arXiv:2611.29433v1 [math.FA] 22 Nov 2026

完备性的分解与丹尼尔扩张的泛性质

Hayato Saito

2026年11月24日

摘要

我们研究 Daniell 型积分系统，引入范畴**Int**，其态射是沿基空间映射的拉回，并将丹尼尔扩张确定为该范畴中的一种结构。

主要结果是，丹尼尔扩张定义了一个函子 $\mathcal{D}$: **Int** $\to$ **DInt**，并且是将 Daniell 闭积分系统的全子范畴**DInt** 包含进来的左伴随。也就是说，**DInt** 是**Int** 的反射子范畴，而丹尼尔扩张就是其反射子。

T本文提出以下四点 ts.

1. **将丹尼尔闭性分解为两个闭包条件**。一个积分系统是丹尼尔闭的（即 $L^1 = L$），当且仅当它满足单调收敛定理，且在零测集上的修改下封闭。这两个条件缺一不可。在测度论中，右侧的两个条件彼此独立；第二个条件对应于测度的完备性。

2. **确定第二反射**。要求陪域是丹尼尔闭的并非可有可无的限制：丹尼尔扩张本身并非满足单调收敛定理的积分系统范畴到该范畴的包含映射的左伴随。该包含映射确有左伴随，但其反射子并非丹尼尔扩张。在 Stone 条件下，这个第二反射由 L^1 中所有关于由 L 生成的 σ 代数可测的元素组成。这以 (X, L, I) 本身为依据，刻画了两个反射何时相同。对于阶梯函数构成的积分系统，它由博雷尔可测可积函数组成。此外，对于任意积分系统，L^1 可分解为其 $\sigma(L)$-可测部分与支撑于零测集上的函数之和。因此，**两个反射之间的差异恰好就是支撑于零测集上的函数**；对于阶梯函数的情形，这体现为博雷尔与勒贝格之间的差异，也就是测度的完备化。无论是 L 对点的分离，还是 Stone 条件，都不足以保证两个反射相同。

3. **将整体组装成一个范畴**。我们定义恒等态射和复合，验证丹尼尔扩张满足函子定律，并明确分解的唯一性。本部分是形式性的。分析内容只在

通过零函数对态射取商后得到的范畴，以及下文的算子态射范畴中，才会涉及唯一性。

4. **明确算子态射范畴所能揭示的内容**。我们将态射与基空间之间的映射分离，并将它们重新定义为里斯空间之间的正线性映射。算子态射可唯一延拓至其商为巴拿赫空间的陪域，而丹尼尔扩张再次给出此~范畴中的一个反射。然而，此范畴中的态射只能看到商 $L = L/\mathcal{N}_I$: 赋值~ ~ $(X,\ L,\ I) \mapsto (L,\ I)$ 是忠实且满的，因此既无法区分基空间，也无法区分其作为函数空间的实现。在此范畴中，丹尼尔扩张所给出的是巴拿赫完备化。主定理的陪域子范畴应取商为巴拿赫空间的对象类，而非丹尼尔闭对象类；后者并不同构闭，前者则是

它的同构闭包。因此，抽象完备化与具体实现之间的区别，只有在态射为基空间之间映射的一侧，才会作为范畴结构保留下来。

附录讨论证明中所使用的伴随函子的一般理论，以及遗忘基空间的思想。

通过级数表示构造丹尼尔扩张、扩张再次成为积分系统这一事实、它满足单调收敛定理、它是幂等的、固定基空间下扩张的极小性，以及与积分系统态射相对应的概念，这些内容都已为人所知，本文不声称它们是新的。在上述四点中，（1）和（2）是具有分析内容的部分，但二者都处于经典 Daniell 理论的邻近范围内，本文仅声称，**据作者所知，它们尚未被明确表述过**。第（3）点是形式性的，第（4）点则是关于范畴选择的观察。

综合来看，（1）和（2）将丹尼尔扩张分为两个阶段：一个阶段处理 $\sigma(L)$-可测的可积函数，另一个阶段完成测度。二者都是经典操作。因此，本文的立场并不是提出一个新的完备化定理，而是**以范畴语言组织测度空间完备化的丹尼尔对应物**。第 1 节将详细讨论其与先前工作的关系。

目录

1 引言 **3**

1.1 背景.3 1.2 本文的组织与贡献.3 1.3 与先前工作的关系.5 1.3.1 关于预备章节的内容.5 1.3.2 关于基空间固定时的论证.6 1.3.3 关于态射与范畴.6 1.3.4 相关工作.7 1.3.5 本文的定位.9 1.3.6 关于文献综述的范围.9

2 预备：积分系统与丹尼尔扩张 1 **0**

2.1 记号.10 2.2 里斯空间与黎斯系统.11 2.3 积分与积分系统.12 2.4 满足单调收敛定理的积分系统.14 2.5 丹尼尔扩张.14 2.5.1 丹尼尔扩张的定义.14 2.5.2 扩展积分的构造.15 2.5.3 丹尼尔扩张满足单调收敛定理.17 2.6 Daniell闭积分系统范畴.18 2.6.1 将 Daniell 闭性分解为两个闭包条件.20 2.7 L^1 半范数与逼近.25 2.8 零函数与几乎处处相等.27 2.8.1 零函数与商.27 2.8.2 态射的几乎处处等价.28 2.9 与测度的关系.29 2.9.1 从测度到积分系统.29 2.9.2 Stone 条件.29 2.9.3 Daniell–Stone 表示定理.30

3 丹尼尔扩张的函子性与泛性质 **31**
3.1 丹尼尔扩张的函子性.31 3.2 主定理的证明.33 3.3 为何要求陪域满足 Daniell 闭性.35 3.3.1 丹尼尔扩张不是 ι 的左伴随.35 3.3.2 ι 拥有的另一种反射.36 3.3.3 这两种反射何时相同？.38 3.4 主定理的几乎处处版本.43 3.4.1 几乎处处版本中也不能省略 Daniell 闭性.46

4 作为算子的态射 **47**
4.1 算子态射.48 4.1.1 与基空间映射所给出的态射的关系.49 4.2 算子态射的丹尼尔扩张.50 4.2.1 压缩性.50 4.2.2 延拓定理.51 4.2.3 几乎处处范畴与主定理.52 4.2.4 该范畴所能看到的内容.53 4.3 与基空间映射作为态射的情形的关系.55 4.3.1 几乎处处范畴之间的一个函子.56 4.3.2 两个反射的交换性.56 4.3.3 两个主定理之间的关系.57

5 附录 **58**
5.1 左伴随存在的条件.58 5.2 基空间起什么作用？.59 5.2.1 基空间只在一个地方出现.59 5.2.2 按现状，遗忘基空间的方向行不通 . . . 60 5.2.3 正确的形式与进一步的前景.61

1 引言

1.1 背景

Daniell型积分理论 [6] 并不先构造测度，而是从函数里斯空间上的正连续线性泛函出发。从这一观点来看，积分严格来说是一种将基空间上的函数赋予实数的运算，并不要求在基空间上附加任何结构，例如 σ-代数。这一观点的优势在于，它将构造勒贝格积分所需内容中的一部分分离出来：哪些属于基空间一侧，以及函数空间和泛函一侧从何处开始。

然而，这一优势通常只被当作单个积分系统内部的论据来讨论。不同基空间上的积分系统如何相互关联，以及丹尼尔扩张如何体现这种关联，通常并未被明确作为讨论主题。本文旨在用范畴语言梳理这一方面。

请注意，对基空间不要求任何结构，也是这一观点在历史上的动机。Daniell 本人曾将这一构造应用于无限维基空间 [7]。

1.2 本文的结构与贡献

本文没有将例子集中放在一个独立的小节中，而是将每个例子紧接在其所检验的定义之后。积分系统的例子是例 2.3.3 和例 2.3.4；丹尼尔扩张能够还原勒贝格积分的例子是例 2.5.22；

算子态射包含随机矩阵的例子是例 4.1.10。在第 2.9 小节中，我们还通过 Stone 条件和 Daniell–Stone 表示定理确认，积分系统能够还原测度论。本文的结果并不使用该条件。也就是说，本文**不假设 Stone 条件，也不将测度表示作为理论的前提**。

第 2 节是预备内容。本节定义积分系统（X， L， I）、通过级数表示定义可积性、丹尼尔扩张（X， L^1， I^1），以及单调收敛定理和丹尼尔闭性，并列出后文所需的结论。**本节内容均非新成果，通常也引用先前工作中的证明**。

第 3 节是本文的主要内容。我们引入积分系统及其态射构成的范畴**Int** 、满足单调收敛定理的积分系统构成的全子范畴**MInt** ，以及由丹尼尔闭积分系统构成的进一步全子范畴**DInt**，并证明丹尼尔扩张定义了一个函子

$$\mathcal{D}\colon \mathbf{Int} \to \mathbf{DInt}$$

并且该函子是包含函子 ι_D 的左伴随。也就是说，**DInt** 是**Int** 的反射子范畴，而丹尼尔扩张是其反射子。

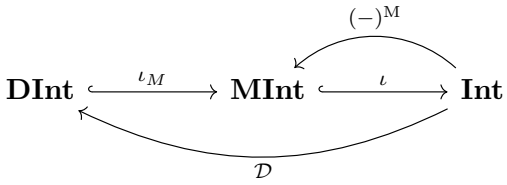
接着，我们通过一个有限集上的反例证明，本定理中对陪域施加丹尼尔闭性限制这一条件不可省略。也就是说，由丹尼尔扩张定义的函子$\iota_M \circ \mathcal{D} : \mathbf{Int} \to \mathbf{MInt}$ 并非 包含函子 ι: **MInt** →**Int**的左伴随。随后我们证明， ι 确实存在左伴随，但其反射子 并非丹尼尔扩张（定理 3.3.2）。我们探讨这两个反射何时相同。利用由 L 生成的 σ-代数 $\sigma(L)$，第二反射 L^{M} 包含于 L^1 的 $\sigma(L)$-可测部分中（命题 3.3.7）；在 Stone 条件下，二者相同（定理 3.3.10）。这就将两个反射相同刻画为（X， L， I）本身的一种性质（推论 3.3.14）。作为推论，对于由 $[0,1$ 上的阶梯函数和黎曼积分构成的积分系统， L^{M} 是全体博雷尔可测可积函数的集合，而 L^1 是全体勒贝格可积函数的集合，因此这两个反射并不相同（推论 3.3.15）。此外，对于任意积分系统， L^1 都可分解为其 $\sigma(L)$-可测部分与支撑于零测集上的部分之和（命题 3.3.9）。因此，**两个反射之间的差异恰好对应于支撑于零测集上的函数**；对于阶梯函数的情形，这体现为博雷尔与勒贝格之间的差异，即测度的完备化。此外，**无论是 对点的分离性，还是 Stone 条件，都不足以**使两个反射相同。剩下的问题是 Stone 条件是否为必要条件（问题 3.3.19）。最后，我们在将态射按零函数取商后得到的范畴中，证明一个形式相同的主定理（定理 3.4.4）。

在第 4 节中，我们将态射与基空间映射分离开来，并将其重新定义为里斯空间之间的正线性映射。这一做法基于 [1] 中在迭代积分背景下引入的算子，但去除了其中施加的序连续性。移除序连续性的原因见第 4 节开头及注 4.1.3。我们证明，在此范畴中，算子态射可以唯一地扩张到其商为巴拿赫空间的陪域（定理 4.2.4），并由此得到主定理的算子态射版本（定理 4.2.11）。**这里，唯一性并不能仅凭基空间映射的一致性自动推出，而是通过压缩性和稠密性得到的**。这与第 3 节的非几乎处处版本有所不同。该节的几乎处处版本（第 3.4 小节）也使用了相同的稠密性。我们还发现，由于扩张仅在相差零函数的意义下确定，因此将陪域对零函数取商便显得顺理成章（不过，我们并未证明“若不取商，扩张就无法确定”；见问题 4.2.7）。

最后，我们考察这两节之间的关系。从基空间映射范畴到算子态射范畴的函子，在取 ae-商之后变为

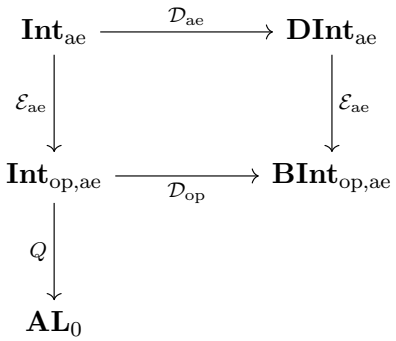
忠实函子，但不是满函子。由此可知，第 3 节主定理中的唯一性部分可由第 4 节的定理推出，而存在性部分则不能。我们还证明，算子态射范畴中的态射只能看到~商 L（命题 4.2.15）。因此，该范畴既不能区分基空间，也不能区分作为函数空间的实现；丹尼尔扩张所给出的是预 AL 空间的巴拿赫完备化（命题 4.2.17）。在这个范畴中，主定理的陪域子范畴应取所有商为巴拿赫空间的对象所构成的类，而不是所有 Daniell 闭对象所构成的类。后者并非同构闭，而前者是后者的同构闭包（命题 4.2.18）。**也就是说，只有第 3 节这一侧，才将抽象完备化与具体实现之间的区别保留为范畴结构**。这就是将两节分开讨论的原因。

本文的范畴与函子。在态射是基空间的映射这一侧，有两个反射。



两条弯箭头都是左伴随：$\mathcal{D} \dashv \iota_D$（其中 $\iota_D = \iota \circ \iota_M$）和 $(-)^{\mathrm{M}} \dashv \iota$，后者是 $A \mapsto A^{\mathrm{M}}$（定理 3.3.2）。**这两个反射并不相同**，这正是第 3.3 小节的出发点（注 3.3.1）。

将态射除以零函数，再将它们替换为算子态射，可得到下图。



左上角的范畴 $\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$ 是将 $\mathbf{Int}$ 的态射按几乎处处等价关系取商得到的（定义 2.8.9）。两条水平箭头都是反射（定理 3.4.4、定理 4.2.11），且该方块可交换（命题 4.3.3）。最后一个函子 Q 是忠实且满的（命题 4.2.15），这正是上文所说底行只考虑~商 L 的含义。

附录介绍证明中用到的伴随函子的一般理论，以及忘却基空间这一思想。

1.3 与早期工作的关系

1.3.1 关于预备章节的内容

第 2 节的内容遵循 [1]。关于用级数表示定义可积性、L^1 是里斯空间、I^1 是积分、丹尼尔扩张满足单调收敛定理，以及丹尼尔扩张的幂等性的内容，都见于那本书。正如那本书本身所述，这些步骤依次遵循 [2], ，而 [2] 则指出，

用这种方法构造完备 Daniell 空间，早已在 [4] 中介绍过。该方法本身源自 [5]。

也就是说，第 2 节所述内容的传承脉络如下：

$$[3],\ [5]\ \to\ [4]\ \to\ [2]\ \to\ [1]\ \to\ \text{this paper},$$

而**本文并未声称本节有任何创新**。请注意， [3] 与 [4] 同名，且早了十五年；它或许是级数构造最早的出处，但此处无法确认两者之间的关系。

还请注意，本文采用的级数表示是 [1], 的一种形式，其中明确写出了控制函数 φ_n ；表面上看，这与 [2]所采用的不含控制函数的形式不同。引理 2.5.3 证明了两者等价。

1.3.2 基空间固定时的论证

基空间 X 固定时，丹尼尔扩张的性质——即扩张是幂等的、关于扩张的包含关系具有单调性，以及它是“最小完备扩张”（按本文术语，即最小的丹尼尔闭扩张；见注2.6.2）——在 [1]中作为推论提出。 [2] 也作了类似说明。此外， [9] 和 [10], 以丹尼尔空间的“闭包”之名，系统地发展了这类构造。

因此，本文不讨论固定基空间时的极小性。本文所讨论的是基空间变化时能够得出什么结论。

1.3.3 关于态射与范畴

事实上， [1]中也出现了与积分系统之间的态射相对应的概念。在讨论迭代积分时，该书引入了线性映射 Λ ，它将集合 S 上的里斯空间 L 映到集合 T 上的里斯空间 M ，并且是正且序连续的；书中还指出，这些映射包括概率核、马尔可夫算子和转移概率。书中还提到，对于可积函数， Λ 可扩张为 L^1 （尽管其确定仅差一个零测集）。

本文尚需处理的部分，是将这些概念组织成一个范畴，并将丹尼尔闭性分解为两个闭包条件。具体而言，有以下四点。

1. 定义恒等态射和复合，并验证丹尼尔扩张满足函子定律。2. **分解的唯一性**。先前工作给出的是扩张的存在性 ，而不是经由给定态射分解的态射具有唯一性。唯一性只有在固定态射类之后才有意义；若不引入范畴，甚至无法提出这个问题。不过，唯一性是否涉及分析内容，取决于态射的选择。若直接将基空间映射视为态射，唯一性便由基空间映射的一致性形式地推出，因此并无实质内容。若将态射按零函数取商（第 3.4 小节），并采用算子态射（第 4 节），则需要借助 L^1 中 L 的稠密性来论证。

3. **将丹尼尔闭性分解为两个闭包条件**（定理 2.6.11）。只要 **DInt** 由条件 $L^1 = L$ 定义，主定理所说的也不过是 $\mathcal{D}$ 的不动点子范畴以 $\mathcal{D}$ 为其反射子，并未包含任何新内容。通过将丹尼尔闭性等价于

满足单调收敛定理，并且在零测集上的修改下保持闭性，

主定理采取如下形式：“进入由测度论中独立出现的两个条件所刻画的子范畴的反射子，由级数表示的具体构造给出”（注 3.2.2）。这并不是组装一个范畴的问题，而是一个具有分析内容的部分。不过，“之所以具有内容，是因为可以在不提及 L^1 的情况下将其写出”这一论证思路并不成立。原因见注 2.6.13。

4. 基于上述内容，说明 **DInt** 是一个反射子范畴。

第 3.3 小节讨论的四个结果，即说明丹尼尔扩张不是从 ι 到 $\mathbf{MInt} \to \mathbf{Int}$ 的左伴随的反例、进入 **MInt** 的反射的构造、通过由 L 生成的 σ-代数确定该反射的定理（定理 3.3.10），以及 L^1 的分解（命题 3.3.9），都是本文独立于上述内容得到的。将最后两个结果结合起来可知，两个反射之间的差异恰好等于支撑于零测集上的函数；对于阶梯函数的积分系统而言，这就是博雷尔与勒贝格之间的差异。这些结果连同定理 2.6.11，构成了本文具有技术性内容的部分。不过，它们都处于经典 Daniell 理论的邻近范围内，本文的主张仅是：**据作者所知，它们尚未被明确表述过**。

1.3.4 邻近工作

目前已有一系列尝试以范畴化方式处理积分理论的工作。 [24]将紧空间上的里斯表示定理重新表述为：给出连续函数空间的巴拿赫对偶的函子，与给出有符号贝尔测度空间的函子之间存在自然等价。

特别是， [23], 和 [22], 在一般范畴中处理其研究对象，从布尔代数出发，通过泛性质构造积分本身。对于布尔代数 $\mathcal{B}$，示性函数的赋值是进入简单函数空间的泛电荷，任意电荷都唯一地经由它分解；这种分解方式正是“简单函数的积分”所对应的内容。将布尔代数映射为简单函数空间的函子，是将环赋值为其幂等元所成布尔代数的函子的左伴随。

据我们所读到的已发表版本文本， [22], 这与本文的定理不同。二者的出发点不同（一个是布尔代数，另一个是由里斯空间和积分组成的对），泛性质的内容不同（一个是构造积分，另一个是扩展已有的积分系统），目标也不同（一个是简单函数空间，另一个是 L^1 可积函数空间）。本文中的泛性质并不产生积分；它是一种反射，将给定的积分系统映射为丹尼尔闭的积分系统。

此外，该论文明确划分了二者之间的界限。 LB所表示的是简单函数空间；紧接着在其定理 2.1 之后，论文指出，在满足适当完备性条件的情况下，可以将积分从简单函数扩展到更一般的可测函数，但并未实际进行这种扩展。至于单调收敛定理，论文仅在引言中提到，诸如单调收敛和控制收敛之类的收敛定理，应当意味着某种拓扑中的连续性。**本文所处理的恰恰是这一方面，即扩展**。该论文既未涉及丹尼尔积分、里斯空间，也未涉及 L^1 ，更没有关于反射子范畴或完备化的论述。其 MSC 分类同样不包括 28C05，即本文的研究主题。

不过，我们尚未取得 [23] （219 页）的文本。 [22] 称，一份预印本基于 Linton 方法，对特殊范畴中的情形进行了处理，其方式类似于

教授资格论文；由此可以看出，该论文研究的是上述相同的主题。即便如此，我们仍记录如下：**不能完全排除其中包含同类结果的可能性**。

近年来，从范畴论角度研究测度论和概率论的工作也十分活跃。 [26] 将布尔 σ-代数和单调 σ-完备 C*-代数视为抽象可测空间，并构造了它们与可测空间范畴之间的函子、伴随和等价。然而，该论文研究的是可测空间，而非带有测度或积分的对象。[28] 构造了一个由有序巴拿赫空间和正则算子组成的对称幺半闭范畴，并将其用于概率程序语义。[29], 受概率编程语言语义的启发，发展了一套以佩蒂斯积分为模型的锥上的积分理论，并证明其态射为保积分线性映射的范畴是线性逻辑的一个模型。它的对象和态射与本文中的不同，但同样选择将积分保持作为态射的条件。T. Fritz 向作者指出了这篇参考文献；作者只读过其摘要，未对其内容作详细比较。

此外，本文通过将 **Int** 中的对象除以零函数而得到的赋范空间，是某个空间的完备化前形式；该空间的范数在正锥上具有可加性，也就是说，它是一个抽象Lebesgue空间（AL-空间）。从里斯空间和正线性泛函构造这一完备化的操作本身是标准的，例如可见[18]。

事实上，“完备化是一个反射子”这类论断在有序向量空间理论中早已司空见惯。例如， [19] 以函子的方式处理戴德金完备化，而 [20]则明确将其表述为一个反射子。**然而，这些讨论的是戴德金完备化，即仅由序结构决定的完备化；它与本文中的丹尼尔扩张是不同的完备化，后者取决于积分** I。 对于阶梯函数的积分系统，戴德金完备化沿着序的方向扩充空间，而丹尼尔扩张所得到的则是勒贝格可积函数空间。

在测度论方面，与本文反射相对应的所有要素在经典理论中都已具备。 [12] 在条目 212C 中构造了测度空间的完备化，并在 212D 中指出，该完备化是完备的、扩展了原测度；当且仅当原测度已经完备时，它才与原空间重合。该扩展在完备定义域上的唯一性见 212 E(c)，积分一致性见 212F(b)。至于态射类，逆测度保持函数的定义见 234A，完备化保持该类见 234B(a)，该类在复合下闭合见 234B(g)，沿此类映射的积分变换见 235G。

然而，那本书并未将这些要素组装成一个函子、一个伴随或一个反射。事实上，相关的第21章和第23章中没有任何地方出现“函子”、“伴随”、“反射”或“范畴”这几个词。也就是说，第1.3.5小节所采取的立场——**这些要素是经典的，而将它们组装起来是本文的贡献**——在测度论方面也得到了证实。

请注意，完备化是否构成反射子，很大程度上取决于态射类的选择。 [19] 指出，通常的戴德金完备化本身并不具有函子性，因而需要添加结构； [20] 的反射定理同样是在保持已有上确界的态射范畴中陈述的。正因如此，本文准备了两种态射选择，并在第4.3.3小节讨论它们之间的关系。本文主定理所陈述的并非抽象完备化的存在性，而是**丹尼尔扩张的具体构造将该完备化实现为同一基集上的函数空间，并且还扩展了态射**。当丹尼尔闭性分解为测度论中独立出现的两个条件时，这一区别便具有意义：单调收敛

定理和零测集上的修改（定理 2.6.11）。在这种分解下，主定理的形式是：“由这两个条件所确定的子范畴中的反射子，由级数表示的具体构造给出”（注 3.2.2）。第 3 节的表述旨在确保这一点不被忽略。

1.3.5 本文的定位

基于以上内容，我们坦诚地说明本文的定位。

第 3.3 小节的结果将丹尼尔扩张分为以下两个阶段（注 3.3.13）。

$$L \quad \subset \quad L^{\mathrm{M}} = L^{\sigma} \quad \subset \quad L^{1} = L^{\mathrm{M}} + \mathcal{Z}_I$$

第一阶段是取出关于由 L生成的σ-代数可测的可积函数，第二阶段则是对测度进行完备化。**这两者都是经典操作，而且正是本文自身的定理证明了它们确实如此**。

因此，本文并非“一个不同于抽象完备化的新完备化定理”。简而言之，本文是

以范畴语言组织的测度空间完备化的丹尼尔对应物。

截至小节 1.3 所列出的四项贡献，正是对这一组织结构的分解。丹尼尔闭性的分解（定理 2.6.11）给出了第一阶段和第二阶段的划分；第二反射的确定（定理 3.3.10、命题 3.3.9）指出了每个阶段的目标；将其组装成一个范畴，则将这一复合重新表述为一个反射子；而关于算子范畴的观察，则表明在实现变得不可见之前，抽象化可以推进到什么程度。

与其掩饰这一立场，不如更准确地将其凸显出来；这也能让读者更容易看清哪些内容是经典的，哪些不是。

1.3.6 关于文献综述的范围

撰写本文时，我们通过 zbMATH Open 检索了 MSC 28C05（通过线性泛函进行的积分理论）与 18-XX（范畴论）的交集。在这一范围内，我们没有发现任何将丹尼尔扩张确定为映入丹尼尔闭积分系统的反射的研究。检索到的文献是上文列出的 [24] 和 [23], ，以及关于巴拿赫格的截面空间的研究；后者的主题与本文不同。

我们也查找了上述脉络，并通过查阅 [4] 确认，该论文介绍的正是级数构造本身，不涉及极小性、普遍性或范畴论内容。我们还搜索了将抽象勒贝格空间和里斯空间的完备化视为伴随或反射的研究；检索结果都与戴德金完备化有关，没有发现以丹尼尔扩张为对象的研究。

关于 [9] ，我们查阅了原书。我们核查的是第 1 章第 4 节（闭丹尼尔空间），相关结果记载于备注 2.6.17。

不过，我们未能进行更全面的文献调查。我们明确说明了哪些内容尚未核查。

- 关于 [9], **第 4 章（Daniell 空间的扩张与积分）、第 5 章第 3 节和第 4 节（可测性与可积性），以及本卷末尾的历史注记尚未核查**。根据目录和索引所能作出的判断，第 4 章讨论扩张族及其序结构，这使其内容与第 3.3 小节较为接近。尤其是其中的定理

4.1.10 根据索引标题，是一个关于添入例外函数这一运算的主定理，可能与命题 3.3.9 属于同一类型的断言。同样，第 5 章第 4 节讨论可测性与可积性之间的关系，是应当与定理 3.3.10 进行比较的部分。

- [10] 日本只有少数图书馆收藏该书，我们无法查阅其内容。
- 我们未能获得 [23], [4] 和 [3], 的文本，对其内容的了解仅基于 zbMATH 的评论，或尚未得到确认。

因此，**对于第 3.3 小节的结果，尤其是命题 3.3.9 和定理 3.3.10，与先前工作的比较并不完整**。如果本文的全部或部分结果已经为人所知，作者将不胜感激地请获悉相关情况。

2 Pr预备章节：积分系统与丹尼尔扩张

第 2 节是一个预备章节，旨在确定下文所使用的定义、记号和论述。其内容遵循 [1], ，其中丹尼尔扩张的构造则遵循 [2], ，正如该书本身所述。**第 2 节中的内容均非创新**。

为控制篇幅，第 2 节通常只陈述定义和断言，证明则参见上述文献。这里有两个例外。

- 引理 2.5.3（采用支配函数与不采用支配函数的定义等价）。本文采用的级数表示形式，表面上不同于 [1], 所采用的形式，因此我们给出证明，以衔接这两种形式。

- 引理 2.6.6（丹尼尔扩张的 Daniell 闭性）。该引理是第 3 节主定理的关键，因此我们给出证明。

2.1 记号

定义 2.1.1. 当序列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 单调递减且 $\lim_{n\to\infty} a_n$收敛到实数 a时，我们记作

$$a_n \downarrow a.$$

同样，当序列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 单调递增且 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 收敛到实数 a时，我们记作

$$a_n \uparrow a.$$

定义 2.1.2. 设 X 为一个集合， A为 X的子集。函数

$$1_A : X \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

称为子集 A[1] 的**示性函数** 。

定义 2.1.3. 设 X 是一个集合。我们在 X 上的函数族 $\mathbb{R}^X$ 上定义一个序：

$$f \leq g \iff \forall x \in X \ f(x) \leq g(x)$$

对所有 $f, g \in \mathbb{R}^X$。

[1]若 $A = \emptyset$，则对每个 $x \in X$ 都有 $x \notin \emptyset$，因此 $1_\emptyset$ 是恒等于 0 的函数。

定义 2.1.4. 我们在实数上定义运算 $\wedge, \vee$

$$a \wedge b := \min\{a, b\}$$
$$a \vee b := \max\{a, b\},$$

并且，对于集合 X 和 f， $g \in \mathbb{R}^X$，我们定义函数 $f \wedge g$ 和 $f \vee g$ 如下:

$$(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$$
$$(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x).$$

2.2 里斯空间与 Riesz 系统

定义 2.2.1. 设 X 是一个集合， $L \subset \mathbb{R}^X$ 是一个 $\mathbb{R}$-向量空间[2]。我们称 L 是 X[3] 上的**里斯空间**，如果

$$f \wedge g \in L$$
$$f \vee g \in L$$

对所有 f， $g \in L$均成立。

注 2.2.2 （术语说明）。 上述定义针对 $\mathbb{R}^X$ 的子空间，并要求其在逐点序下对格运算封闭。这样的 L 在抽象意义上也是一个里斯空间（即一个构成格的有序向量空间），其序就是逐点序。也就是说，本文中的“ X上的里斯空间”是抽象里斯空间的一个特例。

本文中，**每当我们附加“在 X上”时，总是指** $\mathbb{R}^X$ 的一个子格。抽象意义上的里斯空间只在附录 5.2 中出现，为避免混淆，我们称之为**抽象 Riesz 空间**。

这种区别并非形式上的，因为并非每个抽象 Riesz 空间都能在某个 X 上实现为一个 Riesz 空间。事实上，如果 L 是 $\mathbb{R}^X$ 的子格，那么在一点 x 处的求值给出了从 L 到 $\mathbb{R}$ 的 Riesz 同态，并且这些同态能够区分 L 中的元素。但是根据命题 5.2.2，在 $L^1[0,1]$ 上不存在非零 Riesz 同态 $L \to \mathbb{R}$。因此， $L^1[0,1]$ 无法在任何集合 X 上实现为一个 Riesz 空间。

定义 2.2.3。 设 X 为一个集合，且 L 为 X 上的一个 Riesz 空间。这一对对象

$$(X, L)$$

称为集合 X 上的一个**Riesz系统** 。Riesz系统 (X， L) 中的集合 X 称为该 Riesz 系统 (X， L) 的**基空间** 。

定义 2.2.4。 设 (X， L) 和 (Y， M) 分别是集合 X 和 Y 上的 Riesz系统。一个**Riesz 系统态射**

$$F : (X, L) \to (Y, M)$$

是一个映射 $F : Y \to X$ ，使得

$$F^* f := f \circ \underline{F} \in M$$

对每个 $f \in L$ 都成立。[4]

[2]我们允许 $X = \emptyset$。在这种情况下， $\mathbb{R}^X = \{\emptyset\}$ 是零维向量空间，而 ($\emptyset$， $\{0\}$， 0) 是空集上的唯一积分系统。本文的定义和断言在这种情况下仍然有意义，并且可以直接验证。[3]本文所称的里斯空间，在一些书籍中称为向量格。我们全文使用“里斯空间”这一术语。[4]严格来说，态射是由定义域、陪域和基空间映射组成的三元组。下文固定定义域和陪域，并用基空间映射来表示态射。

引理 2.2.5. 1. 对于集合 X 上的每个黎斯系统 (X, L)，恒等映射 $\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X : X \to X$ 诱导出一个 Riesz 系统态射 $\mathrm{id}^{(X,L)} : (X, L) \to (X, L)$。

2. 对于任意两个 Riesz 系统态射 $F : (X, L) \to (Y, M)$ 和 $G : (Y, M) \to (Z, N)$，映射 $F \circ G : Z \to X$ 诱导出一个 Riesz 系统态射 $G \circ F : (X, L) \to (Z, N)$。

证明。 1. 显然，因为对于每个 $f \in L$ 都有 $f \circ \mathrm{id}_X = f \in L$。

2. 根据假设，对于每个 $f \in L$，我们都有 $F^* f \in M$。因此，再次根据假设，$(G \circ F)^*(f) = f \circ (F \circ G) = (f \circ F) \circ G \in N$，这正是所要证明的断言。

□

定义 2.2.6。 以 Riesz系统为对象、以 Riesz 系统态射为态射的范畴记作

$$\mathbf{RieszSys}$$

并称为**Riesz 系统范畴**。

2.3 积分与积分系统

定义 2.3.1. 设 X 是一个集合，且 (X, L) 是定义在 X 上的 Riesz系统。我们称一个 $\mathbb{R}$-线性映射

$$I : L \to \mathbb{R}$$

是 Riesz系统 (X, L) 上的一个**积分**，如果满足以下两个条件。

- 对于每个 $f \in L$，若 $f \geq 0$，则 $I(f) \geq 0$。
- 对于每个函数序列 $\{f_n\} \subset L$，若 $f_n(x) \downarrow 0$ 对所有 $x \in X$ 都成立，则 $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$。

定义 2.3.2. 设 (X, L) 是定义在集合 X 上的 Riesz系统，且 $I : L \to \mathbb{R}$ 是在 (X, L) 上的一个积分。三元组

$$(X, L, I)$$

称为集合 X 上的**积分系统**。

例 2.3.3 （计数）。 设 $X = \mathbb{N}$，并设 L 为在有限多个 n 之外为零的所有函数的集合。显然，L 是 X 上的里斯空间。令

$$I(f) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

右端是有限和，且 I 是 (X, L) 上的积分。事实上，正性显然成立；如果 $f_n \downarrow 0$，则 f_n 的支集包含于 f_1 的支集内，而后者是有限集，因此 $I(f_n) \to 0$。

例 2.3.4 （阶梯函数与黎曼积分）。 设 $X = [0, 1)$，并设 L 为半开区间 $[a, b) \subset [0, 1)$ 的示性函数的所有有限个线性组合的集合，即 X 上的所有阶梯函数的集合。则 L 是 X 上的里斯空间。取 I 为黎曼积分

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\, dx,$$

三元组 (X, L, I) 是一个积分系统。

正性显然。连续性，即当 $f_n(x) \downarrow 0$ 时，$I(f_n) \to 0$，对每个 $x \in X$ 都成立；这一点可由区间在可数分割下长度的可加性推出。证明见 [2],§2。这个例子的丹尼尔扩张见例 2.5.22。

注 2.3.5. 将基空间取为 $[0,1)$ 而非 $[0,1]$ 是有原因的。若取 $X=[0,1]$，并由半开区间的示性函数构造 L，那么 L 的每个元素在 $x=1$ 处都为零。于是，对于每一种级数表示，$\sum_n \varphi_n(1)=0<+\infty$，因此级数表示的条件 (3) 总是在 $x=1$ 处施加，而 L^1 的每个元素都满足 $f(1)=0$。这与 $[0,1]$ 上所有勒贝格可积函数构成的集合不同。

这一现象是由级数表示的条件 (3) 所导致的：该条件的设计只在控制函数之和收敛的点处约束取值。如果基空间中存在一点，使得 L 的所有元素都被迫取相同的值，那么丹尼尔扩张在该点就会不必要地变得过于稀疏。

定义 2.3.6. 设 (X,L,I) 和 (Y,M,J) 分别是集合 X 和 Y 上的积分系统。积分系统**态射**

$$F:(X,L,I)\to(Y,M,J)$$

是黎斯系统态射 $F\colon (X,L)\to(Y,M)$，满足

$$J(F^*f)=I(f)$$

对每个 $f\in L$ 都成立。

引理 2.3.7. 1. 对于集合 X 上的任意积分系统 (X,L,I)，恒等映射 $\mathrm{id}_X:X\to X$ 诱导出一个积分系统态射 $\mathrm{id}_{(X,L,I)}\colon (X,L,I)\to(X,L,I)$。

2. 对于任意两个积分系统态射 $F\colon (X,L,I)\to(Y,M,J)$ 和 $G\colon (Y,M,J)\to(Z,N,K)$，映射 $F\circ G\colon Z\to X$ 诱导出一个积分系统态射 $G\circ F\colon (X,L,I)\to(Z,N,K)$。

证明。我们已经看到，恒等映射诱导出一个黎斯系统态射 $\mathrm{id}_{(X,L)}$。此外，对于每个 $f\in L$，$f\circ \mathrm{id}_X=f\in L$ 且 $I(f\circ \mathrm{id}_X)=I(f)$，因此恒等映射显然诱导出一个积分系统态射 $\mathrm{id}_{(X,L,I)}\colon (X,L,I)\to(X,L,I)$。

我们已经看到，$F\circ G\colon Z\to X$ 确定了一个黎斯系统态射，其将 (X,L) 映射到 (Z,N)。此外，根据积分系统态射的假设，

$$K((G\circ F)^*(f))=K(G^*(F^*(f)))=J(F^*(f))=I(f).$$

因此，$F\circ G\colon Z\to X$ 诱导出一个积分系统态射 $G\circ F\colon (X,L,I)\to(Z,N,K)$。

□

定义 2.3.8。对象为积分系统、态射为积分系统态射的范畴记作

Int

并称为**积分系统范畴**。

注 2.3.9（关于态射的方向）。注意，态射 $F\colon (X,L,I)\to(Y,M,J)$ 所对应的基空间映射是 $F\colon Y\to X$，因此方向是相反的。用测度论的语言来说，条件 $J(f\circ F)=I(f)$ 表示 F 将 J 推前为 I，也就是说，F 是一个保测映射 $(Y,J)\to(X,I)$。

因此**Int 是通常以保持测度的映射为态射的范畴的对偶范畴**。本文采用这一方向，是因为函数的拉回是反变的，而我们希望将丹尼尔扩张视为协变函子。偏好使用通常约定的读者，只需将下文中的“反射”替换为“余反射”，将“左伴随”替换为“右伴随”。

2.4 满足单调收敛定理的积分系统

定义 2.4.1. 若集合 X 上的积分系统 (X, L, I) 满足单调收敛定理，则称其**满足单调收敛定理**；也就是说，对于每个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 以及每个单调不减序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$，

$$f_n(x) \uparrow f(x) \quad (\forall x \in X), \qquad \sup_n I(f_n) < +\infty$$

蕴含

$$f \in L, \qquad I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

这一条件是对经典的 Beppo Levi 定理（1906 年）进行公理化表述，[9] 并将满足该条件的三元组称为**闭的**（见其定义 1.4.1）。与该书中术语的对应关系汇总于备注 2.6.17。

定义 2.4.2。 由满足单调收敛定理的积分系统组成的范畴 **Intof** 积分系统的满子范畴记作

MInt

并称为**满足单调收敛定理的积分系统范畴**。

2.5 丹尼尔扩张

本小节的内容依据 [1]。正如该书所述，L^1 是里斯空间这一事实，以及 I 可扩张至 L^1 这一事实，均可通过 [2]的步骤得到。**本小节中的内容并无新意；在此列出，是为了明确后续小节中使用的定义、记号和断言**。因此，下面只陈述定义和断言，证明则参见上述文献。

2.5.1 丹尼尔扩张的定义

定义 2.5.1。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。给定函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，若存在函数序列 $\{f_n\} \subset L$和 $\{\varphi_n\} \subset L$满足以下条件，则称序列对 $\{f_n\}, \{\varphi_n\}$ 为函数 f 的**级数表示**，而具有级数表示的函数称为关于积分系统 (X, L, I)**可积**。

1. 对每个 n，$|f_n| \le \varphi_n$；2. $\sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) < +\infty$；3. 对每个 $x \in X$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) < +\infty$，则 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$。

我们将函数 f 的级数表示 $\{f_n\}, \{\varphi_n\}$ 写作

$$f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n.$$

定义 2.5.2. 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的一个积分系统。我们用以下记号表示关于积分系统 (X, L, I) 可积的所有函数所构成的集合：

$$L^1 := \{f \in \mathbb{R}^X \mid f\text{相对于积分系统（}X\text{、}L\text{、}I\text{）是可积的}\}$$

[5].

[5] L^1 也取决于 I，但在本文中，我们从不在同一个里斯空间 L 上定义多个积分。因此，我们将 L^1 视为由 L 确定的对象。若可能产生歧义，我们会明确写出，例如 $(L^{\mathrm{M}})^1$。指代对象本身时，我们使用函子记号 $\mathcal{D}(X, L, I) = (X, L^1, I^1)$。

定义 2.5.1 采用了明确写出控制函数 φ_n 的形式，但这与 [2] 中采用的不含控制函数的形式等价。下文不会使用这一形式，但我们对此加以陈述，以便明确其与文献的对应关系。

引理 2.5.3（有无控制函数的定义等价）。设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统，且 $f: X \to \mathbb{R}$。那么以下条件等价。

(i) f 按照定义 2.5.1 的意义是可积的。也就是说，存在 $\{f_n\}, \{\varphi_n\} \subset L$，使得 $|f_n| \le \varphi_n$ 且 $\sum_n I(\varphi_n) < +\infty$，从而 $f(x) = \sum_n f_n(x)$ 对每个满足$\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$的 x 都成立。

(ii) 存在 $\{g_m\} \subset L$，使得 $\sum_m I(|g_m|) < +\infty$，从而 $f(x) = \sum_m g_m(x)$ 对每个满足 $\sum_m |g_m(x)| < +\infty$的$x$ 都成立。

证明。对于 $(ii) \Rightarrow (i)$，取 $f_n := g_n$ 和 $\varphi_n := |g_n|$。由于 L 是一个里斯空间，我们有 $|g_n| \in L$，而 $\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$ 恰好就是 $\sum_n |g_n(x)| < +\infty$。

我们将ow $(i) \Rightarrow (ii)$。令 $\psi_n := \varphi_n - |f_n| \ge 0$，使得 $\psi_n \in L$。定义序列 $\{g_m\}$ b y

$$f_1,\ \psi_1,\ -\psi_1,\ f_2,\ \psi_2,\ -\psi_2,\ f_3,\ \psi_3,\ -\psi_3,\ \dots.$$

首先，由于 I 保持序，$I(|f_n|) \ge 0$，并且

$$\sum_m I(|g_m|) = \sum_n \big(I(|f_n|) + 2I(\psi_n)\big) = \sum_n \big(2I(\varphi_n) - I(|f_n|)\big) \le 2\sum_n I(\varphi_n) < +\infty.$$

接下来，若 x 满足 $\sum_m |g_m(x)| < +\infty$，则

$$\sum_m |g_m(x)| = \sum_n \big(|f_n(x)| + 2\psi_n(x)\big) \ge \sum_n \big(|f_n(x)| + \psi_n(x)\big) = \sum_n \varphi_n(x)$$

得到 $\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$。因此，根据条件 (i)，$f(x) = \sum_n f_n(x)$。另一方面，$\sum_m g_m(x)$ 绝对收敛，因此可以任意重排和重新分组，并且 ψ_n 与 $-\psi_n$ 抵消，得到

$$\sum_m g_m(x) = \sum_n f_n(x) = f(x).$$

因此 (ii) 成立。 □

2.5.2 扩展积分的构造

引理 2.5.4. 设 X 是一个集合，$L \subset \mathbb{R}^X$ 是一个 $\mathbb{R}$-向量空间。那么，对于每个 $f \in L$，条件 $|f| \in L$ 等价于 L 在 X 上是一个里斯空间。

引理 2.5.5. 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的积分系统，且 $f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$。那么，对于每个 $x \in X$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) < +\infty$，则 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 绝对收敛。

定理 2.5.6. 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的积分系统。那么，相对于积分系统 (X, L, I) 可积的函数族 L^1 是 X 上的一个里斯空间。

引理 2.5.7。设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。那么，对于所有$f, g \in L$，若 $f \le g$，则 $I(f) \le I(g)$。

引理 2.5.8。设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。那么，对于每个 $f \in L$，$|I(f)| \le I(|f|)$。

引理 2.5.9. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。对于关于积分系统 (X, L, I) 可积的每个函数 $f \in L^1$ 及其每一种级数表示 $f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$，和 $\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ 都绝对收敛。

引理 2.5.10 （积分的连续性）. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统，设 $\{f_n\}$ 是 L 中的一个函数序列，且设 $f \in L$。那么，若对于每个 $x \in X$， $f_n(x) \uparrow f(x)$，则有 $I(f_n) \uparrow I(f)$。

引理 2.5.11。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。那么，给定函数恒等于 0 的一个级数表示 $0 \overset{\eta_n}{\simeq} \sum h_n$ ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(h_n) = 0.$$

引理 2.5.12。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。那么，对于任意两个级数表示

$$f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$$
$$f \overset{\psi_n}{\simeq} \sum g_n$$

相对于积分系统 (X, L, I) 的可积函数 $f \in L^1$，我们有$\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I(g_n)$。

定义 2.5.13。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。对于每个相对于积分系统 (X, L, I) 可积的函数 $f \in L^1$，选取一个级数表示$f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$。那么，绝对收敛和（引理 2.5.9）

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$$

根据引理 2.5.12，该值不依赖于级数表示的选择。我们将此值定义为 $I^1(f)$。

引理 2.5.14. 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的积分系统。那么映射 $I^1\colon L^1 \to \mathbb{R}$ 是定义在里斯空间 L^1 上的 $\mathbb{R}$-线性映射。

引理 2.5.15 （正函数级数表示的截断估计）. 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的积分系统，并设 $f \in L^1$ 是一个满足$f \geq 0$的可积函数。选取 f 的一个级数表示 $f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$ ，并对每个 $N \geq 1$，令

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} f_k, \qquad h_N := S_N \vee 0, \qquad q_N := S_N \wedge 0.$$

Then

$$I(|q_N|) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} I(\varphi_k), \qquad |I^1(f) - I(h_N)| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} I(\varphi_k)$$

成立。特别地，当 $N \to \infty$ 时， $I(h_N) \longrightarrow I^1(f)$。

引理 2.5.16. 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的积分系统，并设 $f \in L^1$。那么 $f \geq 0$ 蕴含 $I^1(f) \geq 0$。

引理 2.5.17. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统，并设 $f \in L^1$。那么，若$f \geq 0$，对每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个 f 的级数表示 $f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$ ，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) \leq I^1(f) + \varepsilon.$$

引理 2.5.18 （将级数表示展平为一个序列）. 设 (X, L, I) 是集合 X上的积分系统。假设对每个 $n \geq 1$，都给出了一个 $u_n \in L^1$ 的级数表示 $u_n \overset{\varphi_n}{\simeq}{}_{,}{}^{k} \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} I(\varphi_{n,k}) < +\infty.$$

Put

$$A := \left\{ x \in X \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n,k}(x) < +\infty \right\}.$$

那么，对于每个 $x \in A$， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都绝对收敛。

进一步假设函数 $u : X \to \mathbb{R}$ 满足对于 $x \in A$ 有 $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x$。取一个双射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sigma(m) = (n_m, k_m)$，并令 $\widetilde{g}_m := g_{n_m,\, k_m}$，以及 $\widetilde{\varphi}_m := \varphi_{n_m,\, k_m}$。那么$_{\sim}$ $u \overset{\varphi_m}{\simeq} \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{g}_m$ 是 u 的级数表示。特别地， $u \in L^1$ 并且

$$I^1(u) = \sum_{n=1}^{\infty} I^1(u_n)$$

成立，且右侧绝对收敛。

定理 2.5.19。 设 (X, L, I) 是定义在集合 X 上的一个积分系统。那么映射 $I^1 : L^1 \to \mathbb{R}$ 是定义在 X 上的里斯空间 L^1 上的积分。

引理 2.5.20. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统，且 $f \in L$。则 $f \in L^1$ 且 $I^1(f) = I(f)$。

定义 2.5.21. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。积分系统 (X, L^1, I^1) 称为积分系统 (X, L, I) 的**丹尼尔扩张** 。

例 2.5.22 （勒贝格积分）。 考虑例 2.3.4 中的积分系统，即由 $[0, 1$ 上的阶梯函数和黎曼积分构成的积分系统 (X, L, I)。那么，其丹尼尔扩张 (X, L^1, I^1) 与 $[0, 1$ 上所有勒贝格可积函数组成的集合以及勒贝格积分相一致。

也就是说，第 2 节的构造恢复了勒贝格积分。级数表示的可积性定义正是由此而来；详情请参见 [5]和 [2],§2。

推论 2.5.23。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统，(X, L^1, I^1) 是它的丹尼尔扩张。那么，恒等映射 id_X 诱导出一个积分系统态射$i_X : (X, L, I) \to (X, L^1, I^1)$。

2.5.3 丹尼尔扩张满足单调收敛定理

引理 2.5.24 （非负级数的逐项积分）。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统，(X, L^1, I^1) 是它的丹尼尔扩张。设 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1$ 满足$h_k \geq 0$ 以及 $\sum_k I^1(h_k) < \infty$。于是，令

$$h(x) := \begin{cases} \sum_n h_n(x) & \text{if } \sum_n h_n(x) \text{ converges} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

我们有 $h \in L^1$ 和 $I^1(h) = \sum_k I^1(h_k)$。

引理 2.5.25。 设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统。则其丹尼尔扩张 (X, L^1, I^1) 满足单调收敛定理（定义 2.4.1）。

2.6 Daniell闭积分系统的范畴

定义 n 2.6.1。 我们称集合 X 上的积分系统 $(X,\ L,\ I)$ 为**丹尼尔闭** if

$$L^1 = L.$$

注2.6.2（关于术语）。 这一条件通常称为“完备性”。我们为它另取一个词，因为**“complete”在本文中有三种含义**:

- $L^1 = L$ （当前定义）；
- 关于范数 $\|\cdot\|_I$ 的完备性（定理 2.7.6）；
- 测度的完备化（第 3.3 小节，注 3.3.16）。

这三个条件彼此不同，而在本文中三者都位于同一小节。因此，我们将第一个条件称为**丹尼尔闭**。这一名称源自 [9] 和 [10], ，它们使用了 Daniell 空间的“闭包”一词。

这也会与其他书籍中的“完备”一词发生冲突。 [9] 将“完备”用于夹逼条件（$f \le h \le g$ 与 $\ell(f) = \ell(g)$ 一起蕴含 h 也属于其中），这三个条件都不属于上述三者，而是我们的定义 2.6.10。该书还将“完备”用于序完备格以及测度空间的完备化。术语之间的对应关系汇总于备注 2.6.17 中。

然而，在**标题**中，**我们遵循惯例，使用“完备性”一词**。在本文之外，这是 $L^1 = L$ 的标准术语，而三种含义并存则是本文内部的问题。在正文和摘要中，我们始终使用“丹尼尔闭”。

注 2.6.3。 Daniell闭积分系统自动满足单调收敛定理。事实上，根据引理 2.5.25，丹尼尔扩张 $(X,\ L^1,\ I^1)$ 满足单调收敛定理；又由于 $L^1 = L$ 和 $I^1 = I$ （引理 2.5.20 ），系统 $(X,\ L,\ I)$ 本身也满足单调收敛定理。

因此，我们可以将 **DInt** 定义为**MInt**的一个满子范畴。下文将单调收敛定理和 Daniell 闭性并列列出，是为了便于看出它们与**MInt** 的关系。

定义 2.6.4。 由**MInt** 这一积分系统范畴中满足单调收敛定理的 Daniell闭积分系统组成的满子范畴，记作

$$\mathbf{DInt}$$

并称为**Daniell闭积分系统范畴**。

定义2.6.5。 我们将上述三个范畴之间的包含函子记作

$$\begin{aligned} \iota &: \mathbf{MInt} \to \mathbf{Int}, \\ \iota_D &: \mathbf{DInt} \to \mathbf{Int}, \\ \iota_M &: \mathbf{DInt} \to \mathbf{MInt} \end{aligned}$$

分别如此。它们都是满子范畴的包含，且 $\iota_D = \iota \circ \iota_M$。

引理 2.6.6. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统，且 (X, L^1, I^1) 是其丹尼尔扩张。则积分系统 (X, L^1, I^1) 是丹尼尔闭的。

这一表述本身在 [1] 中作为推论出现，并非新内容。然而，由于本文在第 3 节的主定理中实质性地使用了它，具体形式为“分解的陪域是 Daniell 闭的”，因此我们仅在本小节中给出证明。

证明。我们已经验证单调收敛定理成立，因此只需证明 $(L^1)^1 = L^1$。由于 $L^1 \subset (L^1)^1$ 已经得到证明（引理 2.5.20），所以只需证明 $(L^1)^1 \subset L^1$。

令 $f \in (L^1)^1$。也就是说，存在函数序列 $\{\varphi_n\}, \{f_n\} \subset L^1$，使得

1. $|f_n| \le \varphi_n$；2. $\sum_{n=1}^{\infty} I^1(\varphi_n) < +\infty$；3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) < +\infty$，则 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$。

对每个 n，令

$$f_n^+ := f_n \vee 0, \qquad f_n^- := (-f_n) \vee 0.$$

由于 L^1 是里斯空间，因此有 $f_n^+, f_n^- \in L^1$，并且

$$f_n = f_n^+ - f_n^-, \qquad |f_n| = f_n^+ + f_n^-.$$

此外，由于 I^1 和 $|f_n| \le \varphi_n$ 的正性，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} I^1(f_n^+) + \sum_{n=1}^{\infty} I^1(f_n^-) &= \sum_{n=1}^{\infty} I^1(|f_n|) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} I^1(\varphi_n) < +\infty.\end{aligned}$$

现在定义函数 $p, q: X \to \mathbb{R}$，如下

$$p(x) := \begin{cases} \sum_n f_n^+(x) & \text{if } \sum_n f_n^+(x) \text{ converges,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$q(x) := \begin{cases} \sum_n f_n^-(x) & \text{if } \sum_n f_n^-(x) \text{ converges,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由引理 2.5.24 可得 $p,\ q \in L^1$。

Put

$$A := \left\{ x \in X \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) < +\infty \right\}.$$

若 $x \in A$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) < +\infty,$$

因此，定义 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的两个级数都收敛。于是，根据原级数表示的条件，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = p(x) - q(x) \qquad (x \in A).$$

令

$$r := f - (p - q),$$

函数 r 在 A 上为零。

对每个 n 选择 $\varepsilon_n > 0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty.$$

由于 $\varphi_n \geq 0$，根据引理 2.5.17，我们可以为每个 n 选择一个级数表示

$$\varphi_n \overset{\psi_{n,k}}{\simeq} \sum_k g_{n,k}$$

满足条件的 φ_n

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(\psi_{n,k}) \leq I^1(\varphi_n) + \varepsilon_n.$$

因此

$$\sum_{n,k} I(\psi_{n,k}) \leq \sum_n I^1(\varphi_n) + \sum_n \varepsilon_n < +\infty.$$

对于每个 n,

$$0 \overset{\psi_{n,k}}{\simeq} \sum_k 0$$

是恒等于 0 的函数的级数表示。令

$$B := \left\{ x \in X \;\middle|\; \sum_{n,k} \psi_{n,k}(x) < +\infty \right\}.$$

如果 $x \in B$，那么对于每个 n，$\sum_k \psi_{n,\,k}(x) < +\infty$，因此

$$\varphi_n(x) = \sum_k g_{n,k}(x)$$

and

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \sum_k |g_{n,k}(x)| \leq \sum_k \psi_{n,k}(x).$$

因此

$$\sum_n \varphi_n(x) \leq \sum_{n,k} \psi_{n,k}(x) < +\infty.$$

因此 $x \in A$，并且

$$r(x) = 0 = \sum_n 0 \qquad (x \in B).$$

将引理 2.5.18 应用于 $u_n = 0$ 和 $u = r$，得到 $r \in L^1$。

由于 p，q，$r \in L^1$ 和 L^1 是一个向量空间，

$$f = p - q + r \in L^1.$$

因此，$(L^1)^1 \subset L^1$，并且已证明 $(L^1)^1 = L^1$。 □

2.6.1 将 Daniell 闭性拆分为两个闭包条件

Daniell 闭性 $L^1 = L$ 是一个单一的闭包条件，它通过级数表示传递到扩张中。在本子子节中，我们将说明这一条件可拆分为两个独立条件：**在单调收敛定理下闭**以及**在零测集上修改后仍闭**（定理 2.6.11）。注 2.6.15 表明，两个条件都不可省略。

右侧的两个条件是在测度论中独立出现的条件。单调收敛定理与其中一个直接对应，而对零测集上的修改封闭则对应于测度的完备性。这种分解对于衡量第 3 节主定理的内容十分重要（注 3.2.2）。

定义 2.6.7. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统。若存在一个函数序列 $\{g_n\}$，其属于 L 且满足以下三个条件，则称子集 $Z \subset X$ 为 I**-零测集**。

1. $g_n \geq 0$ 对每个 n成立；2. $\sum_{n=1}^{\infty} I(g_n) < +\infty$；3. $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = +\infty$ 对每个 $x \in Z$成立。

这个定义没有提及 L^1。注意，它只使用了由 (X, L, I) 给出的数据来书写。级数表示（定义 2.5.1）的条件 (3) 不限制其值的所有点的集合总是一个 I-零测集；只需令 $\{g_n\}$ 为控制函数 $\{\varphi_n\}$即可看出这一点。

引理 2.6.8。 I-零测集的可数并是一个 I-零测集。

证明。设 $Z_1, Z_2, \ldots$ 为 I-零测集，对每个 Z_k 选取一个如定义 2.6.7 中的序列 $\{g_n^{(k)}\}_n$，并令 $C_k := \sum_n I(g_n^{(k)}) < +\infty$。令 $a_k := 2^{-k}/(1+C_k) > 0$ 且令 $\tilde{g}_n^{(k)} := a_k g_n^{(k)} \in L$。将族 $\{\tilde{g}_n^{(k)}\}_{k,n}$ 排列成一个单独的序列，其中每一项都是非负的，并且

$$\sum_{k,n} I(\tilde{g}_n^{(k)}) = \sum_k a_k C_k \leq \sum_k 2^{-k} = 1 < +\infty.$$

此外，若 $x \in \bigcup_k Z_k$，则对于某个 k，$x \in Z_k$，并且

$$\sum_n \tilde{g}_n^{(k)}(x) = a_k \sum_n g_n^{(k)}(x) = +\infty.$$

其余各项均非负，因此重排后的序列之和也为 $+\infty$。 □

引理 2.6.9. 设 (X, L, I) 是一个积分系统，且 $Z \subset X$ 是一个 I-零测集。若 $g \in L$ 在 $X \setminus Z$ 上消失，则

$$I(|g|) = 0, \qquad \text{and in particular} \qquad I(g) = 0.$$

证明。取定义 2.6.7 中的 $\{g_n\}$，并令 $C := \sum_n I(g_n) < +\infty$。任取一个 $\varepsilon > 0$，并令

$$u_N := |g| \wedge \Big(\varepsilon \sum_{n \leq N} g_n\Big).$$

由于 L 是一个里斯空间，我们有 $u_N \in L$。

我们验证 u_N 逐点单调递增至 $|g|$。若 $x \notin Z$，则 $|g|(x) = 0$，且第二项非负，因此 $u_N(x) = 0 = |g|(x)$。若 $x \in Z$，则 $\varepsilon \sum_{n \leq N} g_n(x) \uparrow +\infty$，所以当 N 足够大时，$u_N(x) = |g|(x)$；而在此之前，$u_N(x) = \varepsilon \sum_{n \leq N} g_n(x)$，它是非递减的。无论哪种情况，$u_N(x) \uparrow |g|(x)$。

由于 $|g| \in L$，引理 2.5.10 给出 $I(u_N) \uparrow I(|g|)$。另一方面 $u_N \leq \varepsilon \sum_{n \leq N} g_n$，因此引理 2.5.7 给出

$$I(u_N) \leq \varepsilon \sum_{n \leq N} I(g_n) \leq \varepsilon C.$$

因此 $I(|g|) \leq \varepsilon C$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，$I(|g|) = 0$，并且根据引理 2.5.8，$|I(g)| \leq I(|g|) = 0$。 □

定义 2.6.10. 我们称集合 $(X,\ L,\ I)$ 上的积分系统 X 在**零测集上的修改下封闭**，如果

$$h|_{X \setminus Z} = f|_{X \setminus Z} \quad \Longrightarrow \quad h \in L$$

对每个 $f \in L$、每个 I-零测集 $Z \subset X$ 以及每个函数 $h\colon\ X \to \mathbb{R}$，都成立。

在 Z 上，函数 h 不受任何限制；唯一的要求是它取实数值。

定理 2.6.11（丹尼尔闭性的分解）。设 $(X,\ L,\ I)$ 是集合 X 上的一个积分系统。以下条件等价。

(i) $(X,\ L,\ I)$ 是丹尼尔闭的，即 $L^1 = L$。

(ii) $(X,\ L,\ I)$ 满足单调收敛定理，且在零测集上的修改下封闭。

证明。(i)⇒(ii)。单调收敛定理已在注 2.6.3 中证明。我们来证明它在零测集上的修改下封闭。设 $f \in L$，令 Z 为一个 I-零测集，并令 $h\colon\ X \to \mathbb{R}$ 在 $X \setminus Z$ 上与 f 相同。取定义 2.6.7 中的 $\{g_n\}$，并令

$$f_1 := f, \quad f_n := 0\ (n \geq 2), \qquad \varphi_1 := |f|, \quad \varphi_{n+1} := g_n\ (n \geq 1).$$

那么 $|f_n| \leq \varphi_n$ 显然成立，并且

$$\sum_n I(\varphi_n) = I(|f|) + \sum_n I(g_n) < +\infty.$$

此外，若 $\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$，则 $\sum_n g_n(x) < +\infty$，因此 $x \notin Z$，进而 $h(x) = f(x) = \sum_n f_n(x)$。于是 $\{f_n\}$，$\{\varphi_n\}$ 是 h 的级数表示，并且 $h \in L^1 = L$。

(ii)⇒(i)。由于 $L \subset L^1$，根据引理 2.5.20，只需证明 $L^1 \subset L$。

令 $f \in L^1$，并选取级数表示 $f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$。令

$$Z := \Big\{ x \in X \ \Big|\ \sum_n \varphi_n(x) = +\infty \Big\}.$$

由 $|f_n| \leq \varphi_n$ 可得 $\varphi_n \geq 0$，且 $\sum_n I(\varphi_n) < +\infty$，因此 $\{\varphi_n\}$ 证明了 Z 是一个 I-零测集。令 $p_n := f_n \vee 0$，并令 $m_n := (-f_n) \vee 0$，从而 $p_n,\ m_n \in L$ 且

$$f_n = p_n - m_n, \qquad 0 \leq p_n, m_n \leq |f_n| \leq \varphi_n.$$

Put

$$P_N := \sum_{n \leq N} p_n \in L, \qquad M_N := \sum_{n \leq N} m_n \in L.$$

两者关于 N 均为非递减的，而引理 2.5.7 给出

$$I(P_N) \leq \sum_{n \leq N} I(\varphi_n) \leq \sum_n I(\varphi_n) < +\infty,$$

对于 M_N 也同样成立。

若 $x \notin Z$，则 $\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$，因此 $\sum_n p_n(x)$ 和 $\sum_n m_n(x)$ 均收敛。于是我们定义

$$P'(x) := \begin{cases} \sum_n p_n(x) & (x \notin Z) \\ 0 & (x \in Z) \end{cases}$$

并类似地定义 M'。二者都是 X 上的实值函数。令 P'_N 为在 $X \setminus Z$ 上与 P_N 一致、并在 Z 上为零的函数，并类似地定义 M'_N。根据假设，$(X,\ L,\ I)$ 在零测集上的修改下封闭，因此 $P'_N,\ M'_N \in L$。

由于 $P_N - P'_N$ 在 $X \setminus Z$ 上为零，由引理 2.6.9 可得 $I(P_N - P'_N) = 0$，即

$$I(P'_N) = I(P_N) \leq \sum_n I(\varphi_n) < +\infty.$$

此外，对每个 $x \in X$，都有 $P'_N(x) \uparrow P'(x)$（当 $x \notin Z$ 时由定义可知；当 $x \in Z$ 时两边均为 0）。根据假设，$(X,\ L,\ I)$ 满足单调收敛定理，因此 $P' \in L$。类似地，$M' \in L$。

因此 $P' - M' \in L$。如果 $x \notin Z$，那么根据引理 2.5.5，$\sum_n f_n(x)$ 绝对收敛，所以

$$(P' - M')(x) = \sum_n p_n(x) - \sum_n m_n(x) = \sum_n f_n(x) = f(x).$$

也就是说，f 在 $X \setminus Z$ 上与 L 中的元素 $P' - M'$ 一致。再次利用对零测集上的修改的封闭性，$f \in L$。 □

关于 (ii) 中的构造⇒(i)。上述证明中构造的函数 P' 和 M' 都是 L 中元素的单调非递减极限，且其积分有界，也就是说，它们是经典意义上的**上函数**。因此，该证明展示了一个 $f \in L^1$ 如何在零测集之外与两个上函数之差 $P' - M'$ 一致。将勒贝格积分构造为上函数之差是一种经典方法，在这一背景下，这种形式的表示众所周知。下文不会用到这种对应关系，因此不引用特定来源。

推论 2.6.12。**DInt**是**Int**中由满足**单调收敛定理且在零测集上的修改下封闭的积分系统**构成的全子范畴。

证明。由定理 2.6.11 得出。 □

注 2.6.13。上述描述并未经过丹尼尔扩张的构造，**但这本身并非关键所在**。条件 $L^1 = L$ 展开后也可表述为

每个可由 L 中的元素表示为级数的函数都属于 L,

这只用到了 L、I 和逐点条件。“是否提及 L^1 ”并不能区分二者。

关键在于，一个不熟悉的闭包条件可以拆分为测度论中独立出现的两个条件。我们将在注 3.2.2 中回到这一点。

例 2.6.14。让我们在注 3.3.1 的例子（$X = \{0,1,2\}$、$L =$ {（a、b、b）}、I（a、b、b）$= a$）中检验这一点。函数 $g_n :=$ (0, 1, 1) $\in L$ 满足 $g_n \geq 0$ 和 I（g_n）$= 0$，并且 $\sum_n g_n$（x）$= +\infty$ 在 $x = 1$、2 处成立，因此 $Z = \{1,2\}$ 是一个 I-零测集。但由 $f =$ (0, 0, 0) $\in L$ 在 Z 上进行修改得到的 $h =$ (0, 1, 0) 不属于 L。因此，该积分系统在零测集上的修改下不封闭，并且根据定理 2.6.11，它不是丹尼尔闭的。这与该例中的直接计算 $L^1 = \mathbb{R}^X \neq L$ 一致。

另一方面，在例 2.9.5 ($X = \{1,2\}$, $L = \{(a,\ 2a)\}$, $I(a,\ 2a) = a$) 中，若 $g_n =(c_n,\ 2c_n) \geq 0$ 满足 $\sum_n I(g_n) = \sum_n c_n < +\infty$，则 $\sum_n g_n(x) < +\infty$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 两处均成立。因此，唯一的 I-零测集是空集，而关于零测集上的修改的条件显然成立。单调收敛定理也成立，所以根据定理 2.6.11，这个积分系统是丹尼尔闭的，这与该例中所述的 $L^1 = L$ 一致。

注 2.6.15（两个条件都不能省略）。定理 2.6.11 的 (ii) 中的两个条件彼此独立。

单调收敛定理不可省略这一点由例 2.3.3（$X = \mathbb{N}$、在有限个 n 外取零的函数以及求和）说明。在这个积分系统中，$g \in L$ with $g \geq 0$ 满足 $g(x) \leq I(g)$，对每个 x均如此，因此对于一个非负序列 $\{g_n\} \subset L$ with $\sum_n I(g_n) < +\infty$，我们在每个 x处都有 $\sum_n g_n(x) < +\infty$。因此唯一的

I-零测集是空集合，而关于零测集上的修改的条件显然成立。另一方面

$$f_N := \sum_{k\le N} 2^{-k}1_{\{k\}} \in L$$

满足 $I(f_N) \le 1$，同时逐点单调递增至 $f(k) = 2^{-k}$，而且 $f \notin L$，因为 f 没有有限支撑。也就是说，单调收敛定理失效。事实上，这个积分系统不是丹尼尔闭的，并且 $L^1 = \ell^1$。

不能省略在零测集上的修改，重-述 3.3.1 的例子说明了这一点。该例中的积分系统满足单调收敛定理，但正如上面的例子所示，它在零测集上的修改下并不封闭，因此不是丹尼尔闭的。

注 2.6.16. 定理 2.6.11 的 (ii) 中的两个条件，对应于 $L^1(\mu)$ 在测度论中满足的两个性质。单调收敛定理与之直接对应，而在零测集上的修改下封闭，则对应于 $L^1(\mu)$ 包含相对于 μ 的完备化可测的函数这一事实。在第 3.3 小节的命题 3.3.9 中，我们将看到，两个反射之间的差异恰好就是支撑于零测集上的函数；当前定理则从丹尼尔闭性的角度解释了原因。也就是说，**要成为 DInt 的对象，就必须在零测集上的修改下封闭**。

备注 2.6.17 （分解在扩展实数形式体系中失效）。 定理 2.6.11 的两个条件彼此独立**取决于本文将函数限制为实数值**。如果将值域扩大到 $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$，则条件 (b) 可由条件 (a) 推出。

事实上 [9] 采用了该形式体系。它在 $\mathbb{R}^X$ 中定义了里斯空间的对应概念，称为 Rīesz 格，并将与我们的积分系统相对应的三元组称为 Daniell 空间。随后，它为这两个条件分别命名。

- 其定义 1.4.1 称一个三元组为**闭的**，如果对于每个积分有界的单调序列，其逐点极限仍属于该空间，并且积分与极限可交换。这就是我们的定义 2.4.1（满足单调收敛定理）。

- 其定义 1.4.7 称一个三元组为**完备的**，如果 $f \le h \le g$ 连同 $\ell(f) = \ell(g)$ 蕴含 h也属于该空间。这个夹逼条件实质上就是我们的定义 2.6.10。

然而，其推论 1.4.8 指出

> 每个闭的 Daniell 空间都是完备的。

也就是说，**在扩展实数形式体系中，(a)⇒(b)，且这两个条件并非相互独立**。

原因如下。设 Z 是一个 I-零测集，并取定义 2.6.7 中的序列 $\{g_n\}$。部分和 $\sum_{n\le N} g_n$ 单调递增，且积分有界，因此根据 (a)，其逐点极限属于该空间。如果允许取扩展实数值，那么该极限作为一个在 Z 上取值为 $+\infty$ 的函数，是该空间的一个元素。这样，便可以从空间内部命名零测集：它们是元素发散到 ∞ 的集合；而 (b) 则由 Riesz 格的公理推出，这些公理源于 $\infty - \infty$ 未定义这一事实。

这个论证在这里行不通。由于 $L \subset \mathbb{R}^X$，上面的极限不能是 L的元素。零测集无法从内部 L 捕获，因为它会发散到 ∞；这正是定义 2.6.7 采用级数形式、且条件 (b) 保持为独立条件的原因。注 2.6.15 的反例（$X = \{0,1,2\}$,$L = \{(a,\ b,\ b)\}$, $I(a,\ b,\ b) = a$）是一个满足单调收敛

定理但不在零测集上的修改下封闭的积分系统。也就是说，它也是**推论 1.4.8 的实值形式的反例**。

这不是哪种形式体系更好的问题。两者的对应关系是：**扩大取值范围，可以让零测集在空间内部得到命名，但代价是将两个闭包条件合并为一个**。定理 2.6.11 是一种分解，只有在限制为实数值的形式体系中才能看见。

2.7 L^1 半范数与逼近

本小节的内容也是已知的，对应于 [2] 的 §4 和 §6。我们给出证明，因为这些内容在第 4 节中会被实质性地用到。

定义 **n 2.7.1.** 设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统。对于每个 $f \in L$，我们定义

$$\|f\|_I := I(|f|).$$

由于 L 是一个里斯空间，因此我们有 $|f| \in L$，所以这个值是有定义的。

引理 2.7.2. $\|\cdot\|_I$ 是 L上的半范数。也就是说，对于所有的 $f, g \in L$ 和 $a \in \mathbb{R}$,

$$\|af\|_I = |a|\,\|f\|_I, \qquad \|f+g\|_I \le \|f\|_I + \|g\|_I.$$

证明。 第一个等式由 $|af| = |a||f|$和 I的线性性得出。此外，由 $|f+g| \le |f|+|g|$和引理 2.5.7 可得 $I(|f+g|) \le I(|f|) + I(|g|)$。 □

注 2.7.3. 一般而言， $\|f\|_I = 0$ 并不意味着 $f = 0$。消除这一差异的操作将在第 2.8 小节中讨论。

引理 2.7.4 （用 L逼近可积函数）. 设 (X, L, I) 是集合 X 上的一个积分系统，并设 (X, L^1, I^1) 是其 Daniell 扩张。那么对于每个 $f \in L^1$，都存在一个函数序列 $\{s_N\} \subset L$ 满足

$$\|f - s_N\|_{I^1} = I^1(|f - s_N|) \longrightarrow 0 \qquad (N \to \infty).$$

也就是说，相对于 $\|\cdot\|_{I^1}$， L 在 L^1 中是稠密的。

证明。 选取 f 的一个级数表示，即

$$f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

并令

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} f_n \in L, \qquad r_N := f - s_N.$$

由于有限多个值 $\varphi_n(x)$ 总是有限的,

$$r_N \overset{\varphi_{N+m}}{\simeq} \sum_{m=1}^{\infty} f_{N+m}$$

是 r_N 的一个级数表示。

对每个 $m \ge 1$，令

$$g_{N,m} := \left|\sum_{k=1}^{m} f_{N+k}\right| - \left|\sum_{k=1}^{m-1} f_{N+k}\right|,$$

其中空和为 0。由于 L 是里斯空间，我们有 $g_{N,m} \in L$，且绝对值的三角不等式给出

$$|g_{N,m}| \le |f_{N+m}| \le \varphi_{N+m}.$$

此外，若 $\sum_m \varphi_{N+m}(x) < +\infty$，那么通过将求和式望远镜相消，并利用绝对值的连续性，

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_{N,m}(x) = \left| \sum_{m=1}^{\infty} f_{N+m}(x) \right| = |r_N(x)|.$$

因此

$$|r_N| \overset{\varphi_{N+m}}{\simeq} \sum_{m=1}^{\infty} g_{N,m}$$

是 $|r_N|$ 的级数表示。由积分的正性，

$$\begin{aligned} 0 \le I^1(|f - s_N|) &= \sum_{m=1}^{\infty} I(g_{N,m}) \\ &\le \sum_{m=1}^{\infty} I(|g_{N,m}|) \\ &\le \sum_{m=1}^{\infty} I(\varphi_{N+m}) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

这就是所要证明的结论。 □

推论 2.7.5。 设 (X, L, I) 是一个积分系统，并假设 $\{h_j\} \subset L$ 满足 $\sum_j I(|h_j|) < +\infty$。那么函数

$$h(x) := \begin{cases} \sum_j h_j(x) & \text{if } \sum_j |h_j(x)| < +\infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

属于 L^1，且对每个 $J \ge 1$

$$\left\| h - \sum_{j=1}^{J} h_j \right\|_{I^1} \le \sum_{j>J} I(|h_j|)$$

成立。

证明。 令 $\varphi_j := |h_j| \in L$，则数对 $\{h_j\}$，$\{\varphi_j\}$ 是 h 的一个级数表示，因此 $h \in L^1$。此外，$h - \sum_{j \le J} h_j$ 以 $\{h_{J+m}\}_{m \ge 1}$ 和 $\{\varphi_{J+m}\}_{m \ge 1}$ 为级数表示，因此由引理 2.7.4 证明末尾的同一估计可得所述不等式。 □

定理 2.7.6 （$\|\cdot\|$ 完备性）。 设（X， L， I）是一个 Daniell 闭积分系统。则（L， $\|\cdot\|_I$）是完备的。也就是说，对于每个关于 $\|\cdot\|_I$ 的柯西序列 $\{g_k\} \subset L$，都存在一个 $g \in L$，使得 $\|g - g_k\|_I \to 0$。

证明。 设 $\{g_k\}$ 是一个柯西序列。选取一个子序列 $\{g_{k_j}\}$，使得

$$\|g_{k_{j+1}} - g_{k_j}\|_I < 2^{-j},$$

并令

$$h_1 := g_{k_1}, \qquad h_{j+1} := g_{k_{j+1}} - g_{k_j}.$$

那么 $\sum_j I(|h_j|) < +\infty$。由推论 2.7.5 可知，存在相应的 $h \in L^1$，使得

$$\|h - g_{k_J}\|_{I^1} = \left\| h - \sum_{j=1}^{J} h_j \right\|_{I^1} \leq \sum_{j>J} I(|h_j|) \longrightarrow 0.$$

由于 $(X,\ L,\ I)$ 是丹尼尔闭的，因此 $L^1 = L$，并且根据引理 2.5.20，$I^1|_L = I$。于是 $h \in L$ 且 $\|h - g_{k_J}\|_I \to 0$。带有收敛子序列的柯西序列整体收敛到同一个极限，因此 $\|h - g_k\|_I \to 0$。 □

2.8 零函数与几乎处处相等

半范数 $\|\cdot\|_I$ 通常不是范数。这里我们定义将其核压缩为一点的运算。这个商在第 4 节中有重要用途。

2.8.1 零函数与商空间

定义 2.8.1。 设 $(X,\ L,\ I)$ 是集合 X 上的积分系统。我们定义

$$\mathcal{N}_I := \{f \in L \mid I(|f|) = 0\}$$

并将属于 $\mathcal{N}_I$ 的函数称为 $(X,\ L,\ I)$ 的**零函数**。

引理 2.8.2。 $\mathcal{N}_I$ 是 L的一个理想。也就是说，$\mathcal{N}_I$ 是一个线性子空间，并且如果 $f \in \mathcal{N}_I$ 和 $f' \in L$满足 $|f'| \leq |f|$，那么 $f' \in \mathcal{N}_I$。

证明。 $\mathcal{N}_I$是半范数 $\|\cdot\|_I$的核，因此是一个线性子空间（引理 2.7.2）。此外，如果 $|f'| \leq |f|$，则由引理 2.5.7 可得 $I(|f'|) \leq I(|f|) = 0$，而 I的正性给出 $I(|f'|) = 0$。 □

定义 2.8.3。 我们将商空间记作

$$\widetilde{L} := L/\mathcal{N}_I$$

~并将商映射记作 $\pi_I\colon L \to L$。

~**引理 2.8.4**。 L 具有里斯空间结构，其序定义为：约定$\pi_I(f) \geq 0$表示“存在一个 $f' \in \mathcal{N}_I$使得 $f + f' \geq 0$”，并且 π_I是一个里斯同态。也就是说，

$$\pi_I(f \vee g) = \pi_I(f) \vee \pi_I(g), \qquad \pi_I(|f|) = |\pi_I(f)|.$$

此外

$$\widetilde{I} : \widetilde{L} \to \mathbb{R}; \quad \pi_I(f) \mapsto I(f)$$

is ~一个定义良好的正线性泛函，并且 $\|\pi_I(f)\| := I(|\pi_I(f)|) = \|f\|_I$是一个范数 .

证明。 里斯空间对理想取商后仍是里斯空间，且商映射是 Riesz 同态，这属于一般理论（例如参见 [17]）。根据引理 2.8.2，这里也适用。~

I定义良好，因为 $f \in \mathcal{N}_I$蕴含 $|I(f)| \leq I(|f|) = 0$（引理 2.5.8）。正性~ ~和线性性可由 I 的正性和线性性推出。最后，$I(|\pi_I(f)|) = I(\pi_I(|f|)) = I(|f|) = \|f\|_I$，且当且仅当 $f \in \mathcal{N}_I$时它为零，也就是说，当 $\pi_I(f) = 0$时。 □

~**引理 2.8.5**。 如果 $(X,\ L,\ I)$ 是一个 Daniell闭积分系统，那么 $(L,\ \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间。

证明。 如果 $\{\pi_I(f_k)\}$ 是柯西序列，那么 $\{f_k\}$ 关于 $\|\cdot\|_I$是一个柯西序列。根据定理 2.7.6，它的极限 $f \in L$存在，并且 $\|\pi_I(f) - \pi_I(f_k)\| = \|f - f_k\|_I \to 0$。 □

引理 2.8.6（丹尼尔扩张与商的相容性）。设 (X, L, I) 是集合 X 上的积分系统，且 (X, L^1, I^1) 是其丹尼尔扩张。那么

$$\mathcal{N}_{I^1} \cap L = \mathcal{N}_I.$$

因此，包含映射 $L \subset L^1$ 诱导出一个单射 Riesz 同态

$$j_I : \widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{L^1}$$

满足

$$\pi_{I^1}|_L = j_I \circ \pi_I.$$

此外，j_I 保持范数。

证明。由引理 2.5.20 可得 $|f| \in L$，且对每个 $f \in L$，都有 $I^1(|f|) = I(|f|)$。因此，$I^1(|f|) = 0$ 与 $I(|f|) = 0$ 等价，从而得到 $\mathcal{N}_{I^1} \cap L = \mathcal{N}_I$。

由此可知，$\pi_{I^1}|_L$ 的核：$L \to$ $\sim$ L^1 是 $\mathcal{N}_I$，因此单射线性映射 j_I：$L \to$ $\widetilde{\sim}$ L^1 是诱导的，满足 $\pi_{I^1}|_L = j_I \circ \pi_I$。$\pi_I$ 和 π_{I^1} 都是 Riesz 同态（引理 2.8.4），且 π_I 是满射，因此 j_I 也是 Riesz 同态。最后，对于 $f \in L$，

$$\|j_I(\pi_I(f))\| = \|\pi_{I^1}(f)\| = I^1(|f|) = I(|f|) = \|\pi_I(f)\|.$$

□

2.8.2 态射的几乎处处等价

定义 2.8.7. 设 (X, L, I) 和 (Y, M, J) 分别是集合 X 和 Y 上的积分系统。我们称两个积分系统态射

$$F, G : (X, L, I) \to (Y, M, J)$$

几乎处处**相等**，如果

$$J\big(|F^* f - G^* f|\big) = 0$$

对每个 $f \in L$ 都成立，也就是说，如果 $F^* f - G^* f \in \mathcal{N}_J$ 对每个 $f \in L$ 都成立。在这种情况下，我们记作

$$F =_{\mathrm{ae}} G.$$

引理 2.8.8. 对于每对对象之间的积分系统态射，关系 $=_{\mathrm{ae}}$ 是一个等价关系，并且与态射复合相容。也就是说，如果积分系统态射

$$F, F' : (X, L, I) \to (Y, M, J), \qquad G, G' : (Y, M, J) \to (Z, N, K)$$

满足

$$F =_{\mathrm{ae}} F', \qquad G =_{\mathrm{ae}} G',$$

then

$$G \circ F =_{\mathrm{ae}} G' \circ F'.$$

证明。自反性和对称性由定义立即可得。至于传递性，假设积分系统的态射 F, F', F'': $(X, L, I) \to (Y, M, J)$ 满足 $F =_{\mathrm{ae}} F'$ and $F' =_{\mathrm{ae}} F''$。对于每个 $f \in L$，

$$\begin{aligned} 0 &\le J\big(|F^* f - (F'')^* f|\big) \\ &\le J\big(|F^* f - (F')^* f|\big) + J\big(|(F')^* f - (F'')^* f|\big) = 0, \end{aligned}$$

因此 $F =_{\mathrm{ae}} F''$。

接下来证明与复合相容。对于每个 $f \in L$，由于黎斯系统的态射保持绝对值，而积分系统的态射保持积分，

$$\begin{aligned} &K\big(|G^*F^*f - (G')^*(F')^*f|\big) \\ &\quad \le K\big(|G^*F^*f - G^*(F')^*f|\big) + K\big(|G^*(F')^*f - (G')^*(F')^*f|\big) \\ &\quad = J\big(|F^*f - (F')^*f|\big) + K\big(|G^*(F')^*f - (G')^*(F')^*f|\big) = 0. \end{aligned}$$

因此 $G \circ F =_{\mathrm{ae}} G' \circ F'$。 □

定义 2.8.9。与积分系统范畴 $\mathbf{Int}$ 具有相同对象、且态射为模 $=_{\mathrm{ae}}$ 等价类的范畴记作

$$\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$$

并称为**积分系统的几乎处处范畴**。根据引理 2.8.8，态射的复合与代表元的选择无关。

在$\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$的对象中，我们将满足单调收敛定理的积分系统所构成的全子范畴记作

$$\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}},$$

将由 Daniell 闭积分系统构成的全子范畴记作

$$\mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}.$$

2.9 与测度的关系

截至目前，本文讨论积分时并未使用测度。本小节将说明积分系统与测度论之间的对应关系。本文的主要结果并未用到这种对应关系，但我们指出，积分系统这一概念确实能够重新得到测度论。以下内容都是已知结果，证明可参见相关文献。

2.9.1 从测度到积分系统

这个方向比较简单。

命题 2.9.1. 设 (X, Σ, μ) 是一个测度空间，令 L 为所有相对于 μ 可积的 Σ-可测简单函数所构成的集合，并令 $I(f) := \int_X f\, d\mu$。那么 (X, L, I) 是一个积分系统。

正性显然成立，而验证连续性公理时需要用到 σ-可加性。证明参见 [2], §7。例 2.3.4 中的阶梯函数集合是勒贝格测度下所有简单函数集合的一个子系统。半开区间的有限并不构成一个σ-代数，因此它本身并非此命题的特例。

2.9.2 Stone 条件

从积分系统中提取测度的逆向过程需要满足一个条件。

定义 2.9.2. 我们称集合 X 上的积分系统 (X, L, I) **满足 Stone 条件**，如果

$$f \wedge 1 \in L$$

对每个 $f \in L$ 都成立。这里的 1 是 X 上的常值函数 1。

注意，L 本身不一定包含 1。所要求的是，将 f 截断于 1 所得到的函数再次属于 L。这是标准条件，满足该条件的里斯空间称为 **Stone向量格**。

之所以需要这个条件，是因为我们希望用以下方式定义带有 $1_A \in L^1$ 的集合 A 的测度：

$$\mu(A) := I^1(1_A).$$

如果 L^1 完全不包含示性函数，这一定义甚至无从开始。

注记2.9.3。上述公式仅对具有 $1_A \in L^1$ 的集合才有意义。它不能用于一般的可测集，尤其不能用于无穷测度的集合。

考察例 2.3.3（$X = \mathbb{N}$、有限支撑函数与求和），L^1 是所有绝对可和数列构成的集合 ℓ^1，而应得到的测度是计数测度。但是 $1_{\mathbb{N}} \notin \ell^1$，因此 $I^1(1_{\mathbb{N}})$ 未定义，而 $\mu(\mathbb{N}) = \infty$。

因此，要构造一般的测度，必须从具有 $1_A \in L^1$ 的集合出发，并通过上积分或外测度来构造。下面的定理 2.9.6 仅陈述这一构造的结果。

例 2.9.4. 例 2.3.3 和例 2.3.4 都满足 Stone 条件。事实上，将有限支撑函数截断到 1 后，仍是有限支撑函数；将阶梯函数截断到 1 后，仍是阶梯函数。

例 2.9.5（一个不满足 Stone 条件的积分系统）。令 $X = \{1, 2\}$ 并设

$$L := \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^X, \qquad I(a, 2a) := a.$$

那么 L 是由 $(1,2)$ 张成的一维子空间，并且 $|(a, 2a)| = |a| \cdot (1,2) \in L$，因此 L是 X上的里斯空间。此外，I 显然是正线性的，并且由于 X 是有限的，连续性成立。因此 (X, L, I) 是一个积分系统。

但是 $f = (1,2)$ 得到 $f \wedge 1 = (1, 1) \notin L$，所以 Stone 条件不成立。

在这个积分系统中 $L^1 = L$。事实上，级数表示中出现的控制函数具有 $\varphi_n = (c_n,\ 2c_n)$ 的形式，其中 $c_n \geq 0$；若 $\sum_n I(\varphi_n) = \sum_n c_n < +\infty$，则$\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处都成立。因此，级数表示的条件 (3) 是对所有 X施加的，而 f 仅限于为 L中元素的绝对收敛级数之和，也就是说，是 L的一个元素。

因此 $1_{\{1\}} = (1,\ 0) \notin L^1$，而 $\mu(\{1\}) := I^1(1_{\{1\}})$ 无法定义。

2.9.3 Daniell–Stone 表示定理

定理 2.9.6 (Daniell–Stone)。设 $(X,\ L,\ I)$ 是一个满足 Stone 条件的积分系统。那么存在一个定义在 X 上的 σ-代数 Σ以及一个测度 μ，使得每个 $f \in L$ 都是μ-可积的，并且

$$I(f) = \int_X f \, d\mu.$$

证明见 [8], [11] 第 16 章，或见 [10]。[11] 的第 16 章题为“Daniell积分”；其第 2 节讨论延拓定理，第 3 节讨论唯一性，第 4 节讨论可测性与测度。此处选择 Σ，使属于 L^1 的函数可测；并按照注记2.9.3，通过外测度构造 μ，从而使集合 A 在满足 $1_A \in L^1$时符合 $\mu(A) = I^1(1_A)$。

例 2.9.7。将此定理应用于例 2.3.4，所得测度是 $[0, 1$上的勒贝格测度，而丹尼尔扩张 L^1 与所有勒贝格可积函数的集合重合。这就是例 2.5.22 中所述事实从测度论角度呈现出的形式。

注 2.9.8。 本文不施加 Stone 条件。第3节和第4节的结果无需该条件即可成立。事实上，例 2.9.5 的积分系统也是 **Int**的一个对象，并且还是丹尼尔闭的。

然而，不能据此得出“本文的框架比测度论更广泛”的结论。例 2.9.5 的积分可以写成 $I(a, 2a) = \int_X f\, d\mu$ 通过取$\mu(\{1\}) = 1$ 和 $\mu(\{2\}) = 0$ 来实现 μ （而且这样的 μ 并不唯一：任意满足 $\mu(\{1\}) + 2\mu(\{2\}) = 1$的 μ 都可以）。该例表明，如果没有 Stone 条件，就不能使用示性函数从丹尼尔扩张内部规范地恢复出测度，而且表示测度并不唯一确定。

确切地说，本文不假设 Stone 条件，也不把由测度表示作为该理论的前提。

问题2.9.9。 每个满足 Stone 条件的 Daniell闭积分系统，是否都能实现为测度空间的 L^1 ，并且这种对应关系是否提升为范畴等价？也就是说，由满足 Stone 条件的对象组成的 **DInt** 全子范畴，是否等价于某个适当的测度空间及保测映射范畴?

这个问题由 T. Fritz 在私人通信中提出（2026 年）。然而，将其表述为与可测空间范畴等价的形式并不成立。积分系统的态射保持积分， $J(F^* f) = I(f)$，因此积分本身就是能够将对象区分至同构的资料。事实上，令 $X = \{*\}, L = \mathbb{R}$ and $I_c(a) := ca$ for $c > 0$。由于 $L^1 \subset \mathbb{R}^X = \mathbb{R} = L$，这些都是满足 Stone 条件的 Daniell闭积分系统。但 $(X, \mathbb{R}, I_c) \ncong (X, \mathbb{R}, I_{c'})$ for $c \neq c'$，而在每种情况下，其底层可测空间都是单点空间。因此，真正应当讨论的是测度空间，而不是可测空间。此外，根据定理 2.6.11，Daniell闭积分系统在零测集上的修改下封闭，因此需要匹配的测度预计应当是完备测度。

3 丹尼尔扩张的函子性与泛性质 **n**

3.1 丹尼尔扩张的函子性

包含函子 ι， ι_D， ι_M如定义 2.6.5 所述。

引理 3.1.1. 设 (X, L, I) 和 (Y, M, J) 分别是集合 X和 Y上的积分系统，并设 $F\colon (X, L, I) \to (Y, M, J)$ 是积分系统态射。那么，基空间映射 $F\colon Y \to X$ 确定了一个态射

$$F^1 : (X, L^1, I^1) \to (Y, M^1, J^1)$$

在由 Daniell 闭积分系统构成的范畴**DInt** 中。

证明. 设 $f \in L^1$ 并设

$$f \overset{\varphi_n}{\simeq} \sum f_n$$

是它的级数表示。由于 F 是一个积分系统态射，对于每个 n

$$F^* f_n,\ F^* \varphi_n \in M.$$

此外，对于每个 $y \in Y$，

$$|F^* f_n(y)| = |f_n(\underline{F}(y))| \leq \varphi_n(\underline{F}(y)) = F^* \varphi_n(y)$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} J(F^*\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) < +\infty.$$

此外，如果 $y \in Y$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} F^*\varphi_n(y) < +\infty$$

于是，令 $x := F(y)$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) < +\infty.$$

根据原级数表示所满足的条件，

$$\begin{aligned} F^*f(y) &= f(\underline{F}(y)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\underline{F}(y)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^*f_n(y). \end{aligned}$$

因此

$$F^*f \overset{F^*\varphi_n}{\simeq} \sum F^*f_n$$

是 F^*f 的级数表示，$F^*f \in M^1$ 也随之成立。因此，基空间映射$F\colon Y \to X$ 确定了一个 Riesz 系统态射

$$F^1 : (X, L^1) \to (Y, M^1).$$

最后，根据通过级数表示定义扩展积分的方式，以及F 保持积分这一事实，

$$\begin{aligned} J^1(F^*f) &= \sum_{n=1}^{\infty} J(F^*f_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) \\ &= I^1(f). \end{aligned}$$

因此，F^1 是积分系统态射。由于丹尼尔扩张根据引理 2.6.6 是一个 Daniell闭积分系统，态射 F^1 是 **DInt** 中的态射。 □

引理 3.1.2。将集合 X 上的积分系统（X，L，I）赋予其丹尼尔扩张（X，L^1，I^1）确定了一个函子

$$\mathcal{D} : \mathbf{Int} \to \mathbf{DInt}.$$

证明。只需验证以下事实。

- 对于集合 X 上的积分系统（X，L，I），恒等态射 $\mathrm{id}_{(X,\,L,\,I)}$ 满足$\mathcal{D}$（$\mathrm{id}_{(X,\,L,\,I)}$）$= \mathrm{id}_{(X,\,L^1,\,I^1)}$。
- 对于分别定义在集合 X、Y、Z 上的积分系统 (X, L, I)、(Y, M, J)、(Z, N, K)，以及积分系统态射 $F\colon (X, L, I) \to (Y, M, J)$ 和 $G\colon (Y, M, J) \to (Z, N, K)$，有 $\mathcal{D}(G \circ F) = \mathcal{D}(G) \circ \mathcal{D}(F)$。

根据引理 3.1.1，积分系统态射

$$F : (X, L, I) \to (Y, M, J)$$

确定该态射

$$F^1 : (X, L^1, I^1) \to (Y, M^1, J^1)$$

由同一个基空间映射 $F : Y \to X$ 诱导。因此我们定义

$$\mathcal{D}(F) := F^1.$$

首先，恒等态射 $\mathrm{id}_{(X,L,I)}$ 所对应的基空间映射是 id_X。丹尼尔扩张之后的态射 $\mathcal{D}(\mathrm{id}_{(X,L,I)})$ 由同一个映射 id_X 诱导，因此

$$\mathcal{D}(\mathrm{id}_{(X,L,I)}) = \mathrm{id}_{(X,L^1,I^1)}.$$

接下来，取积分系统态射

$$F : (X, L, I) \to (Y, M, J), \qquad G : (Y, M, J) \to (Z, N, K).$$

复合 $G \circ F$ 所对应的基空间映射是

$$\underline{G \circ F} = \underline{F} \circ \underline{G} : Z \to X.$$

另一方面，$\mathcal{D}(F) = F^1$ 和 $\mathcal{D}(G) = G^1$ 所对应的基空间映射分别是 F 和 G，因此 $\mathcal{D}(\underline{G}) \circ \mathcal{D}(F)$ 所对应的基空间映射也是 $F \circ G$。于是

$$\mathcal{D}(G \circ F) = \mathcal{D}(G) \circ \mathcal{D}(F).$$

因此 $\mathcal{D}$ 是一个函子。 □

3.2 主定理的证明

定理 3.2.1（主定理）。 函子

$$\mathcal{D} : \mathbf{Int} \to \mathbf{DInt}$$

是包含函子的左伴随

$$\iota_D : \mathbf{DInt} \to \mathbf{Int}.$$

证明。 我们针对引理 3.1.2 中定义的函子 $\mathcal{D}$ 进行论证。设 (X, L, I) 是任意一个积分系统，而 (X, L^1, I^1) 是其丹尼尔扩张。只需证明由恒等映射 id诱导的积分系统态射

$$i_{(X,L,I)} : (X, L, I) \to (X, L^1, I^1)$$

是从 (X, L, I) 到 ι_D 的泛态射。

设 (Y, M, J) 是集合 Y 上的 Daniell闭积分系统，并且

$$F : (X, L, I) \to \iota_D(Y, M, J)$$

是积分系统态射。根据引理 3.1.1，基空间映射 $F : Y \to X$诱导出一个积分系统态射

$$F^1 : (X, L^1, I^1) \to (Y, M^1, J^1).$$

由于 (Y, M, J) 是 Daniell 闭的，因此我们有 $M^1 = M$。此外，根据引理 2.5.20，对于每个 $g \in M$，都有 $J^1(g) = J(g)$。因此

$$(Y, M^1, J^1) = (Y, M, J).$$

在这种对应关系下，我们设

$$F^\sharp := F^1 : (X, L^1, I^1) \to (Y, M, J).$$

包含函子不会改变态射，而其下方的基空间映射$i_{(X,L,I)}$是 id_X，因此复合 $\iota_D(F^\sharp) \circ i_{(X,L,I)}$ 下方的基空间映射是

$$\underline{i_{(X,L,I)}} \circ \underline{F^\sharp} = \mathrm{id}_X \circ \underline{F} = \underline{F}.$$

积分系统态射恰好由其基空间映射确定，因此

$$F = \iota_D(F^\sharp) \circ i_{(X,L,I)}.$$

接下来，假设有一个态射

$$H : (X, L^1, I^1) \to (Y, M, J)$$

满足

$$F = \iota_D(H) \circ i_{(X,L,I)}.$$

比较两边的基空间映射，

$$\underline{F} = \underline{i_{(X,L,I)}} \circ \underline{H} = \mathrm{id}_X \circ \underline{H} = \underline{H}.$$

另一方面 $F^\sharp = F$，因此 $\underline{H} = F^\sharp$。于是 $F^\sharp$ 是满足上述分解的唯一态射，而 $i_{(X,L,I)}$ 是从 (X, L, I) 到 ι_D 的泛态射。

由于（X、L、I）是任意的，定理 5.1.2 给出了 ι_D 的一个左伴随，其在对象上的作用就是丹尼尔扩张。此外，对于每个积分系统态射

$$T : (X, L, I) \to (X', L', I')$$

态射 $\mathcal{D}(T) = T^1$ 满足

$$\iota_D(\mathcal{D}(T)) \circ i_{(X,L,I)} = i_{(X',L',I')} \circ T,$$

因为两侧的基空间映射都是 T。根据泛性质所导致的唯一性，该定理中构造的左伴随在态射上的作用与 $\mathcal{D}$ 在态射上的作用一致。因此，$\mathcal{D}$ 是 ι_D 的左伴随。

□

注 3.2.2（关于主定理的内容）。主定理的证明框架是形式化的。由 $T := \iota_D \circ \mathcal{D}$ 和态射 i_A 组成的对是一个幂等带基点自函子（有 $T(i_A) = i_{TA} = \mathrm{id}$），而范畴论中的一个标准事实是，幂等带基点自函子的固定点全子范畴是反射性的。事实上，上面的证明只使用了以下两点：

- 幂等性 $(L^1)^1 = L^1$（引理 2.6.6）；
- 拉回保持可积性以及积分的值（引理 3.1。 1).

前者在 [1] 中作为推论陈述，并且已为人所知。

因此，只要将 DInt 定义为“满足$L^1 = L$的积分系统范畴”，主定理所述的不过是 $\mathcal{D}$ 的不动点子范畴以 $\mathcal{D}$ 作为其反射子，并未包含新的内容。

我们先说明，下面这种论证思路是行不通的：认为主定理之所以有实质内容，是因为定理 2.6.11 使得我们能够“无需提及 L^1”来表述 Daniell 闭性。这是不成立的。条件 $L^1 = L$ 展开后同样可表述为“每个能够用 L 中元素表示成级数的函数都属于 L”，其中没有使用任何内容

但 L、I 和逐点条件（注 2.6.13）。无论采用哪一种表述，得出反射子范畴也都是形式上的。若闭包规则在拉回下保持不变，则闭对象的子范畴是反射的，而定理 3.3.2 的证明（映射到 L^{M} 中的反射）恰好具有这种形式。

定理 2.6.11 的意义在于别处。它表明，**一个闭包运算——丹尼尔扩张——可以分解为两个彼此独立的闭包运算**：

$L^1 = L \quad \Longleftrightarrow$ 关于单调收敛定理的闭包**以及**关于零测

右侧的两个条件在测度论中各自独立出现。单调收敛定理与之直接对应，而关于零测集上的修改的闭包则对应于测度的完备性。注 2.6.15 已验证这两个条件缺一不可。

在此分解下，主定理断言如下。

> 由单调收敛定理和零测集上的修改这两个条件所确定的**Int**的全子范畴是可反射的，
> 其反射子由丹尼尔扩张通过级数表示给出，这一构造可以显式写出。

因此，本文的内容从伴随的证明转向一个事实：由这两个条件划定的子范畴恰好是 $\mathcal{D}$ 的全部不动点（定理 2.6.11）。本文有两处涉及技术性内容，即此处和定理 3.3.10；伴随本身的证明则是形式性的。

这部分讨论的是第 3 节中的 **Int**，并未涉及第 4 节中的算子态射范畴。

3.3 为什么要在陪域上施加 Daniell 闭性

主定理（定理 3.2.1）是在将分解的陪域限制为由 Daniell 闭积分系统构成的范畴 **DInt** 之后陈述的。在本小节中，我们将说明这一限制不可省略。也就是说，由 Daniell 扩张定义的函子 $\iota_M \circ \mathcal{D} : \mathbf{Int} \to \mathbf{MInt}$ 并not 是包含函子 ι:**MInt** →**Int**的左伴随。接着我们将证明，ι 确实有左伴随，但它的反射子not 是 Daniell 扩张。

3.3.1 丹尼尔扩张不是 ι 的左伴随

注 3.3.1. 根据引理 3.1.2，丹尼尔扩张定义了一个函子

$$\iota_M \circ \mathcal{D} : \mathbf{Int} \to \mathbf{MInt}$$

从 **Int** 到 **MInt**，但它不是包含函子的左伴随

$$\iota : \mathbf{MInt} \to \mathbf{Int}.$$

事实上，设 $X = \{0, 1, 2\}$，用坐标表示 $\mathbb{R}^X$，并令

$$L := \{(a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad I(a, b, b) := a.$$

那么，L 是 X 上的里斯空间，I 是一个积分。此外，如果 L 中的函数序列 $\{g_n\}$ 逐点单调收敛到函数 g，那么 g 在点 1 和 2 处也取相同的值，并且 $I(g_n) = g_n(0) \to g(0) = I(g)$。因此，$(X, L, I)$ 满足单调收敛定理。

另一方面，令 $u := (0,\ 1,\ 1) \in L$。对于任意的 $h = (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^X$，令

$$f_1 = (a, a, a), \quad f_n = 0 \ (n \geq 2), \qquad \varphi_1 = |a|(1, 1, 1), \quad \varphi_n = u \ (n \geq 2),$$

我们得到

$$|f_n| \le \varphi_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) = |a| < +\infty.$$

此外，$\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$ 仅在 $x = 0$处成立，且在该点上 $h(0) = a = \sum_n f_n(0)$。因此，$h \in L^1$ 和

$$L^1 = \mathbb{R}^X, \qquad I^1(h) = h(0).$$

注意，积分系统态射由其基空间映射决定。令 $A := (X, L, I)$，则映射 $\tau\colon X \to X$要定义一个态射 $A \to A$，必须满足

$$\tau(0) = 0, \qquad \tau(1) = \tau(2) \text{ or } \tau(1), \tau(2) \in \{1, 2\},$$

因此

$$|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Int}}(A, \iota A)| = 5.$$

相比之下，定义态射 $(\iota_M \circ \mathcal{D})(A) \to A$ 的映射 $\tau\colon X \to X$ 必须对每个 $h \in \mathbb{R}^X$都满足 $h \circ \tau \in L$。因此

$$\tau(0) = 0, \qquad \tau(1) = \tau(2),$$

and

$$|\mathrm{Hom}_{\mathbf{MInt}}((\iota_M \circ \mathcal{D})(A), A)| = 3.$$

因此，这两个 Hom集之间不存在双射，且 $\iota_M \circ \mathcal{D}$ 不是 ι的左伴随。在此例中，丹尼尔扩张添加了 I 无法区分的点 1，2 上的所有函数，而陪域 A 并不包含这些函数。因此，若要从丹尼尔扩张本身获得左伴随的泛性质，就必须将陪域限制为丹尼尔闭积分系统。

3.3.2 ι所具有的另一种反射

丹尼尔扩张不是到 ι的左伴随，并不意味着 ι没有左伴随。事实上，ι 确实有左伴随。不过，它的反射子不是丹尼尔扩张，而是另一种构造：它在 L^1 内部取满足单调收敛定理的最小 Riesz 子空间。

定理 3.3.2. 包含函子

$$\iota : \mathbf{MInt} \to \mathbf{Int}$$

有左伴随。

证明。设 $A = (X, L, I)$ 是 Int 中的一个对象，(X, L^1, I^1) 是它的丹尼尔扩张。考虑 L^1 的子空间族

$$\mathfrak{N}_A := \left\{ N \subset L^1 \;\middle|\; \begin{array}{l} L \subset N, \quad N \text{ is a Riesz space on } X, \\ (X, N, I^1|_N) \in \mathbf{MInt} \end{array} \right\}$$

并令

$$L^{\mathrm{M}} := \bigcap_{N \in \mathfrak{N}_A} N, \qquad I^{\mathrm{M}} := I^1|_{L^{\mathrm{M}}}.$$

由引理 2.5.20 和引理 2.6.6 可得 $L \subset L^1$ and $(X, L^1, I^1) \in \mathbf{MInt}$，因此 $L^1 \in \mathfrak{N}_A$ and$\mathfrak{N}_A$ 非空。

L^{M} 是里斯空间的交集，因此也是一个里斯空间，并且 $L \subset L^{\mathrm{M}}$。此外，I^{M} 是积分 I^1的限制，因此$(X, L^{\mathrm{M}}, I^{\mathrm{M}})$是一个积分系统。

我们证明该积分系统满足单调收敛定理。设$\{f_n\} \subset L^{\mathrm{M}}$ 和 $f : X \to \mathbb{R}$ 满足

$$f_n(x) \uparrow f(x) \quad (\forall x \in X), \qquad \sup_n I^{\mathrm{M}}(f_n) < +\infty.$$

对于每个 $N \in \mathfrak{N}_A$，我们都有 $f_n \in N$，且（X， N， $I^1|_N$）满足单调收敛定理，因此

$$f \in N, \qquad I^1(f) = \lim_{n\to\infty} I^1(f_n).$$

由于 N 是任意的， $f \in L^{\mathrm{M}}$，并且

$$I^{\mathrm{M}}(f) = \lim_{n\to\infty} I^{\mathrm{M}}(f_n).$$

因此

$$A^{\mathrm{M}} := (X, L^{\mathrm{M}}, I^{\mathrm{M}})$$

是 **MInt** 的一个对象。由引理 2.5.20， $I^1|_L = I$，恒等映射 id_X 诱导出一个积分系统态射

$$i_A : A \to \iota(A^{\mathrm{M}}).$$

设 $B =$（Y， M， J）是 **MInt** 的一个对象，并取一个积分系统态射

$$F : A \to \iota(B).$$

根据引理 3.1.1，同一个基空间映射 $F : Y \to \underline{X}$ 诱导出一个积分系统态射

$$F^1 : (X, L^1, I^1) \to (Y, M^1, J^1).$$

Put

$$N_F := \{f \in L^1 \mid F^* f \in M\}.$$

由于 F 是积分系统态射，我们有 $L \subset N_F$；又由于 M 是里斯空间， N_F 也是里斯空间。此外，对于每个 $f \in N_F$，由于 F^1 保持积分且 I^1， J^1 延拓了原积分，

$$J(F^* f) = J^1(F^* f) = I^1(f).$$

我们证明 $(X, N_F, I^1|_{N_F})$ 满足单调收敛定理。设 $\{f_n\} \subset N_F$ 且 $f : X \to \mathbb{R}$ 满足

$$f_n(x) \uparrow f(x) \quad (\forall x \in X), \qquad \sup_n I^1(f_n) < +\infty.$$

由于 (X, L^1, I^1) 满足单调收敛定理，

$$f \in L^1, \qquad I^1(f) = \lim_{n\to\infty} I^1(f_n).$$

另一方面， $F^* f_n \uparrow F^* f$ 和

$$\sup_n J(F^* f_n) = \sup_n I^1(f_n) < +\infty.$$

由于 B 满足单调收敛定理，我们得到 $F^* f \in M$，因此 $f \in N_F$。于是 $N_F \in \mathfrak{N}_A$，从而得到 $L^{\mathrm{M}} \subset N_F$。

因此 $\underline{F} : Y \to X$ 诱导出一个积分系统态射

$$F^\sharp : A^{\mathrm{M}} \to B.$$

由于 i_A 底层的基空间映射是 id_X，

$$F = \iota(F^\sharp) \circ i_A.$$

此外，若态射 $H : A^{\mathrm{M}} \to B$ 满足此等式，那么比较基空间映射可得 $H = F$。积分系统态射恰好就是其基空间映射，因此$H = F^\sharp$。故 i_A 是从 A 到 ι的泛态射。

由于 A 是任意的，定理 5.1.2 表明 ι 有一个左伴随。 □

3.3.3 两个反射何时相同?

因此，我们得到了 **Int** 中对象 $A=(X,L,I)$ 的两个反射。

- 到**DInt** 中的反射 $\mathcal{D}A=(X,L^1,I^1)$（定理 3.2.1）；
- 到**MInt** 中的反射 $A^{\mathrm{M}}=(X,L^{\mathrm{M}},I^{\mathrm{M}})$（定理 3.3.2）。

在这两种情况下，基空间都仍为 X，并且根据构造

$$L\subset L^{\mathrm{M}}\subset L^1.$$

这两个反射何时相同?

引理 3.3.3。设 A 是**Int**中的一个对象。那么

$$\mathcal{D}(A^{\mathrm{M}})=\mathcal{D}(A),$$

即 $(L^{\mathrm{M}})^1=L^1$，并且扩展积分在这些对象上一致。

证明。由于 $L\subset L^{\mathrm{M}}$ 和 $I^{\mathrm{M}}|_L=I$，关于 $(X,\ L,\ I)$ 的 $f\in L^1$ 级数表示 그대로 也是关于 $(X,\ L^{\mathrm{M}},\ I^{\mathrm{M}})$ 的级数表示。因此 $L^1\subset(L^{\mathrm{M}})^1$。

反之，由于 $L^{\mathrm{M}}\subset L^1$ 和 $I^1|_{L^{\mathrm{M}}}=I^{\mathrm{M}}$，同样的推理给出 $(L^{\mathrm{M}})^1\subset(L^1)^1$, ，并且根据引理 2.6.6，有 $(L^1)^1=L^1$ 。将这些合在一起可得 $(L^{\mathrm{M}})^1=L^1$。根据级数表示给出的定义，扩展积分一致性是显然的。□

命题 3.3.4。设 A 是 **Int** 中的一个对象。以下各项等价。

(i) $L^{\mathrm{M}}=L^1$，即 $A^{\mathrm{M}}=\mathcal{D}A$。

(ii) A^{M} 是 Daniell 闭的。(

iii) 由恒等映射 id_X 诱导的态射 $A^{\mathrm{M}}\to\mathcal{D}A$ 是一个同构。

(iv) L^1 中不存在包含 L的真里斯子空间，能够定义满足单调收敛定理的积分系统。

证明。(i)⇒(ii)成立，因为 $\mathcal{D}A$是丹尼尔闭的（引理 2.6.6）。(ii)⇒(i)成立，因为若 A^{M}是丹尼尔闭的，则$(L^{\mathrm{M}})^1=L^{\mathrm{M}}$，而左边等于 L^1 （由引理 3.3.3）。(i)⇔(iii)显然成立，因为这些对象共享基空间，而态射恰好就是相应的基空间映射。(i)⇔(iv)成立，因为 L^{M} 是 $\mathfrak{N}_A$的交集，也就是说，它是满足这些条件的子空间中最小的一个。□

例 3.3.5。在注 3.3.1 的例子中，$A=(X,\ L,\ I)$已经是 **MInt**中的一个对象，因此 $L^{\mathrm{M}}=L$，而 $L^1=\mathbb{R}^X$。所以 $L^{\mathrm{M}}\subsetneq L^1$，这两个反射并不一致。

很容易看出这个例子中的情形。积分 I 无法区分点 1 和点 2，而 L 中的元素在这两点取值相同。丹尼尔扩张将这两点上的所有函数都添入其中，但满足单调收敛定理并不需要这些函数。

上面的例子表明，L 无法分离基空间中的点，可能导致两个反射之间出现差距。但分离性并非充分条件。下面我们根据由 L 生成的 σ-代数来确定 L^{M}，并将这一事实推导为一个推论。

定义 3.3.6. 设 (X,L,I) 是一个积分系统。我们称 X 上的 σ-代数

$$\sigma(L):=\sigma\big(\{f^{-1}(B)\mid f\in L,\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}\big)$$

σ-代数由 L生成。也就是说，$\sigma(L)$ 是使 L 中的每个元素都可测的最小 σ-代数。我们还定义

$$L^\sigma:=\{f\in L^1\mid f\text{ is }\sigma(L)\text{-measurable}\},\qquad I^\sigma:=I^1|_{L^\sigma}.$$

命题 3.3.7。 对于每个积分系统 $A=(X,L,I)$,

$$L\subset L^{\mathrm{M}}\subset L^{\sigma}\subset L^{1}.$$

证明。 只需证明 $(X,\ L^{\sigma},\ I^{\sigma})\in\mathfrak{N}_A$。

L 中的每个元素都是 $\sigma(L)$-可测的（根据定义），且 $L\subset L^1$，因此 $L\subset L^{\sigma}$。所有 $\sigma(L)$-可测实值函数构成 X上的一个里斯空间，而 L^1 也是一个里斯空间（定理 2.5.6），所以它们的交集 L^{σ} 是 X上的一个里斯空间。 I^{σ} 是积分 I^1 在一个里斯子空间上的限制，因此 $(X,\ L^{\sigma},\ I^{\sigma})$ 是一个积分系统。

我们来检验单调收敛定理。假设 $\{f_n\}\subset L^{\sigma}$ 和 $f:X\to\mathbb{R}$ 满足$f_n(x)\uparrow f(x)$，对所有 $x\in X$均成立，且 $\sup_n I^{\sigma}(f_n)<+\infty$。由于 $(X,\ L^1,\ I^1)$ 满足单调收敛定理（引理 2.6.6），我们得到 $f\in L^1$，并且 $I^1(f)=\lim_n I^1(f_n)$。此外， f是 $\sigma(L)$-可测函数的逐点极限，因此是 $\sigma(L)$-可测的。因此 $f\in L^{\sigma}$，且$I^{\sigma}(f)=\lim_n I^{\sigma}(f_n)$。

因此 $L^{\sigma}\in\mathfrak{N}_A$，并且由于 L^{M} 是 $\mathfrak{N}_A$ 的交集，我们得到 $L^{\mathrm{M}}\subset L^{\sigma}$。 □

定义 3.3.8. 设 (X,L,I) 是一个积分系统。令

$$\mathcal{Z}_I:=\big\{h:X\to\mathbb{R}\ \big|\ \text{there is an } I\text{-null set } Z \text{ with } h|_{X\setminus Z}=0\big\}$$

并称 $\mathcal{Z}_I$ **的元素为支撑在零测集上的函数**。

由引理 2.6.8， $\mathcal{Z}_I$ 是 X 上的里斯空间。事实上，若 h_1 和 h_2 分别在 Z_1 和 Z_2之外为零，则 h_1+h_2 和 $|h_1|$ 都在 $Z_1\cup Z_2$之外为零。

命题 3.3.9. 对于每个积分系统 $A=(X,L,I)$,

$$L^1=L^{\sigma}+\mathcal{Z}_I.$$

此外， $h\in\mathcal{Z}_I$ 蕴含 $I^1(|h|)=0$，因此对于满足 $g\in L^{\sigma}$ 且 $h\in\mathcal{Z}_I$ 的分解 $f=g+h$，我们有 $I^1(f)=I^1(g)$。

证明。首先我们检查 $\mathcal{Z}_I\subset L^1$。令 $h\in\mathcal{Z}_I$，并取一个 I-零测集 Z 以及相应的序列 $\{g_n\}$。令 $f_n:=0$ 和 $\varphi_n:=g_n$，我们有 $|f_n|\le\varphi_n$ 和 $\sum_n I(\varphi_n)<+\infty$，而任何满足 $\sum_n\varphi_n(x)<+\infty$ 的x 都不属于 Z，因此 $h(x)=0=\sum_n f_n(x)$。于是 $\{f_n\},\{\varphi_n\}$ 是 h 的级数表示，且 $h\in L^1$。此外， $\{g_n\}\subset L\subset L^1$ 且 $I^1|_L=I$ （引理 2.5.20），因此 Z对于积分系统 (X,L^1,I^1) 也是零测集。由于 $|h|$ 在 Z之外为零，对 (X,L^1,I^1) 应用引理 2.6.9，得到 $I^1(|h|)=0$。

根据定义成立。由于 L^1 是一个里斯空间（定理 2.5.6），我们得到 $L^{\sigma}+\mathcal{Z}_I\subset L^1$。下面证明逆命题。设 $f\in L^1$，选取一个级数表示 $f\overset{\varphi_n}{\simeq}\sum f_n$，并令

$$\Phi_N:=\sum_{n\le N}\varphi_n,\qquad Z:=\Big\{x\in X\ \Big|\ \sum_n\varphi_n(x)=+\infty\Big\}.$$

于是 $\Phi_N\in L$ 是 $\sigma(L)$-可测的，并且

$$Z=\bigcap_{M\ge1}\bigcup_{N\ge1}\{\Phi_N>M\},$$

因此 $Z\in\sigma(L)$。此外， $|f_n|\le\varphi_n$ 给出 $\varphi_n\ge0$，且 $\sum_n I(\varphi_n)<+\infty$，所以 $\{\varphi_n\}$ 表明 Z 是一个 I-零测集。

定义函数 $g:\ X\to\mathbb{R}$ 如下

$$g(x):=\begin{cases}\sum_n f_n(x) & (x\notin Z)\\ 0 & (x\in Z).\end{cases}$$

对于 $x \notin Z$，级数 $\sum_n f_n(x)$ 绝对收敛（引理 2.5.5），因此 g 为实值函数。此外，g 是可测函数 $1_{X\setminus Z}\sum_{n\le N} f_n$ 的逐点极限，其中这些函数是 $\sigma(L)$-可测的，因此 $\sigma(L)$-可测。

$\{f_n\}$，$\{\varphi_n\}$ 也是 g的级数表示。事实上，条件（1）和（2）保持不变，而条件（3）恰好表明：当 $\sum_n \varphi_n(x) < +\infty$，即当 $x \notin Z$时，$g(x) = \sum_n f_n(x)$。因此 $g \in L^1$，从而 $g \in L^\sigma$。

最后，如果 $x \notin Z$，那么 $f(x) = \sum_n f_n(x) = g(x)$，因此 $f - g$ 在 Z之外为零。所以 $f - g \in \mathcal{Z}_I$，并且 $f = g + (f - g) \in L^\sigma + \mathcal{Z}_I$。 □

在 Stone 条件（定义 2.9.2）下，反向包含关系成立。Stone 条件弱于要求 L 包含常值函数 1，并且它包括具有无限总质量的积分系统（例 3.3.18）。

定理 3.3.10。 设 $A = (X, L, I)$ 是满足 Stone 条件的积分系统。那么

$$L^{\mathrm{M}} = L^\sigma.$$

证明。 由命题 3.3.7 可知，只需证明 $L^\sigma \subset N$ 对每个 $N \in \mathfrak{N}_A$ 都成立。下文固定 $N \in \mathfrak{N}_A$。

步骤 1：若 $g \in L$、$g \ge 0$ 且 $a > 0$，则 $1_{\{g>a\}} \in N \cap L^1$ 和 $I^1(1_{\{g>a\}}) \le I(g)/a$。 由 Stone 条件可知，$g \wedge a = a\big((g/a) \wedge 1\big) \in L$，因此

$$h_n := \big(n(g - g \wedge a)\big) \wedge 1 \in L.$$

在点 x 处令 $t := g(x)$：若 $t \le a$，则 $t - (t \wedge a) = 0$，因此 $h_n(x) = 0$；若 $t > a$，则$n(t - a) \uparrow +\infty$，因此 $h_n(x) \uparrow 1$。于是 $h_n \uparrow 1_{\{g>a\}}$ 逐点成立且单调递增。此外，$0 \le h_n \le 1$ 在 $\{g > a\}$之外为零，而在 $\{g > a\}$ 上有 $g/a > 1$，因此$h_n \le g/a$，并且

$$I(h_n) \le I(g)/a < +\infty.$$

由于 N 包含 L 并满足单调收敛定理，$1_{\{g>a\}} \in N$。由于 $N \subset L^1$ 且 I^1 扩展了 I，关于积分的估计也随之成立。

步骤 2：如果 $G \in \sigma(L)$ 满足 $1_G \in N$，那么对每个满足 $E \subset G$ 的 $E \in \sigma(L)$，都有 $1_E \in N$。 令

$$\mathcal{A}_G := \{E \in \sigma(L) \mid E \subset G,\ 1_E \in N\}.$$

我们验证这是 G 上的一个 σ-代数。我们有 $G \in \mathcal{A}_G$。如果 $E \in \mathcal{A}_G$，那么 $1_{G\setminus E} = 1_G - 1_E \in N$。如果 $E_1, E_2 \in \mathcal{A}_G$，那么$1_{E_1\cup E_2} = 1_{E_1} \vee 1_{E_2} \in N$。最后，设 $E_k \in \mathcal{A}_G$，令 $E := \bigcup_k E_k$ 和 $E'_m := E_1 \cup \cdots \cup E_m$；则 $E'_m \in \mathcal{A}_G$ 且$1_{E'_m} \uparrow 1_E$，而 $E'_m \subset G$ 给出

$$I^1(1_{E'_m}) \le I^1(1_G) < +\infty.$$

根据 N 的单调收敛定理，我们得到 $1_E \in N$。

接下来，我们证明 $\sigma(L)$ 在 G 上的迹 $\{E \cap G \mid E \in \sigma(L)\}$ 包含于 $\mathcal{A}_G$中。迹 σ-代数由 $\sigma(L)$的某个生成族的迹生成，因此只需检查$\{f > a\} \cap G \in \mathcal{A}_G$ $f \in L$ 和 $a \in \mathbb{R}$。

- 情形 $a > 0$。我们有 $\{f > a\} = \{f^+ > a\}$，其中 $f^+ \in L$且 $f^+ \ge 0$，因此步骤 1 给出$1_{\{f>a\}} \in N$。于是 $1_{\{f>a\}\cap G} = 1_{\{f>a\}} \wedge 1_G \in N$。
- 情形 $a = 0$。这里$\{f > 0\} = \bigcup_{k\ge 1}\{f > 1/k\}$ 是由前一种情形中的集合构成的可数并。

- 情形 $a < 0$。于是 $-a > 0$，对于 $k > 1/(-a)$，我们有 $-a - 1/k > 0$，因此

$$\{f \le a\} = \{-f \ge -a\} = \bigcap_{k>1/(-a)} \{-f > -a - \tfrac{1}{k}\}$$

是情形 $a > 0$ 中集合的可数交集。由 $\{f > a\} \cap G = G \setminus (\{f \le a\} \cap G)$ 可得结论。

由于 $\mathcal{A}_G$ 是一个 σ-代数，它包含整个迹。一个满足 $E \subset G$ 的 $E \in \sigma(L)$ 也作为 $E = E \cap G$ 属于该迹，因此 $1_E \in N$。

步骤 3： $L^\sigma \subset N$。 L^σ和 N都是里斯空间，且 f可分解为 $f = f^+ - f^-$，因此只需考虑满足 $f \geq 0$的情形 $f \in L^\sigma$。取一个级数表示 $f \overset{\varphi_n}{=} \sum f_n$。

在满足对所有 n 都有 $\varphi_n(x) = 0$ 的点 x 处，我们有 $\sum_n \varphi_n(x) = 0 < +\infty$，因此 $f(x) = \sum_n f_n(x)$，而 $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x) = 0$ 给出 $f(x) = 0$。因此

$$\{f \neq 0\} \subset \bigcup_{n,k \geq 1} G_{n,k}, \qquad G_{n,k} := \{\varphi_n > 1/k\}.$$

由于 $\varphi_n \in L$ 和 $\varphi_n \geq 0$，步骤 1 得出$1_{G_{n,\,k}} \in N \cap L^1$，以及$G_{n,\,k} \in \sigma(L)$。将族$\{G_{n,k}\}_{n,\,k}$排列成一个序列 $G_1, G_2, \ldots$，并令 $H_m := G_1 \cup \cdots \cup G_m$，我们得到$1_{H_m} = 1_{G_1} \vee \cdots \vee 1_{G_m} \in N$以及 $H_m \in \sigma(L)$。

取 $c > 0$。由于 f是 $\sigma(L)$-可测的，我们有 $\{f \geq c\} \in \sigma(L)$；而且 $\{f \geq c\} \cap H_m$属于 $\sigma(L)$，并且包含于 H_m，因此由步骤 2 得到 $1_{\{f \geq c\} \cap H_m} \in N$。由 $c > 0$ 和 $f \geq 0$ 可得 $\{f \geq c\} \subset \{f \neq 0\} \subset \bigcup_m H_m$，所以 $\{f \geq c\} \cap H_m \uparrow \{f \geq c\}$，也就是说，$1_{\{f \geq c\} \cap H_m} \uparrow 1_{\{f \geq c\}}$。此外，$f/c \geq 1$在 $\{f \geq c\}$上成立，在其外成立 $f/c \geq 0$，因此 $1_{\{f \geq c\}} \leq f/c$，并且

$$I^1(1_{\{f \geq c\} \cap H_m}) \leq I^1(f)/c < +\infty.$$

由关于 N的单调收敛定理，我们得到 $1_{\{f \geq c\}} \in N$。

最后，令

$$f_m := \sum_{k=1}^{m2^m} 2^{-m} 1_{\{f \geq k2^{-m}\}} \qquad \Big(= \big(2^{-m} \lfloor 2^m f \rfloor\big) \wedge m\Big),$$

函数 f_m作为 N中元素的有限线性组合，属于 N。它在 m 中单调递增，并逐点收敛到 f，而 $0 \leq f_m \leq f$ 给出 $I^1(f_m) \leq I^1(f) < +\infty$。由 N的单调收敛定理可得 $f \in N$。

由于 $N \in \mathfrak{N}_A$ 是任意的，我们有 $L^\sigma \subset L^{\mathrm{M}}$；再结合命题 3.3.7，得到 $L^{\mathrm{M}} = L^\sigma$。

□

推论 3.3.11。 如果常值函数 1 属于 L，那么 $L^{\mathrm{M}} = L^\sigma$。

证明。 由于 $1 \in L$ 且 L 是一个里斯空间，因此对每个 $f \in L$都有 $f \wedge 1 \in L$，也就是说，Stone 条件成立。 □

当 $1 \in L$ 时，可以取 $G := X$，因此上述证明中步骤 2 对 H_m 的局部化是不必要的。

与经典 Daniell–Stone 理论的关系。 定理 3.3.10 的内容与经典理论密切相关。包含满足 Stone 条件的里斯空间（Stone向量格）且对单调极限封闭的最小族，是一个标准对象，称为由 L 生成的实函数 σ-环；它对应于 $\sigma(L)$-可测性，这一点是经典的。 [11], 《可测性与测度》第 16 章第 4 节讨论的正是这一部分。

当前定理与经典论断的区别在于，单调极限是在 L^1 内取得的，并且只有在积分上满足有界性条件 $\sup_n I(f_n) < +\infty$ 时才成立（定义 2.4.1）。这就是为什么所生成的单调族不能直接使用，也是步骤 1 中进行截断以及证明中局部化到 H_m 的原因。所得结论是将 **该受限闭包与第二反射** L^{M} 识别起来（定理 3.3.2）。

推论 3.3.12。 如果 $A = (X,\ L,\ I)$ 满足 Stone 条件，那么

$$L^1 = L^{\mathrm{M}} + \mathcal{Z}_I.$$

也就是说， L^1 **与第二反射** L^{M} **之间的差异，恰好就是支撑于零测集上的函数**。

*Pro*关于。 由定理 3.3.10 可知 $L^{\mathrm{M}} = L^\sigma$，因此由命题 3.3.9 可得结论 . □

注 3.3.13 （丹尼尔扩张的两阶段分解）。 在 Stone 条件下，迄今为止的结果将丹尼尔扩张分为以下两个阶段。

$$L \quad \subset \quad \underbrace{L^{\mathrm{M}} = L^\sigma}_{\text{first stage}} \quad \subset \quad \underbrace{L^1 = L^{\mathrm{M}} + \mathcal{Z}_I}_{\text{second stage}}$$

第一阶段是将 L 在单调极限下闭合的操作，通过反射到 **MInt** 中得到（定理 3.3.2）。其目标是所有 $\sigma(L)$-可测可积函数的集合（定理 3.3.10）。第二阶段是添加支撑于零测集上的函数（推论 3.3.12）。

用测度论的语言来说，第一阶段是取关于由 L 生成的 σ-代数可测的可积函数，第二阶段则是对测度进行完备化（经过定理 2.9.6）。也就是说，

Daniell扩张是 Daniell–Stone 风格的可测化与测度的完备化的复合。

这两个阶段都是经典操作。本文的贡献在于确认这一分解（定理 3.3.10 和命题 3.3.9），并将该复合置于范畴论中，视为一个反射子。正如小节 1.3 所述，**用一句话概括本文的定位，就是“测度空间完备化的 Daniell 对应版本”**。

推论 3.3.14。 设 $A = (X, L, I)$ 是满足 Stone 条件的积分系统。那么，命题 3.3.4 中的等价条件等价于以下条件。

(v) L^1 的每个元素都是 $\sigma(L)$-可测的。

证明。 根据定理 3.3.10，我们有 $L^{\mathrm{M}} = L^\sigma$，而 $L^\sigma = L^1$ 是 (v) 的另一种表述。 □

这是通过 (X, L, I) 本身的性质给出的刻画，并未涉及 L^{M} 的构造。

推论 3.3.15。 令 A 为例 2.3.4 中的积分系统，即由 $[0,1$ 上的阶梯函数和黎曼积分组成的积分系统。则

$L^{\mathrm{M}} = \{f\colon\ [0,1) \to \mathbb{R}$ 博雷尔可测且勒贝格可积$\} \subsetneq L^1 = \{f\colon\ [0,1) \to \mathbb{R}$ 勒贝格可积$\}$,

并且两个反射并不一致。

证明。 将阶梯函数在 1 处截断后仍然是阶梯函数，因此该积分系统满足 Stone 条件（例 2.9.4）。此外， $\sigma(L)$ 是由半开区间 $[a, b) \subset [0, 1)$ 的示性函数生成的 σ-代数，也就是 $[0, 1)$ 的博雷尔 σ-代数。这些等式源于以下事实： L^1 是所有勒贝格可积函数的集合（例 2.5.22），再结合定理 3.3.10 即得。

我们来验证这个包含关系是严格的。康托集 $C \subset [0, 1]$ 是一个勒贝格零测集，其基数为连续统 $\mathfrak{c}$。因此， $C \setminus \{1\}$ 有 $2^{\mathfrak{c}}$ 个子集，而 $[0, 1)$ 只有 $\mathfrak{c}$个博雷尔集。因此存在一个非博雷尔集 $E \subset C \setminus \{1\}$。由于它是勒贝格零测集的子集，$E$ 是勒贝格可测的，而且 1_E 是勒贝格可积的，其积分为 0，所以 $1_E \in L^1$。另一方面， $E \notin \mathcal{B}([0, 1))$，因此 1_E 不是博雷尔可测的，并且 $1_E \notin L^{\mathrm{M}}$。□

注 3.3.16. 对于推论 3.3.15 的积分系统，L 分离 $[0,1)$ 中的点（对于 $x \neq y$，可以取一个包含 x 而不包含 y的半开区间）。它也满足 Stone 条件（例 2.9.4）。然而，两种反射并不相同。因此**点分离和 Stone 条件都不足以保证两种反射相同**。

造成这一差距的原因通常都可以辨明，并非只出现在这个例子中。根据命题 3.3.9，对于每个积分系统，我们都有 $L^1 = L^\sigma + \mathcal{Z}_I$；而在 Stone 条件下，根据推论 3.3.12，有 $L^1 = L^{\mathrm{M}} + \mathcal{Z}_I$。也就是说，**两种反射之间的差距恰好就是支撑于零测集上的函数**。在这个例子中，这表现为 L^{M} 仅包含博雷尔可测函数，而 L^1 则包含在零测集上任意取值的函数。换言之，这就是博雷尔与勒贝格之间的差别，也就是测度完备化所增加的部分。

丹尼尔扩张对级数表示的条件 (3)“仅在控制函数之和收敛的点处”施加限制（另见注 2.3.5），这一事实使得完备化自动完成。

例 3.3.17。 让我们在注 3.3.1 的例子中验证定理 3.3.10（$X = \{0,1,2\}$,$L = \{(a,\ b,\ b)\}$, $I(a,\ b,\ b) = a$）。这里 $1 = (1,\ 1,\ 1) \in L$。 L 中的元素在点 1 和 2 处取值相同，因此

$$\sigma(L) = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, X\},$$

而 $\sigma(L)$-可测函数恰好是在点 1 和 2 处取相同值的函数，即 L中的元素。因此，$L^\sigma = L^1 \cap L = L$，且如定理所断言，$L^{\mathrm{M}} = L$。这与上面例子中直接计算得到的值一致。

例 3.3.18。 定理 3.3.10 同样适用于具有无限总质量的积分系统。令 $X = \mathbb{R}$，令 L 为所有具有有界支集的阶梯函数组成的集合，并令 I 为它们的积分。那么 $1_{\mathbb{R}} \notin L$，但将一个阶梯函数截断于 1 处后仍然是阶梯函数，因此满足 Stone 条件。此外，$\sigma(L)$ 是由有界半开区间生成的 σ-代数，也就是 $\mathbb{R}$的 Borel σ-代数。

因此，根据定理 3.3.10，L^{M} 是 L^1中所有博雷尔可测元素组成的集合。对于这个积分系统，两个反射也不一致。事实上，康托集 $C \subset [0,1]$ 是一个I-零测集（取覆盖 C 且总长度至多为2^{-n}的有限个区间组成的阶梯函数 g_n），并且根据基数论证（与推论 3.3.15 的证明中相同），存在一个非博雷尔集 $E \subset C$。由于 1_E 在 C 之外为零，我们有 $1_E \in \mathcal{Z}_I \subset L^1$（命题 3.3.9），但 1_E 不是博雷尔可测的，因此不属于 L^{M}。

问题 3.3.19. 定理 3.3.10 中的假设“Stone 条件”是必要的吗？也就是说，是否存在一个不满足 Stone 条件且具有 $L^{\mathrm{M}} \neq L^\sigma$ 的积分系统？

例 2.9.5 表明 Stone 条件并非必要。该例（$X = \{1,2\}$,$L = \{(a,\ 2a)\}$, $I(a,\ 2a) = a$）不满足 Stone 条件，但正如其中所见，$L^1 = L$。此外，$\sigma(L) = 2^X$ 来自 $f = (1,\ 2)$ 下的原像，因此 $L^\sigma = L^1 = L$，所以$L^{\mathrm{M}} = L^\sigma$ 成立。问题在于，去掉 Stone 条件后，这个等式是否可能不成立。

Stone 条件仅在证明的步骤 1 中用到，也就是在从 L 的上集元素中提取示性函数并将其纳入 N 的地方。若不进行这一步，就无法保证 $\sigma(L)$ 中元素的示性函数属于 N，步骤 2 和步骤 3 的基础也就不复存在。

3.4 主定理的几乎处处版本

在将态射按相差零函数等同后得到的范畴中，也成立一个与主定理具有相同形式的伴随（定义 2.8.9）。

引理 3.4.1. 设 (X, L, I) 和 (Y, M, J) 是积分系统，并设

$$F, G : (X, L, I) \to (Y, M, J)$$

是积分系统态射。那么

$$F =_{\mathrm{ae}} G \quad \Longrightarrow \quad F^1 =_{\mathrm{ae}} G^1,$$

其中 F^1，G^1 是由丹尼尔扩张诱导的态射

$$(X, L^1, I^1) \to (Y, M^1, J^1)$$

由丹尼尔扩张诱导。

证明。 取 $f \in L^1$，并取引理 2.7.4 中的函数序列 $\{s_N\} \subset L$。由于 F^1，G^1是黎斯系统态射和积分系统态射，且 J^1扩张了 J，

$$\begin{aligned}
&J^1\big(|(F^1)^* f - (G^1)^* f|\big) \\
&\quad \le J^1\big(|(F^1)^*(f - s_N)|\big) + J^1\big(|F^* s_N - G^* s_N|\big) + J^1\big(|(G^1)^*(s_N - f)|\big) \\
&\quad = I^1(|f - s_N|) + J\big(|F^* s_N - G^* s_N|\big) + I^1(|s_N - f|) \\
&\quad = 2I^1(|f - s_N|).
\end{aligned}$$

最后一个等式用到了 $F =_{\mathrm{ae}} G$ 和 $s_N \in L$。令 $N \to \infty$，则左边为 0。由于 $f \in L^1$是任意的，$F^1 =_{\mathrm{ae}} G^1$。 □

推论 3.4.2。 将对象映到其丹尼尔扩张、将态射映到

$$[F] \longmapsto [F^1]$$

定义一个函子

$$\mathcal{D}_{\mathrm{ae}} : \mathbf{Int}_{\mathrm{ae}} \to \mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}.$$

证明。 根据引理 3.4.1，态射上的赋值不依赖于代表元的选择。此外，丹尼尔扩张是一个丹尼尔闭积分系统，且恒等态射和态射复合得以保持，这些结论在第 3.2 小节之前已得到证明。 □

定义 3.4.3。 我们将全子范畴的包含函子记为

$$\iota_{D,\mathrm{ae}} : \mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}} \to \mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}.$$

定理 3.4.4 （主定理的几乎处处版本）。 函子

$$\mathcal{D}_{\mathrm{ae}} : \mathbf{Int}_{\mathrm{ae}} \to \mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}$$

由丹尼尔扩张定义的函子是包含函子的左伴随$\iota_{D,\mathrm{ae}}$。

证明。 设 $A = (X, L, I)$ 为一个积分系统，并将其丹尼尔扩张记为 $\mathcal{D}_{\mathrm{ae}} A = (X, L^1, I^1)$。我们证明几乎处处等价类

$$[i_A] : A \to \iota_{D,\mathrm{ae}} \mathcal{D}_{\mathrm{ae}} A$$

的积分系统态射

$$i_A : A \to \iota_D \mathcal{D} A$$

在第 3.2 小节中构造的是一个从 A 到$\iota_{D,\ \mathrm{ae}}$的泛态射。

设 $B=(Y,\ M,\ J)$ 是一个丹尼尔闭积分系统，并设

$$[F]:A\to\iota_{D,\mathrm{ae}}B$$

是一个态射。选取一个代表元 F。由定理 3.2.1 的证明及 $M^1=M$，存在一个态射

$$F^1:\mathcal{D}_{\mathrm{ae}}A\to B$$

由丹尼尔扩张诱导，使得在代表元层面，

$$F=\iota_D(F^1)\circ i_A.$$

因此

$$[F]=\iota_{D,\mathrm{ae}}([F^1])\circ[i_A].$$

接下来，假设态射 $[H]:\ \mathcal{D}_{\mathrm{ae}}A\to B$ 满足

$$[F]=\iota_{D,\mathrm{ae}}([H])\circ[i_A].$$

这意味着，对于代表元，

$$F=_{\mathrm{ae}}H\circ i_A.$$

将引理 3.4.1 应用于这两个态射，

$$F^1=_{\mathrm{ae}}(H\circ i_A)^1.$$

丹尼尔扩张不会改变态射所对应的基空间映射，并且 B是丹尼尔闭的，因此 $(H\circ i_A)^1=H$。于是

$$[F^1]=[H].$$

因此，分解态射的几乎处处等价类是唯一的，并且 $[i_A]$是泛态射。

由于 A是任意的，$\iota_{D,\ \mathrm{ae}}$ 有一个左伴随。此外，对于积分系统态射 $T:\ A\to A'$，类 $[T^1]$ 满足

$$\iota_{D,\mathrm{ae}}([T^1])\circ[i_A]=[i_{A'}]\circ[T],$$

因此，由泛性质得到的左伴随在态射上的作用与$\mathcal{D}_{\mathrm{ae}}$一致。

□

推论 3.4.5。函子

$$\mathcal{D}_{M,\mathrm{ae}}:\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}\to\mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}$$

通过限制 $\mathcal{D}_{\mathrm{ae}}$ 到 $\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}$ 得到的函子是包含函子的左伴随

$$\iota_{M,\mathrm{ae}}:\mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}\to\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}.$$

证明。 $\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}$ 是$\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$的全子范畴，而$\mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}$ 是它的全子范畴。因此，只需将定理 3.4.4 的伴随同构限制在$\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}$的对象上即可。 □

注 3.4.6。 将态射按几乎处处等价取商，并不会削弱分解目标中函数的归属条件。因此，与主定理一样，在上述定理中也假设分解的目标具有 Daniell 闭性。

然而，**注 3.3.1 中的有限反例不能照其原样用作不能舍弃 Daniell 闭性的依据**。在该例中，只有 $\tau(0)=0$ 会产生影响，因此全部 5 个态射以及全部 3 个态射彼此几乎处处等价，而在几乎处处范畴中，两个 Hom 集都坍缩为单点。几乎处处版本的反例将在下一子子节中给出（推论 3.4.8）。

这一点与第 4 节形成对比。在那里，一旦将态射替换为算子，扩张就只能确定到相差零函数的程度，而将陪域对零函数取商便成为顺理成章的做法。不过，即便在那里，我们也没有证明“除非取商，否则扩张无法确定”（问题 4.2.7）。

3.4.1 在几乎处处版本中也不能省略 Daniell 闭性

如注 3.4.6 所述，注 3.3.1 中的有限反例在几乎处处范畴中没有影响。几乎处处版本的一个反例由以下一对积分系统给出：博雷尔可测函数的积分系统和勒贝格可积函数的积分系统。

命题 3.4.7. 令 $X = [0,1)$ 并设

$$P := \big(X,\ \{f\colon X \to \mathbb{R} \text{ 博雷尔可测且勒贝格可积}\},\ \text{勒贝格积分}\big),\ Q := \big(X,\ \{f\colon X \to \mathbb{R} \text{ 勒贝格可积}\},\ \text{勒贝格积分}\big).$$

Then

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Int}}(Q,P) = \emptyset.$$

证明。 设存在一个态射 $F\colon Q \to P$，并令 $\tau\colon X \to X$ 为其基空间映射。根据定义，对于每个勒贝格可积的 $h\colon X \to \mathbb{R}$，函数 $h \circ \tau$ 都是博雷尔可测且勒贝格可积的，并且

$$\int_X h \circ \tau \, d\lambda = \int_X h \, d\lambda$$

成立，其中 λ是勒贝格测度。

τ 是博雷尔可测且保持测度的。 对于一个 Borel 集 $B \subset X$，函数1_B勒贝格可积；又由于 $1_B \circ \tau = 1_{\tau^{-1}(B)}$是博雷尔可测的，集合 $\tau^{-1}(B)$ 是 Borel 集。此外，积分保持给出 $\lambda(\tau^{-1}(B)) = \lambda(B)$。

.....的像 τ 是不可数的。如果 $\tau(X)$ 包含于博雷尔零测集 N_0 中，那么$\tau^{-1}(X \setminus N_0) = \emptyset$，而 $\lambda(X \setminus N_0) = 1$，这与测度的保持相矛盾。可数集包含于某个博雷尔零测集，因此 $\tau(X)$ 是不可数的。

.....的像 τ 包含一个基数为 $\mathfrak{c}$的勒贝格零测集。由于 τ 是博雷尔可测的，其像 $\tau(X)$ 是一个解析集。不可数解析集包含一个非空完美集（解析集的完美集性质；见 [13]）。在这样的完美集 K 内进行康托尔型构造，使得第 n 阶段的所有 2^n 闭区间的直径均不超过 4^{-n}，所得交集 $P_0 \subset K$ 是一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的集合，并且对每个 n，$\lambda(P_0) \le 2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$，因此 $\lambda(P_0) = 0$。

矛盾。 取任意一个 $S \subset P_0$。由于 S 是勒贝格零测集的子集，所以它是勒贝格可测的，且 1_S 是勒贝格可积的。因此 $1_S \circ \tau = 1_{\tau^{-1}(S)}$ 是博雷尔可测的，也就是说，$\tau^{-1}(S)$ 是一个 Borel 集。

赋值 $S \mapsto \tau^{-1}(S)$ 在 P_0 的子集上是单射。事实上，如果 $S \neq S'$，那么不失一般性，我们可以取 $p \in S \setminus S'$。由于 $p \in P_0 \subset \tau(X)$，存在一个 $x \in X$，使得 $\tau(x) = p$，并且 $x \in \tau^{-1}(S) \setminus \tau^{-1}(S')$。

因此，我们得到了一个从 $\mathcal{P}(P_0)$ 到 X 的所有博雷尔子集所构成的集合的单射。但是 $|\mathcal{P}(P_0)| = 2^{\mathfrak{c}}$，而 X 只有 $\mathfrak{c}$ 个博雷尔集（与证明推论 3.3.15 时所用的事实相同）。这就产生了矛盾。 □

推论 3.4.8。函子

$$\iota_{M,\mathrm{ae}} \circ \mathcal{D}_{\mathrm{ae}} : \mathbf{Int}_{\mathrm{ae}} \longrightarrow \mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}$$

由丹尼尔扩张定义的函子不是包含函子 ι_{ae}：$\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}} \to$**Int**$_{\mathrm{ae}}$的全子范畴的左伴随。也就是说，**在几乎处处版本中，分解的陪域仍必须满足 Daniell 闭性**。

证明。 取 A 为例 2.3.4 的积分系统，根据推论 3.3.15，命题 3.4.7 中的对象P 是 A^{M}，而 Q 是 $\mathcal{D}A$。这里 P 是 **MInt** 中的一个对象（定理 3.3.2），并且不是丹尼尔闭的（同一推论）。此外，根据引理 3.3.3，$\mathcal{D}P = \mathcal{D}(A^{\mathrm{M}}) = \mathcal{D}A = Q$。

$\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$ 的态射是 $\mathbf{Int}$中态射的几乎处处等价类，因此命题 3.4.7 给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MInt}_{\mathrm{ae}}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ae}}P,\, P) = \emptyset.$$

另一方面，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}}(P,\ \iota_{\mathrm{ae}}P)$包含恒等态射的几乎处处等价类，因此非空。空集与非空集之间不存在双射，所以不存在伴随同构。

□

注 3.4.9。 这是本文中唯一用到描述集合论结果（解析集的完美集性质）的证明。这与非几乎处处反例（注 3.3.1）形成对照，后者只需一个三点集即可。将态射按几乎处处等价分类后，有限对象再也无法区分它们，而反例只有在博雷尔与勒贝格之间的差异中才会出现。

4 作为算子的态射

第 3 节中使用的态射就是基空间映射 $F\colon Y \to X$ 本身。根据这一定义，Hom 集不过是 $\mathrm{Map}(Y,\ X)$ 的一个子集，因此定理 3.2.1 中分解的唯一性自动由基空间映射的一致性得出。也就是说，对于主定理的非几乎处处版本，唯一性部分并无实质内容（几乎处处版本则不然；见第 3.4 小节）。

在第 4 节中，我们不再将态射与基空间映射联系起来，而是将其重新定义为里斯空间之间的线性映射。

> **关于出处的说明**。 这一表述基于 [1] 在讨论迭代积分时引入的定义，但**并非完全相同**。 那本书除了要求线性和正性之外，还要求序连续性 ，而第 4 节（定义 4.1.1）中的积分系统算子态射并未要求这一点。也就是说，我们采用的是那本书的定义，只是去掉了一个条件。
>
> 那本书要求序连续性，是为了将 $J \circ \Lambda$ 构造为积分；而在第 4 节的框架下，由于要求积分保持，序连续性便不再必要。详情请参见注 4.1.3。

请注意，要求序连续性的 [1], 定义（注 4.1.2）包含马尔可夫算子和转移概率，那本书也明确指出了这一点。

这种替换改变了以下三点。

- 态射不再经过基空间，Hom 集也不再是映射集合的子集。

- 分解的唯一性不再自动成立；它是利用 L 在 L^1 中的稠密性得到的（引理 2.7.4）。第 3.4 小节的几乎处处版本中也用到了同样的稠密性。

- 扩张仅在相差零函数的意义下确定。因此，将陪域对零函数取商就成了自然的做法（第 2.8 小节）。不过，我们并未证明“若不取商，它就无法确定”（问题 4.2.7）。

最后我们证明，以这种方式定义的带算子态射的范畴中，Danielle扩张同样给出了一个反射（定理 4.2.11）。

4.1 算子态射

定义 4.1.1. 设 (X, L, I) 和 (Y, M, J) 分别是集合 X 和 Y 上的积分系统。积分系统的一个**算子态射**

$$\Lambda : (X, L, I) \to (Y, M, J)$$

是一个满足以下两个条件的线性映射 $\Lambda : L \to M$

- （正性）对于每个 $f \in L$，若 $f \geq 0$，则 $\Lambda f \geq 0$;
- （积分保持）对于每个 $f \in L$， $J(\Lambda f) = I(f)$。

注 4.1.2 （与 [1]的算子之间的关系）。 [1] 引入了从定义在集合 X 上的里斯空间 L 到定义在集合 Y 上的里斯空间 M 的线性映射 Λ，并满足

- （正性）对于每个 $f \in L$，若 $f \geq 0$，则 $\Lambda f \geq 0$;
- （序连续性）对于任意函数序列 $\{f_n\} \subset L$，若 $f_n(x) \downarrow 0$ 对所有 $x \in X$ 成立，则 $(\Lambda f_n)(y) \downarrow 0$ 对所有 $y \in Y$成立。

Defi定义 4.1.1 在此基础上增加了积分保持，并**去除了序连续性** **y**.

凡是在该书意义下属于算子且保持积分的对象，都是定义 4.1.1 意义下的算子态射。反之一般不成立。

注 4.1.3。 请注意，我们并未施加注 4.1.2 中的序连续性。 [1] 施加该条件，是为了从 J 和 Λ 出发，在 L 上构造一个积分 $J \circ \Lambda$ 。事实上，若 $f_n(x) \downarrow 0$，则 $(\Lambda f_n)(y) \downarrow 0$；又因为 J 是一个积分，所以可得 $J(\Lambda f_n) \to 0$ 。

与此相反，在本文中，积分 I 从一开始就作为对象 (X, L, I) 的一部分给定。在这种情况下，积分保持 $J \circ \Lambda = I$ **已经意味着** $J \circ \Lambda$**是一个积分**。也就是说，为了使 $J \circ \Lambda$ 成为一个积分，并不需要序连续性。

序连续性对 Λf_n 的逐点行为确实是一项很强的要求，但在下文的讨论中从未用到。事实上，对于这个范畴的态射，逐点条件根本无法表述为命题。由定理 4.2.4 给出的扩张的取值是商 M 中的元素，因此逐点条件会取决于代表元的选择。也就是说，逐点条件不是错误，而是毫无意义。在这个范畴中，根本不应施加逐点条件。

另请注意，在 [1] 中，该条件以逐点收敛的方式表述，这一点对于该书所讨论的情形至关重要。若将其改为按 M 的序收敛，那么由于序收敛严格弱于逐点收敛（见附录 5.2 中的例子）， $J(\Lambda f_n) \to 0$ 就不再成立。

引理 4.1.4。 1. 对于每个积分系统 (X, L, I)，恒等映射 id_L： $L \to L$ 是一个算子态射 $(X, L, I) \to (X, L, I)$。

2. 对于算子态射 Λ: $(X, L, I) \to (Y, M, J)$ 和 Ξ: $(Y, M, J) \to (Z, N, K)$，其复合 $\Xi \circ \Lambda : L \to N$ 是算子态射 $(X, L, I) \to (Z, N, K)$。

证明。 (1) 显然。对于 (2)，线性映射的复合是线性的，正映射的复合是正的。积分保持成立，因为 $K(\Xi\Lambda f) = J(\Lambda f) = I(f)$。

□

定义 4.1.5. 对象为积分系统、态射为积分系统的算子态射的范畴记作

$$\mathbf{Int}_{\mathrm{op}}.$$

4.1.1 基空间映射所给出的态射之间的关系

引理 4.1.6. 设 $F\colon (X,L,I) \to (Y,M,J)$ 是按照第 2 节意义下的一个积分系统态射。那么

$$F^* : L \to M; \quad f \mapsto f \circ \underline{F}$$

是积分系统的算子态射。

证明。 根据复合的定义，线性性显而易见。若 $f \geq 0$，则对每个 $y \in Y$，都有 $(F^*f)(y) = f(F(y)) \geq 0$，因此 F^* 是正的。积分保持恰恰就是积分系统态射的定义。注意， F^* 也是序连续的。事实上，若对每个 $x \in X$ 都有 $f_n(x) \downarrow 0$，那么对每个 $y \in Y$，令 $x := F(y)$，便得到 $(F^*f_n)(y) = f_n(x) \downarrow 0$。 □

命题 4.1.7。 将对象保持不变，并把态射 F 送到 F^* 的赋值定义了一个函子

$$\mathcal{E} : \mathbf{Int} \to \mathbf{Int}_{\mathrm{op}}.$$

证明。 根据引理 4.1.6，态射会被映为算子态射。对于恒等态射，$(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_L$。至于复合，$G \circ F$ 所对应的基空间映射是 $F \circ G$，因此对每个 $f \in L$

$$(G \circ F)^* f = f \circ (\underline{F} \circ \underline{G}) = (f \circ \underline{F}) \circ \underline{G} = G^*(F^* f),$$

且 $(G \circ F)^* = G^* \circ F^*$ 成立。 □

注记 4.1.8。 函子 $\mathcal{E}$ 不一定是忠实的。事实上，当 L 不能区分 X中的各点时，不同的基空间映射 $F \neq G$ 可能给出相同的拉回 $F^* = G^*$。从这个意义上说，$\mathbf{Int}^{\mathrm{op}}$ 从一开始就没有携带积分无法区分的关于基空间的信息。

注记 4.1.9。 $\mathcal{E}$ 也不是满的。在算子态射中，那些来自基空间映射的算子态射仅限于保持格运算 $\wedge$, $\vee$ （Riesz 同态）的算子态射。一般的算子态射不一定是格同态，而且，正如 [1]所指出的，这一差异决定了概率核和马尔可夫算子是否被包含在内。下一个例子将具体展示这一差异。

例 4.1.10 （有限集的情形：列随机矩阵）。 设 X, Y 为有限集，并设 $L = \mathbb{R}^X$和 $M = \mathbb{R}^Y$。取正权重 $p\colon X \to (0, \infty)$ 以及 $q\colon Y \to (0, \infty)$，并令

$$I(f) := \sum_{x \in X} p(x) f(x), \qquad J(g) := \sum_{y \in Y} q(y) g(y);$$

那么 (X,L,I) 和 (Y,M,J) 都是积分系统。

线性映射 $\Lambda\colon L \to M$ 由矩阵 (Λ_{yx}) 表示。然后

- 正性等价于所有元素都满足 $\Lambda_{yx} \geq 0$;
- preservation of the integral, $J(\Lambda f) = I(f)$, says that $\sum_x \big(\sum_y q(y)\Lambda_{yx}\big) f(x) = \sum_x p(x) f(x)$ holds for every f, hence is equivalent to

$$\sum_{y \in Y} q(y)\Lambda_{yx} = p(x) \qquad (\forall x \in X).$$

特别地，在 $p \equiv 1$ 和 $q \equiv 1$ 的情形下（计数，即例 2.3.3 的有限版本），后一个条件表示

$$\sum_{y \in Y} \Lambda_{yx} = 1 \qquad (\forall x \in X),$$

也就是说，**每一列的和等于1**。因此，在这种情况下，积分系统的算子态射恰好是**列随机矩阵**。下文中，本文所说的“随机矩阵”均指列随机矩阵。

另一方面，对于由基空间映射 $F\colon Y \to X$ 产生的态射，当 $F(y) = x$ 时有 $\Lambda_{yx} = 1$，否则有 $\Lambda_{yx} = 0$，因此每一行恰好包含一个 1。此外，在计数情形下，列和条件还会强制要求 $|F^{-1}(x)| = 1$，也就是说，F 是双射。

也就是说，在相同的对象之间，

> 若以基空间映射为态射，则只有“置换矩阵”是态射；若以算子为态射，则所有“列随机矩阵”都是态射

。这是 $\mathcal{E}$ 不是满的这一事实最简单的体现。

注 4.1.11. 在例 4.1.10 的情形下施加 $\Lambda 1_X = 1_Y$（行和等于 1），便得到 [1] 所称的**马尔可夫算子**，与之对应的测度族是**转移概率**。

不过请注意，在计数情形下，同时施加积分保持（列和等于 1）和行和等于 1，会得到一个**双随机矩阵**。因此，不能说“$\mathbf{Int}^{\mathrm{op}}$ 包含马尔可夫链的所有转移矩阵”。对于一般权重 p，q，作为态射的转移矩阵仅限于满足 $\sum_y q(y)\Lambda_{yx} = p(x)$ 的那些矩阵，也就是说，满足将 q 映射到 p 的那些矩阵。所包含的恰好是满足这一条件的矩阵。

4.2 算子态射的丹尼尔扩张

本小节的主要结果是定理 4.2.4。与第 3 节不同，**唯一性并不能由基空间映射的一致性推出**；它是通过压缩性以及 L 在 L^1 中的稠密性得到的。

在下文中，采用第 2.5 节中的记号。符号 $\mathcal{N}_J$，$\widetilde{M} = M/\mathcal{N}_J$、$\pi_J$ 和 $\widetilde{\ }$

4.2.1 压缩性

下面，我们称 $\Lambda\colon L \to M$ 为到商的**算子态射**，如果 Λ 是线性的、正的（$f \geq 0 \Rightarrow \Lambda f \geq 0$），并且满足 $J(\Lambda f) = I(f)$。对于普通算子态射 $\Lambda\colon L \to M$，复合 $\pi_J \circ \Lambda$ 是到商的算子态射。

引理 4.2.1。 </style>设 $\Lambda\colon L \to M$ 是线性且正的。则对每个 $f \in L$，$|\Lambda f| \leq \Lambda|f|$ 成立。

证明。 我们有 $f \leq |f|$ 和 $-f \leq |f|$。由于 Λ 是线性且正的，因此 $\Lambda f \leq \Lambda|f|$ 和 $-\Lambda f \leq \Lambda|f|$，并且在里斯空间 M 中，我们得到 $|\Lambda f| = (\Lambda f) \vee (-\Lambda f) \leq \Lambda|f|$。 □

引理 4.2.2 (压缩性)。 设 $\Lambda\colon L \to M$ 是到商中的一个算子态射。那么

$$\|\Lambda f\| \leq \|f\|_I$$

对每个 $f \in L$ 都成立。此外，当 $f \geq 0$ 时等号成立。

证明。 由引理 4.2.1 以及 J 的正性，

$$\|\Lambda f\| = \widetilde{J}(|\Lambda f|) \leq \widetilde{J}(\Lambda|f|) = I(|f|) = \|f\|_I.$$

这里第二个等式是 $|f| \in L$ $f \geq 0$ $|f| = f$ 的积分保持。当我们有且 $\Lambda f \geq 0$ 时，因此 $\|\Lambda f\| = J(\Lambda f) = I(f) = \|f\|_I$。 □

注 4.2.3。 该等式一般并不成立，这正是它与格同态的区别。如果 Λ 是格同态，那么 $|\Lambda f| = \Lambda|f|$ 且它是等距的；而一般的算子态射仍仅具有压缩性。下面的讨论只需要压缩性。

4.2.2 延拓定理

定理 4.2.4（算子态射的丹尼尔扩张）。设 $(X,\ L,\ I)$ 是一个积分系统，其丹尼尔扩张为 $(X,\ L^1,\ I^1)$；设 $(Y,\ M,\ J)$ 是一个积分系统，**使得**$\sim M$ **是一个巴拿赫空间**。设 $\Lambda:\ L \to M$ 是到该商空间中的算子态射。那么存在**唯一的**到该商空间中的算子态射

$$\Lambda^1 : L^1 \to \widetilde{M}$$

满足 $\Lambda^1|_L = \Lambda$。此外，关于 $\|\cdot\|$，Λ^1 是压缩的。

证明。**存在性**。设 $f \in L^1$。由引理 2.7.4，我们可以取 $\{s_N\} \subset L$，使得 $\|f - s_N\|_{I^1} \to 0$。收敛序列是柯西序列，并且对于 $s_N,\ s_M \in L$，有 $\|s_N - s_M\|_{I^1} = \|s_N - s_M\|_I$（引理 2.5.20）。因此，由引理 4.2.2 得到

$$\|\Lambda s_N - \Lambda s_M\| = \|\Lambda(s_N - s_M)\| \le \|s_N - s_M\|_I \longrightarrow 0,$$

$\sim$ $\sim$，因此 $\{\Lambda s_N\}$ 是 M中的柯西序列。根据假设，M是巴拿赫空间，所以该序列收敛。我们将其极限定义为 $\Lambda^1(f)$。

逼近序列的无关性。如果 $\{t_N\} \subset L$ 也满足 $\|f - t_N\|_{I^1} \to 0$ $\sim$，那么 $\|s_N - t_N\|_{I^1} \to 0$，而压缩性给出 $\|\Lambda s_N - \Lambda t_N\| \to 0$。由于 M是赋范空间且极限唯一，这两个极限相等。

线性性、压缩性以及在 L **上的一致性**。对于 $f,\ g \in L^1$ 和 $a \in \mathbb{R}$，分别取逼近序列 $\{s_N\},\ \{u_N\}$，则序列 $\{s_N + a u_N\}$ 是 $f + ag$的逼近序列，因而具有线性性。此外，$\|\Lambda s_N\| \le \|s_N\|_I = \|s_N\|_{I^1} \to \|f\|_{I^1}$，因此由范数的连续性可得 $\|\Lambda^1 f\| \le \|f\|_{I^1}$。对于 $f \in L$，取常值序列 $s_N := f$，得到 $\Lambda^1 f = \Lambda f$。

正性。设 $f \in L^1$ 且 $f \ge 0$。对于逼近序列 $\{s_N\}$，令 $s_N^+ := s_N \vee 0 \in L$。由于 $f \ge 0$，我们有 $|f - s_N^+| \le |f - s_N|$逐点成立，从而 $\|f - s_N^+\|_{I^1} \le \|f - s_N\|_{I^1} \to 0$。因此，$\{s_N^+\}$ 也是 f 的逼近序列，并且 $\Lambda^1 f = \lim_N \Lambda s_N^+$。对于每个 N，$s_N^+ \ge 0$ 给出 $\Lambda s_N^+ \ge 0$。$\widetilde{M}$ 的正锥关于 $\|\cdot\|$ 是闭的（事实上，$\|(\Lambda^1 f) \wedge 0\| \le \|\Lambda^1 f - \Lambda s_N^+\| \to 0$），因此 $\Lambda^1 f \ge 0$。

$\sim$ $\sim$**积分保持**。J满足 $|J(v)| \le \|v\|$，因此是连续的。因此 $\widetilde{J}(\Lambda^1 f) = \lim_N \widetilde{J}(\Lambda s_N) = \lim_N I(s_N) = \lim_N I^1(s_N) = I^1(f)$。最后一个等式成立，是因为$|I^1(f) - I^1(s_N)| \le I^1(|f - s_N|) \to 0$。

唯一性。设 $\Psi:\ L^1 \to$ $\sim$ M 是到商中的算子态射，且满足 $\Psi|_L = \Lambda$。将引理 4.2.2 应用于 $(X,\ L^1,\ I^1)$，映射 Ψ 是压缩的，因此相对于 $\|\cdot\|_{I^1}$是连续的。Ψ 和 Λ^1 在 L上相等，并且根据引理 2.7.4，L 在 L^1 中稠密，因此作为两个连续映射，它们在整个 L^1上相等。 □

注释 4.2.5. 请注意，唯一性的证明与第 3 节主定理的情形有本质区别。在那里，态射本身就是基空间映射，因此，基空间映射一致便自动推出分解态射的唯一性。而在这里，**真正发挥作用的是压缩性（引理 4.2.2）和稠密性（引理 2.7.4）**。

不过，第 4 节并非预备章节中的解析引理首次参与证明泛性质。在第 3.4 小节主定理的几乎处处版本中，同一个稠密性引理也通过引理 3.4.1 得到了应用。具体而言，**在非几乎处处版本中，基空间映射一致便自动推出唯一性；而第 4 节的几乎处处版本和算子版本则需要借助解析论证**。

$\sim$**注 4.2.6**。定理 4.2.4 给出的是一个映射到 M 的 Map，而不是一个映射到 M 的 Map。在 M 中为 $\widetilde{M}$ 的元素选择代表元，可以得到一个映射 $L^1 \to M$，但这仅由零函数确定

到零函数为止。因此，为了在态射为算子态射的范畴中讨论丹尼尔扩张，自然的做法是将陪域按零函数取商。

然而，本文无法断言“除非取商，否则扩张是不确定的”。这需要给出一个**取值于商空间且不允许线性正提升的算子态射** $L^1 \to M$，而本文并未提供这样的例子（问题 4.2.7）。事实上，对于由基空间映射诱导的态射，确实存在提升 $F^*\colon\ L^1 \to M$ 因此，在第 3 节的情形中，无需转而考虑几乎处处等价。

请注意，扩张仅在相差一个零测集的意义下确定的情况，同样出现在 [1], 关于迭代积分的定理中；该书也以这种形式陈述了可积函数的扩张。

问题 4.2.7。 是否存在一个取值于商空间 $L^1 \to \widetilde{M}$ 且不允许线性正提升 $L^1 \to M$的算子态射?

如果这样的态射存在，就能说明转而考虑几乎处处等价是必要的，同时也为将第 3 节保留为独立一节增添了一个理由（见第4.3.3小节）。

4.2.3 几乎处处范畴与主定理

引理 4.2.8（到商空间的算子态射由商映射确定）。 设$\sim\Lambda : L \to M$ 是到商空间的算子态射。则 Λ 将 $\mathcal{N}_I$ 映至 0，且存在$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$唯一的线性映射 $\Lambda\colon\ L \to M$ 满足 $\Lambda \circ \pi_I = \Lambda$。此外， Λ 是正的，并且满足$\sim\ \sim$ $\sim J(\Lambda(\pi_I(f))) = I(\pi_I(f))$，对每个 $f \in L$均成立。

证明。若 $f \in \mathcal{N}_I$，则 $\|f\|_I = 0$，而引理 4.2.2 给出 $\|\Lambda f\| \le \|f\|_I = 0$。由于 $\|\cdot\|$是$\sim$ $\sim M$ 上的范数，我们得到 $\Lambda f = 0$。因此， Λ 将 $\mathcal{N}_I$ 映至 0，并由此确定唯一的线性映射 Λ 。

我们验证引理2.8.4若，我们可以取那么根据序便定义$f + f' \ge 0$。由于 $\Lambda f' = 0$,

$$\widetilde{\Lambda}(\pi_I(f)) = \Lambda(f + f') \ge 0.$$

$\sim\ \sim$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$最后， $J(\Lambda(\pi_I(f))) = J(\Lambda f) = I(f)$ $= I(\pi_I(f))$。 □

定义 4.2.9。 其对象为积分系统、态射为从 (X, L, I) 到 (Y, M, J) 的、进入商 Λ 的算子态射的范畴，记作 $L \to M$

$$\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$复合定义如下。对于 $\Lambda\colon\ L \to M$ 和 $\Xi\colon\ M \to N$，引理 4.2.8 表明， Ξ $\sim\ \widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$诱导出一个线性正映射 $\Xi\colon\ M \to N$。我们将复合定义为 $\Xi \circ \Lambda$。它是线性$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$且正的，并满足 $K(\Xi(\Lambda f)) = J(\Lambda f) = I(f)$，因此它仍然是进入商 $\widetilde{\ }$的算子态射。恒等态射为 $\pi_I\colon\ L \to L$。

$\widetilde{\ }$我们将所有满足 L 是巴拿赫空间的对象构成的满子范畴记作

$$\mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}}.$$

根据引理 2.8.5，Daniell 闭积分系统属于这个子范畴。取这个子范畴的原因将在第 4.2.4 小节中说明。

注 4.2.10。 对于通常的算子态射 $\Lambda, \Lambda'\colon L \to M$，定义相同的态射$\pi_J \circ \Lambda = \pi_J \circ \Lambda'$等价于对每个 $f \in L$， $J(|\Lambda f - \Lambda' f|) = 0$成立。后者正是定义 2.8.7 中的关系 $=_{\mathrm{ae}}$ 在算子态射上的对应形式。

然而，将 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 称为“通过几乎处处等价对态射取商所得到的范畴”并不准确。它的态射从一开始就被定义为到$\widetilde{\ }$商 $L \to M$中的所有 算子态射，而其中并非每个态射都必定来自 M-值态射（注 4.2.6）。确切地说，两者的关系是：**存在一个忠实函子，从通过几乎处处等价对普通算子态射取商所得到的范畴映入 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$。**

定理 题 4.2.11（主定理的算子态射版本）。包含函 r

$$\iota_{B,\mathrm{op}} : \mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}} \to \mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$$

有一个左伴随

$$\mathcal{D}_{\mathrm{op}} : \mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}} \to \mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}}.$$

它在对象上的作用是丹尼尔扩张。在态射上的作用则将态射 Λ:

$\sim$ $\sim A \to B$扩张到 $L^1 \to M^1$，此扩张由定理 4.2.4 给出，作用于复合 $i_B \circ \Lambda$: $L \to M^1\sim$（由于 $\mathcal{D}B$ 是丹尼尔闭的， M^1 是巴拿赫空间，因此可应用引理 2.8.5 和该定理）。

证明。设 $A = (X, L, I)$ 是 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 的一个对象，令 $\mathcal{D}A := (X, L^1, I^1)$ 为其丹尼尔扩张。由引理 2.6.6，系统 $\mathcal{D}A$ 是丹尼尔闭的；由引理 2.8.5，空间 L^1 是一个巴拿赫空间，因此 $\mathcal{D}A$ 是 $\mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}}$ 的一个对象。此外，由包含关系 $L \subset L^1$ 和 $I^1|_L = I$（引理 2.5.20），映射

$$i_A := \pi_{I^1}|_L : L \to \widetilde{L^1}$$

是一个到商空间的算子态射，并定义了一个态射 $i_A : A \to \iota_{B,\,\mathrm{op}}(\mathcal{D}A)$，其属于$\mathbf{Int}_{\mathrm{op},\,\mathrm{ae}}$。

我们证明 i_A 是从 A 到 $\iota_{B,\,\mathrm{op}}$ 的泛态射。设 $B = (Y,\ M,\ J)$ 是$\mathbf{BInt}_{\mathrm{op},\,\mathrm{ae}}$ 的一个对象，并设 Λ: $A \to \iota_{B,\,\mathrm{op}}(B)$ 是一个态射，也就是说，是到 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 商空间 $\Lambda : L \to M$ 的算子态射。由于 M 是一个巴拿赫空间，定理 4.2.4 适用，因此存在唯一的到商空间的算子态射 $\Lambda^1 : L^1 \to \widetilde{M}$，使得 $\Lambda^1|_L = \Lambda$。

记 $\Lambda^\sharp$ 为由 Λ^1 确定的态射 $\mathcal{D}A \to B$。根据$\sim$定义 4.2.9 中复合的定义，复合 $\iota_{B,\,\mathrm{op}}(\Lambda^\sharp) \circ i_A$ 将 $f \in L$ 映为 $\Lambda^1(\pi_{I^1}(f)) = \Lambda^1(f) = \Lambda(f)$。因此

$$\Lambda = \iota_{B,\mathrm{op}}(\Lambda^\sharp) \circ i_A.$$

反过来，若态射 $H : \mathcal{D}A \to B$ 满足 $\Lambda = \iota_{B,\mathrm{op}}(H) \circ i_A$，那么表示 H 的到商 $L^1 \to \widetilde{M}$ 中的算子态射在 L上与 Λ 一致。根据定理 4.2.4 的唯一性，我们得到 $H = \Lambda^\sharp$。

由于 A 是任意的，定理 5.1.2 表明，$\iota_{B,\mathrm{op}}$ 有一个左伴随。 □

$\widetilde{\ }$**注 4.2.12.** 第 4 节对陪域的要求仅仅是 M 为巴拿赫空间，而非其本身具有 Daniell 闭性。对于 Daniell 闭积分系统，引理 2.8.5 连接了二者。下一个子子节（命题 4.2.18）将说明，选择这个子范畴是自然的。

另请注意，单调收敛定理的定义（定义 2.4.1）仍按原样采用逐点收敛。这只是对象 的性质，并且仅用于借助引理 2.8.5 得到 M 的完备性。只要不对态射一侧施加逐点条件（注 4.1.3），就没有必要将单调收敛定理改写为几乎处处意义。

4.2.4 此范畴看到了什么

上一子子节主定理的表述中有一点$\widetilde{\ }$值得注意。$\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 的态射是到商 $L \to M$ 中的算子态射，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$并且根据压缩性（引理 4.2.2），它们将 $\mathcal{N}_I$ 映射为 0。因此，态射只看到了 L 和 M。在本子子节中，我们将对此进行表述，并陈述由此得到的结论。

定义 4.2.13。如果一对 (E, ϕ) 满足： E 是一个里斯空间，且ϕ: $E \to \mathbb{R}$ 是一个正线性泛函，并且

$$\|u\|_\phi := \phi(|u|)$$

是 E 上的范数。从 (E,ϕ) 到 (F,ψ) 的态射是一个线性映射 $T\colon E\to F$，它是正的并满足 $\psi\circ T=\phi$。我们将这个范畴记作 $\mathbf{AL}_0$。

由于 $\|u+v\|_\phi=\phi(u+v)=\|u\|_\phi+\|v\|_\phi$ 对 $u,\ v\geq 0$，范数在正锥上可加。若它是完备的，则它是 AL-空间，也就是附录 5.2 中提到的 Kakutani表示定理的对象。

引理 4.2.14. 若 $(X,\ L,\ I)$ 是一个积分系统，则 $(L,\ I)$ 是一个预 AL 空间。

证明。 由引理 2.8.4 得出。 □

命题 4.2.15. 将对象 $A=(X,\ L,\ I)$ 映到 $(L,\ I)$，并将态射 $\Lambda\colon L\to M$ 映到诱导映射 $\Lambda\colon L\to M$ 的赋值，定义了一个**忠实且满**函子

$$Q:\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}\longrightarrow\mathbf{AL}_0.$$

证明。 **That Λ 是 $\mathbf{AL}_0$ 的态射，这由**引理 4.2.8。

函子性。 恒等态射是 π_I and $\widetilde{\pi_I}=\mathrm{id}_{\tilde{L}}$。至于复合，定义 4.2.9 给出 $\Xi\circ\Lambda=\Xi\circ\Lambda=\Xi\circ\Lambda\circ\pi_I$，因此 $\Xi\circ\Lambda=\Xi\circ\Lambda$。

忠实性。如果 $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Lambda'}$ 那么 $\Lambda=\widetilde{\Lambda}\circ\pi_I=\widetilde{\Lambda'}\circ\pi_I=\Lambda'$。

满性。 给定一个态射 $T\colon(L\ I\to M\ J)_0$，$\Lambda=T\circ\pi_I\ \ L\to M,\ )(,\ )$，它属于 **AL**映射 : : 是线性且为正，并满足 $\widetilde{J}(\Lambda f)=I(\pi_I(f))=I(f)$，因此它是映入商的算子态射。根据构造 $\Lambda=T$。 □

推论 4.2.16。 $A\cong B$在 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$中是等价的，当且仅当 $(L,I)\cong(M,J)$ 在 $\mathbf{AL}_0$中成立。此外，此时该同构是等距的。

证明。 忠实且满的函子会反映同构，也会保持同构。至于等距性，由于 T 及其逆映射 T^{-1} 都是压缩的（对 $\mathbf{AL}_0$中的态射进行相同计算，并应用引理 4.2.2），

$$\|u\|=\|T^{-1}Tu\|\leq\|Tu\|\leq\|u\|$$

即可得证。 □

也就是说，$\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ **既看不到基空间 X，也看不到 L 作为函数空间的实现**。 如果 L 与预 AL 空间相同，那么这些对象无法区分。

命题 4.2.17。 设 $A=(X,L,I)$ 是一个积分系统。那么 $Q(i_A)=j_I\colon L\to L^1$是一个稠密等距嵌入，且 L^1 是一个巴拿赫空间。也就是说，$Q(\mathcal{D}A)$ 是 $Q(A)$ 的 Banach 完备化。

证明。 j_I 是单射 Riesz 同态且为等距的，这一点由引理 2.8.6 得出。像的稠密性：对于 $f\in L^1$，取引理 2.7.4 中的 $\{s_N\}\subset L$，

$$\|\pi_{I^1}(f)-j_I(\pi_I(s_N))\|=\|\pi_{I^1}(f-s_N)\|=I^1(|f-s_N|)\longrightarrow 0.$$

由于 $\mathcal{D}A$ 是 Daniell 闭积分系统（引理 2.6.6），引理 2.8.5 表明 L^1 是 Banach 空间。 □

命题 4.2.18 （$\mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}}$ 的刻画）。 设 $A=(X,L,I)$ 是 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 中的一个对象。那么 A 属于 $\mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}}$ 等价于 $i_A\colon\ A\to\mathcal{D}A$ 是 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 中的一个同构。此外，$\mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}}$ 是同构闭的，且是 Daniell 闭对象类的同构闭包。

证明。 $\Leftarrow$：若 i_A 是一个同构，则推论 4.2.16 表明 L 与 L^1 等距同构，而根据命题 4.2.17，后者是一个巴拿赫空间。

$\Rightarrow$：如果 L 是巴拿赫空间，那么命题 4.2.17 中的等距嵌入 j_I 的像是完备的，因此是闭的；它同时也是稠密的，所以 j_I 是满射。由于 j_I 是里斯同构，其逆映射是正的且保持积分，因此 $Q(i_A)$ 是 $\mathbf{AL}_0$ 的同构。根据命题 4.2.15，态射 i_A 是同构。

由推论 4.2.16 可知它是同构闭的。同构是等距的，因此如果 $\widetilde{L}$ 是巴拿赫空间，那么任何与之同构的预 AL 空间也都是巴拿赫空间。

最后，我们验证它确实是该闭包。根据引理 2.8.5，Daniell 闭对象属于 $\mathbf{BInt}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$；而正如刚才所见，该子范畴是同构闭的，所以 Daniell 闭对象的同构闭包包含于 $\mathbf{BInt}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$。反过来，若 $A \in \mathbf{BInt}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$，那么 $A \cong \mathcal{D}A$，且 $\mathcal{D}A$ 是 Daniell 闭的。 □

注 4.2.19（Daniell 闭对象类不是同构闭的）。上面的命题意味着，在该范畴中陈述主定理时，应取的子范畴是 $\mathbf{BInt}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$，而不是所有 Daniell 闭对象组成的类。后者不是同构闭的。

事实上，取注 3.3.1 中的例子：$X = \{0, 1, 2\}$, $L = \{(a,\ b,\ b)\}$, $I(a,\ b,\ b) = a$。由于 $I(|(a,\ b,\ b)|) = |a|$ 我们有 $\mathcal{N}_I = \{(0,\ b,\ b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ 以及

$$\widetilde{L} \cong \mathbb{R}, \qquad \widetilde{I}(t) = t$$

（该同构为 $\pi_I(a,\ b,\ b) \mapsto a$）。由于 $\mathbb{R}$ 是一个巴拿赫空间，上面的命题给出 $A \cong \mathcal{D}A$。另一方面，正如该例中所见，$L^1 = \mathbb{R}^X \neq L$，因此 A 不是 Daniell 闭的。

这并不是对主定理（定理 4.2.11）的反例，因为反射子范畴并不要求是同构闭的。关键在于，$\mathbf{BInt}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$ 是该范畴更自然的选择。

注 4.2.20（本节的位置）。总而言之，丹尼尔扩张在 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op}}$ 中 ae 给出的是**预 AL 空间的 Banach 完备化**（$L,\ I$）（命题 4.2.17）。该范畴既看不到基空间，也看不到作为函数空间的实现，因此**不能期待第 4 节的主定理包含“伴随一个具体实现”这一内容**。第 4 节范畴中已经失去了第 1.3 小节所描述的抽象完备化与之的区别。

这种区别在第 3 节的范畴一侧得以保留。在那里，态射本身就是基空间映射，对象也连同其实现一起得到区分 $L \subset \mathbb{R}^X$。关于这两个小节之间的关系，请参见第4.3.3小节。

第 4 节并不会因此变得毫无内容。Banach 完备化存在$\sim$属于一般理论，但第 4 节所陈述的是**该完备化由 L^1 同一基空间上的可积函数的商给出**（命题 4.2.17）。这是对象层面的断言，对于 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op}}$ 的 ae 态射而言是不可见的。换言之，具体实现在定理的陈述中仍然存在，但并不作为范畴结构存在。

保留第 4 节还有一个原因。算子态射将概率论中出现的运算作为态射纳入其中，且无需修改。条件期望 $E[\cdot \mid \mathcal{G}]$ 是线性且为正的，并保持积分不变，因此它恰好是第 4 节中的一个算子态射（而且它还满足注 4.1.2 意义下的序连续性）。在第 3 节的框架中，其态射是基空间映射，这一运算无法表示为态射。在同一框架下处理 Itô 积分和鞅（附录 5.2）的入口，位于第 4 节这一侧。

4.3 与基空间映射作为态射的情形的关系

第3节和第4节在相同的对象上采用了不同的态射，并分别得到了形式相同的反射定理。本小节将阐明二者之间的关系。

我们先陈述结论。函子 $\mathcal{E}$ 与两种反射相容（命题 4.3.3），因此**第 3 节主定理中的唯一性部分可由第 4 节的定理推出**（推论 4.3.5）。然而，存在性部分**无法推出**。也就是说，单凭算子版本无法断定该扩张来自基空间映射（注 4.3.6）。

4.3.1 几乎处处范畴之间的函子

L引理 4.3.1. 对于积分系统态射 $F\colon (X, L, I) \to (Y, M, J)$，定义

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(F) := \pi_J \circ F^* : L \to \widetilde{M}.$$

则下列结论成立。

1. $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(F)$ 是到商中的一个算子态射。
2. $F =_{\mathrm{ae}} G$ 和 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(F) = \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(G)$ 是等价的。
3. 赋值 $[F] \mapsto \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(F)$ 定义了一个**忠实**函子

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ae}} : \mathbf{Int}_{\mathrm{ae}} \to \mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}},$$

它在对象上是恒等映射。

证明。(1) 根据引理 4.1.6，映射 F^* 是线性且为正的，并且保持积分；而 π_J是线性 Riesz 同态（引理 2.8.4），因此复合也同样是线性且为正的。~此外，$J(\pi_J(F^* f)) = J(F^* f) = I(f)$。

(2) $\pi_J(F^* f) = \pi_J(G^* f)$ 等价于 $F^* f - G^* f \in \mathcal{N}_J$，也就是说，等价于 $J(|F^* f - G^* f|) = 0$。这对每个 $f \in L$ 都成立，这就是 $F =_{\mathrm{ae}} G$ 的定义（定义 2.8.7）。

(3) (2) 中“仅当”的方向表明，赋值与代表元的选择无关。反向则给出单射性，即忠实性。对于恒等态射，$\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(\mathrm{id}) = \pi_I$，它是$\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 的恒等态射（定义 4.2.9）。对于复合，设 $F\colon (X, L, I) \to (Y, M, J)$，且 $G\colon (Y, M, J) \to (Z, N, K)$。根据定义 4.2.9 中复合的定义，由 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(G)$ 诱导的映射 $M \to N$为 $\pi_J(h) \mapsto \pi_K(G^* h)$。因此，对于每个 $f \in L$，

$$\big(\widetilde{\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(G)} \circ \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(F)\big)(f) = \pi_K\big(G^*(F^* f)\big) = \pi_K\big((G \circ F)^* f\big) = \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}(G \circ F)(f).$$

□

注 4.3.2。 正如第 4 节开头所述，在取 ae-商之前，函子 $\mathcal{E}$:$\mathbf{Int} \to \mathbf{Int}^{\mathrm{op}}$ 不一定是忠实的，因为不同的基空间映射可能给出相同的拉回。取 ae-商后，恰好通过 $=_{\mathrm{ae}}$消除了这种差异，因此$\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 变得忠实。

另一方面 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 并非**满**。只有来自格同态的态射，也就是确定性的态射，才属于其像；一般的算子态射则不在其中。对于有限集，其像仅由那些每一行恰有一个 1 的列随机矩阵组成。

4.3.2 两个反射的交换性

我们用 $\mathcal{D}_{\mathrm{op}}$ 表示由定理 4.2.11 给出的 $\iota_{B,\mathrm{op}}$ 的左伴随。其作用如定理 4.2.11 所述。

命题 4.3.3。 下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Int}_{\mathrm{ae}} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathrm{ae}}} & \mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}} \\ \mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathrm{op}}} & \mathbf{BInt}_{\mathrm{op,ae}} \end{array}$$

也就是说， $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}} \circ \mathcal{D}_{\mathrm{ae}} = \mathcal{D}_{\mathrm{op}} \circ \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$。

证明。 在对象上，两者都是丹尼尔扩张（X, L, I） $\mapsto$ （X, L^1, I^1），而且 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 不改变对象，因此二者一致。

我们来讨论态射。设 $[F]\colon (X, L, I) \to (X', L', I')$ 是 $\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$ 中的一个态射。将由引理 2.8.6 确定的单射 Riesz 同态写作

$$j' : \widetilde{L'} \longrightarrow \widetilde{L'^1}.$$

$i_{A'}$ 单位态射 $i_{A'}\colon (X', L', I') \to (X', L'^1, I'^1)$ 在 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 中为 $\pi_{I'^1}|_{L'} = j' \circ \pi_{I'}$。

由于 $\mathcal{D}_{\mathrm{op}}$ 是左伴随，对于到商 $\Lambda : L \to L'$ the态射 $\mathcal{D}_{\mathrm{op}}(\Lambda)$ 的算子态射，它是满足以下条件的到商 $L^1 \to L'^1$ 的唯一算子态射

$$\mathcal{D}_{\mathrm{op}}(\Lambda)\big|_L = j' \circ \Lambda.$$

将其应用于 $\Lambda = \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[F] = \pi_{I'} \circ F^*$，即可得到图中先向下再向右的复合，记作 Φ_2。

另一方面，先向右再向下的复合是将 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 应用于 $\mathcal{D}_{\mathrm{ae}}[F] = [F^1]$，也就是，

$$\Phi_1 := \pi_{I'^1} \circ (F^1)^* : L^1 \to \widetilde{L'^1}.$$

将引理 4.3.1 应用于态射 F^1，映射 Φ_1 是一个到商空间的算子态射。

我们检验 Φ_1 满足与 Φ_2 相同的刻画。对于 $f \in L$，我们有 $(F^1)^* f = F^* f \in L'$，因此由引理 2.8.6 的等式 $\pi_{I'^1}|_{L'} = j' \circ \pi_{I'}$ 可得

$$\Phi_1(f) = \pi_{I'^1}(F^* f) = j'\big(\pi_{I'}(F^* f)\big) = \big(j' \circ \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[F]\big)(f).$$

也就是说， $\Phi_1|_L = j' \circ \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[F] = \Phi_2|_L$。

系统 $(X',\ L'^1,\ I'^1)$ 是一个 Daniell闭积分系统（引理 2.6.6），而引理 2.8.5表明 L'^1 是一个巴拿赫空间，因此定理 4.2.4 中的 **唯一性** 适用，由此得到$\Phi_1 = \Phi_2$。

□

注 4.3.4. 请注意，这个证明依赖于第 4 节中的唯一性。仅在第 3 节的框架内，无法说明这两个扩张相同，因为它们是不同范畴中的态射。

4.3.3 两个主定理之间的关系

推论 4.3.5. 设 A 是 $\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$ 中的一个对象，设 B 是 $\mathbf{DInt}_{\mathrm{ae}}$ 中的一个对象，并设 $[H], [H']$: $\mathcal{D}_{\mathrm{ae}} A \to B$ 是态射。那么

$$\iota_{D,\mathrm{ae}}([H]) \circ [i_A] = \iota_{D,\mathrm{ae}}([H']) \circ [i_A] \quad \Longrightarrow \quad [H] = [H']$$

成立。也就是说，定理 3.4.4 中的唯一性部分可由第 4 节的定理 4.2.4 推出。

证明。 对两边应用 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$。由引理 4.3.1，赋值 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 是一个函子，而$\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[i_A]$是由包含关系 $L \subset L^1$ 确定的态射，因此 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[H]$和 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[H']$ 是映入商 $L^1 \to \widetilde{M}$、且在 L上相同的算子态射。由于 B 是丹尼尔闭的，根据引理 2.8.5， $\widetilde{M}$ 是一个巴拿赫空间，而定理 4.2.4 中的唯一性给出 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[H] = \mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[H']$。由于 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 是忠实的（引理 4.3.1），我们得到 $[H] = [H']$。

□

注 4.3.6（两个小节之间的关系）。 相比之下，定理 3.4.4 的**存在性** 部分并不能由第 4 节的定理推出。给定 $[F] : A \to \iota_{D,\mathrm{ae}} B$，定理 4.2.4 给出了 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}[F]$ 的一个延拓，它是 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$ 中的一个态射；但它并不保证该延拓属于 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 的像，也就是说，不能保证它来自一个基空间映射，因为 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 不是满的（注 4.3.2）。要得到存在性，需要采用第 3 节特有的构造（引理 3.1.1），通过该构造可以在不改变基空间映射的情况下得到延拓。

这两个定理的贡献如下。

	存在性	唯一性
第 3 节，非几乎处处	需要单独构造	自动成立（无实质内容）
第 3 节，几乎处处	如上所述	利用稠密性
第 4 节（算子）	无法从算子版本中得到	利用压缩性和稠密性

对此需要谨慎措辞。由于 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 是忠实的，$\mathbf{Int}_{\mathrm{ae}}$ 可嵌入$\mathbf{Int}_{\mathrm{op,ae}}$中（且不改变对象）。从这个意义上说，**第 3 节的范畴是第 4 节范畴的宽子范畴**，因此说“二者互不构成对方的特例”并不准确。第 3 节也不是与第 4 节共同完成某个单一定理：它自身就证明了存在性和唯一性。可以精确表述的关系如下。

- $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$ 是忠实但不满的（注 4.3.2）。
- 这两个反射在该函子下相容（命题 4.3.3）。
- 基空间映射版本的唯一性 可由算子版本推导出来（推论 4.3.5）。

- 但是，**扩张仍属于 $\mathcal{E}_{\mathrm{ae}}$的像这一点，也就是说，它来自一个基空间映射这一点，不能仅由算子版本推导出来**。
- 此外，$\mathbf{Int}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$ 既不将基空间也不将实现视为函数空间（命题 4.2.15、推论 4.2.16）。对象仅在 ~ ~预 AL 空间 $(L,\ I)$ 的意义下区分，而丹尼尔扩张给出的是其 Banach 完备化（命题 4.2.17）。

最后两点正是将第 3 节保留为独立一节的原因。第一点是定理层面的理由，第二点是范畴层面的理由，后者更为重要。只有第 3 节这一侧，才将抽象完备化与具体实现（小节 1.3）之间的区别保留为范畴结构。详情请参见第 4.2.4 小节。

5 附录

5.1 左伴随存在的条件

本小节的内容属于标准的一般范畴论，与本文没有特别相关之处。证明请参见 [21]；此处仅以正文所用的形式陈述相关断言。

定义5.1.1. 设 F 是从范畴 C 到范畴 D 的函子。设 Y 是 D 中的一个对象，G_Y 是 C 中的一个对象，并设

$$\eta_Y : Y \to F(G_Y)$$

是 D 中的一个态射。我们称 η_Y 是从 Y 到 F 的泛态射，当且仅当满足以下条件。

对于每个对象 X（属于 C）以及每个态射 $u: Y \to F(X)$（属于 D），都存在唯一一个态射

$$u^\sharp : G_Y \to X$$

（属于 C）满足

$$u = F(u^\sharp) \circ \eta_Y.$$

我们称上述条件为 $\eta_Y: Y \to F(G_Y)$ 的**泛性质**。

定理 5.1.2。设 F 是从范畴 C 到范畴 D的函子。若对 D 的每个对象 Y，都可以选取一个泛态射

$$\eta_Y : Y \to F(G_Y)$$

从 Y到 F，则存在一个左伴随

$$G : D \to C$$

的 F 存在。此外， G 在态射上的作用由每个 η_Y的泛性质唯一确定。

证明见 [21], 第四章第1节定理2。论证如下：将 G_Y赋予一个对象 Y，并将一个态射 f 赋予由 $\eta_{Y'} \circ f$的泛性质确定的态射 $Y \to Y'$，从而得到一个函子 G，而$\Psi_{Y,\,X}(u) := F(u) \circ \eta_Y$给出一个自然双射 $\mathrm{Hom}_C(G(Y),\ X) \cong \mathrm{Hom}_D(Y,\ F(X))$。

5.2 基空间在做什么?

Daniell 型积分无非是定义在基空间上的函数构成的里斯空间上的一个正线性泛函，并满足某种连续性。从表面上看，人们可能会认为基空间并非必不可少，可以将其移除。在本小节中，我们将看到，基空间所发挥的作用恰恰只有一个：**提供一个在外部计算下确界的位置** L。随后我们将解释，“遗忘基空间”的方向按目前的形式并不可行。

5.2.1 基空间只出现于一处

在积分系统（X，L，I）的定义中，基空间 X 唯一真正发挥作用之处，是连续性公理的假设，即下式的左侧

$$f_n \downarrow 0 \ (\text{pointwise}) \implies I(f_n) \to 0.$$

如果将其替换为 L自身序中的递减，那么即使普通积分也不再是积分。

例 5.2.1。令 L 为闭区间 $[0,1]$, 上的所有阶梯函数组成的集合，即存在有限划分 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$，使得函数在每个 $[x_{i-1}, x_i)$ 上为常数的所有函数组成的集合，其中 $i < m$ 且在 $[x_{m-1}, 1]$上。划分点严格递增，不允许出现单点集合。取 I 为普通黎曼积分，则（L，I）是 $[0,1]$上的一个积分系统。

令 $A \subset [0,1]$ 为测度为 $1/2$ 的胖康托集，并将 $[0,1]\backslash A = \bigsqcup_k I_k$ 写作带有 $I_k =$（a_k，b_k）的形式。令

$$f_n := 1_{[0,1]} - \sum_{k=1}^{n} 1_{[a_k, b_k)} \in L,$$

序列 $\{f_n\}$ 单调递减，且 $I(f_n) \to 1/2$。

另一方面，若 $g \in L$ 满足 $g \le f_n$，则对每个 n，$g \le 1_{A\setminus\{a_k|k\ge 1\}}$ 逐点成立。集合 $[0,1]\setminus A$ 是一个稠密开集，而 g 的每个常值区间都非退化，因此它与某个 I_k 相交。在该交集中的某一点，上界为 0，所以 g 在每个常值区间上的值至多为 0，即 $g \le 0$。反过来，由于 $f_n \ge 0$，若 $g \le 0$，则 $g \le f_n$。因此，$\{f_n\}$ 的下界集合为 $\{g \in L \mid g \le 0\}$，其最大元为 0。

也就是说，按 L 的序，我们有 $f_n \downarrow 0$，然而 $I(f_n) \downarrow 1/2$。就逐点收敛而言，$f_n \to 1_A \neq 0$，且 f_n 并非递减趋于 0。

这个例子展示了**在 L 内部取下确界与在其外部取下确界**之间的区别。在 L 内部取下确界，我们得到 $\inf_n f_n = 0$；而在 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ 内部取下确界，我们得到 $\inf_n f_n = 1_A$。Daniell连续性公理要求的是后者，而基空间 X 提供了 $\mathbb{R}^X$，一个足以满足这一目的的容器。

这种区别也体现在第 4 节中算子态射的定义里（注 4.1.3）。同样，正是这一点导致：如果按 M 的序来理解序连续性条件，该陈述就会失效。

5.2.2 目前按此方式遗忘基空间的方向行不通

人们也可以考虑去掉基空间。下文中，**抽象 Riesz 空间**是指一个构成格的有序向量空间（注 2.2.2）。其思路是从抽象 Riesz 空间 L 中恢复基空间，方法是

$$\mathrm{Spec}(L) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Riesz}}(L, \mathbb{R}).$$

$\widehat{\ }$将每个 $f \in L$ 赋予函数 $\hat{f}\colon \mathrm{Spec}(L) \to \mathbb{R}$；$x \mapsto x(f)$ 给出了遗忘基空间函子的一个左伴随。伴随本身确实成立。真正失败的是，$\widehat{\ }$单位 $L \to L$ 是一个同构，也就是说，无法真正完成恢复。

此外还有一个问题，即 $\mathrm{Spec}(L)$ 太大了，但致命之处在于以下事实：**Spec恰好在关键对象上退化**。

命题 5.2.2。令 L 为由 $[0,1]$ 上的所有勒贝格可积函数构成的集合，通过除以零函数得到的抽象 Riesz 空间（即 $L^1[0,1]$）。则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Riesz}}(L, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

证明。令 φ 为一个 Riesz 同态。若 $f \ge 0$，则 $f = f \vee 0$ 给出 $\varphi(f) = \varphi(f) \vee 0 \ge 0$，因此 φ 是正的。Banach格上的正线性泛函是范数有界的（[18]），所以由 $L^1[0,1]^* = L^\infty[0,1]$ 可知存在 $g \in L^\infty$，满足 $g \ge 0$，使得 $\varphi(f) = \int_0^1 fg$。

假设 $\varphi \neq 0$。那么可以取一个正测度集合 S，使得在其上 $g > 0$。将 S 分成两个正测度集合 S_1, S_2，并令 $f := 1_{S_1}$ 和 $h := 1_{S_2}$。它们的支集互不相交，因此 $f \wedge h = 0$；又因为 φ 是 Riesz 同态，

$$0 = \varphi(f \wedge h) = \varphi(f) \wedge \varphi(h) = \min\{\varphi(f), \varphi(h)\}.$$

但是 $\varphi(f) = \int_{S_1} g > 0$，而 $\varphi(h) = \int_{S_2} g > 0$，这就产生了矛盾。因此 $\varphi = 0$。 □

所以 Spec 并没有“大得离谱”；只要除以零函数，它**就会消失**。而且，如果要认真研究测度论，就无法避免除以零函数。

请注意，对抽象里斯空间上的序连续泛函及其扩展的研究本身就是一个经典主题，任何沿着本小节方向深入研究的人都会发现，[17]和 [16] 正是应当查阅的文献。

5.2.3 正确形式及进一步展望

注 5.2.3 （正确形式）。“忘记基空间，并在需要时恢复它$\widetilde{}$”这一思想有一个经典答案。对于一个Daniell闭积分系统，第 2.8 小节中的商 L是一个Banach格，其范数在正锥上具有可加性，也就是说，它是一个**抽象Lebesgue空间** （AL-空间）。根据Kakutani表示定理 [14] （另请参见 [15]，其中介绍了将里斯空间表示为函数空间的方法），每个AL-空间都同构于某个 $L^1(\mu)$。也就是说，在这里，基空间的恢复已经完成。

然而，正如第 1 节小节 1.3 所述，沿着这个方向走得越远，本文的主定理就越接近于对抽象完备化的重新表述。**抽象化与具体实现之间存在取舍**。

第 4 节的范畴 $\mathbf{Int}_{\mathrm{op},\ \mathrm{ae}}$ 实际上已经抵达了这一方向的终点。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$该范畴只根据预 AL 空间 $(L,\ I)$ 区分对象（第 4.2.4 小节），而丹尼尔扩张所给出的是其 Banach 完备化。也就是说，取舍的两端在本文中并列呈现。

我们提及两个推广方向。

- **改变取值对象**。如果 f_n 取值于 Banach 空间，而控制函数 φ_n 仍取实值，那么本文的证明几乎可以原样照搬，并由此得到 Bochner积分。这正是 [5]的主题，尽管这一点早已为人所知，但它是通往随机积分的一座技术桥梁。

- **将定义本身内化**。这一路径是将里斯空间和实数置于拓扑斯内部，而不是置于集合范畴中。此时，“基空间”由拓扑斯本身取代。沿这一方向已有先前工作。 [22] 在幺半闭范畴内部处理测度和积分，并通过泛性质定义简单函数空间。同一作者的 [23] 范围更广，但我们尚未获得其文本。这两者都是不同于本文定理的定理，这一点已在小节 1.3 中说明。另有 [25] 将积分视为一种构造性的无点积分理论。对于预层拓扑斯，尤其是由滤子索引的预层，预计其与鞅存在某种关系，因为条件期望具有第 4 节中算子态射的形式（另见[27]）。

无论采取哪一种方向，本文的主定理只有在“伴随着具体实现”的范围内才保留其意义。应当抽象到何种程度，以及在何处放弃具体性，是本文框架提出但尚未解决的问题。

参考文献

[1] S. Yamagami, 勒贝格积分与测度 （日文），Sh¯okab¯o，2022。ISBN 978-4-7853-1209-1。[2] E. Blackstone 和 P. Mikusiński，*Daniell*积分，arXiv:1401.0310v2 [math.CA], 2016。[3] J. Mikusiński，论丹尼尔积分，《波兰科学院通报》，数学、天文学与物理学系列**22** （1974），161–164。[4] P. Mikusiński，论丹尼尔积分，《实分析交流》**15**（1989/1990），第1期，307–312。[5] J. Mikusiński，博赫纳积分，Birkhäuser，1978。[6] P. J. Daniell，积分的一般形式，《数学年刊》（第2辑）**19**（1917–18），279–294。

[7] P. J. Daniell，无限维积分，《数学年刊》（第2辑）20（1919），281–288。[8] M. H. Stone，积分札记，I–IV，《美国国家科学院院刊》34–35（1948–1949）。[9] C. Constantinescu、K. Weber 和 A. Sontag，积分理论，第1卷：测度与积分，威利出版社，1985。[10] C. Constantinescu、W. Filter 和 K. Weber，高级积分理论，数学及其应用454，克吕维尔出版社，1998。[11] H. L. Royden，实分析，第3版，麦克米伦出版社，1988。[12] D. H. Fremlin，测度论，第2卷：广泛基础，Torres Fremlin，2003。[13]A. S. Kechris，经典描述集合论，数学研究生教材156，施普林格，1995。[14] S. Kakutani，抽象 (L)-空间的具体表示与平均遍历定理，《数学年刊》（第2辑）42（1941），523–537。[15] K. Yosida，论向量格的表示，《东京帝国学士院纪要》18（1942），第7期，339–342。[16] D. H. Fremlin，拓扑里斯空间与测度论，剑桥大学出版社，1974，xiv+266 页。[17] W. A. J. Luxemburg 和 A. C. Zaanen，里斯空间 I，北荷兰出版社，1971。[18] Y. A. Abramovich 和 C. D. Aliprantis，算子理论导论，数学研究生学习丛书50，美国数学学会，2002。[19] G. Bezhanishvili、P. J. Morandi 和 B. Olberding，通过正规函数函子性地构造戴德金完备化，并表示向量格与 ℓ-代数，《范畴理论与应用》31（2016），1095–1133。[20] A. Avilés 和 E. Bilokopytov，阿基米德有序向量空间的戴德金完备化作为反射子，预印本，arXiv:2604.12675 [math.FA]（2026）。[21] S. Mac Lane，数学工作者的范畴，第2版，施普林格数学研究生教材5，1998。[22] R. Börger，积分的范畴方法，《范畴理论与应用》23（2010），第12期，243–250。[23] R. Börger，积分理论的范畴方法，教授资格论文，哈根远程大学，1989，219页。[24] D. G. Hartig，重新审视里斯表示定理，《美国数学月刊》90（1983），277–280。[25] T. Coquand 和 B. Spitters，积分与赋值，《逻辑分析杂志》1（2009），论文3，22页。DOI：10.4115/jla.2009.1.3。[26] T. Fritz 和 A. Lorenzin，抽象与非交换可测空间的范畴，《数学进展》488（2026），110793；arXiv:2504.13708。[27] A. Simpson，概率层与 Giry 单子，CALCO 2017，LIPIcs 72。

[28] F. Dahlqvist 和 D. Kozen，《带条件化的高阶概率程序语义》，Proc. ACM Program. Lang. **4**（POPL），57:1–57:29，2020；arXiv:1902.11189。[29] T. Ehrhard 和 G. Geoffroy，《锥中的积分》，计算机科学中的逻辑方法 **21**（2025），第 1 期，论文 1；arXiv:2212.02371。