PROCEEDINGS OF SCIENCE

格点上的量子色动力学 +量子电动力学热力学

G. Endrődi,[a] **E. Garnacho-Velasco,**[a,*] **G. Markó**[a] **和 L. Pethő**[a]

[a]物理与天文学研究所，厄特沃什·罗兰大学，帕兹马尼·彼得尔大道 *1/A*，
H-1117 布达佩斯，匈牙利电子邮件：gergely.endrodi@ttk.elte.hu，
egarnacho@bodri.elte.hu，marko.gergely@ttk.elte.hu，
petho.levente@ttk.elte.hu

如今，零温下 QCD 中的 QED 修正已得到充分理解。在零温下，QED 效应是微扰性的，且对于精密物理可观测量不可或缺，例如中子与质子的质量差或 μ子反常磁矩等。不过，文献中有迹象表明，在有限温度下引入 QED 可能会产生非微扰效应，影响相图的结构，因为组合理论具有精确的中心对称性。在这篇会议论文中，我们分析了组合理论的结构，以及在格点上模拟该理论的不同策略，并介绍有限温度下格点 QCD +QED 模拟的新结果，重点探讨电磁耦合在该系统热力学中的作用。我们还讨论了组合理论中出现的新特征及这些模拟所面临的挑战；为从第一性原理理解 QCD +QED 的相图，需要开发新的算法。

第 *43* 届国际格点场论研讨会（*Lattice 2026*）*2026* 年 *7* 月 *26* 日
至 *8* 月 *1* 日美国马里兰大学，美国大学园市

*报告人

© 作者(s)依据《知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议》（CC BY-NC-ND 4.0）保留版权。保留将文本和数据挖掘、人工智能训练及类似技术用于商业目的的一切权利。ISSN 1824-8039。由 SISSA Medialab 出版。

arXiv:2611.29423v1 [hep-lat] 22 Nov 2026

1. 引言

零温下 QED 修正的研究在格点QCD界日益受到重视，人们已利用它计算了各种可观测量，例如强子质量劈裂、重介子的衰变率或 μ子的反常磁矩，参见文献 [1] ，其中综述了这些应用。开展这些研究，是为了使理论达到与当今高能物理实验精度不断提升相匹配的水平。尽管在格点 QCD 模拟中纳入 QED 并非没有挑战，尤其是有限体积效应 [1], ，近年来发展的最先进形式体系已能在物理夸克质量下进行全动力学 QCD +QED 模拟，这对我们当前理解标准模型产生了重要影响，例如 μ子反常，参见 [2]。

然而，人们对量子电动力学效应在强相互作用热力学中的影响所知甚少。有证据表明，量子电动力学可能会对量子色动力学的有限温度物理产生非微扰效应，这是因为量子色动力学 + 量子电动力学组合理论具有中心对称性；纯胶子理论中也存在这种对称性，而在量子色动力学中加入费米子后该对称性会被破坏。这种可能性已在强QED耦合下的双色量子色动力学中通过一系列初步研究进行了探讨 [3], ，研究发现，加入量子电动力学会将去禁闭相变转变为真实相变，类似于纯SU(2)理论中的相变。在本研究中，我们将使用物理夸克质量和量子电动力学耦合来探究量子色动力学 + 量子电动力学的热力学，从而了解加入动力学光子如何影响有限温度下的各种相关物理量。

2. 中心对称性

现在我们讨论量子色动力学 +量子电动力学的中心对称性，其配分函数为

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}U\,\mathcal{D}\varphi \prod_{f=u,d,s} \det M_f[U,\varphi,q_f]\, e^{-S_g - S_\gamma}\,, \tag{1}$$

with S_g 胶子作用量（采用任意中心对称离散化）， S_γ 紧致光子作用量 n

$$S_\gamma = \beta_{\rm em} \sum_n \sum_{\mu,\nu,\mu<\nu} \left(1 - \cos\left[\varphi_\mu(n) + \varphi_\nu(n+\hat{\mu}) - \varphi_\mu(n+\hat{\nu}) - \varphi_\nu(n)\right]\right), \tag{2}$$

裸耦合为 $\beta_{\rm em} = 1/e^2$， M 交错狄拉克算符

$$M^f_{n,l} = \frac{1}{2}\sum_\mu \eta_\mu(n)\left[U_\mu(n) u_{f,\mu}(n)\delta_{n,l+\hat{\mu}} - U^\dagger_\mu(n) u^*_{f,\mu}(n)\delta_{n,l+\hat{\mu}}\right] + m_f \delta_{n,l}, \tag{3}$$

其中 U(1) 链为 $u_{f,\ \mu}(n) \ = e^{iq_f \varphi_\mu\ (n)}$。请注意，为了具体说明，我们考虑这些特定的作用量，但对称性方面的考量与费米子离散化的选择，以及量子电动力学采用紧致还是非紧致形式无关。

纯 SU(3) 杨–米尔斯理论在 Z_3 中心对称变换下保持不变

$$U_4(\vec{n}, N_t - 1) \to z U_4(\vec{n}, N_t - 1) \quad \forall \vec{n} \qquad \text{with} \quad z \in Z_3 = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}\}\,\mathbb{1}\,, \tag{4}$$

这种对称性在高温下会自发破缺，标志着去禁闭转变的发生。在量子色动力学中，引入费米子会显式破坏这种对称性，因为中心变换与费米子的反周期时间边界条件不相容，参见例如参考文献 [4] 以了解详细分析。等价地，费米子行列式在该变换（4）下不保持不变，从而显式破坏中心对称性。然而，在量子色动力学 +和量子电动力学中，这种对称性得以恢复，因为夸克的中心旋转可以由光子场的 U(1) 旋转予以补偿。就行列式而言，很容易验证，包含狄拉克算符（3）的行列式在以下整体变换下保持不变，

$$U_4(\vec{n}, N_t - 1) \to z U_\mu(\vec{n}, N_t - 1) \quad \forall \vec{n}\,, \tag{5}$$

$$\varphi_4(\vec{n}, \ N_t - 1) \to \varphi_4(\vec{n}, \ N_t - 1) + 2\pi \quad \forall \vec{n}\,, \tag{6}$$

其中，不失一般性，我们考虑 $z = \tilde{z}\,\mathbb{1} = e^{i2\pi/3}\,\mathbb{1}$ $z \in Z_3$。

那么，光子链路变换为

$$u_{u,4}(\vec{n}, N_t - 1) \to u_{u,4}(\vec{n}, N_t - 1)\, e^{i4\pi/3} = u_{u,4}(\vec{n}, N_t - 1)\, \tilde{z}^{-1}\,, \tag{7}$$

$$u_{d/s,4}(\vec{n}, N_t - 1) \to u_{d/s,4}(\vec{n}, N_t - 1)\, e^{-i2\pi/3} = u_{d/s,4}(\vec{n}, N_t - 1)\, \tilde{z}^{-1}\,, \tag{8}$$

抵消胶子的中心变换。注意，变换（6）也使光子作用量（2）保持不变。

中心对称性的恢复可能会对去禁闭相变产生重要影响。对于具有中心对称性的纯 SU(3)，该相变是一级相变 [5],；而在夸克会破坏这种对称性的量子色动力学中，该相变则是平滑交叉 [6]。正如上文所述，文献 [3] 初步表明，在双色量子色动力学中加入强耦合量子电动力学并恢复中心对称性后，去禁闭相变会变为二级相变，其类型与纯SU(2)理论中的相变相同。此外请注意，对于三个质量简并夸克，量子色动力学在虚同位旋化学势 $\mu_I = i2\pi/3$这一特殊取值下也能恢复中心对称性。近期的格点模拟表明，该理论具有一级禁闭解除相变 [7]。因此，一个自然的问题是，与纯 SU(3) 理论和量子色动力学相比，物理量子色动力学 + 量子电动力学的热力学性质如何?

3. 格点设置

我们在物理点使用 $2+1$ 种根化交错费米子[1]，并对 SU(3) 链接进行两步 Stout 涂抹；胶子扇区则采用树级改进 Symanzik 作用量。我们将研究紧致形式和非紧致形式的量子电动力学，后者采用费曼规范，并在混合蒙特卡罗中使用傅里叶加速，方法参见文献 [8]。

在量子色动力学 + 量子电动力学中，我们可以考虑不同类型的 Polyakov 环，它们会影响行列式。首先是常见的涂抹 SU(3) 波利亚科夫环

$$P = \frac{1}{V} \sum_{\vec{n}} \mathrm{Tr} \prod_{n_t=0}^{N_t-1} U_4^F(\vec{n}, n_t) \tag{9}$$

[1]LCP 不包含量子电动力学效应，因此我们考虑量子色动力学中的同位旋对称物理点。

其中 $U_4^F(n)$为涂抹后的 SU(3) 链接。我们还有 U(1) Polyakov 环，它们取决于该味的电荷

$$p_f = \frac{1}{V}\sum_{\vec{n}}\prod_{n_t=0}^{N_t-1} u_{f,4}(\vec{n},n_t)\,. \tag{10}$$

We 将分析量子色动力学 +量子电动力学中有限温度下这两个可观测量之间的相互作用 .

由于存在精确的光子零模，在有限体积中定义量子电动力学会遇到若干困难，因为量子电动力学在物理弱耦合下没有质量隙，参见 [1]以详细了解这一问题。一个众所周知的后果是，在有限周期体积中，对于非零电荷无法满足库仑定律，从而禁止定义带电传播子。解决这一问题有多种方法，例如引入光子质量作为调节器 [9], ，或考虑 C^*边界条件 [10]。另一种可能性是从路径积分中移除这一光子零模，这可以通过不同方式实现。一些常用的策略包括

- 量子电动力学$_{TL}$：例如参见 [11], ，该量子电动力学版本违反反射正性 [8]

$$\sum_n A_\mu(n) = 0 \quad \forall\mu \quad \Rightarrow \quad \widetilde{A}_\mu(\vec{k}=\vec{0},k_4=0) = 0 \quad \forall\mu\,. \tag{11}$$

- 量子电动力学$_L$：在文献 [12] 中提出

$$\sum_{\vec{n}} A_\mu(\vec{n},t) = 0 \quad \forall\mu,t \quad \Rightarrow \quad \widetilde{A}_\mu(\vec{k}=\vec{0},k_4) = 0 \quad \forall\mu,k_4\,. \tag{12}$$

另一种最近提出的方案是量子电动力学$_r$ [13]。在有限温度下，所有这些不同的光子零模处理方式都会显式破坏中心对称性。因此，类比于量子电动力学$_L$，我们提出了一种在有限温度下移除零模的新方法，将其称为量子电动力学$_{\mu L}$：

$$\widetilde{A}_\mu(\vec{k}=\vec{0},k_4) = 0 \quad \forall\mu,k_4 \quad \text{except} \quad \mu=4 \ \text{ and } \ k_4=0\,, \tag{13}$$

保持理论的精确中心对称性。其思想是，在有限温度下，~光子会获得热质量，这表现为 $A_4(k=0)$ 的质量隙，从而保护理论免受有限 T 下来自这一常数模的红外发散影响。这一特定模的涨落可以理解为全局电荷化学势 μ，正是这些涨落使理论的中心对称性以及 SU(3) 扇区之间的隧穿得以存在。

4. 结果

现在我们展示这些新颖量子色动力学 + 量子电动力学在有限温度下、采用不同设置进行的模拟结果。首先，在图1中，我们展示了对量子色动力学 +量子电动力学代码的交叉检查，其中哈密顿量违背 ΔH 随分子动力学步长时间呈指数变化， Δt 正如预期的那样，这对我们所考虑的所有 QED 作用量都成立。

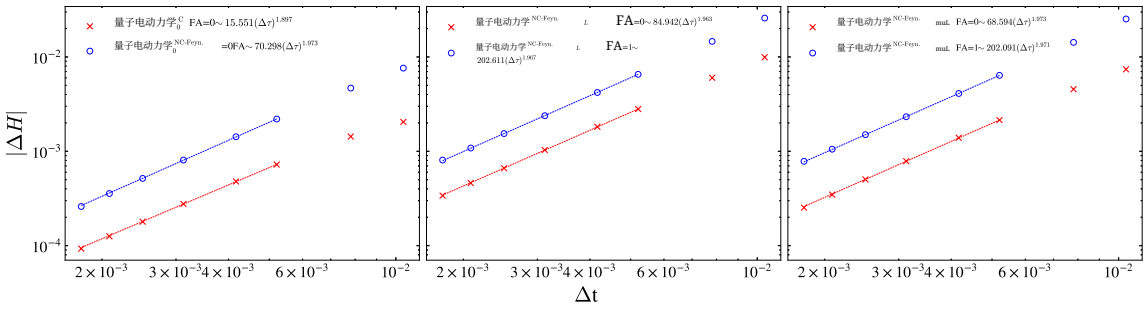

图 1： 哈密顿量违背 ΔH 与分子动力学积分步长 Δt的关系。下标 0 表示未进行零模去除，FA 指傅里叶加速混合蒙特卡洛。

4.1 紧致量子电动力学与电磁耦合扫描

接下来，我们聚焦于不进行零模去除的紧致量子电动力学形式。在图2 的左图中，我们展示了不同温度下 SU(3) Polyakov环的散点图，采用 $8^3\times6$ 格点和较弱的量子电动力学耦合 $\beta_{\text{em}}=10$，分别位于相变以下和以上。在高温度下，我们可以看到 T，中心对称性自发破缺，这由典型构型中 Polyakov 环取非零值 P 所表明，正如量子色动力学中发生的情况一样。然而，量子色动力学中的中心对称性 +量子电动力学允许 Polyakov 环在相变以上探索三个中心扇区 T_c。这些不同扇区之间的相变显示在图2的右图中。即使在这样的小体积下，也发现这些相变十分罕见。

在图3中，我们展示了隧穿机制的运作方式：U(1) Polyakov 环 p_u 和$p_{d/s}$ 会旋转（由于电荷的作用，旋转方向相反），直到达到能够抵消 SU(3) Polyakov环的中心元素值，从而使 SU(3) Polyakov 环能够从实部扇区变为正虚部扇区。这也解释了隧穿过程为何十分罕见，因为用于采样构型的混合蒙特卡洛算法只会对链变量提出微小改变，使得 U(1)链发生整体旋转的可能性很低。我们观察到，随着体积增大，这种情况愈发明显，使得对序参量分布在 T_c

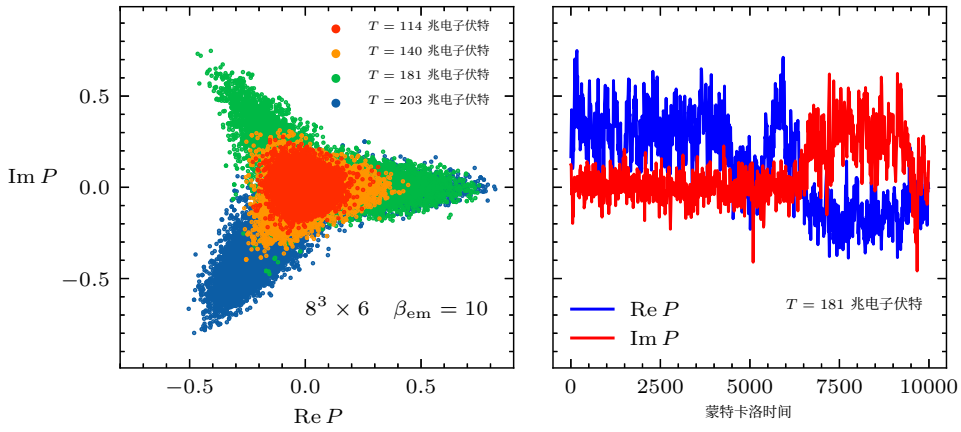

图 2： 不同温度下，$\beta_{\text{em}}=10$的 $8^3\times6$ 系综中 SU(3) Polyakov环 P 的散点图（左），以及 $T=181$ 兆电子伏特时 P 实部和虚部的蒙特卡洛时间历史（右）。

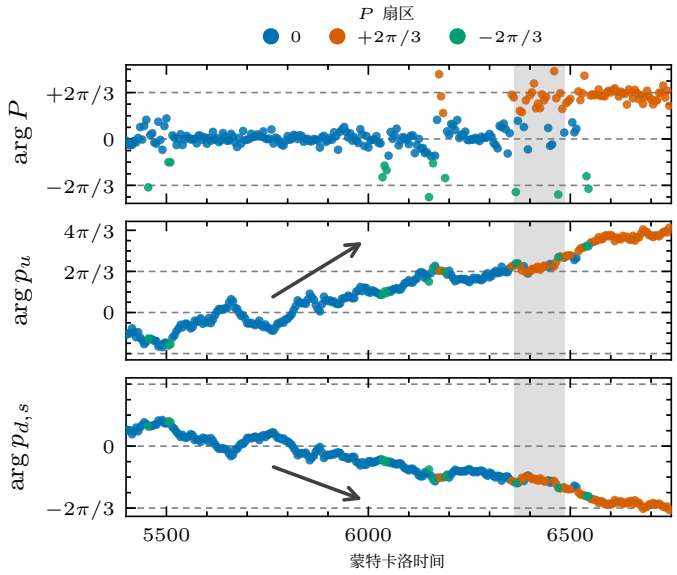

图 3： 展示了在 $8^3 \times 6$ 格点中、 $\beta_{\text{em}} = 10$ 和 $T = 181$兆电子伏特条件下中心扇区之间的隧穿。颜色对应于 SU(3) Polyakov环扇区。

附近的研究变得困难。我们目前正在开发有助于改善该理论采样遍历性的算法，例如在 HMC 轨迹之间引入局域中心更新。

最后，我们还扫描了该理论在 β_{em} 空间中的表现，从量子电动力学的弱耦合（物理）区域到强耦合区域，以便与参考文献 [3]中双色量子色动力学所采用的设置进行比较。在图4中，我们展示了 SU(3) Polyakov环随量子色动力学逆耦合 β变化的结果，针对 β_{em}的不同取值。我们观察到，在电磁耦合较弱时 $\beta_{\text{em}} > 1$， P 的结果与量子色动力学中的结果一致。然而，当 $\beta_{\text{em}} \sim 1$ 结果

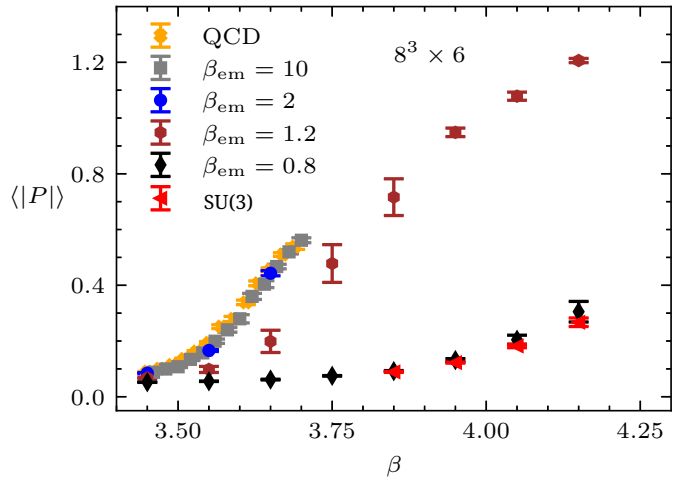

图 4： SU(3) Polyakov环 P 作为不同 β_{em} 取值下量子色动力学逆耦合的函数，以及在纯 SU(3) 理论和量子色动力学中。

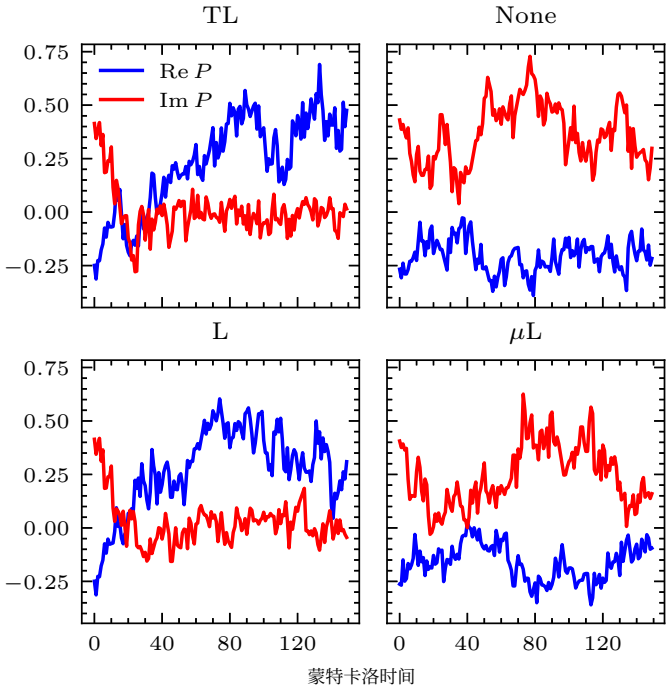

图 5： 采用不同零模减除方案时，SU(3) Polyakov 环实部和虚部的蒙特卡洛时间历史 P，在一个具有 $\beta_{\text{em}} = 10$ 和 $T = 187$ 兆电子伏特的 $8^3 \times 6$ 格点上。

偏离量子色动力学中的结果，并且当 $\beta_{\text{em}} < 1$ 它们似乎趋近于纯 SU(3) 的结果时。电耦合强烈的量子色动力学 +量子电动力学理论与纯 SU(3) 杨–米尔斯理论的结果相似，这在定性上与参考文献 [3]中的发现一致。我们还推测，这种行为可能与紧致 QED 格点模型在 $\beta \approx 1$ [14]处的相变有关，不过我们目前仍在研究其背后的精确机制。

4.2 非紧致量子电动力学与零模去除

现在，我们展示采用费曼规范下的非紧致量子电动力学表述所得的结果。图5展示了不同零模去除方式的表现。我们从 SU(3) Polyakov 环位于正虚部区域的构型开始模拟，可以看到，在 QED_{TL} 和 QED_{L} 表述中，由于中心对称性被显式破缺，轨迹会驱使 P 进入实部区域。然而，在不去除零模（无）以及 $\text{QED}_{\mu L}$中，由于中心对称性得以保留，Polyakov 环可以继续在虚部区域中演化。

最后，在图 6 中我们展示，SU(3) Polyakov环的行为与紧致理论中的相同：在较小的 $8^3 \times 6$ 格点上偶尔会出现相变，但当体积增大时，相变便不再出现。

5. 总结与展望

在这篇会议论文中，我们讨论了有限温度下 QCD +QED 的对称性结构，重点探讨了中心对称性在组合理论中的作用。我们展示了

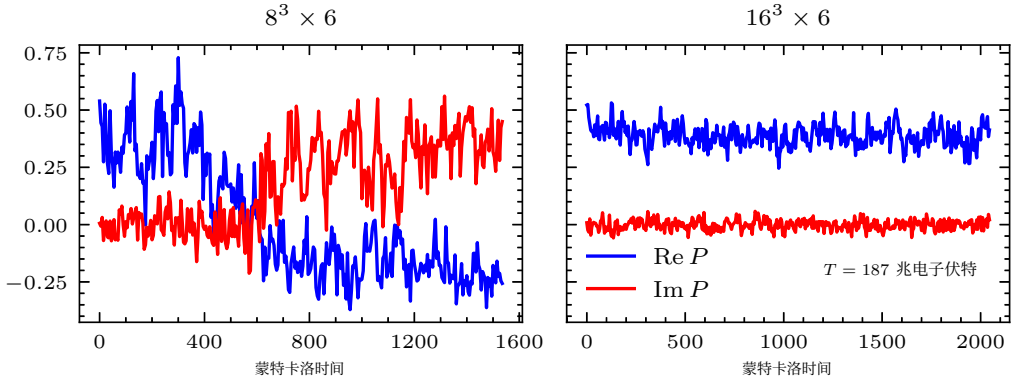

图 6： SU(3) Polyakov环实部和虚部的蒙特卡洛时间历史， P 在 $T = 181$兆电子伏特和 $\beta_{\text{em}} = 10$下，分别使用 $8^3 \times 6$ 格点（左）和 $16^3 \times 6$ 格点（右），并采用量子电动力学μL。

关于物理 QCD + QED 热力学的新结果，证明了中心对称性的存在，以及这种对称性如何使高温下 SU(3) Polyakov环能够在不同扇区之间发生隧穿。然而，即使在小体积中，对理论不同相的采样也颇具挑战，无论是在 QED 的紧致形式还是非紧致形式中都是如此。采用适当的采样算法或许能够缓解这一遍历性问题。此外，我们还表明，在强耦合极限下，QCD +QED 中 SU(3) Polyakov环的结果趋近于纯 SU(3) 理论的结果，这与此前关于双色量子色动力学的初步研究在定性上相符。最后，我们讨论了有限温度下 QED 中移除光子零模的必要性；常用方案会显式破坏中心对称性。我们还提出了一种处理这一问题的新方法，并将其称为 QEDμL。该方法保留了这一对称性，因此适用于有限温度下的 QCD + QED 模拟。

接下来，我们将研究引入局部更新，以提高该理论 HMC 采样的遍历性，并研究其向连续极限的逼近。此外，我们计划将对广义量子电动力学效应对量子色动力学热力学影响的研究扩展至状态方程和夸克数易感率；这些量对于理解强相互作用物质的相图发挥着重要作用。

致谢

本研究由匈牙利国家研究、发展与创新办公室（匈牙利研究资助项目150241）和欧洲研究理事会（巩固者资助项目101125637 CoStaMM）资助。作者感谢与 Kálmán Szabó 和 Lorenz von Smekal 进行的富有启发性的讨论。我们感谢数字政府发展与项目管理有限公司授予我们使用位于匈牙利的 Komondor高性能计算设施的权限。

参考文献

[1] A. Patella, PoS LATTICE2016 (2017), 020 doi:10.22323/1.256.0020 [arXiv:1702.03857[hep-lat]].[2] S. Borsányi, Z. Fodor, J. N. Guenther, C. Hoelbling, S. D. Katz, L. Lellouch, T. Lip- pert, K. Miura, L. Parato and K. K. Szabó, et al. 《自然》 593 (2021) no.7857, 51-55 doi:10.1038/s41586-021-03418-1 [arXiv:2002.12347 [hep-lat]].[3]S. R. Edwards, A. Sternbeck and L. von Smekal, PoS LATTICE2010 (2010), 275 doi:10.22323/1.105.0275 [arXiv:1012.0768 [hep-lat]]. S. R. Edwards, A. Sternbeck and L. von Smekal, PoS LATTICE2011 (2011), 264 doi:10.22323/1.139.0264 [arXiv:1202.1477 [hep-lat]]. P. Scior, S. R. Edwards and L. von Smekal, PoS LATTICE2013 (2014), 361 doi:10.22323/1.187.0361 [arXiv:1311.3854 [hep-lat]].[4]K. Fukushima and V. Skokov, Prog. Part. Nucl. Phys. 96 (2017), 154-199 doi:10.1016/j.ppnp.2017.05.002 [arXiv:1705.00718 [hep-ph]].[5] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Peters- son, Nucl. Phys. B 469 (1996), 419-444 doi:10.1016/0550-3213(96)00170-8 [arXiv:hep- lat/9602007 [hep-lat]].[6] S. Borsányi 等 [Wuppertal-Budapest], 《高能物理学杂志》09 (2010), 073 doi:10.1007/JHEP09(2010)073[arXiv:1005.3508 [hep-lat]].[7] G. Endrodi, G. D. Moore, A. Pieczynski and A. Sciarra, 《物理评论D》113 (2026) no.11, 114518 doi:10.1103/5rj7-xnq1 [arXiv:2603.22046 [hep-lat]].[8] S. Borsányi 等 [BMW], 《科学》 347 (2015), 1452-1455 doi:10.1126/science.1257050[arXiv:1406.4088 [hep-lat]].[9] M. A. Clark, M. Della Morte, Z. Hall, B. Hörz, A. Nicholson, A. Shindler, J. T. Tsang, A. Walker-Loud and H. Yan, PoS LATTICE2021 (2022), 281 doi:10.22323/1.396.0281[arXiv:2201.03251 [hep-lat]].[10]L. Bushnaq 等 [RCstar], 《高能物理学杂志》03 (2023), 012 doi:10.1007/JHEP03(2023)012[arXiv:2209.13183 [hep-lat]].[11] T. Blum, T. Doi, M. Hayakawa, T. Izubuchi and N. Yamada, 《物理评论D》76 (2007), 114508 doi:10.1103/PhysRevD.76.114508 [arXiv:0708.0484 [hep-lat]].

[12] M. Hayakawa 和 S. Uno, 《理论物理进展》**120** (2008), 413-441 doi:10.1143/PTP.120.413[arXiv:0804.2044 [hep-ph]].[13] M. Di Carlo、M. T. Hansen、N. Hermansson-Truedsson 和 A. Portelli, 《高能物理学杂志》**10** (2025), 026 doi:10.1007/JHEP10(2025)026 [arXiv:2501.07936 [hep-lat]]。

[14] J. B. Kogut 和 E. Dagotto, 《物理评论快报》**59** (1987), 617 doi:10.1103/PhysRevLett.59.617