具有对薛定谔谱无任何限制的初始¨条件的 KdV 层级全局流

XIANGSHUO KONG、SHINICHI KOTANI 和 SHUO ZHANG

arXiv:2611.29422v1 [math.SP] 22 Nov 2026

摘要

此前，有一位作者为一大类初始数据构造了 KdV 流，并要求以该初始数据为势函数的薛定谔算子有下界。本文去除了这一限制，并在一类有上界、但下方可能无界的初始数据空间上建立了该流。

关键词：KdV 层级；薛定谔算子；Weyl-Titchmarsh函数；谱测度；Toeplitz算子； τ-函数；Riccati方程。

1 引言

本文将 Korteweg-de Vries 方程规范化为

$$\partial_t q = \frac{1}{4}\partial_x^3 q - \frac{3}{2} q \partial_x q, \quad q(x,0) = q_0(x), \quad (x,t \in \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

显然，对于任意实数 $c \neq 0$，重标度后的函数

$$u(x,t) = -6c^2 q\left(cx, -4c^3 t\right)$$

满足

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0.$$

在 [9, 8] 中，已证明若底层的 Schr¨odinger 算子

$$L_{q_0} = -\partial_x^2 + q_0$$

有下界，则在初始 q_0满足温和条件的情况下，KdV方程存在唯一解；这类条件允许遍历初始数据，其中包括几乎周期初始数据。最近，Zhang [16] 发现，对于充分大的 $n \geq 1$， $q_0 \in C_b^n(\mathbb{R})$ 可以作为初始数据。本文旨在去除 L_q 有下界这一条件，从而可以将某类无下界函数作为初始数据。

Menikoff [12] 提出了研究无界解的基本思路，而 Bondareva [1] 和 Bondareva–Shubin[2] 在增长函数类中，于$\alpha \leq 1$条件下，得到了完整时间区域（$-\infty, \infty$）上的存在性定理 $\mathcal{S}^\alpha$ ：

$$\widetilde{\mathcal{S}}^\alpha = \left\{ q_0 \in C^\infty(\mathbb{R});\ q_0^{(k)}(x) = o\left(|x|^{\alpha-k}\right) \text{ for any } k \geq 0 \right\}.$$

另一方面，Kenig、Ponce 和 Vega [6] 针对以下初始数据，在单侧时间区域 $[0,\infty)$ 上进一步证明了整体适定性结果:

$$q_0(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + f(x)$$

其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$（Schwartz空间）、奇整数 $k \geq 1$ 和 $a_k > 0$ （他们考察的则是方程 $\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0$，其中 $u(x,\ t) = -6q(-x,\ 4t)$）。然而，正如一个具体例子所示，该解在负时间区域可能会爆炸

$$q_0(x) = x \Longrightarrow q(x,t) = \frac{2x}{3t+2}$$

意味着。

我们关注完整时间区域（$-\infty$， ∞）上的全局解。上述先前结果表明，在 $x=\pm\infty$ 处，临界增长阶为 $o(|x|)$。此外，我们希望去除 $\widetilde{}$ 中 q_0 在 $\mathcal{S}^\alpha$ 中的导数的衰减条件。我们的出发点是 [9, 8]，，它将Sato-Segal-Wilson形式主义与 Schr¨odinger 算子的 Weyl-Titchmarsh函数（简称 WT函数）联系起来。这种方法在统一框架下处理衰减势和振荡势，并涵盖了相当广泛的有界光滑遍历数据和拟周期数据。借助WT函数，可以直接用谱变量表述解析假设。

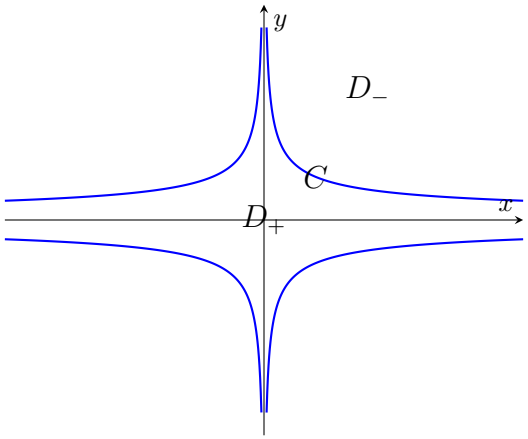
由于我们并未假设相关的 Schr¨odinger 算子 L_{q_0} 有下界，因此在谱参数 z进行替换 $z=-\zeta^2$后，区域 D_+应包含 $\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$。在全文中，我们固定一个正的奇整数 M。对于常数 $c_0>0$，令 $\omega(x)$ 为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上的光滑正偶函数，并满足

$$|y|=\omega(x)=\begin{cases} c_0+o(1) & \text{as } x\to\infty \\ O\left(|x|^{-(M-1)}\right) & \text{as } x\to 0 \end{cases},$$

并通过以下方式定义 $\mathbb{C}$ 中的区域

$$D_+=\{z\in\mathbb{C};\ \ |\Im z|<\omega(\Re z)\},\ \ D_-=\{z\in\mathbb{C};\ \ |\Im z|>\omega(\Re z)\}.$$

$D_\pm$ 的边界记作 C。



曲线 C 的图形

在黎曼球面上，它构成一条闭合曲线；在复平面上，其内部包含 x 轴和 y 轴。曲线 C 的定义使得，当 $\Im z\to\infty$ 在 D_+ 上时，对于任意正奇整数 $m\le M$，$\cosh z^m$ 保持有界。

尽管我们遵循 [9, 8]，所采用的框架，乘子 $e^{h(\zeta)}$ 在 D_+ 上是无界的，因此必须相应地修改 Hardy空间和Toeplitz算子。首先，我们为每个整数 $N\ge 1$ 定义符号类

$$\mathcal{A}_N(C)=\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{a}(\lambda)=(a_1(\lambda),a_2(\lambda)): a_j \text{ are functions on } C \text{ such that for any} \\ c>0 \text{ there exists an analytic function } \widetilde{\boldsymbol{a}}(z) \text{ on } D_+ \text{ satisfying} \\ \sup\limits_{z\in D_+}\|\widetilde{\boldsymbol{a}}(z)\|+\sup\limits_{\lambda\in C}\left|\lambda^N\rho_c(\lambda)\right|\|\boldsymbol{a}(\lambda)-\widetilde{\boldsymbol{a}}(\lambda)\|<\infty\end{array}\right\},$$

其中

$$\rho_c(z)=\left(K+\cosh z^M\right)^c.$$

正的 常数 K 的选取使得 $\inf_{z\in D_+}|\rho_c(z)|>0$。Hardy空间 $H(D_\pm)$ 定义为

$$H(D_\pm)=L^2(C)\text{-closure of }\{\text{rational functions with no poles on } D_\pm\},$$

以及加权Hardy空间

$$H_{N,c}(D_+)=(z-b)^N\rho_c(z)H(D_+) \text{ with } b\in D_-.$$

$z^k \in H_{N,c}(D_+)$ 对任意 $0 \le k \le N-1$ 均成立。对于有理函数 $r = q/p$，其多项式为 p、q，se t

$$\deg r = \deg q - \deg p,$$

对于多项式 h，令 $c_k(h)$ 为 h 中 z^k 的系数。我们引入半群

$$\Gamma_m = \left\{ \begin{array}{l} g = re^h;\ h \text{ is a real odd polynomial with} \deg h \le m.\ \ r \text{ is} \\ \text{a rational function such that } r(z) \ne 0, \infty \text{ on } \overline{D}_+ \text{ and} \deg r \le 0. \end{array} \right\}$$
$$\Gamma_m^{\text{real}} = \{ g \in \Gamma_m;\ \ g = \overline{g}\ \} \quad (\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})})$$

对于 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N(C)$ 和 $g = re^h \in \Gamma_m$ 满足 $m \le M$，定义作用于 $H_{N,\ c}(D_+)$ 上的 Toeplitz 算子 $T(g\boldsymbol{a})$:

$$T(g\boldsymbol{a})u = \mathfrak{p}_+(g(\boldsymbol{a} - \widetilde{\boldsymbol{a}})u) + g\widetilde{\boldsymbol{a}}u,$$

其中，$\mathfrak{p}_+$ 表示从 $L^2(C)$ 到 $H(D_+)$ 的投影，且 $\boldsymbol{a}u = a_1 u_e + a_2 u_o$ 满足 $u_e(\lambda) = (u(\lambda) + u(-\lambda))/2$, $u_o = u - u_e$。右侧的第一项属于 $H(D_+)$。算子 $T(g\boldsymbol{a})$ 不依赖于补偿项 $\widetilde{\boldsymbol{a}}$的选取，并满足

$$g^{-1}T(g\boldsymbol{a}) : H_{N,c}(D_+) \to H_{N,c}(D_+) \ \text{ if } -c_m(h) \le c,$$

因为，对于满足 $m \le M$ 的 $g = re^h \in \Gamma_m$，有 $gu \in H_{N,\ c}(D_+)$；若 $u \in H(D_+)$ 且 deg $r \le N$，则 $c_m(h) \le c$。定义

$$\mathcal{A}_N^{inv}(C) = \{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N(C);\ T(\boldsymbol{a}) \text{ is invertible on } H_{N,c}(D_+) \text{ for any } c > 0\}.$$

一个重要的子类 $\mathcal{B}_N$ of $\mathcal{A}_N^{inv}(C)$ 在第 2 节中给出。

对于任意有理函数 r of Γ_m，当$\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}(C)$时，算子 $r^{-1}T(r\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1} - I$在 $H_{N,\ c}(D_+)$ 中具有有限秩，因此我们可以定义 tau 函数:

$$\tau_{\boldsymbol{a}}(r) = \det\left(r^{-1}T(r\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1}\right) \text{ for } \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}(C).$$

为了证明 $g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 可逆，我们引入

$$\mathcal{A}_{N,+}^{inv}(C) = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}(C);\ \boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}} \text{ and } \tau_{\boldsymbol{a}}(r) \ge 0 \text{ for any real rational} \\ \text{function } r \text{ with no poles nor zeros in } \overline{D}_+ \end{array} \right\}.$$

在第 4 节中，我们证明对于 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_{N,\ +}^{inv}(C)$ 和 $g \in \Gamma_M^{\text{real}}$，$g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 可逆。在这种情况下，我们定义

$$\varphi_{g\boldsymbol{a}}(z) = g(z)\boldsymbol{a}(z)(g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))^{-1}(g^{-1}\cdot 1)(z) - 1 \in H(D_-),$$

and

$$\kappa_1(g\boldsymbol{a}) = \lim_{D_- \ni z \to \infty} z\varphi_{g\boldsymbol{a}}(z).$$

KdV流的初始空间为

$$\mathcal{Q}_N^{(M)} = \left\{q;\ \ q(x) = -2\partial_x \kappa_1(e_x \boldsymbol{a}) \text{ for an } \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_{N,+}^{inv}(C)\right\},$$

其中 $e_x(z) = e^{xz}$。奇整数 M 和整数 $N \ge 3$ 分别描述 KdV 层级的阶数以及 q 的光滑性。我们的第一个定理是

定理 1.1. 以下结论成立。
(i) $\mathcal{Q}_N^{(M)} \subset C^{N-3}(\mathbb{R})$ 成立。*(ii)* 对于
$q \in \mathcal{Q}_N^{(M)}$ 和 $g \in \Gamma_M^{\text{real}}$，定义

$$(K(g)q)(x) = -2\partial_x \kappa_1(e_x g\boldsymbol{a}) \ \textit{for}\ q(x) = -2\partial_x \kappa_1(e_x \boldsymbol{a}).$$

对于任意满足 $m + 3 < N$ 的奇整数 $m \le M$，函数 $\left(K\left(e^{tz^m}\right)q\right)(x)$ 在 t 中为 C^1，在 x 中为 C^{N-3}，并且对于 $q \in \mathcal{Q}_N^{(M)}$，它满足第 $m+1(m+1)/2$ 个 *KdV*方程。特别地，当 $N \ge 6$ 时，$\left(K\left(e^{tz^3}\right)q\right)(x)$ 是 *KdV*方程 *(1.1)* 在 $q \in \mathcal{Q}_N^{(3)}$ 下的一个解。

为了给出具体的 .....元素的示例中，我们引入 m-函数。对于 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}$，$+(C)$，$g \in \Gamma_M^{\text{real}}$l et

$$\psi_{g\boldsymbol{a}}(z) = g(z)\boldsymbol{a}(z)(g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))^{-1}(g^{-1}\cdot z)(z) - z \in H(D_-),$$

并设

$$m_{g\boldsymbol{a}}(z) = \frac{z + \psi_{g\boldsymbol{a}}(z)}{1 + \varphi_{g\boldsymbol{a}}(z)} + \kappa_1(g\boldsymbol{a}).$$

我们称此 $m_{g\boldsymbol{a}}$ 为 $g\boldsymbol{a}$ 的 m-函数。在第 6 节中将证明，$m_{\boldsymbol{a}}$ 可由薛定谔算子 L_q 的 WT函数 $m_\pm$ 描述，其中 $q(x) = -2\partial_x\kappa_1(e_x\boldsymbol{a})$ 如下：

$$m_{\boldsymbol{a}}(z) = \begin{cases} -m_+(-z^2) & \text{if } \Re z > 0 \\ m_-(-z^2) & \text{if } \Re z < 0 \end{cases}. \tag{1.2}$$

此外，符号 $\boldsymbol{b}(\lambda) = (1,\ m_{\boldsymbol{a}}(\lambda)/\lambda)$ 表示相同的 q （见第 6 节）。因此，q 属于 $\mathcal{Q}_N^{(M)}$ 的一个充分条件可以用其 WT函数表述。对于定义在 $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$ 上的解析函数 $m(z)$，考虑以下条件：

(M.1) $m(z) = \overline{m(\bar{z})}$，且 $\Im\, m(z)/\Im\, z > 0$ 于 $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$。(M.2) $m(z) = z + \sum_{1\le k\le N-2} m_k z^{-k} + O\left(z^{-N+1}\right)$ 于每个 D_-。(M.3) Herglotz 函数 $m_\pm(z) = \mp m\left(\sqrt{-z}\right)$ 的谱测度 $\sigma_\pm$ 满足

$$\int_{-\infty}^{0} e^{c|\lambda|^{M/2}}\sigma_\pm(d\lambda) < \infty \text{ for any } c > 0.$$

定理 1.2。对于势函数 q 的 *WT*函数 $m_\pm$，按照 *(1.2)* 的右端定义 $m(z)$。如果 $m(z)$ 满足条件 *(M.1)*˜ *(M.3)*，则 $q \in \mathcal{Q}_N^{(M)}$。此外，$m_{K(g)q}$ 对 $N - \frac{M+1}{2}$ 满足 *(M.1)*、*(M.3)* 和 *(M.2)*。

关于 q，给出了满足条件 (M.1)、(M.2)、(M.3) 的 WT函数的一个充分条件：

定理1.3。对于具有偶整数 $k \ge M+N+2$ 的 $q \in C^k(\mathbb{R})$，假设以下条件成立：*(A)* $C_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}} q(x) < \infty$，并且存在常数 $c > 0$ 和 $\alpha < 2/(M-1)$，使得 $q(x) \ge -c(1+|x|)^\alpha$ 对每个充分大的 $|x|$ 成立。

(B) 设 $Q(x) = 1 + C_0 - q(x) (\ge 1)$ 以及 $a = (1-(M+N+2)/k)/2\ (\in [0, 1/2))$。

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|q^{(j)}(x)\right|}{Q(x)^{1+ja}} < \infty \text{ for } j = 1, 2, \cdots, k.$$

于是，$q \in \mathcal{Q}_N^{(M)}$ 成立，因为相应的 m-函数满足 *(M.1)*、*(M.2)* 和 *(M.3)*。

通过应用 Zhang [16], 所采用的方法，可在条件 (B) 下证明条件 (M.2)，而 (M.3) 则由关于 $(-\infty,\ 0)$ 上相对于谱测度的指数积分的估计得到，该估计以能量泛函表示，并由 Gesztesy-Simon [5]建立。

条件 (B) 包含许多初始数据 q。下面给出典型例子 .

例 1.1。先验地假设 $q \in C^k(\mathbb{R})$。

1. 有界光滑势 $C_b^k(\mathbb{R})$ （*Zhang [16]*的情形） *2.* 衰减至 $-\infty$ 的势：对于 $0 < \alpha < 2/(M-1)$，$1 \le \beta < 1 + \alpha/2$

$$q(x) = -\begin{cases} x^\alpha u_+\left(x^\beta\right) & \text{if } x \ge 1 \\ (-x)^\alpha u_-\left((-x)^\beta\right) & \text{if } x \le -1 \end{cases} + v(x)$$

其中 $u_\pm, v \in C_b^k(\mathbb{R})$ 满足 $\inf_{x\ge1} u_\pm(x) > 0$。$q$ 的导数可能在 $x \to \pm\infty$ 时发散。*3.* 具有无界深度的稀疏负势阱：

$$q(x) = -\sum_{n\ge2} nw\left(\frac{x - 2^{n^2}}{n}\right) \quad \text{with } 0 \le w \in C_c^k((-1,1)).$$

Killip-Murphy-Visan [7] 于2020年构造了一个以高斯白噪声为初始条件的KdV方程解。我们从Sato-Segal-Wilson理论的角度关注这一构造。就此而言，我们预期高斯白噪声势满足条件 (M.1)-(M.3)。(M.1) 显然成立。对于 $M = 3$ 和较小的 $c > 0$，(M.3) 成立，这可由态密度的显式公式推出。因此，主要困难在于 $N = 1$ 时的 (M.2)，更确切地说，在于能否定义 $\kappa_1(e_{x,t}\boldsymbol{a})$，使得 $e_{x,t}(z) = e^{xz+tz^3}$。

本文结构如下。第 2 节介绍加权Hardy空间和Toeplitz算子。第 3 节和第 4 节构造正则化τ函数，并讨论其正性与非退化性质。第 5 节通过重构推导 Schr¨odinger 方程和 KdV演化。在此之前的各节中，我们沿用 [8,9]采用的框架，并尽量简化证明。第 6 节将流的构造与 WT- 函数和谱测度联系起来，并证明关于该流的主要结果。第 7 节建立薄区域渐近，并针对具体的势函数类给出负谱矩估计。

2 Hardy空间与Toeplitz算子

我们介绍加权Hardy空间及其Toeplitz算子，并给出关于 g_1，g_2 的条件，使得 $g_1^{-1}T(g_1a) - g_2^{-1}T(g_2a)$ 是 Hilbert–Schmidt。

与 C 相关联的 Hardy空间定义如下:

$$H_\pm = H(D_\pm) = \text{ the closure in } L^2(C) \text{ of rational function with no poles in } D_\pm, \tag{2.1}$$

且 $L^2(C) = H_+ \oplus H_-$（直和），其中从 $L^2(C)$ 到 $H_\pm$ 的 $\mathfrak{p}_\pm$ 柯西投影定义如下:

$$\mathfrak{p}_\pm f = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}\lambda, \qquad z \in D_\pm \tag{2.2}$$

为适应 e^h 在 C 上的增长，以及 $z^n \notin H(D_+)$这一事实，我们在加权Hilbert空间 $\lambda^N\rho_c(\lambda)L^2(C)$中进行讨论。取 $\rho_c(z) = (\cosh z^M + K)^c$，定义

$$H_{N,c}(D_+) = (z-b)^N\rho_c(z)H(D_+), \qquad b \in D_- \tag{2.3}$$

其中选择 $K = K(M) > 0$，使得 $\left(\cosh z^M + K\right)^c$ 在 D_+ 中没有零点，并且

$$z^k \in H_{N,c}(D_+), \qquad \text{for any integer } k \le N-1. \tag{2.4}$$

对于加权Hardy空间上的符号，定义如下类

$$\mathcal{A}_N(C) = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{a}(\lambda) : \boldsymbol{a} \text{ is a bounded function on } C, \text{ and for any } c > 0, \text{ there exists an} \\ \text{analytic function } \tilde{\boldsymbol{a}} \text{ satisfying } \sup\limits_{\lambda\in D_+}|\tilde{\boldsymbol{a}}(z)| < \infty, \sup\limits_{\lambda\in C}|\lambda^N\rho_c(\lambda)||\boldsymbol{a}(\lambda) - \tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda)| < \infty \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

与 $H_{N,c,+}$相关。我们在 $H_{N,c}(D_+)$上赋予范数

$$\|f\|_{H_{N,c}(D_+)} = \sqrt{\int_C \left|f(z)(z-b)^{-N}\rho_c(z)^{-1}\right|^2|dz|}. \tag{2.6}$$

引理 2.1. $H(D_+)$ 在 $H_{N,c}(D_+)$中稠密。

证明. 固定 $u \in H_{N,c}(D_+)$，并令 $u_n(z) = \frac{u}{(z)(z-b)^N\rho_c(z)}f_n(z)$，其中 $f_n(z) = e^{-\frac{z^{4M}}{n}}(z-b)^N\rho_c(z)$。由于 $f_n(z)$在 D_+中有界且解析，我们有 $u_n \in H(D_+)$。此外，$u_n(z) \to u(z)$在 D_+中逐点成立。因此

$$\|u_n - u\|_{H_{N,+}(D_+)} = \int_C |u(z) - u_n(z)|^2\frac{|dz|}{|z^N\rho_c(z)|^2} = \int_C \left|\frac{(z-b)^N}{z^N}\right|\frac{|u(z)|^2}{|\rho_c(z)|^2}\left|e^{\frac{-z^{4M}}{n}} - 1\right|^2|dz| \to 0 \tag{2.7}$$

由控制收敛定理得出。 ■

我们构造直和

$$H_{N,c} = H_{N,c}(D_+)\bigoplus H(D_-) \tag{2.8}$$

并通过如下设定将投影扩展至 $H_{N,\ c}$

$$\mathfrak{p}_+ f = f_+, \mathfrak{p}_- f = f_- \text{ if } f = f_+ + f_- \text{ with } f_+ \in H_{N,c}(D_+), f_- \in H(D_-). \tag{2.9}$$

直和上的范数，其正分量位于 $H_{N,c}(D_+)$ 中，为

$$\|f\|_{H_{N,c}} = \sqrt{\int_C |f_+(\lambda)|^2 |\lambda^N \rho_c(\lambda)|^{-2} |\,\mathrm{d}\lambda|} + \sqrt{\int_C |f_-(\lambda)|^2 |\,\mathrm{d}\lambda|} \tag{2.10}$$

我们将使用以下族

$$\Gamma_m = \begin{Bmatrix} g = re^h; r \text{ is a rational function such that} \\ (i)\ r \text{ has no poles nor zeros on } \mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \\ (ii)\ \deg r \le 0 \\ (iii)\ h \text{ is real polynomials of degree} \le m \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

设 $g \in \Gamma_m$和 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N(C)$，其中 $m \le M$。$H_{N,c}$上的 Toeplitz 算子 $T(g\boldsymbol{a})$ 定义为

$$T(g\boldsymbol{a})u = \mathfrak{p}_+(g\boldsymbol{a}u) = \mathfrak{p}_+(g(\boldsymbol{a} - \tilde{\boldsymbol{a}})u) + g\tilde{\boldsymbol{a}}u \in gH_{N,c}(D_+). \tag{2.12}$$

这里 $\boldsymbol{a}u = a_1 u_e + a_2 u_o$。

将柯西核拆分可得

$$\begin{aligned} T(g\boldsymbol{a})u(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\lambda)}{\lambda - z}(\boldsymbol{a}(\lambda) - \tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda))u(\lambda)d\lambda + g\tilde{\boldsymbol{a}}u(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\lambda) - g(z)}{\lambda - z}(\boldsymbol{a}(\lambda) - \tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda))u(\lambda)d\lambda + g\mathfrak{p}_+(\boldsymbol{a} - \tilde{\boldsymbol{a}}u)(z) + g\tilde{\boldsymbol{a}}u(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\lambda) - g(z)}{\lambda - z}(\boldsymbol{a}(\lambda) - \tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda))u(\lambda)d\lambda + gT(\boldsymbol{a})u(z). \end{aligned} \tag{2.13}$$

引理 2.2。设 $g_1 = r_1 e^{h_1}$、$g_2 = r_2 e^{h_2} \in \Gamma_m$，其中有理因子的展开式为 $r_j = \sum_{i=n_j}^{-\infty} a_{j,i} z^i$，奇多项式由 $h_j = \sum_{i=0}^{m_j} b_{j,i} z^i$ 给出。令 $n = \min\{n_1, n_2\} \le 0$ 和 $C = \max_j\{|b_{j,m_j}|\}$。固定 $\varepsilon > 0$ 使得 $|e^{h_j(z)}| \lesssim e^{(C+\varepsilon)|\Re z|^m}$。若 M、N、c 满足

$$N \ge \max\{m, -n+1\}, \qquad M \ge m, \qquad c > C + \varepsilon \text{ when } M = m \tag{2.14}$$

则 $g_1^{-1}T(g_1\boldsymbol{a}) - g_2^{-1}T(g_2\boldsymbol{a})$ 是 *Hilbert–Schmidt*。

证明。对于 $g_1 = r_1 e^{h_1}$，$g_2 = r_2 e^{h_2} \in \Gamma_m$ 其中 $r_j = \sum_{i=n_j}^{-\infty} a_{j,\ i} z^i$，$h_j = \sum_{i=0}^{m_j} b_{j,\ i} z^i$，前述恒等式给出

$$\begin{aligned} & g_1^{-1}T(g_1 a)u(z) - g_2^{-1}T(g_2 a)u(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda) - g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda - z}(a(\lambda) - \tilde{a}(\lambda))u(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda) - g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda - z}(a(\lambda) - \tilde{a}(\lambda))\lambda^{2N}\rho_c^2(\lambda)u(\lambda)\lambda^{-2N}\rho_c^{-2}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{2.15}$$

函数 $\cosh\ z^M + K$ 在 C上保持有界，且 $\Im z \to \infty$。利用权估计 $|z^N\rho_c(z)| \eqsim |z^N\ (\cosh\ (z^M + K)\ )^c| \sim |z|^N e^{c|\Re z|^M}$，我们得到

$$\begin{aligned} & \|g_1^{-1}T(g_1 a)u(z) - g_2^{-1}T(g_2 a)u(z)\|_{H.S.}^2 \\ & \le \frac{1}{4\pi^2}\int_{C^2}\left|\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda) - g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda - z}(a(\lambda) - \tilde{a}(\lambda))\lambda^{2N}\rho_c^2(\lambda)\right|^2 |z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda| \\ & \le c_a\frac{1}{4\pi^2}\int_{C^2}\left|\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda) - g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda - z}\right|^2 |z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda|^{2N}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda| \end{aligned} \tag{2.16}$$

sinc可以选择 e $\tilde{a}$，使得 $\rho_{2c}(a-\tilde{a})$ 在 C 上有界。最后一个积分中的权满足 es

$$|z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda|^{2N}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}\sim|z|^{-2N}e^{-2c\left(|\Re z|^M+|\Re\lambda|^M\right)} \tag{2.17}$$

当 $z,\ \lambda\to\infty$。

减去对角值可得恒等式

$$\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda)-g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda-z}=\frac{g_1^{-1}(z)(g_1(\lambda)-g_1(z))-g_2^{-1}(z)(g_2(\lambda)-g_2(z))}{\lambda-z}. \tag{2.18}$$

将 C^2 分为两个区域 $C^2=\{(z,\ \lambda):\ |z-\lambda|\le\varepsilon|\lambda|\}\cup\{(z,\ \lambda):\ |z-\lambda|>\varepsilon|\lambda|\}$。令 $I_1,\ I_2$ 表示来自 C^2 相应区域的 (2.16) 中积分的贡献。在 Γ_m 上定义度量为

$$\begin{aligned}d_c(g_1,g_2)&=\sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\int_{C^2}\left|\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda)-g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda-z}\right|^2|z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda|^{2N}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda|}\\&\le\sqrt{I_1+I_2}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

在第一个区域上，使用恒等式 $\frac{g_j(\lambda)-g_j(z)}{\lambda-z}=\int_0^1 g_j'((\lambda-z)t+z)dt$。令 $C=\max_j\{|b_{j,m_j}|\}$，我们有 e

$$g_j'(z)=(r_j'(z)+r_j(z)h_j'(z))e^{h_j(z)}\le C_\varepsilon z^{n_j+m-1}e^{(C+\varepsilon)|\Re z|^m} \tag{2.20}$$

and

$$\begin{aligned}\Delta_1&\le\frac{1}{4\pi^2}\int_{|z-\lambda|<\epsilon|\lambda|}\left|\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda)-g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda-z}\right|^2|z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda|^{2N}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda|\\&\lesssim\frac{1}{4\pi^2}\int_{|z-\lambda|<\varepsilon|\lambda|}\left|z^{-n_j}e^{-h_j(z)}z^{n_j+m-1}e^{C|\Re z|^m}\right|^2\left|z^{-N}e^{-2c|\Re z|^M}\right|^2|dz||d\lambda|\\&\lesssim\frac{1}{4\pi^2}\int_{|z-\lambda|<\varepsilon|\lambda|}\left|z^{-N+m-1}e^{-2c|\Re z|^M+2C|\Re z|^m}\right|^2|dz||d\lambda|\end{aligned} \tag{2.21}$$

因此，当 $N>m$ 且 $M\ge m$，并且 $M=m$时，$\Delta_1<\infty$ 成立。

在第二个区域中，其中 $|z-\lambda|>\epsilon|\lambda|$，我们有

$$\left|\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda)-g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda-z}\right|\le c_1|\lambda|^{-1}(|z|^{-n}|\lambda|^ne^{C(|\Re z|^m+|\Re\lambda|^m)}) \tag{2.22}$$

其中 $n=\min\{n_1,n_2\}\le0$。

$$\begin{aligned}\Delta_2&\le\frac{1}{4\pi^2}\int_{|z-\lambda|>\epsilon|\lambda|}\left|\frac{g_1^{-1}(z)g_1(\lambda)-g_2^{-1}(z)g_2(\lambda)}{\lambda-z}\right|^2|z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda|^{2N}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda|\\&\lesssim\frac{1}{4\pi^2}\int_{|z-\lambda|>\epsilon|\lambda|}\left(|\lambda|^{-2}|z|^{-2n}|\lambda|^{2n}e^{2C(|\Re z|^m+|\Re\lambda|^m)}\right)|z|^{-2N}e^{-2c(|\Re z|^M+|\Re\lambda|^M)}|dz||d\lambda|\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{|z-\lambda|>\epsilon|\lambda|}|\lambda|^{2(-1+n)}|z|^{2(-n-N)}e^{2C(|\Re z|^m+|\Re\lambda|^m)-2c(|\Re z|^M+|\Re\lambda|^M)}|dz||d\lambda|.\end{aligned} \tag{2.23}$$

因此，只要 $N\ge-n+1, M\ge m$，就有 $\Delta_2<\infty$，其中 $M=m$ 时 $c>C$。 ■

在 $\mathcal{A}_N^{inv}$ 内，考虑类

$$\mathcal{B}_N=\left\{\boldsymbol{m}(z)=(m_1(z),m_2(z)):\boldsymbol{m}\text{ is holomorphic on }\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})\text{ and satisfies (i)(ii)}\right\} \tag{2.24}$$

其中条件（i）和（ii）如下。

(i) $\boldsymbol{m}(z)=\mathbf{1}+\sum_{1\le k<N}\boldsymbol{m}_kz^{-k}+\mathcal{O}(z^{-N})$ 属于 D_-，其中 $\mathbf{1}=(1,1)$ $\boldsymbol{m}_k\in\mathbb{C}^2$。

(ii) $m_1(z)m_2(-z)+m_1(-z)m_2(z)\ne0$ 于 $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$。

对于属于此类的 $\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}$，定义它们的乘积以及元素 $\hat{}\boldsymbol{m}$ 如下：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})(z)=(m_1(z)n_{1,e}(z)+m_2(z)n_{1,o}(z),m_1(z)n_{2,o}(z)+m_2(z)n_{2,e}(z))\\\hat{\boldsymbol{m}}(z)=\left(\dfrac{2(m_{2,e}(z)-m_{1,o}(z))}{m_1(z)m_2(-z)+m_1(-z)m_2(z)},\dfrac{2(m_{1,e}(z)-m_{2,o}(z))}{m_1(z)m_2(-z)+m_1(-z)m_2(z)}\right)\end{cases} \tag{2.25}$$

引理 2.3。　在此乘积下，$\mathcal{B}_N$构成一个群，且相应的算子 $\{T(\boldsymbol{m}) : \boldsymbol{m} \in \mathcal{B}_N\}$ 满足

$$T(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}) = T(\boldsymbol{m})T(\boldsymbol{n}). \tag{2.26}$$

证明。由奇偶乘积法则可得 $\boldsymbol{m}\cdot\hat{}\boldsymbol{m} = \hat{}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = (1, 1)$，如 [8, 引理 7] 所示。对于算子恒等式，$\mathfrak{p}_-(\boldsymbol{n}u)$ 的偶部和奇部属于 $H(D_-)$。乘以 m_1 或 m_2 都保持该空间不变，因此

$$T(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})u = \mathfrak{p}_+(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{n}u)) = \mathfrak{p}_+(\boldsymbol{m}\,\mathfrak{p}_+(\boldsymbol{n}u)) = T(\boldsymbol{m})T(\boldsymbol{n})u.$$

■

3 τ 函数

若 $g^{-1}T(g\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1} - I$ 是迹类，则 τ-函数由 Fredholm 行列式给出

$$\tau_{\boldsymbol{a}}(g) = \det(g^{-1}T(g\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1}) \tag{3.1}$$

对于 Hilbert–Schmidt 差 $g_1^{-1}T(g_1 a) - g_2^{-1}T(g_2 a)$，我们使用正则化行列式 $\det_2$,，其定义如下

$$\det_2(I + A) = \det((I + A)e^{-A}). \tag{3.2}$$

特别地，若 A 是迹类，则

$$\det_2(I + A) = \det(I + A)e^{-\operatorname{tr} A}. \tag{3.3}$$

对于 Hilbert–Schmidt 算子 A，$I + A$ 可逆当且仅当 $\det_2(I + A) \neq 0$。因此，$\det_2$ 给出了 $T(ga)^{-1}$ 存在的判据。我们定义

$$\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(g) = \det_2(g^{-1}T(g\boldsymbol{a})T(a)^{-1}) \tag{3.4}$$

对于 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}$，$g = re^h \in \Gamma_{m\circ}$

对于算子 $T(g\boldsymbol{a})$ 及其 τ-函数，我们利用引理 4.8] 比较 M，N，c 的选择。

引理 3.1。设 H、H_1 为 *Hilbert* 空间，并假设 H_1 是 H 的向量子空间，且 H_1 在 H 中稠密。设 A 是作用于 H 上的 *Hilbert–Schmidt* 算子，满足

$$AH_1 \subset H_1 \text{ and } A_{H_1} = A|_{H_1} \text{ is of Hilbert-Schmidt class in } H_1 \tag{3.5}$$

Then

$$\det_2(I_H + A) = \det_2(I_{H_1} + A_{H_l}) \tag{3.6}$$

如果 A 是迹类，普通行列式也满足 $\det(I_H + A) = \det(I_{H_1} + A_{H_l})$。

引理 3.2。设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N$ 和 $g \in \Gamma_m$，并假设 $N_1 \le N_2 \le N$、$c_1 \le c_2 \le c$。设 (N_1, c_1) 和 (N_2, c_2) 满足 (2.14)，且这两个算子

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{a}) : H_{N_1,c_1} \to H_{N_1,c_1} \\ T(\boldsymbol{a}) : H_{N_2,c_2} \to H_{N_2,c_2} \end{cases} \tag{3.7}$$

是双射的。因此，(3.1)和(3.4)中的每个行列式在这两个空间上具有相同的值。特别地，$\tau_{\boldsymbol{a}}(g)$ $\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(g)$ 与 M、N、c 无关。

证明。设 $H_i = H_{N_i,c_i}$，并令 T_i 表示 T 在 H_i 上的实现。权重给出 $H_1 \subset H_2$，且根据引理 2.1，$H(D_+) \subset H_1$ 在 H_2 中稠密。由 (2.13)，Toeplitz 算子在 H_1 上一致。双射性对其逆算子给出了相同的限制恒等式。因此

$$\left(g^{-1}T_2(g\boldsymbol{a})T_2(\boldsymbol{a})^{-1} - I\right)\big|_{H_1} = g^{-1}T_1(g\boldsymbol{a})T_1(\boldsymbol{a})^{-1} - I. \tag{3.8}$$

行列式恒等式现在可由引理 3.1 推得，如 [8,引理 15]中所示。 ■

具有可逆 Toeplitz 算子 $\boldsymbol{a}$ 的符号类为

$$\mathcal{A}_N^{inv} = \{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N : T(\boldsymbol{a})^{-1} \text{ exist as a bounded operator on } H_{N,c}(D_+)\} \tag{3.9}$$

给定 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N, g \in \Gamma_m$，乘积可能满足 $g\boldsymbol{a} \notin \mathcal{A}_N$。因此，我们为 $g\boldsymbol{a}$ 定义 τ-函数如下。

引理3.3。设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}^{inv}{}_N$ 以及 $g \in \Gamma_m$。
(i) $\tau_{\boldsymbol{a}}(g)$ 定义良好，并且 $\tau_{\boldsymbol{a}}(g) \neq 0$ 当且仅当 $g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 在 $H_{N,c}$ 上可逆，对每个允许的 N 和 c 均成立。

(ii) $\tau^{(2)}_{g\boldsymbol{a}}(g_1)$ 由下式给出

$$\tau^{(2)}_{g\boldsymbol{a}}(g_1) = \det{}_2(g^{-1}g_1^{-1}T(g_1g\boldsymbol{a})(g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))^{-1}) \tag{3.10}$$

并且 $\tau^{(2)}_{g\boldsymbol{a}}(g_1) \neq 0$ 当且仅当 $g^{-1}g_1^{-1}T(g_1g\boldsymbol{a})$ 在 $H_{N,c}(D_+)$ 上可逆，对每个 $c > 0$ 均成立。

当 g_1 为有理函数时，为了计算 $\tau_{g\boldsymbol{a}}(g_1)$，我们首先确定一个包含 $g^{-1}g_1^{-1}T(g_1g\boldsymbol{a})(g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))^{-1}$ 中恒等算子的扰动的值域的有限维子空间。

引理 3.4。设 $\tau^{(2)}_{\boldsymbol{a}}(g) \neq 0$，其中 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}$ 和 $g \in \Gamma_m$。对于任意在 D_+ 中既无极点也无零点的有理函数 $r = \frac{p}{q}$，算子 $g^{-1}r^{-1}T(rg\boldsymbol{a}) - g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 具有有限秩，且其值域$\mathrm{Ran}(g^{-1}r^{-1}T(rg\boldsymbol{a}) - g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))$ 包含于有限维空间

$$span\{g(z)^{-1}r(z)^{-1}z^i, g(z)^{-1}z^j\}_{0\le i\le \deg p-1, 0\le j\le \deg q-1}. \tag{3.11}$$

证明。在（2.15）中取乘子 gr 和 g 时，核关于 z 的依赖关系由下式给出

$$\frac{g(z)^{-1}}{q(\lambda)}\left(r(z)^{-1}\frac{p(\lambda)-p(z)}{\lambda - z} - \frac{q(\lambda)-q(z)}{\lambda - z}\right).$$

这两个差商分别是关于 z 的次数至多为 $\deg p - 1$ 和 $\deg q - 1$ 的多项式，并且当多项式为常数时为零。在 λ 上积分即可得到所述的值域包含关系（参见 [8, 引理 37(i)]）。■

3.1 τ 函数的性质

在本小节中，假设

$$\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv},\ g_j = r_j e^{h_j} \in \Gamma_m \text{with } \deg r_j = m_j \text{ for } j = 1, 2. \tag{3.12}$$

Set

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{a}}(g_1, g_2) &= \mathrm{tr}((g_1g_2)^{-1}T(g_1g_2\boldsymbol{a})T(g_1\boldsymbol{a})^{-1}g_1 - I)(g_1^{-1}T(g_1\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1} - I). \\ &= \mathrm{tr}((g_1g_2)^{-1}R_{\boldsymbol{a}}(g_1, g_2)T(g_1\boldsymbol{a})^{-1}g_1)(g_1^{-1}R_{\boldsymbol{a}}(1, g_1)T(\boldsymbol{a})^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}((g_1g_2)^{-1}R_{\boldsymbol{a}}(g_1, g_2)T(g_1\boldsymbol{a})^{-1}R_{\boldsymbol{a}}(1, g_1)T(\boldsymbol{a})^{-1}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $R_{\boldsymbol{a}}(g_1, g_2) = T(g_1g_2\boldsymbol{a}) - g_2T(g_1\boldsymbol{a})$。

引理 3.5（余循环性质）。设 g，g_1，$g_2 \in \Gamma_m$ 和 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N$。若 $\tau^{(2)}_{\boldsymbol{a}}(g_1) \neq 0$，则

$$\tau^{(2)}_{\boldsymbol{a}}(g_1g_2) = \tau^{(2)}_{\boldsymbol{a}}(g_1)\tau^{(2)}_{g_1\boldsymbol{a}}(g_2)\exp(-E_{\boldsymbol{a}}(g_1, g_2)). \tag{3.14}$$

此外，若 $g_1 = r_1$ 和 $g_2 = r_2$ 是有理函数，则

$$\tau_{g\boldsymbol{a}}(r_1r_2) = \tau_{g\boldsymbol{a}}(r_1)\tau_{r_1g\boldsymbol{a}}(r_2) \tag{3.15}$$

证明。将算子 (3.4) 分解为

$$(g_1g_2)^{-1}T(g_1g_2\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1} = \big((g_1g_2)^{-1}T(g_1g_2\boldsymbol{a})T(g_1\boldsymbol{a})^{-1}g_1\big)\big(g_1^{-1}T(g_1\boldsymbol{a})T(\boldsymbol{a})^{-1}\big).$$

每个因子与恒等式之差都是一个 Hilbert–Schmidt 算子。根据（3.13），$\det_2$ 的乘积公式给出指数修正项 $\exp(-E_{\boldsymbol{a}}(g_1, g_2))$。对于有理因子，在 $g\boldsymbol{a}$ 处的相同分解涉及有限秩扰动，由引理 3.4 可得。普通行列式的乘法性给出（3.15）（参见 [8,引理 17(ii)]）。■

引理 3.6。 如果 g_1、 $g_2 \in \Gamma_m$ 和 g_1 是偶函数，即 $g_1(z) = g_1(-z)$，那么

$$T(g_2 g_1 \boldsymbol{a}) = T(g_2 \boldsymbol{a}) g_1, \qquad T(g_1 \boldsymbol{a}) = T(\boldsymbol{a}) g_1. \tag{3.16}$$

特别地，若 $g_1 = r_1$ 和 $g_2 = r_2$ 是有理函数，则

$$\tau_{r_1 g \boldsymbol{a}}(r_2) = \tau_{g \boldsymbol{a}}(r_2) \tag{3.17}$$

证明。 由于 g_1 是偶函数，$(g_1 u)_e = g_1 u_e$ 且 $(g_1 u)_o = g_1 u_o$。 两个托普利茨恒等式可由定义推出。对于 $g_1 = r_1$，它们表明，乘以 r_1 会交织两个行列式中的有限秩扰动，如 [8, 引理 17(iii)]所示。该乘法是单射且值域稠密：其像为 $H_{N+\deg r_1,\ c}(D_+)$，根据引理 2.1 中使用的逼近，该像稠密。因此，它将一个有限维值域双射地映到另一个有限维值域上。在这些值域上取行列式即可证明所述结论。■

我们先计算有理因子的 tau 函数，稍后将用它来逼近 e^h。对于$\zeta \in D_-$，令 $q_\zeta(z) = \frac{1}{1-\zeta^{-1}z}$。 该函数在 D_+中全纯。

引理 3.7. 令 $g \in \Gamma_m, \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N, \zeta, \zeta_1, \zeta_2 \in D_-$，并假设 $\tau^{(2)}_{\boldsymbol{a}}(g) \neq 0$。则

$$\begin{cases} \tau_{g\boldsymbol{a}}(q_\zeta) = 1 + \varphi^{(0)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta) \\ \tau_{g\boldsymbol{a}}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}) = \dfrac{(\zeta_1 + \varphi^{(1)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_1))(1 + \varphi^{(0)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_2)) - (\zeta_2 + \varphi^{(1)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_2))(1 + \varphi^{(0)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_1))}{\zeta_1 - \zeta_2} \end{cases} \tag{3.18}$$

证明。 根据引理 3.4，对于单个因子，扰动的值域包含于 g^{-1} 的张成空间。对于 $\varphi \in H(D_-)$，我们 have

$$q_\zeta(z)\varphi(z) = q_\zeta(z)\varphi(\zeta) + q_\zeta(z)(\varphi(z) - \varphi(\zeta)) \in H_{N,c}(D_+) \oplus H(D_-) \tag{3.19}$$

因此，归一化算子在 g^{-1} 上的作用是乘以 $1 + \varphi^{(0)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)$，从而得到第一个恒等式。

对于 $q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}$，扰动的值域包含于 g^{-1} 和 $g^{-1}z$ 的张成空间。对于 $j = 1,\ 2$，令 $a_j = 1 + \varphi^{(0)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_j)$ 和 $b_j = \zeta_j + \varphi^{(1)}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_j)$。对于 $\zeta_1 \neq \zeta_2$，从每个特征函数中减去其在两个节点处的线性插值函数。将其与插值函数之差乘以 $q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}$，所得结果属于 $H(D_-)$，因为两个极点都相消。因此，去掉公因子 g^{-1} 后，1，z 的像在 ζ_j 处的值为 a_j，b_j。在求值坐标中取行列式，得到

$$\tau_{g\boldsymbol{a}}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}) = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & \zeta_1 \\ 1 & \zeta_2 \end{pmatrix}} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\zeta_1 - \zeta_2},$$

如 [8, 引理 37(ii)]所示。重合节点公式可通过取极限得到。 ■

3.2 τ 函数的连续性

回顾度量

$$d_c(g_1, g_2) = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \int_{C^2} \left| \frac{g_1^{-1}(z) g_1(\lambda) - g_2^{-1}(z) g_2(\lambda)}{\lambda - z} \right|^2 |z^N \rho_c(z)|^{-2} |\lambda^N \rho_c(\lambda)|^{-2} |dz||d\lambda|} \tag{3.20}$$

在 Γ_m上。该 估计 $\|g_1^{-1} T(g_1 \boldsymbol{a}) - g_2^{-1} T(g_2 \boldsymbol{a})\|_{H.S.} \leq c_{\boldsymbol{a}} d_c(g_1, g_2)$ 给出如下连续性界 d.

引理 3.8。 设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}$和 $g = re^h, g_1 = r_1 e^{h_1}, g_2 = r_2 e^{h_2} \in \Gamma_m$，其中 次数 $h_j = m_j$，次数 $r_j = n_j$。假设 M, N满足 $M \geq m$和 $N >$最大值$\{-n-1, n, \frac{m}{2}\}$，并假定 $c > C$。则存在常数$c_{\boldsymbol{a}}$ 使得

$$\left| \tau^{(2)}_{g\boldsymbol{a}}(g_1) - \tau^{(2)}_{g\boldsymbol{a}}(g_2) \right| \leq c_0 d_c(g g_1, g g_2) \tag{3.21}$$

证明。 若 $\|A\|_{H.S.}$，$\|B\|_{H.S.} \leq c_1$，则存在一个仅取决于 c_1 的常数 c_2，使得

$$|\det_2(I + A) - \det_2(I + B)| \leq c_2 \|A - B\|_{H.S.} \tag{3.22}$$

由于 $\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(g)\neq 0$，算子 $g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 具有有界逆。应用前述估计得 es

$$\begin{aligned}\left|\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(g_1)-\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(g_2)\right| &\leq c_2\|(g^{-1}g_1^{-1}T(gg_1\boldsymbol{a})-g^{-1}g_2^{-1}T(gg_2\boldsymbol{a}))(g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))^{-1}\|_{H.S.}\\ &\leq \|(g^{-1}T(g\boldsymbol{a}))^{-1}\|c_{\boldsymbol{a}}c_2d_c(gg_1,gg_2)=c_0d_c(gg_1,gg_2)\end{aligned}\tag{3.23}$$

■

引理 3.9. 设 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}_N^{inv}$，其中 $M\geq m, N>n+1, c>c_2$, $\rho_c(z)=$(双曲余弦 $z^M+K)^c$。假设 $g_0, g_k\in\Gamma_m$ 的有理函数部分次数 0，且满足

$$\begin{cases}(i)\ there\ exist\ c_1,c_2\ such\ that\\ \ for\ any\ z\in C_x, |g^{-1}(z)g_k^{-1}(z)|, |g(z)g_k(z)|, |g(z)g_k'(z)|\leq c_1\left|z^ne^{c_2|\Re z|^m}\right|\\ \ for\ any\ z\in C_y, |g^{-1}(z)g_k^{-1}(z)|, |g(z)g_k(z)|, |g(z)g_k'(z)|\leq c_1|z^n|\\ (ii)g_k(z)\to g_0(z)\ for\ any\ z\in C\end{cases}\tag{3.24}$$

Then

$$\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(g_k)\to\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(g_0)\tag{3.25}$$

证明. 根据引理 3.8，只需证明 $d_c(gg_k,gg_0)\to 0$。令

$$\Delta_k(z,\lambda)=\frac{g^{-1}(z)g(\lambda)g_k^{-1}(z)g_k(\lambda)-g^{-1}(z)g(\lambda)g_0^{-1}(z)g_0(\lambda)}{\lambda-z},\tag{3.26}$$

$$d_c^2(gg_k,gg_0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{C^2}|\Delta_k(z,\lambda)|^2|z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda|,\tag{3.27}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}|\Delta_k(z,\lambda)|&\leq\left|g^{-1}(z)g(\lambda)g_k^{-1}(z)\frac{(g_k(\lambda)-g_k(z))}{\lambda-z}-g^{-1}(z)g(\lambda)g_0^{-1}(z)\frac{g_0(\lambda)-g_0(z)}{\lambda-z}\right|\\ &\leq|g^{-1}(z)g_k^{-1}(z)||g(\lambda)\int_0^1g_k'((\lambda-z)t+z)dt|+|g^{-1}(z)g_0^{-1}(z)||g(\lambda)\int_0^1g_0'((\lambda-z)t+z)dt|\\ &\leq 2c_3\left|\lambda^nz^ne^{c_2(|\Re z|^m+|\Re\lambda|^m)}\right|\end{aligned}\tag{3.28}$$

在区域 $|\lambda-z|\leq\varepsilon|\lambda|$ 上，并且

$$\begin{aligned}|\Delta_k(z,\lambda)|&=\left|\frac{g^{-1}(z)g(\lambda)g_k^{-1}(z)g_k(\lambda)-g^{-1}(z)g(\lambda)g_0^{-1}(z)g_0(\lambda)}{\lambda-z}\right|\\ &\leq 2c_4\varepsilon^{-1}\left|\lambda^{n-1}z^ne^{c_2(|\Re z|^m+|\Re\lambda|^m)}\right|\end{aligned}\tag{3.29}$$

在区域 $|\lambda-z|\geq\varepsilon|\lambda|$ 上。综合这些估计可得

$$|\Delta_k(z,\lambda)|^2\leq 4\left|\lambda^nz^ne^{c_2(|\Re z|^m+|\Re\lambda|^m)}\right|^2(c_3^2\chi_{|\lambda-z|\leq\varepsilon|\lambda|}+c_4^2\varepsilon^{-2}|\lambda|^{-2}\chi_{|\lambda-z|>\varepsilon|\lambda|}).\tag{3.30}$$

对于 $c_2<c$，右侧在 $(C^2,\ |\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|z^N\rho_c(z)|^{-2}|dz||d\lambda|)$ 上可积。因此，由控制收敛定理可得

$$d_c^2(gg_k,gg_0)\to\frac{1}{4\pi^2}\int_{C^2}\lim_{k\to\infty}|\Delta_k(z,\lambda)|^2|z^N\rho_c(z)|^{-2}|\lambda^N\rho_c(\lambda)|^{-2}|dz||d\lambda|=0\tag{3.31}$$

■

4 定义$\mathcal{A}_{N,+}^{inv}$的非负性条件

若 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}_N$，$g\in\Gamma_m$ 满足以下条件，则称其为实的

$$\boldsymbol{a}(\bar{\lambda})=\overline{a(\lambda)}\ for\ \lambda\in C,\qquad \overline{g(z)}=g(\bar{z})\ for\ z\in\mathbb{C} \tag{4.1}$$

Set

$$\begin{cases}\Gamma_m^{real}(C)=\{g\in\Gamma_m(C):\ g=\bar{g}\}, & \mathcal{A}_{N,+}^{inv}=\{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}_N^{inv}\quad \boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{a}}\qquad ,:\ 以及对于任意没有极点和零点的实有理函数\ r,\ \ \tau_{\boldsymbol{a}}(r)\geq 0\\ \end{cases} \tag{4.2}$$

对于有理因子，$\tau_{\boldsymbol{a}}(r)\geq 0\iff\tau_{(2)\boldsymbol{a}}(r)\geq 0$以及 $\tau_{\boldsymbol{a}}(r)>0\iff\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(r)>0$。

引理 4.1。如果 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}_{N,+}^{inv}$和 $g\in\Gamma_m^{real}$，那么 $\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(g)\geq 0$。此外，如果 $\tau_{(2)\boldsymbol{a}}(g)>0$，那么对于每个次数 0 的有理函数 $r\in\Gamma_0^{real}$，$\tau_{(2)g\boldsymbol{a}}(r)\geq 0$。

证明。设 $e^h\in\Gamma_m^{real}$，其中 $h(z)=\sum_{k=1}^m h_kz^k$ 是一个奇多项式。我们使用逼近

$$e^h=e^{h(z)-z^{4m}}e^{z^{4m}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{h(z)-z^{4m}}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{z^{4m}}{n}\right)^n\ \text{on}\ D_+ \tag{4.3}$$

并令 $r_n=\left(1-\frac{h(z)-z^{4m}}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{z^{4m}}{n}\right)^n=r_{\zeta_1}\cdots r_{\zeta_{m_1}}r_{\eta_1}^{-1}\cdots r_{\eta_{m_2}}^{-1}$，其中 $\zeta_j,\eta_j\in D_-$。

当 n 充分大时，r_n 的零点位于 D_- 中。为确定极点，令 $z=n^{\frac{1}{4m}}w$。于是 $\hbar(z)=O(n^{\frac14}w^m)$，缩放后的极点方程为 $w^{4m}+1+\frac1n h(n^{\frac{1}{4m}}w)=0$。选择 $R>0$，使得对于$|w|>R$，$|w|^{4m}-|h_1||w|^m>1$。

$w^{4m}+1+\frac1n h(n^{\frac{1}{4m}}w)$的零点 $\{w_{n,j}\}_{j=1}^{4m}$ 位于圆盘$\overline{|w|\leq R}$ 中，并可编号使得$w_{n,j}\to w_j=e^{\frac{\pi i}{(2j+1)4m}}$，当 $n\to\infty$时。因此，当 n 充分大时，$|\arg z_{n,j}-\frac{k\pi}{2}|>\frac{\pi}{8m}$。于是 r_n 在 D_+申既没有极点也没有零点。

接下来，我们验证 $r_n\to e^h$，其意义如 (3.24) 所述。对于 $|\Re z|>a>0$，有

$$\begin{cases}|r_n(z)|\leq\left(1+\left|\frac{h(z)}{n-h(z)+z^{4m}}\right|\right)^n\leq\left(1+\frac{|h(z)|}{n}\right)^n\leq e^{|h(z)|}\leq e^{c_2|\Re z|^m}\\ |r_n^{-1}(z)|\leq\left(1+\left|\frac{h(z)}{n+z^{4m}}\right|\right)^n\leq\left(1+\frac{|h(z)|}{n}\right)^n\leq e^{|h(z)|}\leq e^{c_2|\Re z|^m}\\ |r_n'(z)|=|r_n|\left|\frac{4mnz^{4m-1}}{n+z^{4m}}-\frac{n(4mz^{4m-1}-h'(z))}{n+z^{4m}-h(z)}\right|\leq 9m|z|^{4m-1}e^{|h(z)|}\leq e^{c_2|\Re z|^m}\\ |(r_n^{-1})'(z)|=|r_n^{-1}(z)|\left|\frac{n\left(4mz^{4m-1}-h'(z)\right)}{n+z^{4m}-h(z)}-\frac{4mnz^{4m-1}}{n+z^{4m}}\right|\leq 9m|z|^{4m-1}e^{|h(z)|}\leq e^{c_2|\Re z|^m}\end{cases} \tag{4.4}$$

而对于 $|\Re z|\leq a$，有

$$\begin{cases}|r_n(z)|\leq\left|\frac{n+z^{4m}}{n+z^{4m}-h(z)}\right|^n\lesssim\left|\frac{(n+y^{4m})^2}{(n+y^{4m})^2+|h(iy)|^2}\right|^{\frac n2}\leq c_1\\ |r_n^{-1}(z)|\leq\left|\frac{n+z^{4m}-h(z)}{n+z^{4m}}\right|^n\lesssim\left|\frac{(n+y^{4m})^2+|h(iy)|^2}{(n+y^{4m})^2}\right|^{\frac n2}\leq\left|1+\frac{|2h_1y^m|^2}{2ny^{4m}}\right|^{\frac n2}\leq e^{h_1^2y^{-2m}}\leq c_1\\ |r_n'(z)|=|r_n|\left|\frac{4mnz^{4m-1}}{n+z^{4m}}-\frac{n(4mz^{4m-1}-h'(z))}{n+z^{4m}-h(z)}\right|\leq c_1|z|^{4m-1}\\ |(r_n^{-1})'(z)|=|r_n^{-1}(z)|\left|\frac{n\left(4mz^{4m-1}-h'(z)\right)}{n+z^{4m}-h(z)}-\frac{4mnz^{4m-1}}{n+z^{4m}}\right|\leq c_1|z|^{4m-1}\end{cases} \tag{4.5}$$

因此，$\tau_{(2)\boldsymbol{a}}(g)=\lim_{n\to\infty}\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(r_n)\geq 0$。

如果 $\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(g)>0$，则由余循环恒等式可得

$$\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(r)=\frac{\tau_a^{(2)}(gr)}{\tau_a^{(2)}(g)}\exp(E_{\boldsymbol{a}}(g,r))\geq 0 \tag{4.6}$$

对于每个满足 $\deg r=0$ 的 $r\in\Gamma_0^{real}$。 ■

引理 4.2. 设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv,+}$ 和 $g \in \Gamma_m^{real}$，其中 $M \geq m$，并假设 $\tau_{\boldsymbol{a}}(g) > 0$。则以下断言成立。

(i) 函数 $m_{g\boldsymbol{a}}$ 满足

$$\frac{\Im m_{g\boldsymbol{a}}}{\Im z} > 0 \tag{4.7}$$

且 $1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}$ 在 D_- 中没有零点。

(ii) 对每个满足 $\deg r = 0$ 的 $r \in \Gamma_0^{real}$，都有 $\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(r) > 0$。

证明。回想一下，对于所有 $\zeta_1, \zeta_2 \in D_-$，都有 $\tau_{g\boldsymbol{a}}(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}) = \frac{m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_1) - m_{g\boldsymbol{a}}\ \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2} \left(1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)()}(\zeta_1)\right)\left(1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}(\zeta_2)\right.$。固定一个$\zeta \in D_-$，这给出

$$0 \leq \tau_{g\boldsymbol{a}}(q_\zeta q_{\bar{\zeta}}) = \frac{\Im m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\Im \zeta} \left|1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}(\zeta)\right|^2. \tag{4.8}$$

Set

$$\mathcal{Z} = \left\{\zeta \in D_- : 1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}(\zeta) = 0\right\}. \tag{4.9}$$

由于当 $\zeta \to \infty$ 时 $1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}(\zeta) \to 1$，函数 $1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}(\zeta)$ 并非恒等于 0。因此，$1+\varphi_{g\boldsymbol{a}}^{(0)}(\zeta)$ 在 D_- 中是亚纯的，并且在 $D_- \setminus \mathcal{Z}$ 上 $\frac{\Im m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\Im \zeta} \geq 0$。假设 $\zeta_0 \in D_- \cap \mathcal{Z} \cap \mathbb{C}_+$。则 $\Im\left(-m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta_0)^{-1}\right) = 0$，因此由极小值原理可得，在包含 ζ_0 的 $D_- \cap \mathbb{C}_+$ 的连通分支上，处处有 $\Im\left(-m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)^{-1}\right) = 0$。这与当 $\zeta \to \infty$ 时 $m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta) - \zeta \to 0$ 矛盾。因此，在 D_- 上有 $D_- \cap \mathcal{Z} = \varnothing$，且 $\frac{\Im m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\Im \zeta} \geq 0$。再次应用极小值原理，这次应用于 $\Im m_{g\boldsymbol{a}}(z)$，可得 $\frac{\Im m_{g\boldsymbol{a}}}{\Im z} > 0$。

对于 (ii)，我们沿用 [9, 引理 4.16] 的证明。由于 $D_- \cap \mathbb{R} = \varnothing$，只需考虑 $r = q_\zeta q_{\bar{\zeta}} (q_\eta q_{\bar{\eta}})^{-1}$。该论证适用于 $\mathbb{C}_+ \cap D_-$ 的两个连通分支中的每一个。■

引理 4.3。 设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv,+}$ 和 $g \in \Gamma_m^{real}$，其中 $M \geq m$，并假设 $\tau_{\boldsymbol{a}}^{(2)}(g) > 0$。那么，对于每个满足 次数 $r = 0$ 的$re^h \in \Gamma_m^{real}$，都有 $\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(re^h) > 0$。

证明。取满足 $r_k \to re^h$ 的有理逼近元，意义同 (3.24)。引理 4.1 中的计算给出$r_k^{-1} re^h \to 1$。因此，对于所有充分大的 k，都有 $\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(re^h r_k^{-1}) > 0$。接着由引理 4.2 得到 $\tau_{(2)^{re^h r_k^{-1} g\boldsymbol{a}}}(r_k) > 0$，而余循环恒等式给出

$$\tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(re^h) = \tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(re^h r_k^{-1} r_k) = \tau_{g\boldsymbol{a}}^{(2)}(re^h r_k^{-1}) \tau^{(2)}_{re^h r_k^{-1} g\boldsymbol{a}}(r_k) \exp(-E_{g\boldsymbol{a}}(re^h r_k^{-1}, r_k)) > 0 \tag{4.10}$$

■

5 Schr¨odinger方程与KdV方程的推导

我们从群元素 $e_x(z) = e^{xz}$,$e_{t,x} = e^{tz^3+xz}$ 推导出 Schr¨odinger 方程和 KdV演化。假设对所有 $x, t \in \mathbb{R}$，均有 $e_{t,x}\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}$，并定义

$$u_{x,t} = T(e_{x,t}\boldsymbol{a})^{-1} 1 \in H_1(D_+), \qquad w_{x,t} = \mathfrak{p}_-(e_{x,t}\boldsymbol{a} u_{x,t}) \in H_-. \tag{5.1}$$

选取定义在 D_+ 上的有界解析函数 $\tilde{\boldsymbol{a}}(z)$，使得 $\rho_c(\lambda)(\tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda) - \boldsymbol{a}(\lambda))$ 在该轮廓上有界。在$t = 0$处，柯西表示为

$$w_x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{x\lambda}(\tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda) - \boldsymbol{a}(\lambda)) u_x(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda \tag{5.2}$$

对 x 求导，得

$$\begin{aligned} \partial_x w_x(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{x\lambda}(\boldsymbol{a}(\lambda) - \tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda)) \frac{\lambda u_x(\lambda) + \partial_x u_x(\lambda)}{z - \lambda} \, \mathrm{d}\lambda \\ \partial_x^2 w_x(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{x\lambda}(\boldsymbol{a}(\lambda) - \tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda)) \frac{\partial_x^2 u_x(\lambda) + 2\lambda \partial_x u_x(\lambda) + \lambda^2 u_x(\lambda)}{z - \lambda} \, \mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{5.3}$$

由于根据引理 4.7]，$\partial_x^j u_x \in H_{j+1}(D_+)$ 对于 $j \leq N$ [9, 。

由于 $u_x \in H_1(D_+)$，展开式

$$(z-\lambda)^{-1} = \sum_{1\le k\le L} z^{-k}\lambda^{k-1} + z^{-L}\lambda^L(z-\lambda)^{-1} \tag{5.4}$$

以及 $|z^N\rho_c(z)||\tilde{\boldsymbol{a}}(z) - \boldsymbol{a}(z)|$ 在 C 上的有界性给出

$$\begin{aligned} w_x(z) &= \sum_{1\le k\le N-1} z^{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^{k-1}e^{x\lambda}(\boldsymbol{a}(\lambda)-\tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda + z^{-N+1}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\lambda^{N-1}e^{x\lambda}(\tilde{\boldsymbol{a}}(\lambda)-\boldsymbol{a}(\lambda))u_x(\lambda)}{z-\lambda}d\lambda \\ &= \sum_{1\le k\le N-1} z^{-k}s_k(x) + z^{-N+1}\tilde{w}_x(z) \end{aligned} \tag{5.5}$$

结合 $\tilde{w}_x \in H_-$。对于前两个导数，可得

$$\begin{aligned} \partial_x w_x(z) &= \sum_{1\le k\le N-2} z^{-k}s_k(x) + z^{-N+2}\tilde{w}_x^{(1)}(z) \in H_-, \\ \partial_x^2 w_x(z) &= \sum_{1\le k\le N-3} z^{-k}s_k(x) + z^{-N+3}\tilde{w}_x^{(1)}(z) \in H_-. \end{aligned} \tag{5.6}$$

将 e_x 替换为 $e_{x,t}$ 后，同样的计算仍然适用。

特别地，

$$\varphi_{e_{x,t}}(z) = w_{x,t}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}s_k(x,t), s_1(x,t) = \kappa_1(e_{x,t}\boldsymbol{a}). \tag{5.7}$$

对于 $x,t\in\mathbb{R}$，令

$$f_{\boldsymbol{a}}(x,t,z) = \boldsymbol{a}(z)u_{x,t}(z) = e_{x,t}(z)^{-1}(1+\varphi_{e_{x,t}}(z)) \tag{5.8}$$

直接求导可得

$$e_{x,t}(-\partial_x^2 f_{\boldsymbol{a}} + qf_{\boldsymbol{a}} + z^2 f_{\boldsymbol{a}}) = -\partial_x^2\varphi_{e_{x,t}} + q(1+\varphi_{e_{x,t}}) + 2z\partial_x\varphi_{e_{x,t}}. \tag{5.9}$$

常数项为 $q+2s_1'$。选择 $q(x) = -2s_1'(x)$，得到

$$e_{x,t}(-\partial_x^2 f_{\boldsymbol{a}} + qf_{\boldsymbol{a}} + z^2 f_{\boldsymbol{a}}) \in H_- \tag{5.10}$$

左端也可表示为

$$e_{x,t}\boldsymbol{a}(-\partial_x^2 u_{x,t} + qu_{x,t} + z^2 u_{x,t}) \in (e_{x,t}\boldsymbol{a})H_3(D_+) \tag{5.11}$$

since $u_{x,t}, \partial_x^2 u_{x,t} \in H_1(D_+)$。根据假设，$T(e_{x,t}\boldsymbol{a})$ 在 $H_N(D_+)$ 上可逆，我们得到

$$-\partial_x^2 u_{x,t} + qu_{x,t} + z^2 u_{x,t} = 0. \tag{5.12}$$

乘以 $\boldsymbol{a}$ 得到薛定谔方程

$$-\partial_x^2 f_{\boldsymbol{a}}(x,t,z) + q(x)f_{\boldsymbol{a}}(x,t,z) = -z^2 f_{\boldsymbol{a}}(x,t,z). \tag{5.13}$$

薛定谔方程给出

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_x^2\varphi_{e_{x,t}} + q(1+\varphi_{e_{x,t}}) + 2z\partial_x\varphi_{e_{x,t}} \\ &= \sum_{1\le k\le N-3} (-s_k'' - 2s_1's_k + 2s_{k+1}')z^{-k} + z^{-N+3}\tilde{w}_x, \end{aligned} \tag{5.14}$$

比较系数，我们得到以下项为零

$$-s_k'' - 2s_1's_k + 2s_{k+1}' \text{ for } 1\le k\le N-3 \tag{5.15}$$

因此，系数可由 s_1 和初始值 $\{s_k(0)\}_{2\le k\le N-2}$ 递归确定。

现在我们确定重构势的时间演化。

引理 5.1。 势函数 $q(x,t) = -2s_1'(x,t)$ 满足

$$\partial_t q(x,t) = \frac{1}{4}\partial_x^3 q(x,t) - \frac{3}{2}q(x,t)\partial_x q(x,t). \tag{5.16}$$

证明。 如 [8, 命题 14], 中所取

$$L = -\partial_x^2 + q, \qquad P = \partial_x^3 - \frac{3}{2}q\partial_x - \frac{3}{4}q'. \tag{5.17}$$

由于 $Lf_{\boldsymbol{a}} = -z^2 f_{\boldsymbol{a}}$，我们有 $Pf_{\boldsymbol{a}} = (z^2 - q/2)\partial_x f_{\boldsymbol{a}} + q' f_{\boldsymbol{a}}/4$。像上文一样写作 $e_{x,t} f_{\boldsymbol{a}} = 1 + \varphi$，可得 s

$$e_{x,t}(\partial_t f_{\boldsymbol{a}} - Pf_{\boldsymbol{a}}) = \partial_t \varphi - (z^2 - q/2)\varphi' - \tfrac{1}{2}zq(1+\varphi) - \tfrac{1}{4}q'(1+\varphi).$$

z 和 1 的系数分别为 $-s_1' - q/2$ 和 $-s_2' - qs_1/2 - q'/4$。由 $q = -2s_1'$ 以及取$k = 1$时的 (5.15)，两者均为零，因此余项属于 H_-。它也等于 $e_{x,t}\boldsymbol{a}(\partial_t u_{x,t} - (z^2 - q/2)\partial_x u_{x,t} - q' u_{x,t}/4)$。由投影以及 Toeplitz 算子的单射性可得

$$\partial_t f_{\boldsymbol{a}} - Pf_{\boldsymbol{a}} = 0. \tag{5.18}$$

与 $Lf_{\boldsymbol{a}} = -z^2 f_{\boldsymbol{a}}$的相容性给出 $(\partial_t L - [P,L])f_{\boldsymbol{a}} = 0$。交换子是乘以 $\frac{1}{4}\partial_x^3 q - \frac{3}{2}q\partial_x q$的算子。在每个 (x,t) 处，我们可以在外部扇形区域中取足够大的 z，使得 $1 + \varphi(z) \neq 0$。所述方程由此得证。

■

6 主要结果的证明

首先给出定理 1.1 的证明。

定理 *1* 的证明。 对于给定的符号 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_{N,+}^{inv}$，我们对任意 $g \in \Gamma_m$定义了 Toeplitz 算子 $T(g\boldsymbol{a})$。结合引理 4.3 可得，对于任意 $g = re^h \in \Gamma_m^{real}$且 deg $r = 0$， $g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 在 $H_{N,+}(D_+)$ 上是可逆的。因此，对于任意 x, $t \in \mathbb{R}$，我们可以定义 $e_{t,x}\boldsymbol{a}$ 的特征函数。[9, 引理 4.7] 中的计算给出了 $q(x,t)$ 关于 x 和 t 的连续性。最后应用引理 5.1，我们可以得到 KdV方程的解。

■

设 q 是一个具有半直线 Weyl 函数 $m_\pm$ 的实势函数。我们给出 $m_{\boldsymbol{a}}$ 所满足的条件，在这些条件下 $(1, \frac{m_{\boldsymbol{a}}(z)}{z}) \in \mathcal{A}_{N,+}^{inv}$，其中

$$m_{\boldsymbol{a}}(\zeta) = \begin{cases} -m_+(-\zeta^2) & \text{if } \Re\zeta > 0 \\ m_-(-\zeta^2) & \text{if } \Re\zeta < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

6.1 谱测度的估计

对于 $p > 0$, 定义 如下测度类，其中可积性条件对每个 $c > 0$ 都成立 .

$$\mathcal{E}_p = \left\{ \nu : \int_{-\infty}^{0} e^{c|\lambda|^p} \nu(\mathrm{d}\lambda) < \infty \right\}. \tag{6.2}$$

我们首先通过尾部估计刻画属于此类的条件。假设 $\nu \in \mathcal{E}_p$。给定 $a > 0$，取 $c = a$ 满足矩条件。于是

$$\nu((-\infty, -R]) \leq \int_{-\infty}^{-R} e^{-aR^p} e^{c|\lambda|^p} \nu(d\lambda) \leq C_a e^{-aR^p} \text{ for } R \geq 1 \tag{6.3}$$

反过来，假设对每个 $a > 0$，(6.3) 都成立。为证明 $\nu \in \mathcal{E}_p$，按如下步骤进行 .

设定 $R_n = 2^n R_0$。对于固定的 $c > 0$，选择 $a > 2^p c$。在每个二进区间上，我们有

$$\int_{-2R_n}^{-R_n} e^{c|\lambda|^p} \nu(\mathrm{d}\lambda) \leq C_a e^{-(a - 2^p c)R_n^p} \tag{6.4}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} C^{-(a-2^p c}{}_{)(}{}_{a}{}^{2^n R_0{}^p} < \infty$)且 $\nu([-R_0,0]) < \infty$，对这些区间求和可得 $\nu \in \mathcal{E}_p$。更一般地，假设存在一个测度 $\eta \in \mathcal{E}_p$，使得对于所有充分大的 R,

$$\nu([-2R,-R]) < CR^3\sqrt{\eta(-\infty,-R/4)} \tag{6.5}$$

于是 $\nu \in \mathcal{E}_p$，因为右侧被 $CC_a^{1/2}R^3 e^{-aR^p/2\cdot 4^p}$ 所界定。

回忆 Herglotz 函数的积分表示式 F,

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \nu_F(\,\mathrm{d}\lambda) \tag{6.6}$$

其中 $\int_{\mathbb{R}}(1+\lambda^2)^{-1}\nu_F(\,\mathrm{d}\lambda) < \infty$。

记作

$$I_R = [-2R,-R], \qquad J_R = [-3R,-R/2]. \tag{6.7}$$

对于 $R \geq 2$, $0 \leq y \leq 1$，泊松核给出了如下估计

$$\nu_F(I_R) \leq \frac{2}{\pi}\int_{J_R} \Im F(x+iy)\,\mathrm{d}x. \tag{6.8}$$

事实上，对于每个 $\lambda \in [-2R, R]$,

$$[\lambda - R/2, \lambda + R/2] \subset [-3R, -R/2] = J_R \tag{6.9}$$

因此

$$\int_{J_R} \frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\lambda-R/2}^{\lambda+R/2} \frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}x = 2\arctan\frac{R}{2y} \geq \frac{\pi}{2} \tag{6.10}$$

因为 $R \geq 2 \geq 2y$。

对 (6.6) 取虚部，得到

$$\Im F(x+iy) = \beta y + \int_{\mathbb{R}} \frac{y\,\mathrm{d}x}{(\lambda-x)^2+y^2} \tag{6.11}$$

去掉非负项 βy 并将积分限制在 I_R，得到

$$\begin{aligned}\int_{J_R} \Im F(x+iy)\,\mathrm{d}x &\geq \int_{J_R}\int_{I_R} \frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\nu_F(\,\mathrm{d}\lambda)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{I_R}\left(\int_{J_R} \frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}x\right)\nu_F(\,\mathrm{d}\lambda) \geq \frac{\pi}{2}\nu_F(I_R)\end{aligned} \tag{6.12}$$

根据 Tonelli 定理。我们利用这一估计证明以下等价关系。

引理 6.1。若 F 是 *Herglotz* 函数，那么 $-1/F$ 也是 *Herglotz* 函数，并且对于每个 $p>0$，我们有

$$\nu_F \in \mathcal{E}_p \iff \nu_{-1/F} \in \mathcal{E}_p. \tag{6.13}$$

证明。由于 F 是 Herglotz 函数，$F \neq 0$ 属于 $\mathbb{C}_+$。恒等式

$$\Im\left(\frac{-1}{F}\right) = \frac{\Im F}{|F|^2} > 0 \tag{6.14}$$

表明 $-1/F$ 也是一个 Herglotz 函数。假设 $\nu := \nu_F \in \mathcal{E}_p$。特别地，$\nu((-\infty,0)) < \infty$，因此我们可以将 (6.6) 重写为

$$F(z) = H(z) + \int_{\mathbb{R}_-} \frac{\nu(\,\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z} \tag{6.15}$$

with

$$H(z) = \alpha' + \beta z + \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\nu(\,\mathrm{d}\lambda) \tag{6.16}$$

where $\alpha' = \alpha + \int_{\mathbb{R}_-} \frac{-\lambda}{1+\lambda^2}\nu(\mathrm{d}\lambda)$。函数 H 在 $\mathbb{R}_-$ 上解析延拓，在那里为实值，并且满足

$$H'(x) = \beta + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{(\lambda - x)^2} \geq 0 \tag{6.17}$$

因此，极限 $l := \lim_{r\to\infty} H(-r)$ 在 $[-\infty, \infty)$ 中存在。定义

$$\delta_R = \nu((-\infty, -R/4)), \qquad F_R(z) = H(z) + \int_{-R/4}^{0} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z}. \tag{6.18}$$

我们将证明分为三个步骤。

步骤 *1.* 对于所有充分大的 R,

$$|F_R(x)| \geq \frac{c_0}{R}, \qquad x \in J_R \tag{6.19}$$

其中常数 $c_0 > 0$ 与 R 无关。

若 $l \neq 0$，则存在一个 $R_0 > 0$，使得对每个 $R > R_0$，在整个 $x \in J_R = [-3R, -R/2]$ 上都有 $|H(x)| > \varepsilon$。由于在积分区间上 $\lambda - x \geq R/4$，我们还有

$$0 \leq \int_{-R/4}^{0} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z} \leq \frac{4}{R}\nu((-\infty, 0)) \to 0. \tag{6.20}$$

因此，对于所有充分大的 R，$|F_R(x)|$ 在 J_R 上一致地远离零。

若 $l = 0$，我们从恒等式开始

$$H(-1) - H(-r) = \beta(r-1) + \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda+r}\right)\nu(\mathrm{d}\lambda). \tag{6.21}$$

由于 $r \to +\infty$，线性项应满足 $|\beta(r-1)| \to \infty$，若 $\beta > 0$。右边两项均非负，特别是

$$\beta(r-1) + \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda+r}\right)\nu(\mathrm{d}\lambda) \geq 0. \tag{6.22}$$

由于 $H(-1) - H(-r)$ 在 $r \to +\infty$ 时有有限极限，因此可得 $\beta = 0$。随后由单调收敛可得 $\int_{\mathbb{R}_+}(1+\lambda)^{-1}\nu(\mathrm{d}\lambda) < \infty$，而假设 $l = 0$ 给出 $\alpha' - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\nu(\mathrm{d}\lambda) = 0$。因此

$$H(z) = \int_0^{\infty} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z}, \qquad F_R(z) = \int_{-R/4}^{\infty} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z}. \tag{6.23}$$

在这种情况下 $\nu \neq 0$，否则上述表示式将给出 $F = 0$，这与 F 的赫尔格洛茨性质矛盾。选择 $K \geq 1$，使得 $\gamma := \nu([-K, K]) > 0$。若 $R \geq 8K$，$x \in J_R$，则对每个 $\lambda \in [-K, K]$ 都有 $0 < \lambda - x < 3R + K \leq 25R/8$。因此，

$$F_R(x) \geq \int_K^{K} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - x} \geq \frac{8\gamma}{25R}. \tag{6.24}$$

步骤 *2*。对于所有充分大的 R 以及所有 $x \in J_R$，$0 \leq y \leq 1$，我们有

$$\begin{aligned} |F_R'(x+iy)| &\leq \beta + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{|\lambda - x - yi|^2} + \int_{-R/4}^{0} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{|\lambda - x - yi|^2} \\ &\leq \beta + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{(1+\lambda)^2} + \frac{16\nu((-\infty, 0))}{R^2} \leq C. \end{aligned} \tag{6.25}$$

最后一项的估计方式与（6.20）中相同。

对于 $x \in \mathbb{R}$ 属于 J_R，$F_R(x)$ 的值为实数。沿着从 x 到 $x + iy$ 的竖直线段对导数进行积分可得

$$|F_R(x+iy) - F_R(x)| \leq Cy, \qquad 0 \leq \Im F_R(x+iy) \leq Cy \tag{6.26}$$

省略的尾项满足

$$|F_R(x+iy) - F(x+iy)| = \left|\int_{-\infty}^{-R/4} \frac{\nu(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - x - yi}\right| \leq \frac{\delta_R}{y} \tag{6.27}$$

假设 $\delta_R > 0$ 并令 $y_R = \sqrt{\delta_R}$。由 (6.3)，可得 $y_R \to 0$，$Ry_R \to 0$。将这些界与 (6.19) 结合，得到

$$\begin{aligned} |F(x+iy_R)| &\geq |F_R(x)| - |F_R(x+iy_R) - F_R(x)| - |F_R(x+iy_R) - F(x+iy_R)| \\ &\geq \frac{c_0}{R} - Cy_R - \frac{\delta_R}{y_R} \geq \frac{c_0}{2R} \end{aligned} \tag{6.28}$$

而（6.27）给出

$$\Im F_R(x+iy_R) \leq C\sqrt{\delta_R}, \qquad \Im F(x+iy_R) \leq C'\sqrt{\delta_R} \tag{6.29}$$

因此，

$$\Im\left(\frac{-1}{F_R(x+iy_R)}\right) \leq C''R^2\sqrt{\delta_R}, \tag{6.30}$$

由于 $|J_R| = 5R/2$，将（6.8）应用于 $-1/F$ 可得

$$\nu_{-1/F}(I_R) \leq \frac{2}{\pi}\int_{J_R} \Im\left(\frac{-1}{F(x+iy_R)}\right) \mathrm{d}x \leq \frac{5R}{2}\frac{2}{\pi}C''R^2\sqrt{\delta_R} \leq C'''R^3\sqrt{\nu_F((-\infty,-R/4))}. \tag{6.31}$$

这证明了 $\nu_{-1/F} \in \mathcal{E}_p$。

步骤 3。反过来，假设 $\nu_{-1/F} \in \mathcal{E}_p$。由于 $\nu_F = \nu_{-1/(-1/F)}$，将步骤 1 和步骤 2 应用于表示测度 $\nu_{-1/F}$ 可得所需结果。■

令 $S = m_+ + m_-$，使得 $\Im S > 0$，并定义

$$\mathcal{V} = \frac{1}{S}\begin{pmatrix} m_+m_- & (m_+ - m_-)/2 \\ (m_+ - m_-)/2 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

对于 $w \in \mathbb{C}$，记 $e(w) = (w,\ 1)^T$ 并设 $w_\pm = \Im m_\pm$，$u = -m_+$，$v = m_-$。于是

$$\mathcal{V}_q = \frac{e(u)e(v)^T + e(v)e(u)^T}{2(u-v)} \tag{6.33}$$

and

$$\Im\mathcal{V}_q = \frac{w_+}{|S|^2}\begin{pmatrix} m_- \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_- \\ 1 \end{pmatrix}^* + \frac{w_+}{|S|^2}\begin{pmatrix} -m_+ \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m_+ \\ 1 \end{pmatrix}^* \geq 0 \tag{6.34}$$

其中 $\Im\mathcal{V}_q = \frac{\mathcal{V}-\mathcal{V}^*}{2i}$。因此，$\mathcal{V}$ 是一个矩阵值 Herglotz 函数。将其表示测度记为 Σ，并设 $\rho = \mathrm{tr}\,\Sigma = \Sigma_{11} + \Sigma_{22}$。

引理 6.2。半直线 *Weyl* 函数的谱测度 $\sigma_\pm(\mathrm{d}\lambda)$ 以及格林函数的矩阵谱测度$\Sigma(\mathrm{d}\lambda)$ 满足

$$\sigma_+ + \sigma_- \in \mathcal{E}_p \iff \rho = \mathrm{tr}\,\Sigma \in \mathcal{E}_p. \tag{6.35}$$

证明。先假设 $\sigma_+ + \sigma_- \in \mathcal{E}_p$。由引理 6.1，$\Sigma_{22} = \nu_{-1/(m_+ + m_-)} \in \mathcal{E}_p$。对于第一个对角元，$\Sigma_{11} = \frac{-1}{m_+ + m_-}$ 和 $\nu_{\frac{-1}{m_+}+\frac{-1}{m_-}} \in \mathcal{E}_p$ 由同一引理得到 $\Sigma_{11} \in \mathcal{E}_p$。反过来，假设 $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} \in \mathcal{E}_p$。由于 $\Sigma_{22} = \nu_{-1/(m_+ + m_-)}$，该引理给出 $\sigma_+ + \sigma_- = \nu_{m_+ + m_-} \in \mathcal{E}_p$。■

6.2 轮廓上初始数据的逼近

为了区分实轴和虚轴附近的行为，将 C 写成以下四段弧的并集

$$C_1 = C \cap \{\Re z \geq x_0\}, \qquad C_2 = C \cap \{\Im z > y_0\}, \qquad C_3 = C \cap \{\Re z \leq -x_0\}, \qquad C_4 = C \cap \{\Im z < -y_0\}, \tag{6.36}$$

其中 x_0，$y_0 > 0$ 以及 $(\pm x_0,\ \pm y_0) \in C$。我们首先在 C_1，C_3 上逼近 $m_{\alpha(z)}(z)$。

我们使用以下逼近引理。

引理 6.3。假设 F 具有表示式 (6.6)，其中 $\nu \in \mathcal{E}_p, p \geq \frac{M}{2}$ 是满足 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\lambda^2}\nu(\mathrm{d}\lambda) < \infty$ 的符号测度。那么存在一个函数 $\tilde{F}$，在 D_+ 中解析，使得

$$|\tilde{F}(\zeta) - F(-\zeta^2)| \leq \rho_c(\zeta) \tag{6.37}$$

在弧 C_1, C_3 上。

证明。固定 $c>0$并且，与之前一样，记作 $H(\zeta)=\cosh(\zeta^M+K)$ $\rho_c(\zeta)=H(\zeta)^c$。选择 $b\in D_-$，使得 $b^2\notin\mathbb{R}$，并令

$$\Phi(\zeta)=\frac{(H(\zeta)H(-\zeta))^k}{((\zeta^2-b^2)(\zeta^2-\bar{b}^2))^l} \tag{6.38}$$

其中 k,l 是满足 $2k>c, l\geq 2$的整数。函数 Φ 具有以下性质 s.

(1) 由于 Φ 是偶数，$\Phi_\lambda=\Phi(\sqrt{-\lambda})$ 与平方根的选取无关。

(2) Φ 是解析的，且在$_M D_+$中既无零点也无极点。

(3) 当 ν满足 $\int_{\mathbb{R}_-} e^{c|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\nu(\mathrm{d}\lambda)<\infty, \forall c>0$时，我们有 $\int_{\mathbb{R}}|\Phi_\lambda|\nu(\mathrm{d}\lambda)<\infty$。为此，根据 λ的符号对积分进行拆分。对于 $\lambda>0$，估计 $|\Phi_\lambda|=|\Phi(i\sqrt{\lambda})|\leq C|1+\lambda|^{-2l}$ 给出 $\int_{\mathbb{R}_+}|\Phi_\lambda|\nu(\mathrm{d}\lambda)<\infty$。对于 $\lambda<0$，界 $|\Phi_\lambda|\leq e^{c'|\lambda|^{\frac{M}{2}}}$给出 $\int_{\mathbb{R}_-}|\Phi_\lambda|\nu(\mathrm{d}\lambda)<\infty$。

写出 $z=-\zeta^2$，$t=-\lambda$ 并定义

$$\tilde{F}(\zeta)=\alpha-\beta\zeta^2+\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\Phi_\lambda/\Phi(\zeta)}{\lambda+\zeta^2}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\nu(\mathrm{d}\lambda). \tag{6.39}$$

为检验 $-\zeta^2=\lambda$ 处的表观极点是可去的，利用 Φ 的偶性，写成 $\Phi(\zeta)=J(-\zeta^2)$，其中 J 在点 $-\zeta^2=\lambda$附近解析。于是

$$\frac{1-\Phi_\lambda/\Phi(\zeta)}{\lambda+\zeta^2}=\frac{J(z)-J(\lambda)}{(\lambda-z)J(z)}=\frac{-J'(z)}{J(z)}\in\mathbb{C}. \tag{6.40}$$

在 $\lambda=0$处，由偶性可得 $\Phi(\zeta)=\Phi(0)+\mathcal{O}(\zeta^2)$，因此 $1-\Phi_\lambda/\Phi(\zeta)=\mathcal{O}(\zeta^2)$。故 $\tilde{F}$的表观极点是可去的。

还需验证积分的收敛性。在每个紧集 $K\subset\subset D_+$上，对于所有充分大的$|\lambda|$，有 $\left|_{\Phi\ \zeta}{}^{\Phi_\lambda}{}_{()(\lambda+\zeta^2)}\right|\leq C_K\frac{|\Phi_\lambda|}{1+|\lambda|}$。该控制函数关于 $\nu(\mathrm{d}\lambda)$ 可积。因此，$\tilde{F}$在 D_+中定义良好且解析。

将 F 逼近为 $\tilde{F}$ is

$$\left|\tilde{F}(\zeta)-F(-\zeta^2)\right|\leq\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\Phi_\lambda}{\Phi(\zeta)(\lambda+\zeta^2)}\right|\nu(\mathrm{d}\lambda)\leq\frac{C}{|\Im\zeta^2|\Phi(\zeta)|}. \tag{6.41}$$

在弧 C_1，C_3上，轮廓的几何结构给出

$$|\Im\zeta^2|=|2ixy|=2|x|\left|c_0+c_1|x|^{-(M-1)^{-1}}\right|\geq\frac{C}{2}|x|\geq C|\zeta| \tag{6.42}$$

这意味着

$$\left|\tilde{F}(\zeta)-F(-\zeta^2)\right|\leq C\langle\zeta\rangle^{4l-1}|H(\zeta)|^{-2k}. \tag{6.43}$$

在 C_2，C_4上，界 $\left|\Im\zeta^2\right|=|2ixy|\geq 2C|y(y-c_0)^{-(M-1)}|\geq C\langle\zeta\rangle^{-(M-2)}$ 给出

$$\left|\tilde{F}(\zeta)-F(-\zeta^2)\right|\leq C\langle\zeta\rangle^{4l+M-2} \tag{6.44}$$

为消除 $^{m_{\boldsymbol{a}}(\zeta)}\,\zeta$ 在 $\zeta=0$ 处的一个可能极点，定义

$$A_+(\zeta)=\frac{-\hat{m}_+(\zeta)}{\zeta}\left(1-\frac{\Phi(0)}{\Phi(\zeta)}\right),\qquad A_-(\zeta)=\frac{\hat{m}_-(\zeta)}{\zeta}\left(1-\frac{\Phi(0)}{\Phi(\zeta)}\right) \tag{6.45}$$

此函数在 D_+ 中解析。逼近误差为

$$\begin{aligned}\left|A_+-\frac{m_{\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\zeta}\right|&=\left|\frac{(m_+(-\zeta^2)-\hat{m}_+(\zeta))\Phi(\zeta)+\Phi(0)\hat{m}_+(\zeta)}{\zeta\Phi(\zeta)}\right|\\&\leq C\left|\langle\zeta\rangle^{4l-2}H(\zeta)^{-2k}\right|+|\Phi(0)|\left|\frac{i\zeta+\mathcal{O}(\zeta)}{\zeta}\right|\left|\langle\zeta\rangle^{4l}H(\zeta)^{-2k}\right|\leq C|\rho_c(\zeta)|^{-1}\end{aligned} \tag{6.46}$$

对于第二项，我们使用 $m_+(\zeta)=\zeta+\mathcal{O}(\zeta)$ 和 $\left|\tilde{m}_+(\zeta)-m_+(-\zeta^2)\right|\leq C\langle\zeta\rangle^{4l-1}|H(\zeta)|^{-2k}$。同样的论证可得 $A_-(\zeta)-{}^{m_{\boldsymbol{a}}(\zeta)}\,\zeta$ 的相应估计。■

现在，我们将四条弧上的逼近结果结合起来。

定理 *1.2* 的证明，第一部分。我们首先证明 $\left(1, \frac{m_{\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\zeta}\right) \in \mathcal{A}_N$。引理 6.3 给出了 C_1, C_3 上的逼近函数。对于 C_2 和 C_4，我们使用 $m_\pm$ 在 D_- 中的展开式。给定 $\frac{m_\pm(\zeta)}{\zeta} = 1 + \sum_{2 \le k \le N-1} m_k \zeta^{-k} + \mathcal{O}(\zeta^{-N})$，选取系数 d_k 并令

$$A_0 = 1 + \sum_{1 \le k \le N} d_k (\zeta - b)^{-k} \tag{6.47}$$

使得 A_0 与 $m_\pm$ 给出的展开式在 $1 \le k \le N-1$ 阶以内一致。由此可得

$$\left| A_0 - \frac{m_\pm(\zeta)}{\zeta} \right| \le C|\zeta|^{-N} \le |\rho_c(\zeta)|^{-1}. \tag{6.48}$$

为合并 $A_\pm$ 和 A_0，定义

$$\eta_j(z) = \frac{\exp\left(i^{1-k}\delta z^{4N+1}\right)}{\sum_{j=1}^4 \exp\left(i^k \delta z^{4N+1}\right)}. \tag{6.49}$$

于是，当 $z \to \infty$ 沿着 C_j 变化时，$\eta_j(z) \to 1$；而沿着其他弧，$\eta_j(z) \to 0$。令 $\tilde{m}(z) = \sum_{j=1}^4 \eta_j(z) m_j(z)$，其中 $m_1(\zeta) = A_+(\zeta)$ $m_2(\zeta) = A_0(\zeta)$ $m_3(\zeta) = A_-(\zeta)$ $m_4(\zeta) = A_0(\zeta)$。.....的零点

$$\sum_{1 \le k \le 4} e^{i^k w} = 4 \cosh\left(\frac{1+i}{2} w\right) \cosh\left(\frac{1-i}{2} w\right) \tag{6.50}$$

are

$$w = \frac{\pi(2k_1+1)}{2}(\pm i \pm 1), \tag{6.51}$$

而 m_i 的相应极点由下式给出

$$\zeta = \left(\frac{\pi(2k_1+1)}{2\delta}\right)^{\frac{1}{4N+1}} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_2}{2} + 2k_3\pi\right)(4N+1)^{-1}\right) \tag{6.52}$$

由于 $\arg(\zeta) \ge \frac{\pi}{4(4N+1)}$，任何满足 $|\zeta| > R$ 的此类点在 R 充分大时都满足 $\zeta \notin D_+$。此外，$|\zeta| \ge \left(\frac{\pi(2k_1+1)}{2\delta}\right)^{\frac{1}{4N+1}}$。取 δ 充分小可确保 $\zeta \notin D_+$ 对 $|\zeta| \le R$ 也成立。因此，函数 m_k 在 D_+ 中解析，并得到一个有界解析函数 $\tilde{m}(z)$，满足

$$\sup_{\zeta \in C} |\rho_c(\zeta)| \left| \frac{m_{\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\zeta} - \tilde{m}(\zeta) \right| < \infty, \tag{6.53}$$

这意味着 $\left(1, \frac{m_{\boldsymbol{a}}(\zeta)}{\zeta}\right) \in \mathcal{A}_N$。

设 $\boldsymbol{b} = \left(1, \frac{2\zeta - m_{\boldsymbol{a}}(\zeta) - m_{\boldsymbol{a}}(-\zeta)}{m_{\boldsymbol{a}}\ \zeta}\right)$。则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = (1,1)$。如果 $\Re\zeta > 0$，则有 $\Re(-\zeta) < 0$，并且 ce

$$b_2 = \frac{2\zeta + m_+(-\zeta^2) - m_-(-\zeta^2)}{-m_+(\zeta^2) - m_-(-\zeta^2)} = -2\mathcal{V}_{12}(-\zeta^2) + 2\zeta\mathcal{V}_{22}(-\zeta^2) \tag{6.54}$$

我们有 $\Sigma_{ij}(\mathrm{d}\lambda) << \mathrm{tr}\ \Sigma(\mathrm{d}\lambda)$，而引理 6.2 给出 $\mathrm{tr}\ \Sigma \in \mathcal{E}_p$。因此，表示˜ ˜各项 $\mathcal{V}_{12}, \mathcal{V}_{22}$ 的有符号测度属于 $\mathcal{E}_p$。应用引理 6.3 可得解析逼近函数 $\mathcal{V}_{12}, \mathcal{V}_{22}$，由此我们˜得到 b_2 在 C_1, C_3上。在 C_2, C_4上，我们利用 $m_{\boldsymbol{a}}$的展开式来逼近 b_2，从而得到 $m_{\boldsymbol{a},o}, m_{\boldsymbol{a},e}$ 和 b_2 在 D_-中的一致展开式。由此我们得出 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{A}_N$，进而得到 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}$。

根据解析延拓的唯一性，m-函数从 D_- 延拓至 $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$。[9, 命题 4.5] 的论证继而给出 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_N^{inv}{}_{,+}$。

前面的构　　造使用了以下三个条件　　on m.

(*M*.1) 函数 $m(z)$ 满足实性条件和赫尔格洛茨条件

$$m(\bar{z}) = \overline{m(z)}, \qquad \frac{\Im m(z)}{\Im z} > 0 \text{ on } \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}). \tag{6.55}$$

$(M.2)$ 函数 $m(z)$ 的渐近展开式为

$$m(z) = z + \sum_{1\le k\le N} m_k z^{-k} + O(z^{-N+1}) \text{ on } D_-. \tag{6.56}$$

$(M.3)$ 谱测度 $\sigma_\pm$ 满足矩条件

$$\int_{\mathbb{R}_-} e^{c|\lambda|^{\frac{M}{2}}} \sigma_\pm(d\lambda) < \infty \text{ for any } c > 0. \tag{6.57}$$

在这些假设下，引理 6.2、6.3 和 6.4 给出了定理 1.2 的第一部分。

■

因此，与初始数据相关联的符号属于$\mathcal{A}_{N,+}^{inv}$。

6.3 谱条件和KdV流的保持

我们证明，作用 $m_{\boldsymbol{a}} \mapsto m_{g\boldsymbol{a}}$ 保持条件 $(M.1)$，$(M.2)$，$(M.3)$，并重构KdV方程的解$q(x,\ t)$。

引理 6.4。设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_{N,+}^{inv}$ 具有满足 $(M.1)$ 的 m-函数，并设 $g = re^h \in \Gamma_m^{real}$ 满足 $\deg r = 0$。如果$g^{-1}T(g\boldsymbol{a})$ 在 $H_{N,c}(D_+)$上可逆，则 $m_{g\boldsymbol{a}}$ 在 D_- 上定义良好，并延拓到 $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$，且在此处满足 $(M.1)$。参数 M、N、c 需满足以下条件

$$M \ge m, \qquad N \ge m+1, \qquad \begin{cases} c > 0, & M > m, \\ c > c_2, & M = m, \end{cases} \tag{6.58}$$

其中，c_2 由下式给出

$$|r_n(z)| + |r_n(z)^{-1}| + |g(z)| + |g(z)^{-1}| \le Ce^{c_2|\Re z|^m}, \qquad z \in C_x. \tag{6.59}$$

证明。只需处理 $g = e^h$ 且 $\deg h \le m$ 的情形。令

$$B_n = r_n^{-1}T(r_n\boldsymbol{a}), \qquad B = g^{-1}T(g\boldsymbol{a}). \tag{6.60}$$

其中近似 引理 4.1 中的量满足 $r_n \to g$，其含义见 (3.24)。应用 (4.4)、(4.5) 以及 t
主导收敛 定理于 $d_c(g,\ r_n)^2$，得到

$$\|B - B_n\|_{H.S.} \to 0 \tag{6.61}$$

如 $n \to \infty$。因此,

$$\left\|B^{-1} - B_n^{-1}\right\|_{H.S.} \le \left\|B^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(H)} \|B_n - B\|_{H.S.} \left\|B_n^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(H)} \le 2\left\|B^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(H)} \|B_n - B\|_{H.S.} \to 0. \tag{6.62}$$

此估计需要 $N \ge m+1$。

定义

$$\begin{cases} B_n^{-1}(r_n^{-1}1) = u_n, & B^{-1}(g^{-1}1) = u, \\ B_n^{-1}(r_n^{-1}z) = v_n, & B^{-1}(g^{-1}z) = v. \end{cases} \tag{6.63}$$

and

$$\begin{cases} \varphi_n = r_n\boldsymbol{a}u_n - 1, & \varphi = g\boldsymbol{a}u - 1, \\ \psi_n = r_n\boldsymbol{a}v_n - z, & \psi = g\boldsymbol{a}v - z. \end{cases} \tag{6.64}$$

再次应用控制收敛可得 $r_n \to g$ 和 $r_n^{-1} \to g^{-1}$ 属于 $H_{N,c}(D_+)$。因此

$$\|u_n - u\|_{H_{N,c}(D_+)} \le \left\|B_n^{-1}(r_n^{-1}1) - B^{-1}(r_n^{-1}1)\right\|_{H_{N,c}(D_+)} + \left\|B^{-1}(r_n^{-1}1) - B^{-1}(g^{-1}1)\right\|_{H_{N,c}(D_+)} \to 0 \tag{6.65}$$

并且在 $H_{N,c}(D_+)$ 中同样如此。选择一个逼近函数 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 并固定 $c > c_2$。那么

$$\|r_n(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u_n - g(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u\|_{L^2(C)} \le \|r_n(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})(u_n-u)\|_{L^2(C)} + \|(r_n-g)(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u\|_{L^2(C)} \tag{6.66}$$

第一项为 由 $C\|u_n-u\|_{H_{N,\ c}(D_+)}\to 0$所界，第二项逐点趋于零。支配 d
因此收敛 故有

$$\|r_n(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u_n-g(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u\|_{L^2(C)}\to 0. \tag{6.67}$$

由于 $\mathfrak{p}_-:\ L^2(C)\ \to H(D_-)$ 是一个有界算子，且

$$\mathfrak{p}_-(r_n\boldsymbol{a}u_n)=\mathfrak{p}_-(r_n(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u_n)=\varphi_n,\qquad \mathfrak{p}_-(g\boldsymbol{a}u)=\mathfrak{p}_-(g(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u)=\varphi, \tag{6.68}$$

我们得到

$$\|\varphi_n-\varphi\|_{H(D_-)}\to 0 \tag{6.69}$$

当 $n\to\infty$ 时。

在每个紧集 $K\subset D_-$ 上，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sup_{z\in K}|\varphi_n(z)-\varphi(z)|\le\frac{1}{2\pi}\sup_{z\in K}\left(\int_C\frac{|\,\mathrm{d}\lambda|}{|\lambda-z|^2}\right)^{1/2}\|r_n(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u_n-g(\boldsymbol{a}-\tilde{\boldsymbol{a}})u\|_{L^2(C)}\to 0. \tag{6.70}$$

因此， $\varphi_n\to\varphi$ 关于 D_-局部一致收敛。同样的论证可得 $\psi_n\to\psi$ ，取商后可得$m_{r_n\boldsymbol{a}}\to m_{g\boldsymbol{a}}$。

我们定义

$$m_{+,r_n\boldsymbol{a}}(z)=-m_{r_n\boldsymbol{a}}(\sqrt{-z}),\qquad m_{-,r_n\boldsymbol{a}}(z)=m_{r_n\boldsymbol{a}}(-\sqrt{-}z). \tag{6.71}$$

根据假设，$m_{+,\boldsymbol{a}},m_{-,\boldsymbol{a}}$ 是 Herglotz 函数。由于 $r_n=r_{\zeta_{m_1}}r_{\eta_1}^{-1}\cdots r_{\eta_{m_2}}^{-1}$，其中 $\zeta_j,\eta_j\in D_-$，[9, 引理 7.2] 中的达布变换给出了$m_{+,r_n\boldsymbol{a}},m_{-,r_n\boldsymbol{a}}$的 Herglotz 延拓。它们的局部一致极限$m_{+,g\boldsymbol{a}},m_{-,g\boldsymbol{a}}$ 同样是 Herglotz 函数。因此，对于所有满足 $\deg r=0$ 的 $g=re^h\in\Gamma_m^{real}$， $m_{g\boldsymbol{a}}$ 均满足 $(M.1)$。■

有了特征函数 $\varphi_{g\boldsymbol{a}},\psi_{g\boldsymbol{a}}$ 及其关联函数 $m_{g\boldsymbol{a}}$ 后，定义 e

$$(K(g)q)(x)=\mathcal{R}(g\boldsymbol{a})=-2\partial_x\kappa_1(e_xg\boldsymbol{a}). \tag{6.72}$$

$(M.2)$ 对 $m_{g\boldsymbol{a}}$ 所要求的展开式由 [9, 命题 4.7] 得出。

引理 6.5。 若 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}_N^{inv}{}_{,+}(C)$，则 $m_{g\boldsymbol{a}}$ 在 σD_- 上对 $\sigma>1$满足$(M.2)$ 至~~少~~$N-\frac{m+1}{2}$ 阶。

引理 6.4 给出了 Herglotz 函数 $m_{+,g\boldsymbol{a}},m_{-,g\boldsymbol{a}}$ 的表示测度。我们利用传递矩阵验证这些测度满足 $(M.3)$。此时，势函数 $K(g)q$ 的极限点性质仍有待证明，因此尚无法保证谱测度的唯一性。

回顾一下， $S=m_++m_-$ 以及

$$\mathcal{V}=\frac{1}{S}\begin{pmatrix}m_+m_- & (m_+-m_-)/2\\ (m_+-m_-)/2 & -1\end{pmatrix}. \tag{6.73}$$

对于传递矩阵，我们采用 [9, 第 6] 章中的记号。令

$$\begin{cases}\Pi_{\boldsymbol{a}}(\zeta)=\begin{pmatrix}\psi_{\boldsymbol{a},e}(\zeta)+\kappa_1(\boldsymbol{a})(1+\varphi_{\boldsymbol{a}}(\zeta)) & \zeta+\psi_{\boldsymbol{a},o}(\zeta)+\kappa_1(\boldsymbol{a})\varphi_{\boldsymbol{a},o}(\zeta)\\ 1+\varphi_{\boldsymbol{a},e}(\zeta) & \varphi_{\boldsymbol{a},o}(\zeta)\end{pmatrix}\\ G(\zeta)=\begin{pmatrix}g_e(\zeta) & g_o(\zeta)\\ g_o(\zeta) & g_e(\zeta)\end{pmatrix}\ \text{for } g=re^h\in\Gamma_m \text{ with } \deg r=0\end{cases} \tag{6.74}$$

由于 $\det(G(\zeta))\ne 0$,$\det(\Pi_{\boldsymbol{a}(\zeta)})\ne 0$ 在 D_- 上，定义

$$T_{\boldsymbol{a}}(-\zeta^2,g)=\Pi_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)G(\zeta)^{-1}\Pi_{\boldsymbol{a}}(\zeta)^{-1}, \tag{6.75}$$

从而

$$\begin{cases}T_{\boldsymbol{a}}(-\zeta^2,g)\boldsymbol{\pi}_a(\zeta)=g(\zeta)^{-1}\boldsymbol{\pi}_{g\boldsymbol{a}}(\zeta)\\ \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}}(\zeta)=\begin{pmatrix}\zeta+\psi_{\boldsymbol{a}}(\zeta)+\kappa_1(\boldsymbol{a})(1+\varphi_{\boldsymbol{a}}(\zeta))\\ 1+\varphi_{\boldsymbol{a}}(\zeta)\end{pmatrix},\end{cases} \tag{6.76}$$

其中， $z=-\zeta^2$ 是谱参数。

由于 $m_{\boldsymbol{a}}(\zeta) = \frac{(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}})_1}{(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{a}})_2}$，由前述恒等式可得

$$m_{g\boldsymbol{a}}(\zeta) = T_{\boldsymbol{a}}(-\zeta^2, g) \cdot m_{\boldsymbol{a}}(\zeta) \tag{6.77}$$

其中分式线性作用由 $T \cdot w = \frac{T_{11}w+T_{12}}{T_{21}m+T_{22}}$ 给出。两个分支的符号约定为

$$m_+^q(z) = -m_{\boldsymbol{a}}(\sqrt{-z}), \qquad m_-^q(z) = m_{\boldsymbol{a}}(-\sqrt{-z}). \tag{6.78}$$

因此，u，v 根据以下关系，在同一矩阵作用下变换

$$u_g = T \cdot u, \qquad v_g = T \cdot v, \qquad T = T_q(z, g). \tag{6.79}$$

定义

$$g_s = e^{sh}, \qquad q_s = K(g_s)q, \qquad 0 \le s \le 1, \qquad T_s(z) = T_q(z, g_s) \tag{6.80}$$

并作如下假设。

(T.1) 函数 $m_\pm^{q_s}$ 是 Herglotz函数，其谱测度为 $\sigma_\pm^{q_s}$。

(T.2) 传递矩阵通过 (6.77) 实现作用 $K(g)$。对于 g_1，$g_2 \in \Gamma_m$ 其有理函数部分的次数为 0，满足余循环恒等式

$$T_{\boldsymbol{a}}(z, g_1 g_2) = T_{g_1 \boldsymbol{a}}(z, g_2) T_{\boldsymbol{a}}(z, g_1). \tag{6.81}$$

此外，对于每个 s，函数 m_s 具有展开式

$$m_s(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{N} m_k(s)\zeta^{-k} + \mathcal{O}(\zeta^{-N-1}) \tag{6.82}$$

对于固定的 $g = e^h$，矩阵值函数 $T_{\boldsymbol{a}}(\cdot, e^h)$ 是整函数，并满足

$$T_{\boldsymbol{a}}(\bar{z}, e^h) = \overline{T_{\boldsymbol{a}}(z, e^h)}, \qquad \det T_{\boldsymbol{a}}(z, e^h) = 1 \tag{6.83}$$

利用矩阵乘法和恒等式 $\det T = 1$ 可得

$$e(T \cdot w) = \frac{Te(w)}{T_{21}w + T_{22}}, T \cdot u - T \cdot v = \frac{(T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})(u-v)}{(T_{21}u + T_{22})(T_{21}v + T_{22})} = \frac{(u-v)}{(T_{21}u + T_{22})(T_{21}v + T_{22})} \tag{6.84}$$

代入可得 $\mathcal{V}_{K(g)q}$ 的变换律，

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{K(g)q} &= \frac{e(T \cdot u)e(T \cdot v)^T + e(T \cdot v)e(T \cdot u)^T}{2(T \cdot u - T \cdot v)} \\ &= \frac{T(e(u)e(v) + e(v)e(u))T^T}{(T_{21}u + T_{22})(T_{21}v + T_{22})} \frac{(T_{21}u + T_{22})(T_{21}v + T_{22})}{2(u-v)} \\ &= T\mathcal{V}_q T^T \end{aligned} \tag{6.85}$$

引理 6.6。 相应的矩阵谱测度满足

$$\Sigma_{K(g)q}(\,\mathrm{d}\lambda) = T(\lambda)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(\lambda)^T \tag{6.86}$$

证明。 我们针对测试函数应用 Stieltjes反演。固定 $R > 0$ 并选择 $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$，使得 $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K_R = [-R, R]$。Herglotz表示给出

$$\mathcal{V}_q(z) = \mathcal{V}_R(z) + \int_{K_R} \frac{\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z} \tag{6.87}$$

with

$$\mathcal{V}_R = A + Bz + \int_{K_R} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda) + \int_{\mathbb{R}\setminus K_R} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda) \tag{6.88}$$

部分 $\mathcal{V}_R$ 可解析延拓至 K_R 的内部，并具有如下对称性

$$\mathcal{V}_R(x)^* = \mathcal{V}_R(x), \qquad \forall x \in K_R \tag{6.89}$$

由 (6.85) 可得,

$$\mathcal{V}_{K(g)q}(z)=\int_{K_R}\frac{T(\lambda)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(\lambda)^T}{\lambda-z}+\mathcal{F}_R(z) \tag{6.90}$$

其中余项为

$$\mathcal{F}_R(z)=T(z)\mathcal{V}_R(z)T(z)^T+\int_{K_R}\frac{T(z)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(z)^T-T(\lambda)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(\lambda)^T}{\lambda-z}. \tag{6.91}$$

余项中的积分可拆分为

$$\int_{K_R}T(z)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)\frac{(T(z)-T(\lambda))^T}{\lambda-z}+\frac{T(z)-T(\lambda)}{\lambda-z}\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(\lambda)^T. \tag{6.92}$$

对于固定的 λ，差商 $\frac{T(z)-T(\lambda)}{\lambda-z}$ 在去除 $z=\lambda$ 处的奇点后，是关于 z 的解析函数。因此，$\mathcal{F}_R$ 可解析地延拓至 K_R 的内部，并满足

$$\mathcal{F}_R(x)^*=\mathcal{F}_R(x),\qquad \forall x\in K_R \tag{6.93}$$

特别地，在内部的紧子区间上，我们有

$$\Im(\mathcal{F}_R(x+iy))=\mathcal{O}_R(y) \tag{6.94}$$

取足够大的 R，使得测试函数的支撑位于内部，并对 (6.90) 应用斯蒂尔切斯反演，可得

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(\lambda)\Sigma_{K(g)q}(\,\mathrm{d}\lambda)=\lim_{y\to0+}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\Im\mathcal{V}_{K(g)q}(x+iy)\,\mathrm{d}x=\int_{K_R}\varphi(\lambda)T(\lambda)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(\lambda)^T. \tag{6.95}$$

由于 $R>0$，$\varphi\in C_c(K_R)$ 是任意的，我们得出

$$\Sigma_{K(g)q}(\,\mathrm{d}\lambda)=T(\lambda)\Sigma_q(\,\mathrm{d}\lambda)T(\lambda)^T \tag{6.96}$$

■

由于 $\det T=1$，我们有 $\|T^{-1}\|=\|T\|$。记 $\Sigma_q=H_q\rho_q$，其中矩阵密度几乎处处满足 $H_q\geq0$，$\operatorname{tr}H_q=1$（相对于 ρ_q）。对于 $\lambda\in\mathbb{R}$，矩阵 T为实矩阵，因此

$$\|T\|^{-2}\leq\operatorname{tr}(TH_qT^T)\leq\|T\|^2. \tag{6.97}$$

因此，由 (6.86) 得

$$\|T(\lambda)\|^{-2}\rho_q(\,\mathrm{d}\lambda)\leq\rho_{K(g)q}(\,\mathrm{d}\lambda)\leq\|T(\lambda)\|^2\rho_q(\,\mathrm{d}\lambda). \tag{6.98}$$

引理 6.7. 在假设 $(T.2)$ 下，传递矩阵满足

$$\|T_q(-R,e^{sh})\|^2\leq C(1+R)e^{CR^{d/2}},\qquad R\geq1,\ 0\leq s\leq1 \tag{6.99}$$

证明. 记 $T_s=T_q(z,\ e^{sh})$。 [9] 中的方程 (6.5)、(6.11) 和 (6.12) 给出

$$T_{s+\tau}=T_{q_s}(z,e^{\tau h})T_s,\qquad A_{q_s}(z,h)=\partial_\tau T_{q_s}(z,e^{\tau h})|_{\tau=0} \tag{6.100}$$

在零点处对 τ 求导，得到

$$\partial_sT_s=A_{q_s}(z,h)T_s,\ T_0=I \tag{6.101}$$

将 $m_s=m_{e,s}+m_{o,s}$ 记作偶部和奇部的分解。 [9, 引理 6.2] 给出

$$A_{q_s}(-\zeta^2,h)=\mathfrak{p}_+\left[\frac{h}{m_{o,s}}\begin{pmatrix}-m_{e,s}&m_{e,s}^2-m_{o,s}^2\\-1&m_{e,s}\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}0&c_s(h)\\0&0\end{pmatrix} \tag{6.102}$$

with

$$c_s(h)=\lim_{\zeta\to\infty}\left[h+\mathfrak{p}_+\left(\frac{m_{e,s}h}{m_{o,s}}\right)-m_s\mathfrak{p}_+\left(\frac{h}{m_{o,s}}\right)\right] \tag{6.103}$$

m_s的展开式给出 $m_{o,s}=\zeta+\mathcal{O}(\zeta^{-1})m_{e,s}=\mathcal{O}(\zeta^{-2})$。记 $\deg\ h(\zeta)\ =d=2k+1$，我们得到 A各项次数的以下界，

$$\deg A_{12}\le k+1,\qquad \deg A_{21}\le k,\qquad \deg A_{11},\deg A_{22}\le k-1 \tag{6.104}$$

视为关于 $z=-\zeta^2$ 的多项式。由 $s\in[0,1]$ 中的连续性可知，其系数一致有界。

写作 $R=\kappa^2,\ \kappa\ge 1$ 并令

$$D_\kappa=\mathrm{diag}(\kappa^{-1},1),\qquad \tilde{T}_s=D\kappa T_s D_\kappa^{-1},\qquad \tilde{A}_s=D\kappa A_s D_\kappa^{-1}. \tag{6.105}$$

A 各项的次数界给出

$$|A_{12}|\le C\kappa^{d+1},\qquad |A_{12}|\le C\kappa^{d-1},\qquad |A_{12}|\le C\kappa^{d-3} \tag{6.106}$$

共轭变换为 $D_\kappa A D_\kappa^{-1}$ 只会影响非对角项 A_{12} 和 A_{21}。因此

$$\|\tilde{A}_s(-\kappa^2,h)\|\le C\kappa^d. \tag{6.107}$$

共轭变换后，(6.101) 取积分形式 $\tilde{T}_t=I+\int_0^t \tilde{A}_{q_s}\tilde{T}_s\,\mathrm{d}s$。因此，

$$\|\tilde{T}_t\|\le I+\int_0^t \|\tilde{A}_{q_s}\|\|\tilde{T}_s\|\,\mathrm{d}s=:w(t). \tag{6.108}$$

求导可得

$$w'(t)=\|\tilde{A}_{q_t}\|\|\tilde{T}_t\|\le\|\tilde{A}_{q_t}\|w(t), \tag{6.109}$$

Gr¨onwall不等式现在给出

$$\|\tilde{T}_t\|\le w(t)\le w(0)\exp\left(\int_0^t\|\tilde{A}_{q_s}\|\,\mathrm{d}s\right)\le e^{C\kappa^d}. \tag{6.110}$$

由于 $\|D_\kappa\|\|D_\kappa^{-1}\|=\kappa$，我们有

$$\|T_q(-R,e^{sh})\|^2\le\left(\kappa e^{C\kappa^d}\right)^2\le C(1+R)e^{C'R^{d/2}}. \tag{6.111}$$

■

现在我们可以证明负谱矩的保持性。

L引理 6.8。 在假设 $(T.1)$、$(T.2)$下，*KdV*流以如下意义保持$(M.3)$ ： at

$$\sigma_+^q+\sigma_-^q\in\mathcal{E}_p\iff\sigma_+^{K(g)q}+\sigma_-^{K(g)q}\in\mathcal{E}_p \tag{6.112}$$

证明。 由引理 6.2， $\sigma_+^q+\sigma_-^q\in\mathcal{E}_p$ 推出 $\rho_q\in\mathcal{E}_p$。结合 (6.98) 和 (6.99) 得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1}e^{c|\lambda|^p}\rho_{K(g)q}(\,\mathrm{d}\lambda)&\le C\int_{-\infty}^{-1}(1+|\lambda|)e^{c|\lambda|^p+C|\lambda|^{d/2}}\rho_q(\,\mathrm{d}\lambda)\\&\le C'\int_{-\infty}^{-1}e^{(c+C+1)|\lambda|^p}<\infty\end{aligned} \tag{6.113}$$

对于 $p\ge d/2$，这里我们用到了 $1+R\le C_pe^{R^p}$。由于 $\rho([-1,0])<\infty$，因此可得 $\rho_{K(g)q}\in\mathcal{E}_p$。再次应用引理 6.2 得到 $\sigma_+^{K(g)q}+\sigma_-^{K(g)q}\in\mathcal{E}_p$。反过来，使用 (6.98) 中的另一个不等式，

$$\rho_q(\,\mathrm{d}\lambda)\le\|T(\lambda)\|^2\rho_{K(g)q}(\,\mathrm{d}\lambda) \tag{6.114}$$

并应用相同的论证。 ■

引理 6.4 给出（$T.1$），而传递恒等式给出对于 $m_\pm^{q_s}$ 的（$T.2$）。因此，上述构造的 KdV 演化保持（$M.3$）。

接下来，我们从（$M.3$）推出极限点性质，并从满足（$M.1$）、（$M.2$）、（$M.3$）的函数m（z）重构 KdV 解。

引理 6.9。 设 $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 为实数。若半轴谱测度 $\sigma_\pm$ 满足$(M.3)$，则相应的端点 $\pm\infty$是极限点。

证明。 我们给出关于 $+\infty$ 的证明。反设 $+\infty$ 是极限圆端点。那么，对于每个 $z \in \mathbb{C}$，都有 $\dim(W_z) = 2$，其中 W_z 表示以下方程的平方可积解空间

$$-f''(x,z) + q(x)f(x,z) = zf(x,z),\ x \geq 0 \tag{6.115}$$

选取零能解 u，v，使得

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = 0, & u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \\ -v''(x) + q(x)v(x) = 0, & v(0) = 1, \quad v'(0) = 0, \end{cases} \tag{6.116}$$

由于 $+\infty$ 是极限圆端点， u， $v \in L^2([0,\infty)$。令

$$h(x) = \sqrt{v^2(x) + u^2(x)} > |u(x)|, |v(x)|, \qquad A = \int_0^\infty h^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{6.117}$$

在正则端点 0 处，取 $s(x,\ z)$ 为下列方程的解

$$-s''(x,z) + q(x)s(x,z) = zs(x,z), \qquad s(0,z) = 0, \qquad s'(0,z) = 1. \tag{6.118}$$

由于 $s(x,\ 0) = u(x)$，常数变易法给出

$$s(x,z) = u(x) + z\int_0^x (u(y)v(x) - u(x)v(y))\, s(y,z)\,\mathrm{d}y. \tag{6.119}$$

界 $|u(y)v(x) - u(x)v(y)| \leq 2h(x)h(y)$ 给出

$$\left|\frac{s(x,z)}{h(x)}\right| \leq 1 + 2|z|\int_0^x h^2(y)\left|\frac{s(y,z)}{h(y)}\right|\,\mathrm{d}y. \tag{6.120}$$

我们以如下形式使用 Gr¨onwall 不等式

$$w(x) \leq \alpha + \int_a^x \beta(y)w(y)\,\mathrm{d}y \implies w(x) \leq \alpha\exp\left(\int_a^x \beta(y)\,\mathrm{d}y\right) \tag{6.121}$$

这里取

$$w(x) = \left|\frac{s(x,z)}{h(x)}\right|, \qquad \beta(y) = 2|z|h^2(y),\ a = 0,\ \alpha = 1 \tag{6.122}$$

从而得到

$$|s(x,z)| \leq h(x)\exp\left(2|z|\int_0^x h^2(y)\,\mathrm{d}y\right), \tag{6.123}$$

因此

$$\|s(x,z)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^\infty |s(x,z)|^2\,\mathrm{d}x \leq Ae^{2A|z|} \tag{6.124}$$

在 $+\infty$ 处满足极限圆假设时， L_q 的半轴实现具有纯点谱，其特征值序列趋于 $-\infty$ （见 [5] 和 [11]）。将相应的特征对记为（λ_n， s_n），其中 $\lambda_n \to -\infty$.

在上述归一化下，每个特征值处的质量为

$$\sigma_+(\{\lambda_n\}) = \frac{1}{\|s_n\|^2_{L^2([0,\infty))}} \tag{6.125}$$

根据引理 9.13 及其在 [15]之后的示例。因此

$$\int_{-\infty}^0 e^{c|\lambda|^{\frac{M}{2}}}\,\sigma_+(\,\mathrm{d}\lambda) \geq \sum_{n=1}^\infty e^{c|\lambda_n|^{\frac{M}{2}}}A^{-1}e^{-2A|\lambda_n|}. \tag{6.126}$$

右边等于 ∞ 当 $M > 2$ 时，或者当 $M = 2$， $c - 2A > 0$ 时。这与 $(M.3)$ 矛盾。 ■

采用上面的 c，同样的论证可得蕴含关系 $\int_{\mathbb{R}_-} e^{c|\lambda|}\sigma(\mathrm{d}\lambda) < \infty \implies LP$。现在我们来构造 KdV流。

定理 *1.2* 的证明，第二部分。 令 $q_0 \in \mathcal{Q}_N^{(m)}$。存在一个符号 $\boldsymbol{a}_0 \in \mathcal{A}_N^{inv,+}$ 使得

$$q_0 = \mathcal{R}(\boldsymbol{a}_0) \tag{6.127}$$

根据引理 4.3，$\tau_{\boldsymbol{a}_0}^{(2)}(e_x g) > 0$对所有 $g = re^h \in \Gamma_m^{real}$，$\deg r = 0$，$x \in \mathbb{R}$成立。因此，$(e_x g)^{-1}T(e_x g\boldsymbol{a}_0)$ 是可逆的，我们可以定义这两个特征函数和系数

$$\varphi_{e_x g\boldsymbol{a}_0}, \qquad \psi_{e_x g\boldsymbol{a}_0}, \qquad \kappa_1(e_x g\boldsymbol{a}_0). \tag{6.128}$$

重构势由下式给出

$$(K(g)q_0)(x) = \mathcal{R}(g\boldsymbol{a}_0) = -2\partial_x\kappa_1(e_x g\boldsymbol{a}_0). \tag{6.129}$$

根据引理 6.4、6.5 和 6.8，作用 $K(g)$ 保持 $(M.1)$，$(M.2)$，$M.3)$，其中 $(M.2)$ 中的阶降至 $N - \frac{m+1}{2}$。

——

■

7 势函数的充分条件

我们给出势函数所需满足的条件，这些条件可推出所需的 Weyl 渐近性和谱矩界。对于渐近性，我们对 Volterra 方程使用压缩论证。

7.1 Weyl 函数的渐近展开

我们建立了一个适用于下方可能无界的势函数的 Weyl m-函数的一致展开式。回顾 ll 区域在 z-平面中

$$\mathcal{D} = \{z : \Re z \geq k_0 \geq C_0 + 1, |\Im z| \geq C(\Re z)^{-M/2}\}. \tag{7.1}$$

这里 $M \geq 0$，而 $N \geq 3$ 表示展开阶数。我们对 q施加以下条件。

引理 7.1. 设 $r \geq M + N + 2$ 为偶整数，并假设 $q \in C^r(\mathbb{R})$ 满足以下条件。

(A) 存在常数 $C_0 > 0$，使得 $q(x) \leq C_0$。半轴算子 $L_q^{\pm} := (-\partial_x^2 + q)|_{\mathbb{R}_\pm}$ 在各自的端点 $\pm\infty$处均为极限点型。

(B) 给定 $Q(x) = 1 + C_0 - q(x) \geq 1$ 和 $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{M+N+2}{r}) \in [0, \frac{1}{2})$，我们假设对任意 $1 \leq j \leq r$，这些界均成立

$$\left|q^{(j)}(x)\right| \leq C_r Q(x)^{1+ja}. \tag{7.2}$$

7.1.1 导数估计

我们证明 m_+ 在 $\mathcal{D} \cap \{\Re z > \Im z > 0\}$中的展开式。由于 $\Re z \geq C_0 + 1 \geq q + 1$，我们有 $|z - q(x)| \geq 1$。定义

$$p(x,z) = \sqrt{z - q(x)}, \qquad \rho(x) = Q(x)^a, \qquad h(x,z) = \frac{\rho(x)}{|p(x,z)|}, \qquad D = p(x,z)^{-1}\partial_x \tag{7.3}$$

我们在区域 $\{(x,z) : x \in \mathbb{R}, \Re z > \Im z \geq C_0 + 1\}$中有 $|p|^2 \asymp \Re z + Q$。

若 $Q(x) \leq \Re z$，则

$$h = \frac{\rho}{|\sqrt{z-q}|} \leq C\frac{Q^a}{|z|^{\frac{1}{2}}} \leq C'|z|^{a-\frac{1}{2}}, \tag{7.4}$$

而若 $Q(x) \geq \Re z$，则

$$h = \frac{\rho}{|\sqrt{z-q}|} \leq C\frac{Q(x)^a}{Q(x)^{\frac{1}{2}}} \leq C'|z|^{a-\frac{1}{2}}. \tag{7.5}$$

因此，当 $|\Re z| \to \infty$时，$\sup_{x\geq 0} h(x,z) \to 0$。选取充分大的 k_0，可得在整个 $\mathcal{D}$ 上，$\sup_{x\geq 0} h(x,z) \leq \frac{1}{2}$。我们首先估计 Q, ρ 和 h 的导数。

若 $f \in C^n$ 且 $|D^j(f)| \leq C_j h^{j+m}$ 对于 $0 \leq j \leq n$，则记作 $f \in \mathcal{S}_m^n$。类似地，若 $f \in C^n$ 且$|D^j(f)| \leq C_j h^{j+m}|p|^{-2}$ 对于 $0 \leq j \leq n$，则记作 $f \in \mathcal{T}_m^n$。D 的莱布尼茨法则为

$$\mathcal{S}_{m_1}^n\mathcal{S}_{m_2}^n \subset \mathcal{S}_{m_1+m_2}^n, \mathcal{S}_{m_1}^n\mathcal{T}_{m_2}^n \subset \mathcal{T}_{m_1+m_2}^n, D\mathcal{S}_m^n \subset \mathcal{S}_{m+1}^{n-1}, D\mathcal{T}_m^n \subset \mathcal{T}_{m+1}^{n-1}. \tag{7.6}$$

7.1.2 刘维尔变换与高阶近似频率

谱方程为

$$y'' + p(x,z)^2 y = 0. \tag{7.7}$$

作刘维尔代换

$$y = p^{-1/2} u. \tag{7.8}$$

直接求导得

$$D^2 u + (1+V)u = 0, \tag{7.9}$$

其中

$$V = \frac{3(p')^2}{4p^4} - \frac{p''}{2p^3} = \frac{5(q')^2}{16p^6} + \frac{q''}{4p^4}. \tag{7.10}$$

对 z 求导得

$$\partial_z V = -\frac{15(q')^2}{16p^8} - \frac{q''}{2p^6} \tag{7.11}$$

上述导数估计现在给出

$$V \in \mathcal{S}_2^{r-2}, \qquad \partial_z V \in \mathcal{T}_2^{r-2}. \tag{7.12}$$

对于一个远离零的函数 ω，定义

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{3}{4}\left(\frac{D\omega}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{D^2\omega}{\omega}. \tag{7.13}$$

从 $\omega_0 = 1$ 开始，递归地定义

$$\omega_{n+1} = \left(1 + V + \mathcal{A}(\omega_n)\right)^{1/2}, \qquad n \geq 0, \tag{7.14}$$

其中，我们选择当 $k \to \infty$ 时趋于 1 的分支。由于 $\sup_{x\geq 0} h(x,z) \to 0$ 当 $\Re z \to \infty$ 时，因此对于实部充分大的 z，该递推关系定义良好。

命题 7.2。对于 $1 \leq n \leq \frac{r-2}{2}$，

$$\omega_{n+1} - \omega_n \in \mathcal{S}_{2n+2}^{r-2n-2}. \tag{7.15}$$

因此，

$$\omega_n \in 1 + \mathcal{S}_2^{r-2n}, \qquad |\omega_n| + \left|\omega_n^{-1}\right| \leq C_n. \tag{7.16}$$

若将缺陷定义为

$$F_n = 1 + V - \omega_n^2 + \mathcal{A}(\omega_n), \tag{7.17}$$

then

$$F_n \in \mathcal{S}_{2n+2}^{r-2n-2}. \tag{7.18}$$

此外，

$$\partial_z \omega_n \in \mathcal{T}_2^{r-2n}, \qquad \partial_z(p\omega_n) = \frac{1}{2p}\big(1 + \mathcal{O}(h^2)\big). \tag{7.19}$$

证明。 我们采用归纳法。对于 $n = 0$，由定义可得

$$\omega_0 = 1 \in 1 + \mathcal{S}_2^{r-2}, \qquad F_0 = V \in \mathcal{S}_2^{r-2}, \qquad \partial_z(p\omega_0) = \frac{1}{2p}. \tag{7.20}$$

为处理 ω_1，对 $\omega_1^2 = 1 + V \in 1 + \mathcal{S}_2^{r-2}$求导，并对导数阶数 j使用归纳法。假设较低正阶数 $l < j$满足界 $|D^l \omega_1| \leq C_l h^{2+l}$，则可得

$$|2w_1 D^j w_1| = \left| D^j V - \sum_{l=1}^{j-1} \binom{j}{l} (D^l w_1)(D^{j-l} w_1) \right| \leq C(h^{j+2} + h^{j+4}), \tag{7.21}$$

由于 $|2\omega_1| \geq 1$，该估计给出了 j 阶所需的界。结合零阶估计，可得 $\omega_1 - 1 \in \mathcal{S}_2^{r-2}$。

假设 $\omega_n-\omega_{n-1}\in\mathcal{S}_{2n}^{r-2n}$，且两个函数都属于 $1+\mathcal{S}_2^{r-2n}$。在它们的 $\mathcal{A}$ 表达式之差中，每一项都因缩放导数而多出 h 的二次幂。根据 (7.6)，

$$\mathcal{A}(\omega_n)-\mathcal{A}(\omega_{n-1})\in\mathcal{S}_{2n+2}^{r-2n-2}. \tag{7.22}$$

将递推关系应用于指标 n 处的式 (7.15) 中的差，得到

$$\omega_{n+1}^2-\omega_n^2=\mathcal{A}(\omega_n)-\mathcal{A}(\omega_{n-1})\in\mathcal{S}_{2n+2}^{r-2n-2}. \tag{7.23}$$

由于 $\omega_{n+1}+\omega_n$ 有正的下界，两边相除得到

$$\omega_{n+1}-\omega_n\in\mathcal{S}_{2n+2}^{r-2n-2}. \tag{7.24}$$

至此，归纳法完成。

递推关系还给出

$$F_n=\mathcal{A}(\omega_n)-\mathcal{A}(\omega_{n-1}), \tag{7.25}$$

因此 $F_n\in\mathcal{S}_{2n+2}^{r-2n-2}$。

最后，对 w_n^2 的递推关系关于 z 求导，得到

$$\partial_z\omega_n=\frac{\partial_zV+\partial_z\mathcal{A}(\omega_{n-1})}{2\omega_n} \tag{7.26}$$

对易子恒等式 $\partial_zD=D\partial_z-\frac{1}{2p^2}D$ 给出 —

$$\begin{cases}\partial_z\left(\dfrac{D\omega_n}{\omega_n}\right)=\dfrac{\partial_z(D\omega_n)}{\omega_n}-\dfrac{D\omega_n}{\omega_n^2}\partial_z\omega_n\in\mathcal{T}_3^{r-2n-1},\\ \partial_z\left(\dfrac{D^2\omega_n}{\omega_n}\right)=\dfrac{\partial_z(D^2\omega_n)}{\omega_n}-\dfrac{D^2\omega_n}{\omega_n^2}\partial_z\omega_n\in\mathcal{T}_4^{r-2n-2}.\end{cases} \tag{7.27}$$

结合 (7.16)，这些界给出

$$\partial_z\omega_n\in\mathcal{T}_2^{r-2n}. \tag{7.28}$$

因此，

$$\partial_z(p\omega_n)=\frac{\omega_n}{2p}+p\partial_z\omega_n=\frac{1}{2p}\big(1+\mathcal{O}(h^2)\big). \tag{7.29}$$

■

定义变换后的黎卡提方程的一个近似解如下

$$R_n=\mathrm{i}\omega_n-\frac{D\omega_n}{2\omega_n}. \tag{7.30}$$

直接计算可得

$$D\left(\mathrm{i}\omega-\frac{D\omega}{2\omega}\right)+\left(\mathrm{i}\omega-\frac{D\omega}{2\omega}\right)^2=-\omega^2+\mathcal{A}(\omega), \tag{7.31}$$

因此

$$DR_n+R_n^2+1+V=F_n. \tag{7.32}$$

7.1.3 Riccati 余项的 Volterra 估计

设 R 满足精确方程

$$DR+R^2+1+V=0, \tag{7.33}$$

并写作

$$R=R_n+\delta. \tag{7.34}$$

Then

$$D\delta+2R_n\delta+\delta^2=-F_n, \tag{7.35}$$

或等价地,

$$\delta' + 2pR_n\delta + p\delta^2 = -pF_n. \tag{7.36}$$

通过设定，引入变量 w

$$\delta = -\frac{2i\omega_n w}{1+w} \tag{7.37}$$

对于 $|w| \leq \frac{1}{2}$，这定义了 δ，并给出 $|\delta| \leq C|w|$。

用 w表示，方程（7.36）变为

$$w' + 2ip\omega_n w = b_n(1+w)^2 \tag{7.38}$$

其中 $b_n = \frac{pF_n}{2i\omega_n}$ 取 $2n+2=r$ 并利用 $F_n \in \mathcal{S}^{r-2n-2}_{2n+2}$，得到

$$|b_n| \leq C|p|h^r = C|p|^{1-r}\rho^r \leq C|p|^{1-r+2ra} \tag{7.39}$$

由于 a 满足 $r(1-2a) \geq M+N+2>2$ 且 $|p| \geq C|z|^{1/2}$，因此

$$|b_n| \leq C|p|^{-1}|z|^{\frac{1}{2}(2-r(1-2a))} \to 0 \tag{7.40}$$

令 $S(x,\ z) = \int_0^x |p(t,\ z)|^{-1}\,\mathrm{d}t$，并定义

$$Tw(x,z) = -\int_x^\infty \exp\left(2i\int_x^t p(s,z)\omega_n(s,z)\,\mathrm{d}s\right) b_n(t,z)(1+w(t,z))^2\,\mathrm{d}t. \tag{7.41}$$

我们将方程 7.38 的解表示为不动点 $Tw=w$。为了证明 T 是压缩映射，我们首先估计其积分核。

如果 $\Im z=0$，那么 p 和 ω_n 都是实数，因此 $\Im(p(x,\ \Re z)\omega_n(x,\ \Re z))=0$。

现在假设 $0<\Im z<\Re z$。由 (7.19)，必要时增大 k_0，可得

$$\operatorname{Re}\partial_z(p\omega_n)(x,z) \geq \frac{c}{2|p(x,z)|}, \qquad 0\leq\tau\leq 1. \tag{7.42}$$

由于 $p\omega_n$ 在 $z=k^2$ 处为实数，沿虚方向积分可得

$$\Im(p\omega_n)(x,z) = \int_0^{\Im z} \Re\partial_z(p\omega_n)(x,\Re z+\mathrm{i}\tau)\,\mathrm{d}\tau \geq \frac{c\Im z}{2|p(x,z)|}. \tag{7.43}$$

将此与 (7.40) 结合可得

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \left|\exp\left(2i\int_x^t p(s,z)\omega_n(s,z)\,\mathrm{d}s\right) b_n(t,z)\right|\,\mathrm{d}t &\leq C|z|^{\frac{1}{2}(2-r(1-2a))}\int_x^\infty |p(t,z)|^{-1}e^{-c\Im z(S(t,z)-S(x,z)}\,\mathrm{d}t\\ &\leq C|z|^{\frac{1}{2}(2-r(1-2a))}\int_0^\infty e^{-c\Im z S}\,\mathrm{d}S \leq C'|z|^{\frac{1}{2}(2-r(1-2a))}(1+\frac{1}{\Im z})\end{aligned} \tag{7.44}$$

经过变量代换 $S=S(x,\ z)$ 后。对于 $\eta > c_0|z|^{-\frac{M}{2}}$，可得

$$\frac{|z|^{\frac{1}{2}(2-r(1-2a))}}{\Im z} \leq c_0^{-1}|z|^{\frac{-N}{2}}. \tag{7.45}$$

考虑 T在 $C_b[0,\infty)$ 上，并令 $B=\{w\colon \|w\|_\infty \leq \frac{1}{2}\}$。那么

$$\left\|(1+w)^2\right\|_\infty \leq \frac{9}{4}, \qquad \left\|(1+w_1)^2-(1+w_2)^2\right\|_\infty \leq 3\left\|w_1-w_2\right\|_\infty \tag{7.46}$$

选择足够大的 k_0，使得 (7.44) 中的上界小于 $\frac{2}{9}$。那么

$$|Tw(x)| \leq \frac{1}{2}, \qquad |Tw_1(x)-Tw_2(x)| \leq \frac{2}{3}|w_1(x)-w_2(x)| \tag{7.47}$$

因此，$T\colon B\to B$ 是一个压缩映射。其唯一的不动点 w 满足方程（7.38），并且满足

$$\|w\|_\infty \leq C|z|^{\frac{-N}{2}}, \qquad \|\delta\|_\infty \leq C'\|w\|_\infty \leq C''|z|^{\frac{-N}{2}} \tag{7.48}$$

7.1.4 韦伊尔解的识别

固定 $z \in \mathcal{D} \cap \{0 < \Im z < \Re z\}$，并选择 n 使得 $r = 2n + 2$。令 $R = R_n + \delta$，并通过以下方式定义 u

$$\frac{Du}{u} = R, \tag{7.49}$$

并设 $y = p^{-1/2}u$。那么 y 满足原方程 (7.7)。由 (7.30),

$$y(x) = Cp(x)^{-1/2}\omega_n(x)^{-1/2} \exp\left(i\int_0^x p(s)\omega_n(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^x p(s)\delta(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{7.50}$$

利用 δ 与 w 之间的关系，我们得到

$$y^2(x) = \frac{C(1+w(x))^2}{\omega_n(x)}\frac{1}{p(x)} \exp\left(2\int_0^x (ip(s)\omega_n(s) - b_n(s)(1+w(s)))\,\mathrm{d}s\right). \tag{7.51}$$

估计 (7.40) 给出

$$\left|\int_0^x b_n(1+w)\,\mathrm{d}t\right| \le C|z|^{\frac{1}{2}(2-r(1-2a))}S(x,z). \tag{7.52}$$

相位的虚部满足

$$\Im\int_0^x p\omega_n\,\mathrm{d}t \ge c\Im z S(x,z). \tag{7.53}$$

由于 $\Im z \ge C|z|^{-\frac{M}{2}} \ge C|z|^{\frac{1}{2}(N+2-r(1-2a))}$，我们可以选取充分大的 k_0，使得

$$\Re\left(2\int_0^x (ip(s)\omega_n(s) - b_n(s)(1+w(s)))\,\mathrm{d}s\right) \le -c\Im z S(x,z) \tag{7.54}$$

由此得到

$$\int_0^\infty |y^2(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty \frac{C''}{|p(x,z)|}e^{-c\Im z S(x,z)}\,\mathrm{d}x \le \frac{C''}{c\Im z} < \infty \tag{7.55}$$

对每个 $z \in \mathcal{D} \cap \{0 < \Im z < \Re z\}$ 都成立。根据极限点假设，平方可积解在相差一个常数因子的意义下唯一。因此，y 是 (7.7) 的韦伊尔解，并且

$$m(z) = \frac{y'(0,z)}{y(0,z)}. \tag{7.56}$$

Set

$$m_+(x,z) = \frac{y'(x,z)}{y(x,z)}. \tag{7.57}$$

由于 $y = p^{-1/2}u$ 和 $Du/u = R$,

$$m_+ = -\frac{p'}{2p} + pR. \tag{7.58}$$

定义

$$r_n^{\mathrm{app}} = -\frac{p'}{2p} + p\left(\mathrm{i}\omega_n - \frac{D\omega_n}{2\omega_n}\right). \tag{7.59}$$

Then

$$m_+ - r_n^{\mathrm{app}} = p\delta. \tag{7.60}$$

在 $x = 0$ 处，估计 (7.48) 给出

$$|m_+(0,z) - r_n^{\mathrm{app}}(0,z)| \le C'''|z|^{\frac{1}{2}(-N+1)} \tag{7.61}$$

在 $x = 0$ 处，构造中涉及的 q 的导数均为有限值，并且

$$p(0,z) = \sqrt{z}\left(1 - \frac{q(0)}{z}\right)^{1/2} \tag{7.62}$$

具有关于 $\sqrt{z^{-1}}$ 的幂的完整渐近展开。表达式 $r_n^{\mathrm{app}}(0, z)$ 仅涉及 p、有限个其 x 阶导数、代数运算以及平方根。因此，它也具有关于 $\sqrt{z^{-1}}$ 的幂展开。

近似对数导数满足精确缺陷恒等式

$$(r_n^{\mathrm{app}})' + (r_n^{\mathrm{app}})^2 - q + z = p^2 F_n. \tag{7.63}$$

在每个固定紧区间上，$h = \mathcal{O}(|z|^{-\frac{1}{2}})$ 和 $p = \mathcal{O}(|z|^{\frac{1}{2}})$。由于 $r \geq N+2$，估计

$$p^2 F_n = \mathcal{O}\left(|z|^{\frac{-N}{2}}\right) \tag{7.64}$$

一致成立，同时也适用于下文所需的有限多个 x 导数。因此，在紧区间上，

$$r_n^{\mathrm{app}}(x, z) = \sqrt{-z} + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{c_j(x)}{(2\sqrt{-z})^j} + \mathcal{O}\left(|z|^{\frac{1}{2}(-N+1)}\right). \tag{7.65}$$

在 $x = 0$ 处取值，并利用 (7.56) 和 (7.61)，可得该结果对 $z \in \mathcal{D} \cap \{0 < \Im z < \Re z\}$ 一致成立，

$$m_+(z) = \sqrt{-z} + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{c_j(0)}{(2\sqrt{-z})^j} + \mathcal{O}\left(|z|^{\frac{1}{2}(-N+1)}\right). \tag{7.66}$$

系数之间的关系以及扇区 $\mathcal{D} \cap \{\Im z > a\Re z \geq C_0 + 1\}$ 中的展开式见 [3]。

对左半轴 Weyl 函数 m_- 以及 $\mathcal{D}$ 的另一分支应用相同论证，可得定理1.3所需的 Weyl 展开。

7.2 谱测度的指数衰减

我们使用 Gesztesy 和 Simon 的以下估计（[5,定理 6.6]）。

引理 7.3. 假设对每个 $a > 0$，$q \in L^1(0, a)$，且 $+\infty$ 是一个极限点端点。那么，对每个 $\delta \in (0,1)$ 和 $\alpha_0 > 0$，

$$\alpha_0 \delta \int_{-\infty}^{0} e^{2(1-\delta)\alpha_0\sqrt{-\lambda}} \sigma_+(d\lambda) \leq C_1(1+\alpha_0) + C_2(1+E(\alpha_0)^2) e^{2(1+\alpha_0)\sqrt{E(\alpha_0)}} \tag{7.67}$$

其中

$$E(\alpha_0) = -\inf_{\varphi} \left\{ \int_0^{1+\alpha_0} |\varphi'(x)|^2 + q(x)|\varphi(x)|^2 dx : \varphi \in C_0^\infty((0, \alpha_0+1)), \|\varphi\|_{L^2((0,\alpha_0+1))} \leq 1 \right\}. \tag{7.68}$$

常数 C_1、C_2 仅依赖于 $L = \int_0^1 |q(x)| dx$。

这个估计给出了以下指数矩界。

引理 7.4. 假设 $q(x) \geq -Cx^\alpha$ 对 $x > x_0$成立，其中 x_0 充分大。那么，当$\varepsilon > 0$充分小时，

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}} \sigma_+(\mathrm{d}\lambda) < \infty \tag{7.69}$$

证明. 令 $K_0 = \int_0^{x_0} q_-(x)\,\mathrm{d}x < \infty$，其中 $q_-(x) = \max\{-q(x), 0\}$。对于 $\varphi \in C_0^\infty$，我们有

$$\|\varphi\|_\infty^2 \leq 2\left(\int_0^{1+\alpha_0} \left|\varphi'(s)\overline{\varphi(s)}\right| \mathrm{d}s\right) \leq 2\|\varphi'\|_2 \|\varphi\|_2 \tag{7.70}$$

其中 $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2((0,\alpha_0+1))}$。将积分拆分为 $(0, x_0)$ 和 $(x_0, 1+\alpha_0)$ 两部分，得到

$$\int_0^{1+\alpha_0} -q(x)|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq K_0\|\varphi\|_\infty^2 + C(1+\alpha_0)^\alpha \|\varphi\|_2^2 \leq 2K_0\|\varphi'\|_2\|\varphi\|_2 + C(1+\alpha_0)^\alpha\|\varphi\|_2^2. \tag{7.71}$$

配方后得到

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{1+\alpha_0} |\varphi'(x)|^2 + q(x)|\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x &\le -\|\varphi'\|_2^2 + 2K_0 \|\varphi'\|_2 \|\varphi\|_2 + C(1+\alpha_0)^\alpha \|\varphi\|_2^2 \\
&\le -(\|\varphi'\|_2 - K_0 \|\varphi\|_2)^2 + (K_0^2 + C(1+\alpha_0)^\alpha) \|\varphi\|_2^2 \\
&\le K_0^2 + C(1+\alpha_0)^\alpha
\end{aligned} \tag{7.72}
$$

对每个满足 φ 和 $\|\varphi\|_2 \le 1$ 的情形，取上确界可得

$$
E(\alpha_0) = \sup_{\varphi} \left\{ -\int_0^{1+\alpha_0} |\varphi'(x)|^2 + q(x)|\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right\} \le K_0^2 + C(1+\alpha_0)^\alpha \tag{7.73}
$$

将 $\delta = \frac{1}{2}$ 代入 Gesztesy和Simon 的估计可得

$$
\int_{-\infty}^0 e^{B|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sigma_+(d\lambda) \le D_1 e^{D_2 B^{1+\frac{\alpha}{2}}} \tag{7.74}
$$

其中 $B = 2(1-\delta)\alpha_0 = \alpha_0$。对于每个固定的 $\varepsilon_1 > 0$，我们可以取 $D_2 = 2\sqrt{C + \varepsilon_1}$，其中常数 D_1 取决于 C，L，K_0，α，ε_1。

将负半轴分解为相邻负平方数之间的区间，可得

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon|\lambda|^t} \sigma_+(\,\mathrm{d}\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-(n+1)^2}^{-n^2} e^{\varepsilon|\lambda|^t} \sigma_+(\,\mathrm{d}\lambda) \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon(n+1)^{2t}} \int_{-(n+1)^2}^{-n^2} \sigma_+(\,\mathrm{d}\lambda) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon(n+1)^{2t}} \int_{-(n+1)^2}^{-n^2} e^{B|\lambda|^{\frac{1}{2}}} e^{-Bn} \sigma_+(\,\mathrm{d}\lambda) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon(n+1)^{2t} - Bn} D_1 e^{D_2 B^{1+\frac{1}{2}\alpha}} \\
&\le D_1 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\varepsilon(n+1)^{2t} - Bn + D_2 B^{1+\frac{1}{2}\alpha} \right).
\end{aligned} \tag{7.75}
$$

在每个区间 $(-(n+1)^2,\ -n^2]$ 上，取 $B = \left(\frac{n}{2D_2}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$。于是

$$
\int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon|\lambda|^t} \sigma_+(d\lambda) \le D_1 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\varepsilon(n+1)^{2t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2D_2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} n^{\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)} \right). \tag{7.76}
$$

右侧的级数收敛，因此

$$
\int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}} \sigma_+(d\lambda) < \infty \tag{7.77}
$$

对于 $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}$ 以及每个 $0 < \varepsilon \le 2^{-\frac{4}{\alpha}-1} C^{-\frac{1}{\alpha}}$。

■

将这一估计与在引理 7.1 的假设下建立的 Weyl 展开式相结合，即可证明定理1.3。

参考文献

[1]I. N. Bondareva，*Korteweg-de Vries* 方程在具有规定渐近式的递增函数类中的研究，$|x| \to \infty$，《苏联数学文摘》**50** (1985)，第 1 期，125–135。https://doi.org/10.1070/SM1985v050n01ABEH002736。

[2] I. N. Bondareva 和 M. A. Shubin，递增函数类中的 *Korteweg-de Vries* 型方程，《苏联数学杂志》**51**（1990），第 3 期，2323–2332。https://doi.org/10.1007/BF01094991。

[3] A. A. Danielyan 和 B. M. Levitan，关于 Titchmarsh–Weyl m函数的渐近行为，苏联数学杂志 36（1991），第 3 期，487–496。https://doi.org/10.1070/IM1991v036n03ABEH002031。[4] C. S. Gardner、J. M. Greene、M. D. Kruskal 和 R. M. Miura，求解 Korteweg–de Vries方程的方法，《物理评论快报》19（1967），第 19 期，1095–1097。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19. 1095。[5] F. Gesztesy 和 B. Simon，逆谱理论的新方法，II：一般实势及其与谱测度的联系，《数学年刊》（第 2 辑）152（2000），第 2 期，593–643。https://doi.org/10. 2307/2661393。[6] C. E. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega，具有无界初值的 KdV方程的全局解，《微分方程杂志》139（1997），第 2 期，339–364。https://doi.org/10.1006/jdeq.1997.3297。[7] R. Killip、J. Murphy 和 M. Visan，白噪声在实线上的 KdV方程下的不变性，《数学发明》222（2020），第 1 期，203–282。https://doi.org/10.1007/s00222-020-00964-9。[8] S. Kotani，KdV流的构造：一种统一方法，《北京数学杂志》6（2023），第 2 期，469–558。https: //doi.org/10.1007/s42543-022-00058-w。此处引用的编号遵循预印本《KdV流的构造》，arXiv:2107.05428v1（2021）。[9]S. Kotani，《具有一般初始条件的 Korteweg–de Vries流》，数学物理研究，施普林格，新加坡，2024。https://doi.org/10.1007/978-981-99-9738-1。[10] P. D. Lax，非线性演化方程的积分与孤立波，《纯粹与应用数学通讯》21（1968），第 5 期，467–490。https://doi.org/10.1002/cpa.3160210503。[11] M. Matsuda，Weyl展开定理中广义特征函数的正交性，《数学科学研究所刊物》，京都大学，A辑2（1966），第 2 期，243–254。https://doi.org/10.2977/PRIMS/1195195889。[12] A. Menikoff，Korteweg–de Vries方程无界解的存在性，《纯粹与应用数学通讯》25（1972），第 4 期，407–432。https://doi.org/10.1002/cpa.3160250404。[13] M. Sato，孤子方程作为无限维格拉斯曼流形上的动力系统，RIMS讲义录439（1981），30–46。[14] G. Segal 和 G. Wilson，环群与 KdV型方程，《数学科学研究所刊物》61（1985），5–65。https://doi.org/10.1007/BF02698802。[15] G. Teschl，《量子力学的数学方法：及其在薛定谔算子中的应用》，第 2 版，数学研究生教材，第 157 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014。https://doi.org/10.1090/gsm/157。[16] S. Zhang，Titchmarsh–Weyl函数在实轴附近的渐近行为及其在 KdV层级中的应用，arXiv:2608.06034 [数学物理]（2026）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2608.06034。