}/(8\pi G)$。因此 E_H 是净吸收 Killing 能量，与方程（71）$\partial_V \theta^{(2)} = \Delta A^{(2)}$一致。由于 $\mathrm{d}\mu_0$，面积差为：$A^{(2)}[C_f] - A^{(2)}[C_i] = \int_{V_i}^{V_f} \mathrm{d}V \int \mathrm{d}\mu_0\,\theta^{(2)}$。

利用 $\beta_H\kappa = 2\pi$ 并分部积分，得到 [47, 61]

$$\begin{aligned}\beta_H E_H &= -\frac{1}{4G}\int {\rm d}\mu_0 \int_{V_i}^{V_f} {\rm d}V\, V\partial_V\theta^{(2)} \\ &= \frac{\Delta A^{(2)}}{4G} - \frac{1}{4G}\int {\rm d}\mu_0 [V\theta^{(2)}]_{V_i}^{V_f}.\end{aligned} \tag{94}$$

在 $V_i = 0$ 处的正则性给出 $\int_{C_i} V\theta^{(2)}\mathrm{d}\mu_0 = 0$，而平稳未来极限是在 $\int_{C_f} V\theta^{(2)}\mathrm{d}\mu_0 \to 0$下取的。因此，两个边界积分均为零。为了用弛豫 $\omega \to \chi$来表示这一几何过程，我们将缀饰面积—电荷差与这些截面之间的面积变化对应起来：

$$\Delta_{\rm rel}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle = \frac{\Delta\langle A^{(2)}\rangle}{4G}, \tag{95}$$

采用共同参考扣除。这种将通道态与几何数据相匹配的方式不同于表示变换 U_Ψ。结合公式（94）和（95）

得到

$$\Delta_{\rm rel}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle = \beta_H E_H. \tag{96}$$

该结果通过二阶微扰阶数下的半经典期望值来理解，并且在整个比较过程中视界生成元均保持正则。对于不存在外部功或未计入的出射通量的弛豫过程，Killing 能量守恒给出

$$\Delta_{\rm rel}E_{\rm out} = -E_H. \tag{97}$$

这里 $\Delta_{\rm rel}E_{\rm out} = E_{\rm out}(\chi) - E_{\rm out}(\omega)$ 测量弛豫期间的变化。它不同于 $\Delta E_{\rm out} = E_{\rm out}(\chi) - E_{\rm out}(\sigma_g)$，后者是完整协议的差值，并在方程（70）中以其正则化形式使用；二者满足 $\Delta E_{\rm out} = \Delta_{\rm drv}E_{\rm out} + \Delta_{\rm rel}E_{\rm out}$。逃逸至无穷远的辐射必须计入外部区域能量账目，或明确作为额外通量纳入。因而将方程（96）和（97）代入方程（93）得到

$$\Delta_{\rm rel}\langle X\rangle = \beta_H E_H - \beta_H E_H = 0. \tag{98}$$

因此，对于这一几何比较，面积增益补偿了外部能量损失。对于其他视界截面，方程（94）保留膨胀边界贡献；任何剩余的面积–能量失配都会贡献于 $\Delta_{\rm rel}\langle X\rangle$。

4. 用功、能量、物质熵和时钟修正表示的相对熵

现在，我们用物理量来表示幺正驱动后和弛豫后的相对熵，分别确定幺正驱动所提供的功，以及弛豫后仍然存在的外部能量-熵贡献，并将时钟修正明确纳入其中。

对于幺正驱动，$S_\tau(\omega) = S_\tau(\sigma_g)$ 意味着$D_\tau(\omega\|\sigma_g) = \Delta_{\rm drv} k_g$（见附录 C）。利用 $k_g = X + h_g(X)$ 和 $X = \mathsf{q}_{\mathcal{B}} + \mathsf{k}_\Psi$，并将 $\Delta_{\rm drv}\,\mathsf{k}_\Psi = \beta_H W$ 与 $W := \Delta_{\rm drv}E_{\rm out}$ 进行匹配，可得

$$D_\tau(\omega\|\sigma_g) = \Delta_{\rm drv}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle + \beta_H W + \Delta_{\rm drv}\langle h_g(X)\rangle .$$

这里，W 是热传递在幺正驱动期间可以忽略时所提供的物理功。如果幺正驱动引起的面积-荷变化消失，则可化为

$$D_\tau(\omega\|\sigma_g) = \beta_H W + \Delta_{\rm drv}\langle h_g(X)\rangle . \tag{99}$$

因此，幺正驱动产生的平均模功等于以热单位表示的物理 Killing 功，再加上明确的时钟-波包修正。条件$\Delta_{\rm drv}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle = 0$ 是一个额外假设，而不是短时幺正驱动的推论。

对于末态，减去参考态后的相对熵恒等式和熵字典给出

$$D_\tau(\chi\|\sigma_g) = \Delta\langle X\rangle - \Delta S_{\rm gen} + \Delta\langle h_g(X)\rangle - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon.$$

在匹配的荷对应关系下，$\Delta\langle X\rangle = \Delta\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle + \beta_H\Delta E_{\rm out}$ 以及 $\Delta S_{\rm gen} = \Delta\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle + \Delta S_{\rm out}$。因此，面积项直接抵消，得到

$$D_\tau(\chi\|\sigma_g) = \beta_H\Delta E_{\rm out} - \Delta S_{\rm out} + \Delta\langle h_g(X)\rangle - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon. \tag{100}$$

最终相对熵因而可用外部 Killing 能量和物质熵，以及波包与参考系修正来表示。$S_{\rm out}$的出现源于这一面积抵消；着装态的熵仍为 S_τ。这一关于末态的推导并不要求幺正驱动期间的面积变化为零。

D. 条件广义第二定律与高斯时钟界

我们考虑第 III C3 节中的分离物理过程，其中面积响应与 Killing 能量守恒根据式 $\Delta_{\rm rel}\langle X\rangle = 0$ 在二阶微扰下给出 98。因此，广义第二定律要求控制其余时钟修正。下面列出所用的代数与状态假设：

(A1) 一个固定着装代数$\mathcal{M}(R)$和一个固定的忠实正规半有限迹 τ 描述该过程的所有阶段。初态是归一化忠实制备态σ_g，其惊异度为 $k_g = X + h_g(X)$。

(A2) 分离协议为 $\rho_\omega = U\rho_{\sigma_g}U^\dagger$，随后作用 $\rho_\chi = \mathcal{E}(\rho_\omega)$，其中 $\mathcal{E}$ 是完全正且保迹的，并保持不变 ρ_{σ_g}，如式(85)–(86)所示。若此协议近似物理演化，我们还必须控制其误差。

(A3) 所需的相对熵、熵差和参考态相减的荷期望值均为有限值，并满足支撑集和定义域条件。参考态和末态遵循熵字典（67），采用相同的迹和参考态约定，明确给出波包 g_ν，额外的熵扇区保持不变，并且在两种态中分别控制熵余项。

命题 1（时钟控制的广义熵界）。对于这一分离物理过程，在假设 (A1)–(A3) 下，并利用荷平衡式（98），广义熵的变化满足

$$|\Delta S_{\rm gen} - \Sigma_D| \le \eta, \qquad \Delta S_{\rm gen} \ge -\eta, \tag{101}$$

其中 $\Sigma_D = D_\tau(\omega\|\sigma_g) - D_\tau(\chi\|\sigma_g) \ge 0$ 和 $\eta := \eta_h + \eta_{\rm pkt} + \eta_r$，前提是非负误差界满足

$$|\Delta_{\rm rel}\langle h_g(X)\rangle| \le \eta_h, \tag{102}$$

$$|\Delta S[g]| \le \eta_{\rm pkt}, \qquad |\Delta r_\epsilon| \le \eta_r. \tag{103}$$

波包与余项界具有不同的地位。量 η_{pkt} 界定了显式差值$|S[g_\chi]-S[g]|$。相比之下， η_r 必须来自对熵展开余项的独立估计。例如，如果由 ϵ参数化的允许的初态与末态 pa- rameterized states 满足 $|r_\epsilon(\nu)| \le b_\nu(\epsilon)$, 其中 $\nu=\chi,\ \sigma_g$，那么

$$|\Delta r_\epsilon| \le b_\chi(\epsilon)+b_{\sigma_g}(\epsilon), \qquad \eta_r := b_\chi + b_{\sigma_g}.$$

附录 A2 证明了对于具有指定乘积态制备的固定物质态，收敛性成立，但未给出一般通道输出的普适速率或界。在第 IID节的精确参考制备中，参考熵等于其波包表达式，因此 $r_\epsilon(\sigma_g)=0$在该约定下成立。下文的高斯矩计算给出了另一个项的界，并未提供 b_χ。

证明。利用电荷平衡（98），式（90）可化简为

$$\Delta S_{\mathrm{gen}} = \Sigma_D + \Delta_{\mathrm{rel}}\langle h_g(X)\rangle - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon.$$

数据处理不等式给出 $\Sigma_D \ge 0$。利用式（102）和（103），再应用三角不等式，即得式（101）。 □

推论 1（带有限波包误差界的渐近广义第二定律）。 在命题1的条件下，假设独立得到的时钟误差界满足

$$\eta(\epsilon) := \eta_h(\epsilon)+\eta_{\mathrm{pkt}}(\epsilon)+\eta_r(\epsilon) \longrightarrow 0.$$

那么，有限波包熵变满足

$$|\Delta S_{\mathrm{gen}}(\epsilon)-\Sigma_D(\epsilon)| \le \eta(\epsilon), \qquad \Delta S_{\mathrm{gen}}(\epsilon) \ge -\eta(\epsilon),$$

因此

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \Delta S_{\mathrm{gen}}(\epsilon) \ge 0.$$

因此，在受控的慢波包极限下，广义第二定律渐近成立。这个结论并不意味着对每个有限 ϵ，熵变都非负。

以下讨论将有限宽度广义第二定律判据与慢波包极限区分开来，随后辨明物理修正，并对高斯参考态进行评估。最后，我们将说明，在幺正驱动过程中，宽时钟波包如何记录有限的电荷转移。

1. 有限宽度与渐近广义第二定律判据

在固定波包宽度下，式（101）给出了更强的下界 $\Delta S_{\mathrm{gen}} \ge \Sigma_D - \eta$。因此，只要 $\Sigma_D \ge \eta$，有限宽度广义第二定律就成立；或者，只要更精确的估计表明，带符号修正项 $\Delta S_{\mathrm{gen}}-\Sigma_D$ 至少为 $-\Sigma_D$。特别地，即使在饱和情况下，非负修正也足以保证这一点。当 Σ_D 小于误差界且修正项的符号未知时，该估计无法确定 ΔS_{gen}的符号。在慢波包极限下，误差趋于零会给出 $\liminf_{\epsilon\to0}\Delta S_{\mathrm{gen}} \ge 0$；如果进一步有 $\liminf_{\epsilon\to0}\Sigma_D(\epsilon) > 0$，则对于所有足够小的有限 ϵ，都会得到正的变化。仅有误差趋于零这一点，并不能在接近饱和时保证有限宽度下的相应结论。所有极限均沿着有限 ϵ下的正规态族取得，同时协议的持续时间和微扰精度均受到控制。令 ϵ趋于零并不能消除更高阶的引力修正或信道近似中的误差。

2. 修正的物理来源

利用方程（98消去平均电荷项后，还剩下三项时钟修正。参考势项衡量弛豫过程中电荷分布的变化；其均值守恒并不能确定其涨落。波包熵项和余项则比较整个协议的初态与末态。表III 总结了这三项的充分界。当各项符号未知时，这些界很有用；若各项相互抵消，则可以得到更精确的估计。用分离协议近似物理演化所产生的误差，以及更高阶的引力修正，则需要分别加以控制。

3. 宽高斯参考态的误差界

附录 B推导了矩和波包熵估计。宽高斯参考波包，其$0<\epsilon\ll 1$，为

$$|g_\epsilon(x)|^2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon^2(x-x_0)^2/2}. \tag{104}$$

记 $h_\epsilon := h_{g_\epsilon}$ 为固定的参考波包势。它是一个常数加上 $\epsilon^2(X-x_0)^2/2$。因此，

$$\Delta_{\mathrm{rel}}\langle h_\epsilon(X)\rangle = \frac{\epsilon^2}{2}\Delta_{\mathrm{rel}}\left\langle (X-x_0)^2\right\rangle. \tag{105}$$

记 $\mu_\nu = \langle X\rangle_\nu$ 和 $V_\nu = \left\langle (X-\mu_\nu)^2\right\rangle_\nu$，使得$\left\langle (X-x_0)^2\right\rangle_\nu = V_\nu + (\mu_\nu-x_0)^2$。方程（98）给出$\mu_\chi=\mu_\omega$ 在二阶微扰下，因此平方均值项相互抵消。将方程（105）代入熵平衡式，并取 $\Delta_{\mathrm{rel}}\langle X\rangle = 0$，得到（见附录 B）

$$\Delta S_{\mathrm{gen}} = \Sigma_D + \frac{\epsilon^2}{2}(V_\chi - V_\omega) - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon. \tag{106}$$

假设 $|V_\chi - V_\omega| \le M$对所考虑的原型一致地成立，当 $\epsilon\to 0$时。于是，方程（106）中的三角不等式给出以下界，其中 η_{pkt} 界定 $|\Delta S[g]| = |S[g_\chi]-S[g]|$，而 η_r 界定 $|\Delta r_\epsilon|$，如方程（103）所示：

$$|\Delta S_{\mathrm{gen}} - \Sigma_D| \le \tfrac{1}{2}M\epsilon^2 + \eta_{\mathrm{pkt}}(\epsilon) + \eta_r(\epsilon). \tag{107}$$

在不改变形状的情况下改变波包的荷，$g_\chi(q) = g(q-d)$，且保持 d不变，会使其均值改变 d

表I. 在施加电荷平衡（ $\Delta S_{\rm gen} - \Sigma_D$ 后，对98的时钟修正，以及宽高斯参考波包的估算。

修正	**在 $\epsilon \to 0$[a] 时趋于零的条件**	**高斯函数估算**
参考势 $\Delta_{\rm rel}\langle h_g(X)\rangle$	从 ω 到 χ 的期望值变化为 $o(1)$。若 $V_\chi - V_\omega = O(1)$，则 $O(\epsilon^2)$；两者均值一致	根据电荷平衡。
波包熵 $-\Delta S[g]$	$\lvert S[g_\chi] - S[g]\rvert = o(1)$。	平均电荷发生偏移时为零，且波包形状不变； $O(\epsilon^2)$，对于高斯初始和末态时钟波包满足 $v_\chi - v_\sigma = O(1)$。
熵余项 $-\Delta r_\epsilon$	独立证明 $\lvert\Delta r_\epsilon\rvert = o(1)$。	高斯性并不能推出收敛速率。

[a] 当 $\epsilon \to 0$、 $f(\epsilon) = o(1)$ 表示 $f(\epsilon) \to 0$ 时，并未指定收敛速率。相比之下， $f(\epsilon) = O(1)$ 表示当 ϵ 足够小时， $|f(\epsilon)|$ 保持有界；它可能趋近于一个非零常数。

但不会改变 $S[g]$ ；因此 $\Delta S[g] = 0$。对于高斯函数波包，有界的方差变化则给出$\Delta S[g] = O(\epsilon^2)$ （附录B）。这些波包的方差不必等于 V_ν，即 X的方差；后者的分布不一定是高斯函数。在两种方差变化均有界，且有一项独立估计 $|\Delta r_\epsilon| = O(\epsilon^p)$的情况下， $p > 0$，总误差为 $O(\epsilon^{\min\{2,p\}})$。若仅知 $\Delta r_\epsilon = o(1)$，则总误差仅为 $o(1)$。因此，广义第二定律渐近成立；对于有限宽度，只要 Σ_D 至少达到式（107）中的误差界，即可保证该定律成立。

4. 幺正驱动期间的平均时钟荷

幺正驱动可以改变物质态和平均时钟荷，同时保持完整缀饰态的熵不变。为了理解时钟在这一平衡中的作用，我们考察：在不改变波包熵的情况下，其平均荷如何能够发生有限变化。

假设态 ω 由幺正驱动制备，如同参考态σ_g，满足波包熵展开式（62）。这是超出（A3）的额外假设。从具有物质态 Ψ的参考展开式中，减去具有物质态 ω的 ϕ_ω展开式，并利用幺正熵保持，可得

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_{\rm drv} S_\tau = & - D_{\mathcal{M}}(\phi_\omega \| \Psi) + \Delta_{\rm drv}\langle X\rangle \\ & + \Delta_{\rm drv} S[g] + \Delta_{\rm drv} r_\epsilon . \end{aligned} \tag{108}$$

这里， $D_{\mathcal{M}}$ 是物质代数上的相对熵。所有态期望值均取在QRF$_0$，中，其中物理时钟荷为 X。对于输运后的乘积制备，其平均值等于 q_R 在QRF$_1$,中的波包平均值，依据式（57）。如果波包熵保持不变，且余项之差趋于零，则平均荷的变化将与物质相对熵相平衡，差异仅为该余项。

为了解释这种情况如何发生，设 $p_\epsilon(q) = |g_\epsilon(q)|^2$ 为公式（104）中的高斯函数，其均值为 x_0 ，标准差为 $\sigma_q = \epsilon^{-1}$。假设幺正驱动使波包平移一个固定的荷 d，则有 $g_{\epsilon,\,d}(q) = g_\epsilon(q-d)$。将变量变换为 $u = q - d$ ，可得

$$\langle q_R\rangle_{g_{\epsilon,d}} = \int \mathrm{d}u\,(u+d)p_\epsilon(u) = x_0 + d,$$

$$S[g_{\epsilon,d}] = -\int \mathrm{d}u\, p_\epsilon(u)\log p_\epsilon(u) = S[g_\epsilon].$$

因此，平均电荷的变化为 d ，而波包保持其形状和熵不变。在慢波包极限下，以宽度为单位的位移为 $|d|/\sigma_q = \epsilon|d| \to 0$，尽管平均电荷的变化仍为 d。若幺正驱动后的波包只是这样的平移，且熵余项之差可以忽略不计，则式（108）给出 $d = D_{\mathcal{M}}(\phi_\omega\|\Psi) + o(1)$。这个例子展示了一种可能的时钟响应。它并未估算弛豫过程中的着装荷方差，也未估算式（107）中的初态和末态修正。

IV. 着装代数上的开放系统动力学所导出的广义第二定律

外部场及其引力时钟构成由修饰代数 $\widehat{\ }$描述的系统 $\mathcal{M}(R)$。当该系统与额外自由度相互作用，而这些自由度的可观测量被排除在约化描述之外时，我们将其视为开放系统。这类相互作用可以交换能量并产生关联，因此，即使完整的物质–引力演化是幺正的，着装外部区域的密度算符也未必幺正演化。引力时钟仍属于系统的一部分；因此，将能量交换认定为视界吸收时，必须同时考虑相应的面积响应。第III 节通过幺正驱动后的弛豫描述这种约化演化。这里我们允许幺正驱动与视界相互作用同时发生。在受控的时间局域描述下，两阶段的相对熵损失由积分耗散熵产生取代；当耗散能量和面积变化满足所需的视界平衡，且时钟修正得到控制时，即可得到广义第二定律界。

A. 幺正驱动与弛豫同时发生

设 ν_t 为不断演化的着装态，其密度算符为 $\rho_t := \rho_{\nu_t}$。作为对分离协议的一种受控扩展，假设完整修饰代数上的演化是时间局域的，

$$\dot{\rho}_t = -\mathrm{i}[H_t, \rho_t] + \mathcal{L}_t(\rho_t), \qquad \mathcal{L}_t(\rho_{\sigma_g}) = 0. \tag{109}$$

这里 H_t 产生相干演化，包括施加的微扰。在每个固定的 t下，我们假设耗散生成元$\mathcal{L}_t$ 产生一个完全正迹保持半群，并保持同一个参考态ρ_{σ_g}。这是一种马尔可夫有效描述：它允许幺正驱动与耗散同时发生，但无法描述任意的记忆效应。幺正驱动与耗散共同作用下的演化不一定保持 σ_g。我们保持迹和参考态不变，并假设满足下文所需的可微性、定义域与可积性条件。首先可利用忠实的正则化密度算符推导这些恒等式，再将结果延拓至受控的半有限极限。相关的时变开放系统涨落定理见文献 [62–64]。

这两项均作用于外部场和引力时钟。哈密顿量 H_t 产生幺正驱动，并包含相互作用引起的哈密顿量修正；其对易子保持 S_τ。耗散子描述与额外自由度的相互作用所产生的影响 B，而这些自由度的可观测量不纳入考虑。记$V_{t,\,\delta t}$ 表示区间内的联合幺正算符，则第 IIIC 节的正则化模型给出

$$\rho_{t+\delta t} = \mathrm{Tr}_B\left[V_{t,\delta t}\rho_{RB}(t)V_{t,\delta t}^\dagger\right], \qquad \rho_t = \mathrm{Tr}_B\,\rho_{RB}(t).$$

约化密度算符无法确定逆转这一演化所需的联合关联。扇区 B 可能包含已穿过未来视界的模；在连续统中，我们不假设视界两侧存在张量积分解。要将耗散能量损失等同于视界 Killing 通量，必须进行下文所述的匹配。

时间局域近似使用间隔 $\tau_B \ll \delta t \ll \tau_{\mathrm{sys}}$，其中 τ_B 是相互作用的记忆时间，τ_{sys} 是幺正驱动或外部态发生显著变化的最短时间尺度。在正则化模型中，将 $\rho_{RB}(t)$ 替换为 $\rho_t \otimes \eta_{B,\,t}$，其中采用指定的密度算符 $\eta_{B,\,t}$，必须保证约化预测在 δt的一阶近似下不变。返回并与外部区域相互作用的辐射可能使这一近似失效。在该时间间隔内冻结生成元，可得

$$e^{\delta t\mathcal{L}_t}\left(e^{-\mathrm{i}H_t\delta t}\rho_t e^{\mathrm{i}H_t\delta t}\right) = \rho_t + \delta t\big(-\mathrm{i}[H_t,\rho_t] + \mathcal{L}_t(\rho_t)\big) + o(\delta t).$$

反转两个映射的顺序会得到相同的线性项，因此同时演化时的方程（109）成立。

完全正性以及对完整着衣参考态的保持，必须由约化动力学加以证明；仅有物质扇区的热性并不足够。

B. 熵产生与广义视界响应

为推导产生率，冻结 t，并仅对辅助耗散通道 $\mathcal{E}_{t,\,s} = e^{s\mathcal{L}_t}$ 作用 $s \geq 0$。这并未将物理幺正驱动与弛豫间隔分开。对于态，$\mathcal{E}_{t,\,s}(\nu)$ 表示密度算符为 $\mathcal{E}_{t,\,s}(\rho_\nu)$ 的态。由于 $\mathcal{E}_{t,\,s}(\sigma_g) = \sigma_g$，数据处理不等式给出

$$D_\tau(\mathcal{E}_{t,s}(\nu_t)\|\sigma_g) \leq D_\tau(\nu_t\|\sigma_g).$$

对于 ν 随 τ（$\delta\rho_\nu$）$= 0$发生的变化，迹导数为

$$\delta D_\tau(\nu\|\sigma_g) = \tau[\delta\rho_\nu(\log\rho_\nu - \log\rho_{\sigma_g})].$$

这是一个迹泛函导数，并不假设密度算符彼此对易。因此，对DPI不等式求导可得Spohn型速率 [65]

$$\dot{\Sigma}_{\mathrm{diss}}(t) := -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}D_\tau(\mathcal{E}_{t,s}(\nu_t)\|\sigma_g)\right|_{s=0^+} = -\tau[\mathcal{L}_t(\rho_t)(\log\rho_t - \log\rho_{\sigma_g})] \geq 0. \tag{110}$$

当前态 ν_t 通常不同于σ_g，这是因为存在幺正驱动，因此这种收缩并非对相同输入作平凡比较。该速率由DPI推出，无需选择反向通道。涨落定理则要求指定测量统计。第V节构造了一个两时刻惊异度关系，并指出该关系何时能保证正性；它并未解决中间耗散轨迹的问题。

接下来，迹保持给出 τ（$\dot{\rho}_t$）$= 0$，因此

$$\frac{\mathrm{d}S_\tau}{\mathrm{d}t} = -\tau(\dot{\rho}_t\log\rho_t).$$

哈密顿量贡献因迹的循环性以及 $[\rho_t,\log\,\rho_t] = 0$而消失：

$$\mathrm{i}\tau([H_t,\rho_t]\log\rho_t) = \mathrm{i}\tau(H_t[\rho_t,\log\rho_t]) = 0.$$

因此 $\dot{S}_\tau = -\tau[\mathcal{L}_t(\rho_t)\log\rho_t]$。由于$\log\rho_{\sigma_g} = -k_g$，式（110）可写为 $\Sigma_{\mathrm{diss}} = S_\tau - \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t)k_g]$。重新整理可得

$$\frac{\mathrm{d}S_\tau}{\mathrm{d}t} = \dot{\Sigma}_{\mathrm{diss}}(t) + \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t)k_g]. \tag{111}$$

第二项没有确定的符号；仅保持参考态不变，并不能使子系统熵单调变化。

对式（111）积分，代入 $k_g = X + h_g(X)$，并应用通用熵差恒等式（68）。由此可得

$$\begin{aligned}\Delta S_{\rm gen} &= \Sigma_{\rm diss} + R_X + R_g \\ &\quad - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon, \\ \Sigma_{\rm diss} &:= \int_0^T \mathrm{d}t\, \dot{\Sigma}_{\rm diss}(t) \geq 0, \\ R_X &:= \int_0^T \mathrm{d}t\, \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t) X], \\ R_g &:= \int_0^T \mathrm{d}t\, \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t) h_g(X)].\end{aligned} \tag{112}$$

这是完整交叉积（包括时钟）上的平均平衡。这里，Δ 比较 ν_T 与 $\nu_0 = \sigma_g$，而 $\Delta S[g]$ 和 Δr_ϵ 指的是同一组初态和末态。我们不对幺正驱动与弛豫之间的虚构态施加任何条件。要从广义第二定律的角度解释它，需要作出以下物理识别。

对于固定可观测量 O，将其耗散贡献定义为 $\Delta_{\rm diss}\langle O\rangle := \int_0^T \mathrm{d}t\, \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t) O]$。特别地，引入候选的视界能量传递

$$E_H := -\int_0^T \mathrm{d}t\, \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t) H_{\rm out}]. \tag{113}$$

该符号约定使 $E_H > 0$表示外部能量损失。这个定义并不能证明能量穿过了物理视界：散射构造必须将其识别为视界 Killing 通量，并计入其他出射通量。利用匹配的荷关系 $X = \mathfrak{q}_{\mathcal{B}} + \beta_H H_{\rm out}$，得到

$$R_X = \Delta_{\rm diss}\langle \mathfrak{q}_{\mathcal{B}}\rangle - \beta_H E_H. \tag{114}$$

如果视界响应连同适当的视界边界项能够确立 $\Delta_{\rm diss}\langle \mathfrak{q}_{\mathcal{B}}\rangle = \beta_H E_H$，那么 $R_X = 0$。这是对耗散面积贡献的条件，并非自动适用于总面积变化。事实上，

$$\Delta\langle \mathfrak{q}_{\mathcal{B}}\rangle = \int_0^T \mathrm{d}t\, \tau[-\mathrm{i}[H_t, \rho_t]\mathfrak{q}_{\mathcal{B}}] + \Delta_{\rm diss}\langle \mathfrak{q}_{\mathcal{B}}\rangle .$$

因此，在匹配未来视界响应时，必须计入哈密顿量对面积变化的贡献。如果匹配并不完美，其积分误差恰好就是 R_X 在式（114）中的项，前提是式（113）中的外部能量损失已被认定为视界通量。例如，如果物理面积变化由包含膨胀边界贡献的积分形式的第一定律给出，且总视界通量被认定为这一 E_H，那么 R_X 就等于该边界贡献减去相干面积变化。一般而言，非零的相干面积变化或未计入的通量都必须纳入匹配；这里既不假设逐点成立的第一定律，也不假设相干面积变化为零。第III C3 节中的物理过程比较决定了物理面积变化；但其本身并不能确立这种生成元层级的分离。

C. 条件广义第二定律与幺正驱动的作用

对于高斯参考态，迹保持会消去 h_g中的常数项，从而得到

$$R_g = \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T \mathrm{d}t\, \tau[\mathcal{L}_t(\rho_t)(X - x_0)^2]. \tag{115}$$

这是耗散贡献，并非初态和末态之间矩的总变化，因为幺正驱动也会改变该矩。将正性与式（112）结合，现在可得明确的条件广义第二定律界

$$\Delta S_{\rm gen} \geq -|R_X| - |R_g| - |\Delta S[g]| - |\Delta r_\epsilon|. \tag{116}$$

在匹配的视界响应下，$R_X = 0$。如果在受控慢波包极限下，剩余各项在整个协议中一致趋于零，那么 $\Delta S_{\rm gen} = \Sigma_{\rm diss} + o(1)$ 且$\liminf_{\epsilon\to 0} \Delta S_{\rm gen} \geq 0$，其意义如推论1所述。由此，无需分离协议即可确立条件平均层面的广义第二定律；但尚未确立轨迹涨落定理。

如果幺正驱动与弛豫在时间上互不重叠，且参考态由弛豫确定，则积分产生量化简为 $D_\tau(\omega\|\sigma_g) - D_\tau(\chi\|\sigma_g)$。在弛豫区间内，该速率等于相对于参考态的熵的负时间导数，而 R_X 和R_g 则分别成为由幺正驱动制备的态与 ω 末态χ之间对应的差值。这在时局域模型中恢复了第III 节的平衡关系。

为完整起见，模功的作用可由相同的导数得到。定义相干贡献

$$\begin{aligned}\dot{W}_{\rm mod}(t) &:= \tau[-\mathrm{i}[H_t, \rho_t] k_g], \\ W_{\rm mod} &:= \int_0^T \mathrm{d}t\, \dot{W}_{\rm mod}(t).\end{aligned} \tag{117}$$

对 $D_\tau(\nu_t\|\sigma_g)$ 求导时，包含 $\log\rho_t$ 的哈密顿量项如上所述消失，而其参考态-对数项给出 $W_{\rm mod}$。耗散部分为 $-\Sigma_{\rm diss}$，根据式（110）。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_\tau(\nu_t\|\sigma_g) = \dot{W}_{\rm mod}(t) - \dot{\Sigma}_{\rm diss}(t).$$

积分得到

$$\begin{aligned}\Sigma_{\rm diss} &= W_{\rm mod} - D_\tau(\nu_T\|\sigma_g) \\ &\quad + D_\tau(\nu_0\|\sigma_g).\end{aligned} \tag{118}$$

对于 $\nu_0 = \sigma_g$，最后一项消失。因此，在最终平衡式中，$W_{\rm mod} - D_\tau(\nu_T\|\sigma_g)$ 被 $\Sigma_{\rm diss}$所替代；功不会被面积响应抵消。对幺正驱动的依赖仍通过 ρ_t 保留。

积分耗散产额 $\Sigma_{\rm diss}$ 是演化中的密度算符的确定性泛函，

其非负性可由数据处理不等式推出。它本身并不是一个具有正向和反向测量统计的随机变量，因此这里无意引入额外的正向平均$\langle\Sigma_{\rm diss}\rangle_F$。若要建立能够解析中间演化的涨落定理，就需要指定测量方案和归一化的反向动力学，并推导出平均对数概率比与 $\Sigma_{\rm diss}$ 相等。仅凭平均熵平衡并不能给出这样的构造。

此外，式（112）给出 $\Delta S_\tau = \Sigma_{\rm diss} + R_X + R_g$。当第 V 节中的两时刻测量构造也适用时，其平均恒等式（127）因此意味着

$$\Sigma_{\rm diss} = \langle\Sigma_{\rm 2t}\rangle_F - R_X - R_g.$$

因此，平均两时刻惊奇度变化为正这一点本身并不能证明 $\Sigma_{\rm diss}$ 为正，除非对交换项进行进一步控制。当 $R_X + R_g = 0$时，两个平均产生量相等。特别是，式（142）中的荷保持幺正跳跃模型在其耗散演化下同时保持 X 和 $h_g(X)$，从而得到 $R_X = R_g = 0$。这表明二者的平均值相同，但并未断言逐路径分布与两时刻测量分布相等。

这些区别构成了第 V 节的动机。在所述测量假设下，平均两时刻惊奇度变化总是给出 ΔS_τ，但其指数平均一般包含依赖于量子通道的修正。我们先推导这一关系及其广义熵界，随后说明幺正性如何消除该修正，以及荷守恒、参考态保持的着装弛豫如何确立幺正性。这一构造不需要对中间演化作时间局域描述。

V. 由黑洞量子通道涨落定理导出的广义第二定律

现在，我们通过对完整黑洞量子通道中的惊异度进行两时测量，来表述广义第二定律。幺正驱动和视界相互作用可以重叠；既不要求采用分离协议，也不要求使用时间局域生成元。第 VA 节推导涨落关系，确定非幺正性导致的修正，并将其应用于广义熵。随后，第 VB 节探讨，对着装后的黑洞动力学施加哪些物理限制才能确立幺正性。

A. 幺正量子通道的涨落定理与广义第二定律

1. 开放系统信道及其逆过程

系统由外部区域的场及其引力时钟构成，定义在带有迹 τ 的固定代数 $\mathcal{M}(R)$ 上。由于其约化描述排除了参与相互作用的额外自由度，因此它是开放的。在正则化模型中，联合幺正算符 V_T 和独立的环境制备 η_B 给出

$$\mathcal{C}_T(\rho) = \mathrm{Tr}_B\left[V_T(\rho\otimes\eta_B)V_T^\dagger\right]. \tag{119}$$

引力时钟仍是系统的一部分。这种幺正表示展示了约化过程，并不假设连续时空引力中存在精确的内外张量因子分解。

图 5(a) 中的正向演化具有如下 Kraus形式

$$\begin{aligned}\rho_T &= \mathcal{C}_T(\rho_0), \qquad \tau(\rho_0) = 1,\\ \mathcal{C}_T(\rho) &= \sum_\alpha M_\alpha\rho M_\alpha^\dagger.\end{aligned} \tag{120}$$

我们将相应的态记为 ν_0，ν_T，其中 $\rho_0 = \rho_{\nu_0}$ 且 $\rho_T = \rho_{\nu_T}$。对于 $\eta_B = \sum_b p_b\,|b\rangle\langle b|$，有$M_{ab} = \sqrt{p_b}\,\langle a|\,V_T\,|b\rangle$。该通道对 B 的初始态 $|b\rangle$ 按概率 p_b 取平均，并对其未观测到的末态 $|a\rangle$求和。外部观察者只测量场及其引力时钟。对于 I 型量子力学和 II 型修饰代数，我们使用相同的迹记号。[1]

对于图 5(b) 中的反向比较，制备 ρ_T，交换初始测量和末态测量，并将每个 M_α 替换为 $M_\alpha^\dagger$。由此得到的伴随 Kraus 映射为

$$\mathcal{C}_T^{\rm R}(\rho) = \sum_\alpha M_\alpha^\dagger\rho M_\alpha. \tag{121}$$

这里使用这两个映射在薛定谔绘景中演化密度算符。反向映射是完全正的，但只有在保迹时，才是作用于任意反向制备态的量子信道。它不一定会撤销正向演化，也不一定会将 ρ_T 返回至 ρ_0 [33, 66]。

2. 迹保持与幺正性

这两个归一化条件具有不同的 Kraus 表达式，

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha M_\alpha^\dagger M_\alpha = \mathbf{1} \quad \text{(forward trace preservation)},\\ &\sum_\alpha M_\alpha M_\alpha^\dagger = \mathbf{1} \quad \text{(forward unitality)}.\end{aligned} \tag{122}$$

正向迹保持使得$\mathcal{C}_T^{\rm R}$具有幺正性。反之，迹的循环性给出

$$\tau[\mathcal{C}_T^{\rm R}(\rho)] = \tau[\rho\mathcal{C}_T(\mathbf{1})], \tag{123}$$

[1] 我们假设在有界算符和密度算符上存在相容的正规作用，并具有有界 $\mathcal{C}_T(\mathbf{1})$。显式模型 $\frown$ 在 $\mathcal{M}(R)$ 中使用有界 Kraus 算符，并采用收敛级数或算子积分。并非每个 II 型信道都具有内部 Kraus 表示；迹伴随论证同样适用于具有相应相容作用的映射。

因此，反向映射对所有密度算符保持迹，当且仅当$\mathcal{C}_T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$。因此，幺正性使图5中的两个序列都对应物理量子通道实验。没有幺正性时，虚线反向序列会赋予形式权重，其归一化必须经过检查。

从物理上看，幺正通道保持均匀的统计权重。在有限维调节器中，$\rho_{\mathrm{unif}} = \mathbf{1}/d$保持不变。温度远高于所有相关能隙的吉布斯态接近这种均匀态；迹距离收缩阻止幺正通道使其进一步偏离均匀性。这正是超高温制备难以受到扰动的确切含义。在 II 型$_\infty$ 代数中，$\tau(\mathbf{1}) = \infty$，因此不存在归一化恒等态。均匀态解释适用于不变的有限迹扇区或有限调节器，而$\mathcal{C}_T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$仍然是精确的代数条件。

3. 双时刻意外度统计与涨落关系

为清晰起见，首先考虑具有离散谱和有限迹谱投影的忠实密度算符，

$$\rho_0 = \sum_i r_i P_i, \qquad \rho_T = \sum_j s_j Q_j, \qquad r^{i},\ \ s_j > 0. \tag{124}$$

在图 5（a）中，测量 $k_0 = -\log \rho_0$，应用 $\mathcal{C}_T$，并测量 $k_T = -\log \rho_T$。最终的可观测量由非条件输出决定，而不是由初始测量结果决定。测量结果 i 以概率 $r_i\tau(P_i)$ 发生，并制备$P_i/\tau(P_i)$。因此，双时刻概率和惊异度变化为

$$\begin{aligned} P_F(i,j) &= r_i \sum_\alpha \tau(Q_j M_\alpha P_i M_\alpha^\dagger), \\ \Sigma_{2\mathrm{t}}(i,j) &= \log(r_i/s_j). \end{aligned} \tag{125}$$

克劳斯指标是求和对象，而非测量对象。因子 $\tau(P_i)$ 和 $\tau(Q_j)$ 决定测量概率，并对测量后的密度算符进行归一化。对于通常的 I 型迹，它们就是本征空间维数；对于秩一投影算符，其值为一。对于一般的谱投影，包括 II 型修饰代数中的谱投影，必须显式保留这些因子。正向迹保持和 $\rho_T = \mathcal{C}_T(\rho_0)$ 给出

$$\sum_j P_F(i,j) = r_i\tau(P_i), \qquad \sum_i P_F(i,j) = s_j\tau(Q_j). \tag{126}$$

因此，无需假设幺正性，

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_{2\mathrm{t}} \rangle_F &= \sum_i r_i \tau(P_i) \log r_i - \sum_j s_j \tau(Q_j) \log s_j \\ &= S_\tau(\nu_T) - S_\tau(\nu_0). \end{aligned} \tag{127}$$

图中反向序列5（b）同样分配了

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_R(j,i) &= s_j \sum_\alpha \tau(P_i M_\alpha^\dagger Q_j M_\alpha), \\ P_F(i,j) &= e^{\Sigma_{2\mathrm{t}}(i,j)} \widetilde{P}_R(j,i). \end{aligned} \tag{128}$$

~反向权重 $P_R(j,\ i)$ 不必加和为一，因为伴随 Kraus 映射不一定保持迹。第二行由迹的循环性得出。对初始测量结果求和时，由完备性 $\sum_i P_i = \mathbf{1}$ 和线性性可得

$$\sum_i \mathcal{C}_T(P_i) = \mathcal{C}_T(\mathbf{1}) = \sum_\alpha M_\alpha M_\alpha^\dagger.$$

幺正性要求该算符等于 $\mathbf{1}$，而迹保持仅约束 $\sum_\alpha M_\alpha^\dagger M_\alpha = \mathbf{1}$。因此，差值$\mathcal{C}_T(\mathbf{1}) - \mathbf{1}$ 衡量了非幺正性。将式（128）第二行乘以 $e^{-\Sigma_{2\mathrm{t}}}$，求和，并利用 $\sum_j s_j Q_j = \rho_T$ 可得

$$\begin{aligned} \left\langle e^{-\Sigma_{2\mathrm{t}}} \right\rangle_F &= \sum_{ij} \widetilde{P}_R(j,i) \\ &= \sum_{ij} s_j \tau[Q_j \mathcal{C}_T(P_i)] \\ &= \sum_j s_j \tau[Q_j \mathcal{C}_T(\mathbf{1})] \\ &= \tau[\rho_T \mathcal{C}_T(\mathbf{1})] =: \Gamma_T, \\ \Gamma_T &= 1 + \tau[\rho_T(\mathcal{C}_T(\mathbf{1}) - \mathbf{1})]. \end{aligned} \tag{129}$$

这是通道涨落关系的惊异度形式及其非幺正修正 [66, 67]。对于幺正~通道，$P_R = P_R$ 是归一化的，且

$$\left\langle e^{-\Sigma_{2\mathrm{t}}} \right\rangle_F = 1, \qquad \langle \Sigma_{2\mathrm{t}} \rangle_F = \Delta S_\tau \geq 0. \tag{130}$$

对于一般通道，詹森不等式给出

$$\Delta S_\tau = \langle \Sigma_{2\mathrm{t}} \rangle_F \geq -\log \Gamma_T. \tag{131}$$

对于某种特定制备，非幺正信道可以有 $\Gamma_T = 1$，但这并不意味着其伴随映射对所有逆向输入都是保迹的。同样，将形式权重按 Γ_T 归一化也不会产生物理上的逆向通道。

这些陈述要求熵期望值有限，且指数平均有限。连续谱可通过保留这些量及归一化的谱近似得到。我们假设初态和末态均为忠实态；否则，初态支撑投影会在 $\tau[\rho_T \mathcal{C}_T(\mathbf{1})]$, 中以支撑修正项取代$\mathbf{1}$，从而引入一个单独的支撑修正。

4. 从涨落关系到广义第二定律

取 $\rho_0 = \rho_{\sigma_g}$ 并将熵字典（68）应用于实际的初态和末态着装态。式（127）给出

$$\Delta S_{\mathrm{gen}} = \langle \Sigma_{2\mathrm{t}} \rangle_F - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon, \tag{132}$$

因此

$$\Delta S_{\mathrm{gen}} \geq -\log \Gamma_T - \Delta S[g] - \Delta r_\epsilon. \tag{133}$$

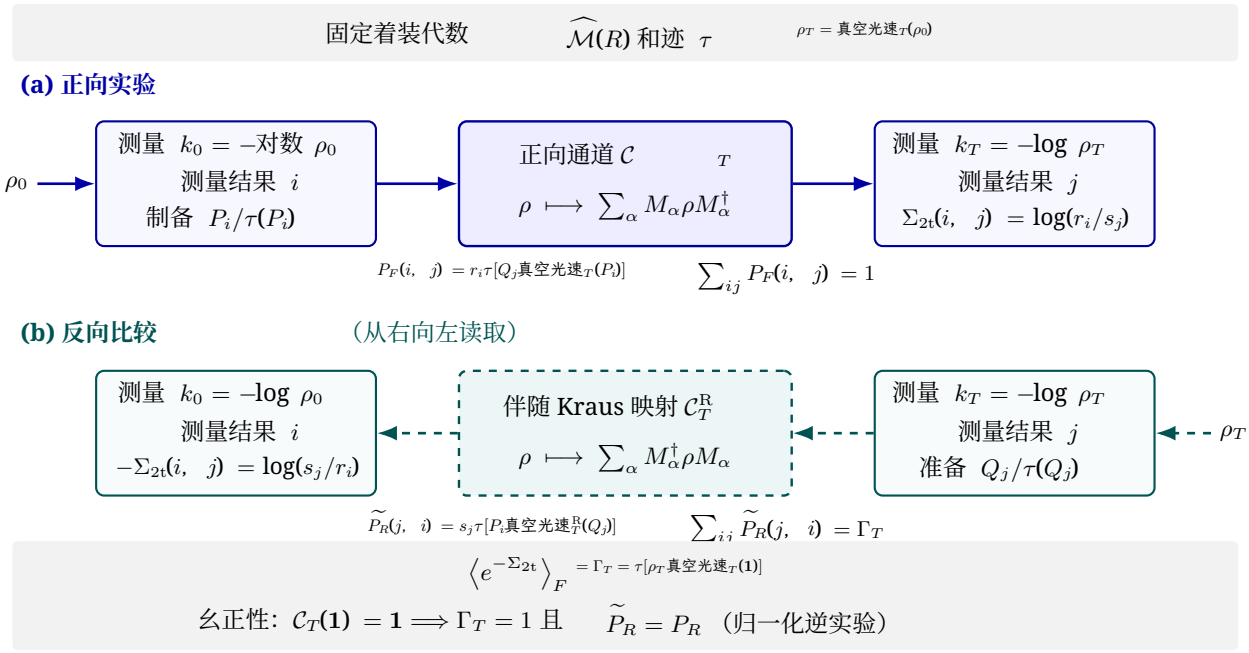


图5. 固定着装代数上的两时刻惊异度关系的正向和反向序列。这些映射作用于薛定谔绘景中的密度算符。条件密度算符通过投影权重 $\tau(P_i)$ 和 $\tau(Q_j)$ 进行归一化。最终正向可观测量 k_T由非条件输出 ρ_T决定，并在各次运行中保持固定。正向迹保持使 (a) 归一化；正向幺正性还使伴随克劳斯实验 (b) 归一化，其中用虚线箭头将其与逆演化区分开来。反向比较从 ρ_T 开始，不一定返回到 ρ_0。

当 $\Gamma_T > 1$时，非幺正性即使在时钟误差消失时，也允许下界为负。因此，它会阻碍这一广义第二定律的涨落定理证明，但本身并不能证明存在物理上的广义第二定律违背。对于特定过程，非幺正性还可导致 $\Gamma_T \leq 1$ 。术语$-\log \Gamma_T$属于指数平均所得的界；它不会改变第 III 节和第 IV 节中的精确平均平衡关系。

幺正性消除了每个允许输入的这一修正，并得到

$$\Delta S_{\text{gen}} \geq -|\Delta S[g]| - |\Delta r_\epsilon|. \tag{134}$$

比较方程（101）、（112）和（134）阐明了通道动力学的作用。在方程（101）中，平均电荷项已由方程（98）消去，但 η_h仍然限制着 $\Delta_{\text{rel}}\langle h_g(X)\rangle$。方程（112）明确包含耗散贡献 R_X 和 R_g 。相比之下，两时刻涨落定理直接根据初始和最终密度算符给出总着衣熵变。因此，方程（134）无需单独的电荷或参考势平衡，也不需要分离协议或时间局域生成元。完整通道的幺正性和熵字典仍然至关重要。

在有限时钟宽度下，若 $\Delta S[g] + \Delta r_\epsilon \leq 0$，或更一般地，若 $\Delta S_\tau \geq \Delta S[g] + \Delta r_\epsilon$，则可保证广义第二定律。时钟修正消失时，得到渐近广义第二定律。这些结论适用于熵字典所对应的引力微扰阶数。因此，剩下的问题关乎物理：着衣黑洞演化何时满足该涨落定理所采用的幺正性条件？

B. 黑洞动力学作为量子信道的幺正约束

1. 荷守恒与平稳参考态

荷守恒、参考态保持和幺正性是彼此不同的要求。我们找到了一个符合面积—物质平衡的弛豫模型，并解释了在该模型中，保持完整的着衣参考态如何为幺正性提供充分条件。

无驱动弛豫指关闭外部幺正驱动后的演化；向视界的能量传递及由此产生的面积响应仍包含在内。物理过程第一定律和第 III C3 节的外部基灵能量平衡给出，在所考虑的微扰阶数下，

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{rel}} \langle X \rangle &= \Delta_{\text{rel}} \langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}} \rangle + \Delta_{\text{rel}} \langle \mathsf{k}_\Psi \rangle \\ &= \beta_H E_H - \beta_H E_H = 0. \end{aligned} \tag{135}$$

荷 X 在固定参考系中由面积和物质贡献构成；守恒允许能量进入视界，同时面积增大。

令$\mathcal{E}$ 表示该弛豫通道。作为荷守恒的一个充分模型，我们要求其所有 Kraus算子都与 X 对易，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \sum_\alpha M_\alpha \rho M_\alpha^\dagger, \\ [M_\alpha, X] &= 0 \qquad \text{for all } \alpha. \end{aligned} \tag{136}$$

因此，没有任何 Kraus算子会连接总荷不同的态，尽管面积和物质的贡献可以分别变化。[2] 利用迹保持，$\sum_\alpha M_\alpha^\dagger M_\alpha = \mathbf{1}$，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mathrm{R}}(X) &= \sum_\alpha M_\alpha^\dagger X M_\alpha \\ &= X \sum_\alpha M_\alpha^\dagger M_\alpha = X, \\ \tau[\mathcal{E}(\rho)X] &= \tau(\rho X). \end{aligned} \tag{137}$$

该模型对每个具有有限平均电荷的输入都守恒其平均电荷。[3] 第一定律确立了所考虑物理过程的平均平衡；但它本身并不意味着更强的Kraus对易条件。反过来，幺正性本身也不能保证荷守恒：幺正通道是幺正的，但当其幺正算子不与 X对易时，可以改变$\langle X\rangle$。

参考态保持是对弛豫通道的独立要求。对于完整的忠实着衣参考态（包括其时钟依赖性），该要求写作

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma_g} &= F_g(X), \qquad F_g(x) = |g(x)|^2 e^{-x}, \\ \mathcal{E}(\rho_{\sigma_g}) &= \rho_{\sigma_g}. \end{aligned} \tag{138}$$

仅有荷守恒仍可能偏向简并荷扇区内的特定态：将该扇区重置为其中一个态虽然不会改变荷，却不是幺正的。仅有参考态保持也不够。在一个 d维调节器中，重置通道$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho)\rho_{\sigma_g}$ 保持参考态不变，但给出$\mathcal{E}(\mathbf{1}) = d\rho_{\sigma_g}$；这只有在参考态为最大混合参考态时才等于$\mathbf{1}$ 。它还可能改变其他输入的平均电荷。

因此，荷守恒和参考态保持通常都不能单独推出幺正性。对于此处考虑的通道，所有 Kraus算子都与 X对易，且保持忠实参考态密度算符 $F_g(X)$，这足以确立幺正性。下一小节将推导这一结论，并将其应用于分离进行的幺正驱动与弛豫，以及幺正驱动与弛豫同时进行的情形。

[2] 克劳斯指标不一定对应唯一的微观事件。对测量结果进行条件筛选，可能会重新加权输入中原本就存在的荷扇区；对于任意输入态，该条件并不意味着条件平均电荷守恒。[3] 对于无界的 X，对易关系通过其谱投影来理解。我们将范围限制为具有有限绝对一阶矩的态，$\tau(\rho|X|) < \infty$，该性质在式（136）中的通道作用下保持不变。

2. 分离的时间局域演化

将所有 α 的 $[M_\alpha, X] = 0$ 与$\mathcal{E}(F_g(X)) = F_g(X)$结合，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(F_g(X)) &= \sum_\alpha M_\alpha F_g(X) M_\alpha^\dagger \\ &= F_g(X)\mathcal{E}(\mathbf{1}) = F_g(X), \end{aligned} \tag{139}$$

因此，忠实性意味着 $\mathcal{E}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$。仅在 $F_g(X)$有界且远离零的谱区域上进行约去是合理的，随后取极限以覆盖完整支撑；无需存在全局有界的逆算子。在有限调节器下，参考态在每个定荷本征子空间内赋予相同权重。守恒荷并保持这些权重，可防止弛豫偏向该本征子空间中的某些特定着装态。这并不要求每一对正向和反向跃迁速率都相等。

因此，第三节所述的分离协议在此类弛豫机制下实现时，是幺正的：

$$(\mathcal{E} \circ \mathrm{Ad}_U)(\mathbf{1}) = \mathcal{E}(U\mathbf{1}U^\dagger) = \mathbf{1}. \tag{140}$$

幺正驱动不必守恒 X 或固定 σ_g。第三节假设参考态保持，即 $\mathcal{E}(\rho_{\sigma_g}) = \rho_{\sigma_g}$，但其物理过程荷平衡 $\tau[(\rho_\chi - \rho_\omega)X] = 0$针对的是给定微扰阶下实际发生的弛豫 $\omega \to \chi$ 。它不要求对每个输入都满足荷守恒，也不要求所有 Kraus 算子都满足 $[M_\alpha, X] = 0$ 。因此，对于指定演化，参考态保持和这一平衡并不能确立幺正性。第三节因此可以包含非幺正弛豫映射：数据处理不等式给出非负的相对熵损失，而引力平衡和时钟误差界则导出所述的广义第二定律结论。

对于第四节的同时动力学，沿用其记号 $\mathcal{L}_t$ 表示耗散子。一个充分条件是

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_t(\rho) = -\mathrm{i}[H_t, \rho] + \mathcal{L}_t(\rho), \\ &\mathcal{L}_t(\mathbf{1}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{G}_t(\mathbf{1}) = 0. \end{aligned} \tag{141}$$

于是，恒等算子是演化方程的稳态解，因此定义良好的时间有序传播子满足 $\mathcal{C}_T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$。此条件不同于第四节所用的 $\mathcal{L}_t(\rho_{\sigma_g}) = 0$ 。例如，当每个耗散步骤都满足上述两个条件时，该条件便成立。因此，前述两种协议都存在满足两时刻涨落定理幺正性条件的实现方式。

对于特定物理演化过程中的广义第二定律，在所述引力和时钟控制假设下，幺正性是充分条件，但不是必要条件。它保证归一化双时间涨落定理成立，而非幺正信道对于所考虑的态仍可能满足广义第二定律。因此，非幺正性本身并不意味着违反广义第二定律。

3. 低能解释与一个具体模型

当相互作用不会优先选择特定的可达态时，均匀统计权重为采用幺正描述提供了依据。例如，当环境处于最大混合态时，受调节的通道（119）是幺正的。当相关能隙远小于其温度时，热环境可近似处于这种情形。在缀饰黑洞模型中，均匀性则涉及固定荷扇区内的完整着装态。因此，不带偏向地混合这些态的低能动力学可以是幺正的，但仅凭能量相对于黑洞质量较小，并不能确立这一条件。上述守恒和参考态保持要求规定了约化动力学必须满足的条件。

一个具体实现是保荷随机幺正模型

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t(\rho) &= \gamma_t(V_t\rho V_t^\dagger - \rho), \qquad \gamma_t \geq 0,\\ V_t^\dagger V_t &= V_t V_t^\dagger = \mathbf{1}, \qquad [V_t, X] = 0.\end{aligned} \tag{142}$$

在 $\mathrm{d}t$期间，相互作用 V_t 以概率 $\gamma_t \mathrm{d}t$发生，否则不发生。若 V_t 也改变了 k_Ψ，则 X 守恒要求 $\mathsf{q}_\mathcal{B}$ 发生相反的变化；否则，这种相互作用不会产生面积–能量交换。该耗散子保持完整参考系不变，守恒 X的每一个函数，并满足 $\mathcal{L}_t(\mathbf{1}) = 0$。因此，它在 $R_X = R_g = 0$ 第 IV节中具有。

根据式（141），加入任意幺正驱动仍能保持幺正性。等价地，完整通道是对可能的相互作用历史所对应的幺正演化 W_η 取平均，

$$\mathcal{C}_T(\rho) = \int \mathrm{d}\mathbb{P}(\eta)\, W_\eta \rho W_\eta^\dagger, \qquad \int \mathrm{d}\mathbb{P}(\eta) = 1, \tag{143}$$

其中概率测度与输入无关。这是一种连续的Kraus表示；离散的替代形式给出$M_\alpha = \sqrt{p_\alpha} W_\alpha$。每个幺正算子都保持恒等算子不变，因此它们的平均也如此，即使幺正驱动与相互作用重叠时也是如此。该模型体现了FT所需的通道性质。将其跃迁与黑洞散射相对应，并将其能量传递与视界通量相对应，仍是一项物理要求；单凭第一定律无法确定这些跃迁概率。

VI. 结论

我们提出了一个广义第二定律的固定代数证明，将黑洞熵增与量子涨落定理及开放系统热力学联系起来。引力荷提供了一个物理量子时钟，而模交叉积则提供了半有限迹，以及表示着装外部区域正规态的密度算符。同样基于迹的恒等式也适用于普通的 I 型量子力学和 II 型修饰代数。这样，连续统论证便与经调节的热力学证明相平行，而熵字典则确定了面积加物质熵，并将时钟贡献与熵展开余项区分开来。

我们的方法与 Wall 颇具影响力的半经典证明互为补充。Wall 将固定母态限制到连续视界截面的代数上进行比较；我们则在固定的修饰外部代数上演化态。共同的半经典外部区域为这一比较提供了母代数。由此得到的态–可观测量二元性类似于薛定谔绘景和海森堡绘景，尽管幺正驱动与弛豫方案不同于限制到较晚的截面。固定代数表述将功、能量交换和熵产生统计明确纳入广义第二定律的构成要素。

我们提出三种互补的通道表述，用以阐释这些要素，并将分析扩展到III 分离的幺正驱动与弛豫之外。第三节首先考察先进行幺正驱动、随后经过保持参考态的弛豫通道的情形。惊异度涨落定理确定了幺正驱动所提供的模功，而数据处理不等式保证弛豫过程中的相对熵损失非负。能量守恒和物理过程第一定律将这一熵平衡转化为带有明确时钟修正的广义第二定律界。这种表述最直接地揭示了其物理机制及其与受规整证明的类比。其局限在于将幺正驱动与弛豫分开；若用它来近似物理过程，就需要对此加以论证。

第IV 节允许幺正驱动与耗散同时作用。时间局域生成元将二者对平均熵平衡的贡献分离开来，而数据处理不等式给出非负的耗散产生率。这描述了幺正驱动与视界响应之间的相互作用，而无需在幺正驱动与弛豫之间引入中间态。这要求采用受控的马尔可夫近似、保持参考态不变的耗散生成元，以及耗散能量交换与视界通量之间的对应关系。它建立了平均熵不等式；而轨迹涨落定理则需要额外的测量和逆过程统计。

第V 节则只使用初态和末态之间的完整通道。两时刻惊奇度变化的均值等于修饰迹熵变化，其指数平均为 $\Gamma_T = \tau[\rho_T \mathcal{C}_T(\mathbf{1})]$。幺正性令 $\Gamma_T = 1$归一化伴随克劳斯逆实验，并通过熵的对应关系得出广义第二定律界。这一表述既不需要时间分离，也不需要时间局域生成元。它额外要求为幺正性提供物理依据，或控制所考察过程中的非幺正修正。弛豫克劳斯算子与完整修饰荷对易，并且完整忠实修饰参考态保持不变，这些条件足以保证幺正性。

第一定律给出能量—面积解释，而这些条件则约束约化跃迁动力学。幺正性是这一涨落定理论证的充分条件，但并非特定物理演化满足广义第二定律的必要条件。单靠参考态保持不变或第一定律的平均平衡，都无法确立这一点。

因此，这三种表述为确立熵不等式提供了不同途径，并明确给出了动力学假设和定量的时钟误差。在受控的慢时钟极限下，误差趋于零即可得到渐近广义第二定律；在有限时钟宽度下，当熵产生压过修正项，或修正项的合成符号有利时，仍可保证正性。要将这些结果应用于物理问题，需要从黑洞散射导出约化缀饰通道，使其能量交换与视界通量相匹配，并对其时钟关联和谱极限加以控制。这样的构造能够将涨落统计与具体微扰联系起来，并检验本文所确定的充分条件。从更广泛的角度看，这一框架为从广义熵平均不等式走向黑洞不可逆性的统计描述提供了一条途径，所用的共同语言是量子通道、功和熵产生。

致谢

我们感谢 Simon Lin 提供了有益的讨论。FLL 得到台湾国家科学及技术委员会（NSTC）通过资助项目编号 115-2112-M-003-009-MY3 和 112-2112-M-003-006-MY3 的支持。SM 获得 ANID FONDECYT 博士后计划资助，项目编号为 3240055。我们感谢 GPT-6 Astra 在推导部分结果及准备手稿过程中提供的帮助。

附录 A：迹公式、密度算符与慢时钟极限

1. 迹与密度算符

在 QRF_0 张量积实现中，q_R 是时钟乘法算符，其中 $q_R\,|q\rangle = q\,|q\rangle$，且 $X = q_R + K_\Psi$ 表示输运后的物理视界荷，如式（48）所示。模交叉积中一组适当平滑的解析元构成弱稠密集，其形式为

$$\widehat{A} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}s\, A(s) e^{\mathrm{i}s(K_\Psi + q_R)}, \qquad A(s) \in \mathcal{M}. \tag{A1}$$

采用第 IID 节中的归一化，典范迹为

$$\tau(\widehat{A}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}q\, \mathrm{d}s\, e^{q(1+\mathrm{i}s)} \langle \Psi|\, A(s)\, |\Psi\rangle\,, \tag{A2}$$

$\widehat{\ }$对于迹有限的元素，$\tau(|A|) < \infty$，其中卷积与极限均在此定义域上理解。对于 QRF_1 制备 $\left|\widehat{\Phi}\right\rangle = |\Phi\rangle \otimes |g\rangle$，相应的 QRF_0 向量泛函恰为

$$\widehat{\Phi}(\widehat{A}) = \left\langle \widehat{\Phi} \right| U_\Psi^\dagger \widehat{A} U_\Psi \left| \widehat{\Phi} \right\rangle. \tag{A3}$$

对于自然锥代表元，已确立的相对模密度算符公式 [18, 20, 54] 为

$$\rho_{\widehat{\Phi}} = g(X) e^{-q_R/2} \Delta_{\Phi\Psi} e^{-q_R/2} g(X)^*, \tag{A4}$$

关联算符的乘积应通过闭正型及所述定义域来理解。它$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$满足 $\tau(\rho_{\widehat{\Phi}} A) = \Phi(A)$。此等式通过迹重现向量态期望值。它并不依赖于所谓的恒等式 $\langle\Phi|\, B\, |\Phi\rangle = \langle\Psi|\, \Delta_{\Phi\Psi} B\, |\Psi\rangle$ 对任意 B均成立；这并非一般的相对模恒等式。我们的指标约定为$D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) = -\langle\Phi|\log\, \Delta_{\Psi\Phi}|\Phi\rangle$，而密度算符中包含 $\Delta_{\Phi\Psi}$。方程（A4）适用于指定的乘积态制备及其输运态；若要将熵字典应用于一般信道输出，则需要满足第 IIID节的假设 (A3)。

时钟平移 $\langle q|\, U_\Psi\, |g\rangle = g(q + K_\Psi)$ 描述了平移后的波包。在这一实现中，时钟算符 q_R 与场的相对模算符作用于不同的因子，因此对称中间因子也可以写作 $e^{-q_R}\Delta_{\Phi\Psi}$。但这并不意味着 $g(X)$ 与该算符对易。若只变换态而不变换与之关联的代数，或只变换代数而不变换态，就可能产生虚假的余循环差异。

对于 $\Phi = \Psi$，$\Delta_{\Psi\Psi} = e^{-K_\Psi}$，因此方程（A4）化简为 $\rho_{\sigma_g} = |g(X)|^2 e^{-X}$。迹的验证过程如下：

$$\tau(f(X)) = \int \mathrm{d}q\, e^q f(q), \tag{A5}$$

$$\tau(\rho_{\sigma_g}) = \int \mathrm{d}q\, |g(q)|^2 = 1, \tag{A6}$$

$$\tau(e^{-X}) = \int \mathrm{d}q = \infty, \tag{A7}$$

$$S_\tau(\sigma_g) = \int \mathrm{d}q\, |g(q)|^2 [q - \log |g(q)|^2]. \tag{A8}$$

对于正的 f，第一个恒等式可作为广义迹成立；对于满足 $\int \mathrm{d}q\, e^q |f(q)| < \infty$ 的函数，该恒等式也成立；熵恒等式则假设电荷和对数矩有限。对 τ 进行整体重标度，会相应地重标度表示正规态的密度算符，并使绝对S_τ 平移相同的常数，但不会改变此处的归一化期望值、相对熵和熵差。

2. 慢时钟的相对熵极限

我们使用式（61中的波包，论证对于固定的正规物质态 Φ，Ψ满足 $D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) < \infty$的式（60）。令

g_0 几乎处处归一化且非零，并具有有限的荷和对数矩。记 ν_ϵ 为着装态，记 $\Phi_\epsilon := \nu_\epsilon|_{\mathcal{M}}$ 为其在裸场代数上的限制。令 $\widetilde{g}_\epsilon(p) := \langle p|g_\epsilon\rangle$ （采用酉傅里叶约定）。缩放波包满足

$$|\widetilde{g}_\epsilon(p)|^2 = \epsilon^{-1}|\widetilde{g}_0(p/\epsilon)|^2.$$

由于在固定的 p 下， U_Ψ 的作用等同于 e^{-ipK_Ψ} ，将 ν_ϵ 限制到裸场代数 $\mathcal{M}$ $\subset\mathcal{M}_0$ ，可得

$$\Phi_\epsilon(A) = \int \mathrm{d}p\,|\widetilde{g}_\epsilon(p)|^2\,\langle\Phi|\,e^{ipK_\Psi}Ae^{-ipK_\Psi}\,|\Phi\rangle\,. \tag{A9}$$

由于 $K_\Psi\,|\Psi\rangle = 0$，参考态限制为 Ψ 。在 $p=\epsilon u$ 之后，模酉算子的强连续性给出

$$\|\Phi_\epsilon - \Phi\|_{\mathcal{M}_*} \le 2\int \mathrm{d}u\,|\widetilde{g}_0(u)|^2\|(e^{-\mathrm{i}\epsilon uK_\Psi}-\mathbf{1})\,|\Phi\rangle\,\| \longrightarrow 0. \tag{A10}$$

这里，正规泛函上的范数是对范数至多为一的可观测量取上确界；由控制收敛可知，该收敛成立。

模自同构保持 $\mathcal{M}$ 不变，因此 $\widehat{\ }\mathcal{M}_1$ 的生成元属于 $\mathcal{M}\otimes B(L^2(\mathbb{R}))$. 因此，在量子参考系中，$_0$，

$$\mathcal{M} \subset \widehat{\mathcal{M}_0} \subset U_\Psi[\mathcal{M}\otimes B(L^2(\mathbb{R}))]U_\Psi^\dagger.$$

在最大的代数上，幺正协变性和共同的纯时钟制备给出相对熵$\backsim D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi)$。先将其限制到 $\mathcal{M}_0$ ，再限制到 $\mathcal{M}$，由数据处理可得

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{M}}(\Phi_\epsilon\|\Psi) &\le D_\tau(\nu_\epsilon\|\sigma_{g_\epsilon}) \\ &\le D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi). \end{aligned} \tag{A11}$$

下界将着装态限制到 $\mathcal{M}$；上界则将联合制备的场与时钟态限制到修饰代数。最后，下半连续性 [3, 68]意味着

$$D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) \le \liminf_{\epsilon\to0} D_{\mathcal{M}}(\Phi_\epsilon\|\Psi).$$

结合方程（A11），这就证明了所声称的极限，并将余项界定为

$$0 \le r_\epsilon(\nu_\epsilon) \le D_{\mathcal{M}}(\Phi\|\Psi) - D_{\mathcal{M}}(\Phi_\epsilon\|\Psi) \longrightarrow 0. \tag{A12}$$

这是一个收敛界，而不是计算得到的速率。例如， $O(\epsilon)$、$O(\epsilon^2)$以及诸如 $1/|\log\,\epsilon|$这样的更慢衰减，全部都是 $o(1)$。该论证既不需要对无界对数进行泰勒展开，也不需要在 $\epsilon = 0$处存在可归一化态。它并不意味着对于依赖 ϵ 的物质制备态或由任意通道产生的时钟–场关联具有一致收敛；这些情况需要单独控制。

附录 B：高斯时钟修正与误差界

我们采用命题 1中的分离物理过程以及式（104）中的高斯参考态。令 $\mu_\nu = \langle X\rangle_\nu$以及 $V_\nu = \big\langle(X-\mu_\nu)^2\big\rangle_\nu$。电荷平衡（98）给出$\mu_\chi = \mu_\omega$ 在二阶微扰下。由于

$$\big\langle(X-x_0)^2\big\rangle_\nu = V_\nu + (\mu_\nu - x_0)^2,$$

弛豫过程中，均值平方项相互抵消，并且

$$\Delta_{\mathrm{rel}}\,\langle h_\epsilon(X)\rangle = \frac{\epsilon^2}{2}(V_\chi - V_\omega). \tag{B1}$$

将这一结果代入熵平衡，得到方程（106）； $\Delta S[g]$ 和 Δr_ϵ 在整个协议过程中与 χ σ_g 进行比较。均匀界 $|V_\chi - V_\omega| \le M$ 以及分别针对波包熵和余项的界，随后给出方程（107）。将时钟波包平移 $g\,(q)\ \mapsto g\,(q-d)$ ，同时保持其形状不变，通过改变积分变量即可保持 $S[g]$ 。如果一项独立估计能够确立 $|r_\epsilon\ (\nu)\ | \le C_r\epsilon^p$ 同时适用于σ_g 和 χ，且 $p>0$ 和C_r 与 ϵ无关，那么 $|\Delta r_\epsilon| \le 2C_r\epsilon^p$。当波包熵差相互抵消时，所得误差界为$O\,(\epsilon^{\min\{2,p\}})$ ；这是一个上界，而非对主导误差的确定。仅仅知道初始方差为 ϵ^{-2} ，并不能界定其变化。

若实际初态和末态具有方差为$v_\sigma \equiv v_{\sigma_g} = \epsilon^{-2}$ 和 $v_\chi = \epsilon^{-2} + b_\epsilon$ $S[g_\nu] =$ 的高斯参考系波包，则它们的微分熵 log( ) 给出

$$\Delta S[g] = \frac{1}{2}\log(1+\epsilon^2 b_\epsilon). \tag{B2}$$

利用 $|V_\chi - V_\omega| \le M$、 $|b_\epsilon| \le B$ 和 $\epsilon^2 B < 1$，不等式 |log($1+z$)| $\le |z|/(1-|z|)$ 对于 $|z|<1$ 给出

$$|\Delta S_{\mathrm{gen}} - \Sigma_D| \le \frac{M\epsilon^2}{2} + \frac{B\epsilon^2}{2(1-B\epsilon^2)} + \eta_r. \tag{B3}$$

这里 η_r 界 $|\Delta r_\epsilon|$ 如式（103）所示。与正文一样，额外的熵扇区要么不产生变化，要么必须单独估算。若未确定态的形式，参考系波包的方差 v_ν <style id='14}>与完整着装荷 V_ν 的方差 X 不可互换。仅有高斯边缘分布并不能约束时钟–场关联或熵余项。该极限涉及有限 ϵ<style id='23}>处正规态族沿途的差值；它并不表示在 $\epsilon = 0$ <style id='26}>处存在可归一化的平坦时钟态。

更强的抵消要求两个方差变化相等，而不仅仅是对它们加以界定。若 $V_\chi - V_\omega = v_\chi - v_\sigma = b_\epsilon$，其中 $|b_\epsilon| \le B$，则

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathrm{gen}} - \Sigma_D &= \tfrac{1}{2}[z_\epsilon - \log(1+z_\epsilon)] - \Delta r_\epsilon, \\ z_\epsilon &= \epsilon^2 b_\epsilon. \end{aligned} \tag{B4}$$

显式时钟项对于 $z_\epsilon > -1$ 非负，并且对于有界的 b_ϵ，一致等于 $b_\epsilon^2\epsilon^4/4 + O(\epsilon^6)$。这一

改进仅涉及两个显式时钟修正；总误差仍包含 Δr_ϵ。这需要满足刚才所述的高斯函数波包和方差等式。在式（142）的保荷通道类中，耗散性波包势项则恰好消失；整个协议中的数据包熵差以及关联诱导的熵余项仍需分别进行估计。

附录 C：幺正驱动后的参考态减法与态依赖性

本附录阐释了第 IIIC 节中使用的两个步骤：为什么式（88）无需显式进行参考态减法，以及幺正驱动制备的态如何进入式（99）之前的模态功恒等式。在全文中，τ 是修饰代数上的固定迹，ρ_{σ_g} 是忠实归一化参考密度算子，而$k_g = -\log\rho_{\sigma_g}$。我们首先假设各个迹表达式和熵均为有限值。如果只有相减后的量有限，则这些恒等式需要使用共同的正则化，并在有充分依据的情况下取极限；不得将其解释为两个无穷熵之差。

1. 隐式参考态减法

对于任意可容许的正规态 ν，相对熵的定义给出

$$\begin{aligned} D_\tau(\nu\|\sigma_g) &= \tau[\rho_\nu(\log\rho_\nu - \log\rho_{\sigma_g})] \\ &= \langle k_g\rangle_\nu - S_\tau(\nu). \end{aligned} \tag{C1}$$

第一项是在态 ν 下对参考惊讶度取期望，而非态 ν 的熵。因此，参考态已经通过 k_g 进入表达式。特别地，

$$\langle k_g\rangle_{\sigma_g} = -\tau(\rho_{\sigma_g}\log\rho_{\sigma_g}) = S_\tau(\sigma_g). \tag{C2}$$

这个等式两边通常都不为零。它们之差为零，因此从式（C1）中减去该差不会改变任何内容：

$$\begin{aligned} D_\tau(\nu\|\sigma_g) = &\big(\langle k_g\rangle_\nu - \langle k_g\rangle_{\sigma_g}\big) \\ &- \big(S_\tau(\nu) - S_\tau(\sigma_g)\big). \end{aligned} \tag{C3}$$

因此，式（88）与显式减去参考态项的公式完全相同。前者没有减法符号，并不意味着忽略了参考态的贡献。

2. 幺正驱动与态的信息

对于分离协议，U 是固定着装代数中的物理驱动幺正算子，而不是表象变换幺正算子 U_Ψ。幺正驱动会产生

$$\rho_\omega = U\rho_{\sigma_g}U^\dagger, \qquad \log\rho_\omega = U(\log\rho_{\sigma_g})U^\dagger. \tag{C4}$$

第二个等号由函数演算得出。利用迹不变性，可得

$$\begin{aligned} S_\tau(\omega) &= -\tau[U\rho_{\sigma_g}(\log\rho_{\sigma_g})U^\dagger] \\ &= S_\tau(\sigma_g). \end{aligned} \tag{C5}$$

定义固定可观测量在幺正驱动下的变化为

$$\Delta_{\mathrm{drv}}\langle O\rangle := \langle O\rangle_\omega - \langle O\rangle_{\sigma_g} = \tau[(\rho_\omega - \rho_{\sigma_g})O]. \tag{C6}$$

利用式（C3）以及幺正熵保持，可得

$$\begin{aligned} D_\tau(\omega\|\sigma_g) &= \Delta_{\mathrm{drv}}\langle k_g\rangle - \Delta_{\mathrm{drv}}S_\tau \\ &= \Delta_{\mathrm{drv}}\langle k_g\rangle . \end{aligned} \tag{C7}$$

对于归一化参考波包，$k_g = X + h_g(X)$，因此

$$\begin{aligned} D_\tau(\omega\|\sigma_g) &= \Delta_{\mathrm{drv}}\langle X\rangle + \Delta_{\mathrm{drv}}\langle h_g(X)\rangle \\ &= \tau[(\rho_\omega - \rho_{\sigma_g})X] \\ &\quad + \tau[(\rho_\omega - \rho_{\sigma_g})h_g(X)]. \end{aligned} \tag{C8}$$

对 ω 的依赖包含在两个期望值差中。参考可观测量是固定的；其期望值之所以发生变化，是因为态发生了变化。等价地，可以将对施加的幺正算符的依赖表示为

$$D_\tau(\omega\|\sigma_g) = \tau[\rho_{\sigma_g}(U^\dagger k_g U - k_g)]. \tag{C9}$$

化简为单个参考惊异度差，依赖于通过幺正共轭 ω 得到 σ_g。一般的输出态还包含式（C3）中的附加熵差项。此外，保持不变的是完整修饰熵 S_τ，而不是其物质、面积或时钟贡献分别保持不变。上述恒等式不需要第一定律匹配或慢波包近似；只有在将模功与物理能量转移和广义熵联系起来时，才会引入这些条件。

3. 面积响应与物理功解释

精确恒等式（C8）仍包含组合荷 X的变化。要将其表示为物理功，请在同一固定表示中使用荷约束 $X = \mathsf{q}_\mathcal{B} + \mathsf{k}_\Psi$：

$$\Delta_{\mathrm{drv}}\langle X\rangle = \Delta_{\mathrm{drv}}\langle \mathsf{q}_\mathcal{B}\rangle + \Delta_{\mathrm{drv}}\langle \mathsf{k}_\Psi\rangle . \tag{C10}$$

额外的物理输入是匹配关系

$$\Delta_{\mathrm{drv}}\langle \mathsf{k}_\Psi\rangle = \beta_H\Delta_{\mathrm{drv}}E_{\mathrm{out}} = \beta_H W. \tag{C11}$$

这里 $\mathsf{k}_\Psi = \beta_H H_{\rm out}$ 和 $E_{\rm out}(\nu) = \langle H_{\rm out}\rangle_\nu$，如式（92）所定义。因此 $H_{\rm out}$ 是 Killing 哈密顿量，而$E_{\rm out}$ 是其期望能量。我们定义 $W = \Delta_{\rm drv} E_{\rm out}$ 并将其解释为在幺正驱动阶段热传递可忽略时，输入到外部区域的功。式（C8）–（C11）给出完整表达式

$$D_\tau(\omega\|\sigma_g) = \Delta_{\rm drv}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle + \beta_H W + \Delta_{\rm drv}\langle h_g(X)\rangle\,. \tag{C12}$$

此表达式包含幺正驱动所导致的面积-荷变化。要得到式（99），还需施加以下条件

$$\Delta_{\rm drv}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle = \langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle_\omega - \langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle_{\sigma_g} = 0. \tag{C13}$$

这使期望面积荷的变化 为零，而非其绝对期望值为零。若已另行选定其参考值为零，则该条件可在此约定下写作 $\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle_\omega = 0$；但并不要求作此选择。仅凭总熵在幺正演化下保持不变，或幺正驱动持续时间较短，都不足以推出式（C13）。若不满足该条件，式（C12）中的面积项必须保留。弛豫响应采用第 III C3 节所规定的从分岔态到稳态的比较。

附录 D：输运的视界荷与物理生成元匹配

1. 受调节的期望值与表示协变性

经典积分关系（40）由右支通量平衡得出。在量子理论中，即使完整模生成元存在，尖锐的单侧通量也可能具有发散的涨落 [20]。因此，以下论证从一个共同的调节器开始，记作 Λ；在该调节器下，荷、面积和通量的期望值彼此相容，并满足截至二阶微扰阶的约束。若出现截断边界项，在确认其相消或衰减之前，必须予以保留。定义

$$\begin{aligned} X_\Lambda &= U_\Psi q_{R,\Lambda} U_\Psi^\dagger, \\ \mathsf{q}_{\mathcal{B},\Lambda} &= U_\Psi q_{\mathcal{B},\Lambda} U_\Psi^\dagger, \\ \mathsf{k}_{\Psi,\Lambda} &= U_\Psi k_{\Psi,\Lambda} U_\Psi^\dagger. \end{aligned} \tag{D1}$$

对于每个可容许向量 ψ，当 $\psi^U = U_\Psi\psi$ 时，正则化二次型的幺正协变性给出

$$\langle \psi^U, \mathsf{k}_{\Psi,\Lambda}\psi^U\rangle = \langle \psi, k_{\Psi,\Lambda}\psi\rangle, \tag{D2}$$

面积和荷也同理。对于正规正则化密度算子，这就是通常的迹循环恒等式。为暂时区分两个参考系，将 QRF$_1$ 中 $\mathcal{M}_1$ 上的迹记作$\widehat{\tau_{\rm orig}}$，将正文中使用的 QRF$_0$ 中$\widehat{\mathcal{M}_0}$ 上的迹记作 τ。它们之间的关系为 $\tau(U_\Psi A U_\Psi^\dagger) = \tau_{\rm orig}(A)$。这种对代数、迹和态的同步变换无需假设 U_Ψ 属于原始交叉积，也不描述任何物理幺正驱动过程。

令 ν_0 为共同参考态，并令 $\Delta_\nu O = O_\nu - O_{\nu_0}$。参考态与态一同变换：对于 $O^U = U_\Psi O U_\Psi^\dagger$，变换后的差为 $\Delta_{\nu^U} O^U = O^U{}_{\nu^U} - O^{U}{}_{\nu_0^U}$，其中 $\nu_0^U = \sigma_g$对应正文中的参考制备。对于可观测量 O，有限的参考态相减后的期望值定义为 $\Delta_\nu O = \lim_{\Lambda\to\infty}[O_{\Lambda\nu} - O_{\Lambda\nu_0}]$，前提是该极限存在；各个未正则化的期望值本身不一定存在。若三个相减后的极限均存在，对正则化约束作共轭变换并取相同极限，可得

$$\Delta_{\nu^U}\langle \mathsf{q}_{\mathcal{B}}\rangle = \Delta_{\nu^U}\langle X\rangle - \Delta_{\nu^U}\langle \mathsf{k}_\Psi\rangle. \tag{D3}$$

因此，当独立的连续算符不存在时，$\mathsf{q}_{\mathcal{B}} = X - \mathsf{k}_\Psi$ 表示所示的有限参考态相减后的期望值之间的等式。单靠幺正共轭既不能确立这些极限，也不能确立k_Ψ 与II型代数的从属关系。在正文的正规性和定义域假设下，完整的着装密度算符及其惊异度仍是彼此不同且定义良好的对象。

2. 物理的右楔区生成元必须满足哪些检验

在共同的调节器下，假设$k_{\Psi,\Lambda}$ 生成右支能流$\alpha_{s,\Lambda}(A_\Lambda) = e^{is k_{\Psi,\Lambda}} A_\Lambda e^{-is k_{\Psi,\Lambda}}$。其输运后的作用满足

$$\begin{aligned} \alpha^U_{s,\Lambda}(U_\Psi A_\Lambda U_\Psi^\dagger) &:= U_\Psi \alpha_{s,\Lambda}(A_\Lambda) U_\Psi^\dagger \\ &= e^{is\mathsf{k}_{\Psi,\Lambda}}(U_\Psi A_\Lambda U_\Psi^\dagger) e^{-is\mathsf{k}_{\Psi,\Lambda}}. \end{aligned} \tag{D4}$$

这里的 s 是无量纲能流参数，而非协议时间；这并不是用单侧算符替代完整的模生成元 K_Ψ。因此，$\mathsf{k}_{\Psi,\Lambda}$ 在输运后的可观测量上表示相同的能流。若提出另一个算符来生成该能流，仅凭自同构一致并不能确定其能量期望值：实现算符可能相差一个与之对易的项。共同的引力荷约束、参考约定和扇区也必须固定这种自由度。在连续情形下，必须使用可容许的有限参考态相减后的期望值进行比较，且不得假设裸的单侧算符存在。

最后，表征流入右支的能量，与将其变化等同于流出的外部 Killing 能量是不同的。应用广义第二定律时，还单独假设

$$\Delta_{\rm rel}\langle \mathsf{k}_\Psi\rangle = \beta_H \Delta_{\rm rel} E_{\rm out}, \tag{D5}$$

包含所有活跃边界扇区和通量。无论是方程（D4）还是恒等式 $X = \mathsf{q}_{\mathcal{B}} + \mathsf{k}_\Psi$ 都不能证明这一点

散射关系或未来视界面积响应。第IIIC3 节中的聚焦计算确立了从正则分叉截面到平稳未来极限之间的几何面积响应。其同一性

与着装面积-荷变化的识别，再结合上述散射对应关系，得到方程（98）。任何不匹配都明确存在于 $\Delta_{\rm rel}\langle X\rangle$ 熵平衡中。

[1] J. D. Bekenstein，Phys. Rev. D 7, 2333（1973年）。[2] S. W. Hawking，Commun. Math. Phys. 43, 199（1975年），[勘误：Commun. Math. Phys. 46, 206（1976年）]。[3] H. Araki，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 11, 809（1976年）。[4] R. Haag，《局域量子物理：场、粒子、代数》，第2版（Springer，柏林，1996年）。[5] E. Witten，Rev. Mod. Phys. 90, 045003（2018年），arXiv:1803.04993 [hep-th]。[6] A. C. Wall，Phys. Rev. D 85, 104049（2012年），[勘误：Phys.Rev.D 87, 069904（2013年）], arXiv:1105.3445 [gr-qc]。[7] S. Hollands、Á. D. Kovács 和 H. S. Reall，JHEP 08（2022年），258，arXiv:2205.15341 [hep-th]。[8] T. Faulkner 和 A. J. Speranza，JHEP 11（2024年），099，arXiv:2405.00847 [hep-th]。[9] J. Kirklin，JHEP 07（2025年），192，arXiv:2412.01903 [hep-th]。[10] V. R. Shajiee、M. M. Sheikh-Jabbari 和 V. Taghiloo，《谁书写了引力热力学第二定律？》（2026年），arXiv:2608.16997 [hep-th]。[11] C. Jarzynski，Phys. Rev. Lett. 78, 2690（1997年）。[12] G. E. Crooks，Phys. Rev. E 60, 2721（1999年）。[13] J. Kurchan，量子涨落定理（2000年），arXiv:cond-mat/0007360。[14] H. Tasaki，量子系统的 Jarzynski 关系及其若干应用（2000年），arXiv:cond-mat/0009244。[15] M. Campisi、P. Hänggi 和 P. Talkner，Rev. Mod. Phys. 83, 771（2011年），arXiv:1012.2268 [cond-mat.stat-mech]。[16] E. Witten，JHEP 10（2022年），008，arXiv:2112.12828 [hep-th]。[17] V. Chandrasekaran、G. Penington 和 E. Witten，JHEP 04（2023年），009，arXiv:2209.10454 [hep-th]。[18] V. Chandrasekaran、R. Longo、G. Penington 和 E. Witten，JHEP 02（2023年），082，arXiv:2206.10780 [hep-th]。[19] K. Jensen、J. Sorce 和 A. J. Speranza，JHEP 12（2023年），020，arXiv:2306.01837 [hep-th]。[20] J. Kudler-Flam、S. Leutheusser 和 G. Satishchandran，Phys. Rev. D 111, 025013（2025年），arXiv:2309.15897 [hep-th]。[21] M. Takesaki，《Tomita 模理论及其应用》，《数学讲义》，第128卷（Springer，柏林，1970年）。[22] J. Sorce，JHEP 12（2023年），079，arXiv:2309.16766 [hep-th]。[23] J. Dimock 和 B. S. Kay，Annals Phys. 175, 366（1987年）。[24] Y. Aharonov 和 L. Susskind，Phys. Rev. 155, 1428（1967年）。[25] Y. Aharonov 和 T. Kaufherr，Phys. Rev. D 30, 368（1984年）。[26] D. N. Page 和 W. K. Wootters，Phys. Rev. D 27, 2885（1983年）。[27] S. Popescu、A. B. Sainz、A. J. Short 和 A. Winter，Phil. Trans. R. Soc. A **376**, 20180111 2018 1804 03730（），[ ]arXiv: 。quant-ph。[28] F. Giacomini、E. Castro-Ruiz 和 Č. Brukner，Nature Commun. 10, 494（2019年），arXiv:1712.07207 [quant-ph]。

[29]J. De Vuyst、S. Eccles、P. A. Hoehn 和 J. Kirklin，JHEP 07（2025年），063, [勘误：JHEP 10，234（2025年）], arXiv:2412.15502 [hep-th]。[30] M. Cirafici，JHEP 11（2024年），089，arXiv:2408.04219 [hep- th]。[31] M. Cirafici，Class. Quantum Grav. 41，235006（2024年），arXiv:2402.03939 [hep-th]。[32] M. Cirafici，Universe **11**, 24 2025 2412 17674（），[ ]arXiv: 。hep-th 。[33] A. E. Rastegin，《统计力学杂志》2013，P06016（2013年），arXiv:1301.0855 [quant-ph]。[34] H. Kwon 和 M. S. Kim，Phys. Rev. X 9，031029（2019年），arXiv:1810.03150 [quant-ph]。[35] A. Rignon-Bret 和 M. Vilatte，Phys. Rev. D 114，065012 2026 2601（），arXiv: 。03353 [hep-th]。[36] A. Rignon-Bret 和 M. Vilatte，Phys. Rev. D 114，065011（2026年），arXiv:2601.03356 [hep-th]。[37] A. Connes，Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 6，133（1973年）。[38] M. Takesaki，Acta Math. 131，249（1973年）。[39] R. Kubo，J. Phys. Soc. Jpn. 12，570（1957年）。[40] P. C. Martin 和 J. Schwinger，Phys. Rev. 115，1342（1959年）。[41] R. Haag、N. M. Hugenholtz 和 M. Winnink，Commun. Math. Phys. 5，215（1967年）。[42] J. J. Bisognano 和 E. H. Wichmann，J. Math. Phys. 16，985 1975（）。[43] G. L. Sewell，Annals Phys. 141，201（1982年）。[44] B. S. Kay 和 R. M. Wald，Phys. Rept. 207，49（1991年）。[45] J. M. Bardeen、B. Carter 和 S. W. Hawking，Commun. Math. Phys. 31，161（1973年）。[46] V. Iyer 和 R. M. Wald，Phys. Rev. D 50，846（1994年），arXiv:gr-qc/9403028。[47] S. Gao 和 R. M. Wald，Phys. Rev. D 64，084020（2001年），arXiv:gr-qc/0106071。[48] M. S. Klinger、J. Kudler-Flam 和 G. Satishchandran，Phys. Rev. D 114，065010（2026年），arXiv:2601.07910 [hep- th]。[49] A. Mondal 和 K. Prabhu，动力学黑洞的微扰半经典 2026 2603 02320 熵，[ ]arXiv: 。hep-th 。[50] J. Lee 和 R. M. Wald，J. Math. Phys. 31，725（1990年）。[51] R. M. Wald 和 A. Zoupas，Phys. Rev. D 61，084027（2000年），arXiv:gr-qc/9911095。[52] S. Hollands 和 R. M. Wald，Commun. Math. Phys. 321，629 2013 1201（），arXiv: 。0463 [gr-qc]。[53] S. Hollands、R. M. Wald 和 V. G. Zhang，Phys. Rev. D 110，024070（2024年），arXiv:2402.00818 [hep-th]。[54] H. Liu，载于《理论高级研究院基础粒子物理学研究：对称性的各个方面》2023（2025年），arXiv:2510.07017 [hep-th]。[55] J. Kudler-Flam、S. Leutheusser、A. A. Rahman、G. Satishchandran 和 A. J. Speranza，纠缠熵的协变调节器：贝肯斯坦界和量子零能量条件的证明（2023年），arXiv:2312.07646 [hep-th]。[56] V. Jakšić、Y. Ogata、Y. Pautrat 和 C.-A. Pillet，量子统计力学中的熵

涨落：导论（2011年），arXiv:1106.3786 [math-ph]。[57] T. Benoist、L. Bruneau、V. Jakšić、A. Panati 和 C.-A. Pillet，Lett. Math. Phys. 114，32（2024年），arXiv:2310.10582 [math-ph]。[58] T. Upadhyaya、W. F. Braasch, Jr.、G. T. Landi 和 N. Yunger Halpern，PRX Quantum 5，030355（2024年），arXiv:2305.15480 [quant-ph]。[59] P. Talkner、E. Lutz 和 P. Hänggi，Phys. Rev. E 75，050102 2007（ ）。[60] W. Pusz 和 S. L. Woronowicz，Commun. Math. Phys. 58，273（1978年）。[61] A. Mishra、S. Chakraborty、A. Ghosh 和 S. Sarkar，JHEP 09（2018年），034，arXiv:1709.08925 [hep-th]。[62] R. Chetrite 和 K. Mallick，J. Stat. Phys. 148, 480 (2012年), arXiv:1112.1303 [cond-mat.stat-mech]。[63] G. De Chiara 和 A. Imparato，Phys. Rev. Research 4, 023230 2022年 2108 ( ), arXiv: 。05937 [quant-ph]。[64] G. Manzano、J. M. Horowitz 和 J. M. R. Parrondo，Phys. Rev. X 8, 031037 (2018年), arXiv:1710.00054 [quant- ph]。[65] H. Spohn，J. Math. Phys. 19, 1227 (1978年)。[66] T. Albash、D. A. Lidar、M. Marvian 和 P. Zanardi，Phys. Rev. E 88, 032146 (2013 年), arXiv:1212.6589 [quant- ph]。[67] A. E. Rastegin 和 K. Życzkowski，Phys. Rev. E 89, 012127 2014年 1307 ( )，arXiv: 。5370 [quant-ph]。[68] H. Araki，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 13, 173 (1977年)。