尺度核心与无尘分层集

Siniša Miličić

普拉尤拉伊·多布里拉大学信息学院，Ulica Alda
Negrija 6，52100 普拉，克罗地亚 smilicic@unipu.hr
开放研究者与贡献者身份识别码：0000-0002-5659-5598

arXiv:2611.29446v1 [math.MG] 22 Nov 2026

摘要

我们研究具有有限正豪斯多夫测度的紧集中的豪斯多夫维数与盒维数间隙。在每个尺度上，局部测度较小的点构成一个尺度核心，它承载着超过豪斯多夫维数的全部覆盖增长。由此可得盒维数和中间维数的间隙判据。我们构造无尘分层集，其中每个点的每个邻域都具有正测度。这些集合的维数由层维数以及一个乘积核心决定；该乘积核心由水平极限集和高度序列构成。在适当的逼近速率条件下，减去乘积管状邻域后剩余的体积随半径线性增长，其系数为总层测度的两倍。每个紧零水平集都存在这样的构造。康托尔近似集、齐次立方体构造和 Bedford–McMullen 地毯展示了这些结果。

2020年数学主题分类。主要分类 28A80；次要分类 28A75。
K关键词。 尺度核心、盒维数、中间维数、闵可夫斯基含量、分层 sets.

目录

1 模型与维数差距问题 1 2 尺度核心与维数差 3 3 可求和的分层集 5 加性管公式 7 5 拟分形应用 9

4

1 模型与维数差距问题

有限的正豪斯多夫测度并不能强制豪斯多夫维数与盒维数相等。令$V_\alpha = \{0\} \cup \{n^{-\alpha} : \ n \geq 1\}$ 对于 $\alpha > 0$。当 $0 < \alpha < 1$时，紧集

$$([0,1] \times \{0\}) \cup (V_\alpha \times V_\alpha)$$

是可数1-可整流的，长度为1，Hausdorff 维数和装填维数均为1，盒维数为$2/(\alpha+1) > 1$。可数无尘集在盒计数中超过单位区间，却不具有任何长度 [15]。

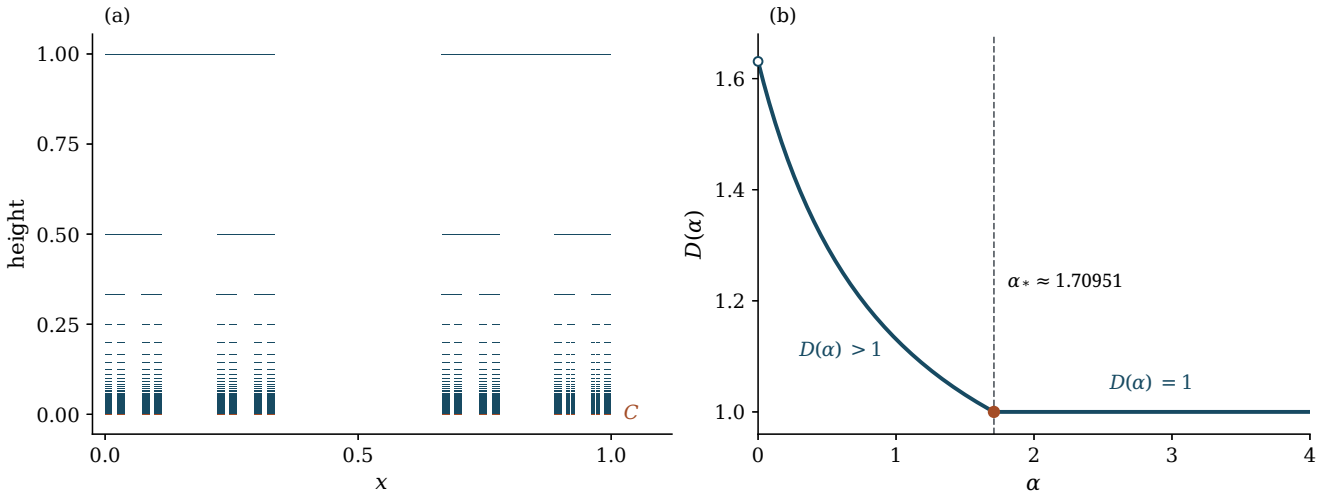

图1：左：边长为 3^{-6} 且与完整集合 F_1相交的闭网格正方形，包括每个康托层和基底（橙色）。右：F_α的盒维数，转折点位于 $\alpha_* = (\log_3 2)/(1 - \log_3 2)$。

如果一个紧集 F 具有 $0 < \mathcal{H}^d(F) < \infty$ 无尘性质，我们称其为

$$F = \operatorname{supp}(\mathcal{H}^d \restriction F).$$

因此，以 F 为中心的每个球都具有正的 d维测度；这里不要求统一的密度下界。问题在于，在这种支撑条件下维数差是否仍能持续存在，以及如何确定造成维数差的部分。

我们的模型将三分康托逼近集 C_n 放置在多项式高度处。取$C_0 = [0, 1]$，于是 $|C_n| = (2/3)^n$，并从 $n = 1$ 开始排列各层：

$$F_\alpha = \bigcup_{n \geq 1} C_n \times \{n^{-\alpha}\} \cup (C \times \{0\}), \qquad C = \bigcap_{n \geq 1} C_n, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

$$\mathcal{H}^1(F_\alpha) = 2, \qquad \dim_{\mathrm{H}} F_\alpha = \dim_{\mathrm{P}} F_\alpha = 1, \qquad \dim_{\mathrm{B}} F_\alpha = \max\left\{1, \log_3 2 + \frac{1}{\alpha + 1}\right\}. \tag{2}$$

尽管基底 $C \times \{0\}$ 长度为零，但每个基点邻域都会与某个充分低层中的正长度片段相交。因此 F_α 是无尘的。图 1 展示了这一构造及其维数转变；推论 5.3 证明了（2）。

共同的原理是：代价为 $O(\epsilon^{-d})$ 个覆盖球的余项，不会影响高于 d的维数。对于任意具有有限正 d维豪斯多夫测度的紧集，定理 2.3通过其尺度核心确定维数差。对于分层集，定理 3.4 给出一个固定乘积核；引理 3.3提供了关于高度一致的覆盖比较。乘积核维数确定高于 d的尺度核心指数。定理4.2 通过带有绝对误差 $o(\epsilon)$ 的加性管公式恢复层测度，即使乘积管支配线性项。推论 4.4 以这种方式实现了每个紧零水平集。

仅凭支撑条件无法控制管状邻域增长；Ambrosio、Colesanti 和 Villa 的例3 [1] 也展现了这一问题。Tricot 的核–尾方法 [20] 是 Žubrinić–Županović 纲领以及随后关于螺旋、啁啾和轨道研究的基础 [21, 5,18, 19]。在那里，彼此分离的早期片段和合并后的几何核可能以相同的阶作出贡献。我们的核心集在定位负责管状邻域增长的几何结构方面发挥了类似作用：尺度核心选取局部测度较低的点，而乘积核心则是重复出现的水平极限集。可加定理将整个乘积管与各层的贡献区分开来；其定义不同于通过合并相邻片段形成的核。

广义嵌套集将大小与间距联系起来 [16], ，而在这里，水平近似和垂直高度可以独立选择。相关的非齐次吸引子具有维数差，并且层测度为无穷 [8, 9]。我们保持有限的正层测度，并利用数列渐近和中间维数理论得到显式公式。

2 尺度核心与维数差

我们首先离开分层模型，考察具有有限正 d维豪斯多夫测度的任意紧集。密度足够高的点可以由 $O(\epsilon^{-d})$个球覆盖。剩余的低密度点构成尺度核心：它们承载着超过维数d的任何覆盖增长。

E的开管状邻域集，或称闵可夫斯基香肠，为 $(E)_\epsilon = \{x : \operatorname{dist}(x, E) < \epsilon\}$。记 $B(x, r)$ 为开球，记 $|U|$ 为环境勒贝格测度。豪斯多夫测度经过归一化，使其在整数维平面上与体积一致。我们用 $\dim_{\mathrm{H}}, \dim_{\mathrm{P}}, \dim_{\mathrm{B}}, \dim_{\mathrm{B}}$ 分别表示豪斯多夫维数、填充维数以及下盒维数/上盒维数 [6, 13]。

对于有界集 E，令 $\mathcal{N}_\epsilon(E)$表示覆盖它所需的闭半径为ϵ 的覆盖球的最少数量，其中$\mathcal{N}_\epsilon(\varnothing) = 0$。标准的填充论证和乘积论证给出

$$|(E)_\epsilon| \asymp \epsilon^m \mathcal{N}_\epsilon(E) \quad (E \subset \mathbb{R}^m), \qquad \mathcal{N}_\epsilon(X \times V) \asymp \mathcal{N}_\epsilon(X)\mathcal{N}_\epsilon(V). \tag{3}$$

这些比较在每个正尺度下都成立，并且所涉及的常数仅依赖于维数，对所有有界集一致。此外，对于每个固定的 $c > 0$，还有 $\mathcal{N}_{c\epsilon}(E) \asymp \mathcal{N}_\epsilon(E)$。管状邻域和覆盖数在取闭包后完全不变：一个集合到某点的距离等于其闭包到该点的距离，并且覆盖该集合的每个有限闭覆盖球并都包含该集合的闭包。

在全文中，$u_\epsilon \asymp v_\epsilon$ 表示对于某个 $0 < c \le C < \infty$ 以及所有充分小的$\epsilon > 0$，有 $cv_\epsilon \le u_\epsilon \le Cv_\epsilon$；$u \sim v$ 表示该比值趋于一。常数和阈值可以依赖于固定数据，但不依赖于 ϵ；任何进一步的一致性要求都会另行说明。其他变量中的极限将明确陈述。同样的约定也适用于 $O(\cdot)$。

对于 $0 < \epsilon < 1$、$0 < \theta \le 1$和 $t \ge 0$，定义可容许覆盖代价

$$\mathcal{C}^t_{\epsilon,\theta}(E) = \inf\left\{ \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^t : E \subset \bigcup_i U_i, \quad \epsilon \le \operatorname{diam} U_i \le \epsilon^\theta \right\}. \tag{4}$$

空集的代价为零。对于固定的 $0 < \theta < 1$，两个端点都趋于零，但允许一定范围的直径。在 $\theta = 1$处，每个覆盖集的直径都恰好为 ϵ，并且

$$\mathcal{C}^t_{\epsilon,1}(E) \asymp \epsilon^t \mathcal{N}_\epsilon(E) \asymp \epsilon^{t-m}|(E)_\epsilon|. \tag{5}$$

这些常数仅依赖于 m，且关于 E、t 和 $0 < \epsilon < 1$是一致的：一个直径为ϵ 的集合包含于某个半径为ϵ的球中，而每个这样的球都可由数量仅依赖于维数的、直径为ϵ 的集合覆盖。

下 θ中间维数是满足以下条件的 t 的下确界：当 $\epsilon \downarrow 0$ 时，$\mathcal{C}^t_{\epsilon,\,\theta}(E)$ 的下极限为零；上版本则使用上极限为零的条件 [7]。因此，$\theta = 1$ 给出了盒维数。当相应的下值和上值相等时，我们记为 $\dim_\theta$ 或 $\dim_{\mathrm{B}}$。我们分别定义 $\dim_0 = \dim_{\mathrm{H}}$；我们不将 $\theta = 0$ 代入尺度收缩论证中，也不假设在零点处连续。

定义 2.1（尺度核心）。设 $A \subset \mathbb{R}^m$ 为紧集，$0 < d < m$，且 $0 < M := \mathcal{H}^d(A) < \infty$。令 $\mu = \mathcal{H}^d \lfloor A$。对于固定的 $\kappa > 0$，其在尺度 ϵ 下的尺度核心为

$$K_\epsilon = K_\epsilon(A; \kappa) = \{x \in A : \mu(B(x, \epsilon)) \le \kappa \epsilon^d\}. \tag{6}$$

对于 $0 < \theta \le 1$，定义其移动族指数为

$$\underline{D}_{\theta,\kappa}(A) = \inf\{t \ge 0 : \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{C}^t_{\epsilon,\theta}(K_\epsilon) = 0\}, \tag{7}$$
$$\overline{D}_{\theta,\kappa}(A) = \inf\{t \ge 0 : \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{C}^t_{\epsilon,\theta}(K_\epsilon) = 0\}.$$

该核心集是紧集：法图引理使 $x \mapsto \mu(B(x,\epsilon))$ 下半连续。定义核心集的半径是所允许的最小覆盖直径。这些指数描述的是一个变化的族，而不是一个固定极限集。由（5），在 $\theta = 1$ 处，它们是$\log \max\{1, \mathcal{N}_\epsilon(K_\epsilon)\}/\log(1/\epsilon)$的下极限和上极限。

下一个引理将几何估计与维数判据分开。补集在每个半径为 ϵ 的球中都有足够的质量，从而限制了这些互不相交的球的数量。

引理 2.2（覆盖补集）。根据定义 *2.1*，对于每个 $\epsilon > 0$，补集$A \setminus K_\epsilon$ 都可以用至多 $C_m \kappa^{-1} M \epsilon^{-d}$ 个直径恰好为 ϵ 的集合覆盖，并且

$$0 \le |(A)_\epsilon| - |(K_\epsilon)_\epsilon| \le C_m \kappa^{-1} M \epsilon^{m-d}. \tag{8}$$

对于每个 $0 < \epsilon < 1$、$0 < \theta \le 1$ 和 $t \ge 0$,

$$0 \le \mathcal{C}^t_{\epsilon,\theta}(A) - \mathcal{C}^t_{\epsilon,\theta}(K_\epsilon) \le C_m \kappa^{-1} M \epsilon^{t-d}. \tag{9}$$

所有常数仅取决于环境维数 m。

证明。令 P_ϵ 为 $A \setminus K_\epsilon$的一个极大严格 2ϵ-分离子集；有界性使其为有限集。其半径为 ϵ 的开球两两不交。由于每个中心都位于核心集之外,

$$\#P_\epsilon \, \kappa \epsilon^d \le \sum_{p \in P_\epsilon} \mu(B(p,\epsilon)) \le \mu(A) = M.$$

极大性给出了由闭球 $B(p,\ 2\epsilon)$ 对补集的覆盖。网格间距为 $\epsilon/\sqrt{m}$ 的网格可用数量仅依赖于维数的立方体覆盖每个这样的球，这些立方体的直径为 ϵ。这就证明了覆盖结论。

中的每一点 $(A)_\epsilon \setminus (K_\epsilon)_\epsilon$ 都距 ϵ 以内的某个核心集外点，因此距某个 3ϵ 以内的 $p \in P_\epsilon$。因此，管状邻域超额位于 $\bigcup_{p \in P_\epsilon} B(p,\ 3\epsilon)$中，从而得到（8）。对于（9），将补集的直径为 ϵ 的覆盖并入 K_ϵ的一个可容许覆盖中。额外的 t-代价至多为 $C_m \kappa^{-1} M \epsilon^{t-d}$；取下确界即可。两个下界都由 $K_\epsilon \subset A$推出。□

定理 2.3（尺度核心判据）。在定义 *2.1*下，固定 $0 < \theta \le 1$。集合 θ 的下或上中间维数 A 大于维数 $\dim_{\mathrm{H}} A = d$，当且仅当相应的尺度核心指数大于 d。更确切地说，

$$\underline{\dim}_\theta A = \max\{d, \underline{D}_{\theta,\kappa}(A)\}, \tag{10}$$
$$\overline{\dim}_\theta A = \max\{d, \overline{D}_{\theta,\kappa}(A)\}. \tag{11}$$

覆盖数满足

$$\mathcal{N}_\epsilon(A) \asymp \epsilon^{-d} + \mathcal{N}_\epsilon(K_\epsilon) \qquad (\epsilon \downarrow 0), \tag{12}$$

常数和阈值取决于 A, d, m, κ。

证明。 引理 2.2 给出 $\mathcal{N}_\epsilon(A) \le \mathcal{N}_\epsilon(K_\epsilon) + C_m\kappa^{-1}M\epsilon^{-d}$。对于反向界， $K_\epsilon \subset A$，而任意半径为ϵ 的球覆盖 A 都是直径不超过 2ϵ的豪斯多夫覆盖。相应的豪斯多夫内容趋于 $M > 0$；因此 $\mathcal{N}_\epsilon(A)$ $\epsilon^d \ge c_{A,\ d} > 0$ 当 ϵ充分小时，结合这两个下界即可证明（12）。

对于每个 $t > d$，(9) 将两个非负覆盖代价之差界定为一个趋于零的量。因此，它们的下极限同时为零，上极限也同时为零。高于 d 时，使代价趋于零的阈值相同。由于 A的两个中间维数都至少为维数$_{\mathrm{H}}\, A = d$，两个最大值公式便得证。 □

这里不需要无尘性。对于无尘集，每个中心球都有正质量，但相对于 ϵ^d，该质量不一定存在统一的下界。每个固定的 $\kappa > 0$ 都能检测到相同的维数差。在 $t = d$处，代价误差仅为 $O(1)$，因此该论证无法确定临界内容。

若 $|(A)_\epsilon|/\epsilon^{m-d} \to \infty$，则管状估计给出 $|(K_\epsilon)_\epsilon|/|(A)_\epsilon| \to 1$。下盒维数差保证这一结论在整个极限过程中成立；上盒维数差则保证它沿着适当的序列成立。

3 可求和分层集

现在，我们用置于一系列递减高度处的集合来逼近一个紧水平极限集。整数 $d \ge 1$ 是水平维数，也是分层集的豪斯多夫维数；被逼近的集合的维数可能更小。几何结构给出了一个固定乘积核。其受控余项可直接验证，因为尺度核心判据针对的是另一个由测度定义的族。

定义 3.1 （可求和逼近方案）。设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 非空、紧且勒贝格零测。可求和逼近方案由紧集 X_n 和正数 $\delta_n \downarrow 0$ 组成，并满足

$$X \subset X_n \subset \overline{(X)_{\delta_n}}, \tag{13}$$

$$S_X := \sum_{n\ge1} |(X)_{2\delta_n}| < \infty, \qquad S := \sum_{n\ge1} |X_n| > 0. \tag{14}$$

选取趋于零的高度 $h_1 > h_2 > \cdots > 0$。定义高度集、分层集和固定乘积核如下：

$$\begin{aligned} V &= \{0, h_1, h_2, \ldots\}, \\ F &= \bigcup_{n\ge1} X_n \times \{h_n\} \ \cup\ (X \times \{0\}), \qquad (15) \\ G &= X \times V = \overline{\bigcup_{n\ge1} X \times \{h_n\}}. \qquad (16) \end{aligned}$$

我们称 F 为相应的可求和分层集。

每个 X_n 都包含 X，且与其距离不超过 δ_n。求和条件 S_X 要求这些包围管的体积之和有限；δ_n 所需的衰减速率取决于 X的管状衰减。它蕴含$S \le S_X < \infty$，而 $S > 0$ 只要求存在一个正体积逼近集。乘积核 G 是一条脊柱，在高度集 V的每个高度处（包括零）都包含 X 的一个副本。

下面的引理提炼了针对固定核心集以及覆盖规模受控的余项的传递论证。它允许保留部分位于核心集附近，而不必包含在核心集内。

引理 3.2 (受控余项的去除)。 设 $0 < d \le m$，令 $E, H \subset \mathbb{R}^m$ 有界，且$0 < \mathcal{H}^d(E) < \infty$ 和 $H \subset E$。假设存在 $C > 0$，并且对每个充分小的 $\eta > 0$，都存在一个集合 R_η，使得

$$E \subset R_\eta \cup (H)_{C\eta}, \qquad \mathcal{N}_\eta(R_\eta) \le C\eta^{-d}.$$

然后，当 $\epsilon \downarrow 0$ 时， $\mathcal{N}_\epsilon(E) \asymp \epsilon^{-d} + \mathcal{N}_\epsilon(H)$，且对于 $0 < \theta \le 1$,

$$\underline{\dim}_\theta E = \max\{d, \underline{\dim}_\theta H\}, \qquad \overline{\dim}_\theta E = \max\{d, \overline{\dim}_\theta H\}.$$

证明。 余项界与固定半径覆盖比较给出了覆盖上界。 $\mathcal{H}^d(E)$ 的正性给出 $\mathcal{N}_\epsilon(E) \ge c_E \epsilon^{-d}$ 在小尺度下成立；$H \subset E$ 则给出另一个下界。

对于中间维数，将 H 的一个可容许直径为 r_i 的覆盖中的每个集合扩大 $C\eta$，其中 $r_i \in [\eta, \eta^\theta]$。利用欧几里得倍增性质，可用有界数量个直径为 r_i 的集合覆盖这一扩大的集合。用 $O(\eta^{-d})$ 个直径为 η 的集合覆盖 R_η。所得的 t 成本至多为 $C'(\sum_i r_i^t + \eta^{t-d})$。当 $t > d$ 时，误差趋于零，从而在各自的尺度量词下证明两个上界。下界由 $\dim_{\mathrm{H}} E = d$、单调性以及 $\theta > 0$ 的闭包不变性得到。 □

引理 3.3 （分层覆盖估计）。 对于定义 *3.1*中的方案，当 $\epsilon \downarrow 0$,

$$\mathcal{N}_\epsilon(F) \asymp \epsilon^{-d} + \mathcal{N}_\epsilon(X)\mathcal{N}_\epsilon(V), \tag{17}$$

$$|(F)_\epsilon| \asymp \epsilon + \epsilon^{d+1}\mathcal{N}_\epsilon(X)\mathcal{N}_\epsilon(V). \tag{18}$$

比较常数和阈值仅取决于逼近方案，且对各高度一致。

证明。 对于 $\delta_n \ge \epsilon$，取 X_n 的一个极大严格 ϵ-分离子集。其两两不交的半径为 $\epsilon/2$ 的球包含于 $(X)_{2\delta_n}$ 中，因此

$$\mathcal{N}_\epsilon(X_n) \le C_d \epsilon^{-d} |(X)_{2\delta_n}|.$$

因此，这些层 R_ϵ 的并集可由至多 $C_d S_X \epsilon^{-d}$ 个球覆盖，且与它们的高度无关。其余每一层以及基底都包含于 $(G)_\epsilon$ 中。用半径相当的球覆盖该管状邻域，并利用（3），即可证明上界。

对于下界， $G \subset F$。另外，取一个固定的 n_*，满足 $|X_{n_*}| > 0$。将该切片的任意半径为 ϵ 的覆盖投影到其水平面上，可得

$$\mathcal{N}_\epsilon(F) \ge \mathcal{N}_\epsilon(X_{n_*}) \ge \frac{|X_{n_*}|}{\omega_d \epsilon^d}, \qquad \epsilon > 0,$$

其中 ω_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的体积。此下界与所有高度无关，且在每个尺度上都成立。现在由环境维数为 $d+1$ 时的（3），即可得到管状邻域的比较结果。 □

定理 3.4 (分层实现)。 定义 F 中的集合 *3.1* 是紧集、可数 d-可整流的，并且

$$\mathcal{H}^d(F) = S \in (0, \infty), \qquad \dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{P}} F = d. \tag{19}$$

对于每个 $0 \le \theta \le 1$,

$$\underline{\dim}_\theta F = \max\{d, \underline{\dim}_\theta G\}, \tag{20}$$

$$\overline{\dim}_\theta F = \max\{d, \overline{\dim}_\theta G\}. \tag{21}$$

证明。 该集合有界。对于其中点的一个收敛序列，要么存在一个子序列位于某个紧切片中，要么其层索引趋于无穷。在后一种情况下，高度趋于零，且水平坐标到 X 的距离趋于零。因此，极限属于 $X \times \{0\}$，从而证明了紧致性。

这些切片彼此不相交，豪斯多夫测度与水平体积一致，并且 $|X| = 0$。可数可加性给出 $\mathcal{H}^d(F) = \sum_n |X_n| = S$。一个正体积切片给出维数至少为 d，而由水平平面组成的可数覆盖则给出豪斯多夫维数和装填维数至多为 d，并且具有可数 d-可求长性。

引理 R_ϵ 3.3 中构造的余集满足引理 3.2 的假设，其中 $E = F$且 $H = G$。这证明了 $\theta > 0$ 的中间公式。当 $\theta = 0$ 时，由 V 的可数性可得维数$_{\mathrm{H}}\, G =$ 维数$_{\mathrm{H}}\, X \le d$。

□

推论 3.5 (无尘实现)。 如果每个 X_n 都是其限制勒贝格测度的支集，那么 F 是无尘的。

证明。 以正高度切片上的点为中心的每个球，都与该切片中一部分具有正体积的区域相交。对于 $(x,0) \in X \times \{0\}$ 和 $r > 0$，选取满足 $h_n < r/2$的 n。由于 $x \in X_n$，由全支撑可得 $|X_n \cap B(x, r/2)| > 0$；将其提升至高度 h_n后，所得部分位于以 $(x,0)$ 为中心、半径为 r 的球内。 □

定理2.3 和3.4 将移动缩放核与固定乘积核联系起来：对于任意固定的 $\kappa > 0$ 和 $0 < \theta \le 1$,

$$\begin{aligned} \max\{d, \underline{D}_{\theta,\kappa}(F)\} &= \max\{d, \underline{\dim}_\theta G\}, \\ \max\{d, \overline{D}_{\theta,\kappa}(F)\} &= \max\{d, \overline{\dim}_\theta G\}. \end{aligned} \tag{22}$$

只要 G 的相应维数超过 d，它就等于尺度核心指数。特别地,

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F > d \iff \underline{\dim}_{\mathrm{B}} G > d, \qquad \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F > d \iff \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G > d. \tag{23}$$

阈值是 $d =$ 维数$_{\mathrm{H}}\, F$，而非 维数$_{\mathrm{H}}\, G$。对于不规则因子， G 的下盒维数不一定等于两个下盒维数之和；式（17）保留了它们的尺度依赖性。

4 加性管公式

固定定义 3.1 中的逼近方案和高度。我们保留分层集 $F \subset \mathbb{R}^{d+1}$、其乘积核心 $G = X \times V$以及其总层测度 $S = \sum_n |X_n|$。因此， G 在每个高度处都包含 X 的一个副本，而不只是在基底处。下方的因子 2ϵ 来自垂直于每一层的那个方向。

引理 4.1 （一个紧致平坦层）。 设 $Y \subset \mathbb{R}^d$ 为紧集，且 $H = Y \times \{h\}$。那么

$$2\epsilon |Y| \le |(H)_\epsilon| \le 2\epsilon |(Y)_\epsilon|. \tag{24}$$

对于定义在 H 的紧致邻域上的任意连续 φ,

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{(H)_\epsilon} \varphi(z)\, dz \longrightarrow \int_Y \varphi(x,h)\, dx.$$

证明。圆柱体 $Q_\epsilon = Y \times (h - \epsilon,\ h + \epsilon)$ 满足

$$Q_\epsilon \subset (H)_\epsilon \subset (Y)_\epsilon \times (h - \epsilon, h + \epsilon).$$

这就证明了（24）。由紧致性可得 $|\,(Y)_\epsilon \setminus Y| \to 0$，因此

$$|(H)_\epsilon \setminus Q_\epsilon| \le 2\epsilon \big(|(Y)_\epsilon| - |Y| \big) = o(\epsilon).$$

因此，管状邻域与圆柱体上的归一化积分相差 $o(1)$。由富比尼定理以及 φ 的一致连续性可得

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{Q_\epsilon} \varphi(z)\, dz = \int_Y \frac{1}{2\epsilon} \int_{h-\epsilon}^{h+\epsilon} \varphi(x,t)\, dt\, dx \longrightarrow \int_Y \varphi(x,h)\, dx.$$

不要求 Y 的边界具有任何正则性。 □

无穷多个层管可能重叠，因此不能简单地将单层渐近式求和。固定 $L > 2$。可求和性控制满足 $\delta_n \geq \epsilon$ 的层，而满足 $\delta_n \leq \epsilon^L$ 的层则包含在乘积管周围一个可忽略的壳层内。下一个条件控制中间尺度。

定理 4.2（加性管公式）。 对于可求和分层集，设对某个固定的$L > 2$,

$$w_\epsilon |(X)_{2\epsilon}| \longrightarrow 0, \qquad w_\epsilon = \#\{n : \epsilon^L < \delta_n < \epsilon\}, \qquad \epsilon \downarrow 0. \tag{25}$$

Then

$$|(F)_\epsilon| = |(G)_\epsilon| + 2\epsilon \mathcal{H}^d(F) + o(\epsilon). \tag{26}$$

该极限针对固定的逼近方案和高度；并未断言其关于高度序列一致收敛。

由于 $G \subset F$，这从超过乘积管的部分恢复了 $S = \mathcal{H}^d(F)$。对于康托模型，即使乘积管占主导，修正项仍为 $4\epsilon + o(\epsilon)$。

我们使用壳层估计

$$|(K)_{r+u}| - |(K)_r| \leq C_m (u/r) |(K)_r|, \qquad 0 < u \leq r, \quad K \subset \mathbb{R}^m \text{ compact}. \tag{27}$$

对于有限的 K，以 r/t 为中心进行压缩，会将其半径为t 的管状邻域映入该沃罗诺伊胞内半径为r 的管状邻域。求和得到 $|(K)_t| \leq (t/r)^m |(K)_r|$, $t \geq r$。有限网将此推广到紧 K；相减得到（27）。这也是标准的管体积估计 [17]。

定理 4.2 的证明。令 $E_\epsilon = (F)_\epsilon \setminus (G)_\epsilon$。固定 N，令 $J_N = \bigcup_{n=1}^N X_n \times \{h_n\}$，并令 $E_{\epsilon,N} = (J_N)_\epsilon \setminus (G)_\epsilon$。当 ϵ 足够小时，前 N 个切片管状邻域两两不相交。它们与 $(G)_\epsilon$的总交叠至多为 $2N\epsilon|(X)_\epsilon| = o(\epsilon)$。因此，由引理 4.1 得到

$$\frac{|E_{\epsilon,N}|}{2\epsilon} \longrightarrow S_N := \sum_{n=1}^N |X_n|.$$

剩余的超额来自满足 $n > N$ 的层。满足 $\delta_n \geq \epsilon$ 的层至多贡献$2\epsilon \sum_{n>N} |(X)_{2\delta_n}|$。满足 $\epsilon^L < \delta_n < \epsilon$ 的层至多贡献 $2\epsilon w_\epsilon |(X)_{2\epsilon}| = o(\epsilon)$。满足$\delta_n \leq \epsilon^L$ 的层位于距 G 不超过 ϵ^L 的范围内；它们的超额至多为

$$|(G)_{\epsilon+\epsilon^L}| - |(G)_\epsilon| \leq C\epsilon^{L-1} |(G)_\epsilon| = o(\epsilon),$$

因为 $L > 2$，且管状邻域的体积有界。因此，

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \frac{|E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,N}|}{2\epsilon} \leq T_N := \sum_{n>N} |(X)_{2\delta_n}|. \tag{28}$$

因此 $S_N \leq$下极限 $|E_\epsilon|/(2\epsilon) \leq$上极限 $|E_\epsilon|/(2\epsilon) \leq S_N + T_N$。令 $N \to \infty$：则 $S_N \to S$并且 $T_N \to 0$，从而证明了（26）。 □

推论 4.3（局部管超额）。 在定理 *4.2* 的假设下，对于固定的紧致邻域上的任意连续 φ，该紧致邻域为 F,

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{(F)_\epsilon \setminus (G)_\epsilon} \varphi(z)\, dz \longrightarrow \int_F \varphi \, d\mathcal{H}^d. \tag{29}$$

证明。 固定 N 后，引理 4.1 以及前述证明中的 $o(\epsilon)$ 重叠估计给出

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{E_{\epsilon,N}} \varphi(z)\, dz \longrightarrow \int_{J_N} \varphi \, d\mathcal{H}^d.$$

由（28），被省略的归一化积分的绝对值上界至多为 $\|\varphi\|_\infty T_N$。被省略的层积分的绝对值至多为 $\|\varphi\|_\infty$（$S - S_N$）。当 $N \to \infty$ 时，这两个界都趋于零。 □

几何逼近尺度 $\delta_n = c\rho^n$，$0 < \rho < 1$ 满足 $w_\epsilon = O(\log(1/\epsilon))$；因此，只要 $|(X)_r| = O(r^a)$ 对某个 $a > 0$ 成立，（25）就成立。每个紧零测集也都存在一个足够稀疏的方案：

推论 4.4（任意零测集的实现）。设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 非空、紧且为零测集。对于任意固定的 $L > 2$，选取满足以下条件的正尺度

$$\delta_1 < 1, \qquad \delta_{n+1} \le \delta_n^L, \qquad |(X)_{2\delta_n}| \le 2^{-n}.$$

那么，$X_n = \overline{(X)_{\delta_n}}$ 给出一个无尘可求和分层集，它满足分层实现定理和加性管公式；这一结论对每个严格递减且趋于零的高度序列都成立。

证明。零测性使得递归选取成为可能。每个 X_n 都是其内部的闭包，且具有正体积。夹逼条件和可求和条件立即成立。若 $\delta_n < \epsilon$，则 $\delta_{n+1} < \epsilon^L$，因此$w_\epsilon \le 1$，且（25）成立。应用推论 3.5 可得全支撑。□

命题 4.5（改变底集）。对于有界的 $B \subset \mathbb{R}^d$，令 $F_B = \bigcup_{n\ge1} X_n \times \{h_n\} \cup (B \times \{0\})$。那么 $\mathcal{H}^d(F_B) = S + \mathcal{H}^d(B)$，必要时使用外测度；其豪斯多夫维数和装填维数均为 d。其覆盖数与 F的覆盖数可比，且对于 $0 \le \theta \le 1$，其下中间维数和上中间维数分别等于 F 的相应维数。在条件（25）下，

$$|(F_B)_\epsilon| = |(G)_\epsilon| + 2\epsilon(S + |\overline{B}|) + o(\epsilon).$$

证明。互不相交的切片给出测度恒等式，以及在 $\theta = 0$处的维数结论。有界底集需要 $O(\epsilon^{-d})$ 个球，而正体积的层至少需要这么多个。引理 3.2以核心集 $F \subset F_B$为基础，给出中间的恒等式。对于管状邻域公式，利用闭包不变性，并将 $B \times \{0\}$ 纳入定理 4.2证明中的固定有限族。它与乘积管的交叠至多为 $2\epsilon|(X)_\epsilon| = o(\epsilon)$，同样的尾项估计也适用。□

B 与 B 之间的区别至关重要：可数稠密底集的豪斯多夫测度为零，但其管状邻域与其闭包的管状邻域相同。这种修改未必能保持无尘性。

5 拟分形应用

我们回到以 $X \times \{0\}$为基底的典范分层集 F。我们先选取同时满足两个分层集定理的水平逼近集X_n，然后改变高度集 V。由此得到维数跃迁；当乘积管可忽略时，还能得到精确的闵可夫斯基含量。

对于有界的 $E \subset \mathbb{R}^m$，写作

$$\underline{\mathcal{M}}^D(E) = \liminf_{\epsilon\downarrow0} \frac{|(E)_\epsilon|}{\epsilon^{m-D}}, \qquad \overline{\mathcal{M}}^D(E) = \limsup_{\epsilon\downarrow0} \frac{|(E)_\epsilon|}{\epsilon^{m-D}}.$$

下含量和上含量均为正且有限，意味着闵可夫斯基非退化性。若二者相等，则 E 为闵可夫斯基可测，其未归一化含量为 $\mathcal{M}^D(E)$。

5.1 立方体与 Bedford–McMullen 地毯

对于立方体，选择整数 $d \ge 1$、$b \ge 2$，保留 $1 \le M < b^d$ 个闭 b-进子立方体 $[0,1]^d$，并迭代其位似变换 S_i。对于一个词 $w = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, M\}^n$，记作 $|w| = n$和$S_w = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}$。置

$$X_n = \bigcup_{|w|=n} S_w([0,1]^d), \qquad X = \bigcap_n X_n, \qquad s = \log_b M, \qquad q = M/b^d. \tag{30}$$

开集 c ondition 给出 $\dim_{\mathrm{H}} X = \dim_{\mathrm{P}} X = \dim_{\mathrm{B}} X = s$ 以及 $\mathcal{N}_r(X) \asymp r^{-s}$ 为 $r \downarrow 0$ [11].

对于 Bedford–McMullen 地毯，取整数 $2 \le b < c$，在b列、 c行的细分中保留 $1 \le M < bc$ 个矩形，并迭代其仿射映射。令 X_n 为第 n 级并集， $X = \bigcap_n X_n$、$d = 2$和 $M_1, \dots, M_R$为正的列数。设

$$q = \frac{M}{bc}, \qquad s = s_B = \frac{\log R}{\log b} + \frac{\log(M/R)}{\log c} < 2. \tag{31}$$

近似正方形给出 $\dim_{\mathrm{P}} X = \dim_{\mathrm{B}} X = s_B$和 $\mathcal{N}_r(X) \asymp r^{-s_B}$， 而

$$\dim_{\mathrm{H}} X = \frac{\log\left(\sum_{i=1}^{R} M_i^{\log b/\log c}\right)}{\log b}.$$

当且仅当占据列数相等 [14, 10]时，这等于 s_B。所有水平比较常数仅取决于所选构造。

在两种方案中，每个构造单元都与 X相交，直径至多为 $c_0 b^{-n}$， 且其内部与其他第 n 级单元的内部不相交。因此 $|X_n| = q^n$、 $X_n = \operatorname{int} X_n$，并且

$$X \subset X_n \subset \overline{(X)_{\delta_n}}, \qquad \delta_n = c_0 b^{-n}, \tag{32}$$

其中 $c_0 = \sqrt{d}$ 适用于立方体，而 $c_0 = 2$ 适用于地毯。由于 $|(X)_r| = O(r^{d-s})$ 且 $s < d$，这些邻域可求和。在 $O(\log(1/\epsilon))$ 近似尺度中，介于 ϵ^L 和 ϵ之间的尺度只有这么多，因此附加条件（25）也成立。

推论 5.1 (预分形剖面)。 对于任一方案和高度 $1 \ge h_1 > h_2 > \cdots \to 0$，所得的 F 是无尘的，并且

$$\mathcal{H}^d(F) = \frac{q}{1-q}, \qquad \dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{P}} F = d, \tag{33}$$

$$\mathcal{N}_\epsilon(F) \asymp \epsilon^{-d} + \epsilon^{-s}\mathcal{N}_\epsilon(V), \tag{34}$$

$$|(F)_\epsilon| \asymp \epsilon + \epsilon^{d+1-s}\mathcal{N}_\epsilon(V). \tag{35}$$

这些比较对于高度是一致的。特别地，

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \max\{d, s + \underline{\dim}_{\mathrm{B}} V\}, \qquad \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \max\{d, s + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} V\}.$$

对于每个固定的高度序列，

$$|(F)_\epsilon| = |(X \times V)_\epsilon| + \frac{2q}{1-q}\epsilon + o(\epsilon). \tag{36}$$

因此，

$$\epsilon^{d-s}\mathcal{N}_\epsilon(V) \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}^d(F) = \frac{2q}{1-q}. \tag{37}$$

证明。 应用引理 3.3、定理 3.4 和 4.2，以及推论 3.5，利用 $\sum_{n\ge1} q^n = q/(1-q)$ 和水平覆盖估计。最后一个蕴含关系由 $|(X \times V)_\epsilon|/\epsilon \asymp \epsilon^{d-s}\mathcal{N}_\epsilon(V)$ 得出。 □

5.2 选择高度

幂高度和对数高度定律由 [5, 12, 4]的序列方法和间隙方法支配。对于中间维数，我们使用 Angelini 和 Molter 的递减间隙公式，即定理 4.3 [2]。

引理 5.2 (幂对数高度)。 固定 $\alpha > 0$、 $\lambda \in \mathbb{R}$，并选取一个足够大的整数 $n_0 \geq 2$，使得 $h_n = (n+n_0)^{-\alpha}(\log(n+n_0))^{\lambda}$ 严格递减，其中 $h_1 \leq 1$。对于 $\beta = (\alpha+1)^{-1}$,

$$\mathcal{N}_\epsilon(V) \asymp \epsilon^{-\beta}(\log(1/\epsilon))^{\lambda\beta}, \qquad \epsilon \downarrow 0, \tag{38}$$

$$\dim_\theta V = \frac{\theta}{\alpha+\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{39}$$

常数取决于 α、 λ、 n_0。对于 $h_n = n^{-\alpha}$，结论在不作平移的情况下对 $\lambda = 0$ 仍然成立。

证明。间隙满足 $h_n - h_{n+1} \sim \alpha n^{-\alpha-1}(\log n)^{\lambda}$ 当 $n \to \infty$ 时。令 $N_\epsilon = \lceil \epsilon^{-\beta}(\log(1/\epsilon))^{\lambda\beta} \rceil$。取充分小的固定 $c > 0$，则渐近关系给出的间隙下界大于 2ϵ，对直至 $\lfloor cN_\epsilon \rfloor$ 的所有充分大的指标均成立。取 ϵ小于有限多个初始间隙最小值的一半，即可保证这一初始区间内处处满足分离条件。反过来，分别覆盖前 N_ϵ 个高度及剩余区间： $h_{N_\epsilon}/\epsilon \asymp N_\epsilon$。由此得证（38）。

高度函数最终为凸函数，因此，舍去有限多个高度后，其间隙为正、非递增且可求和。间隙的尾和可以还原剩余的高度。因此，Angelini 和 Molter 的定理 4.3 给出 $\dim_\theta V = \theta\beta/[1-(1-\theta)\beta]$ 对于 $\theta > 0$；有限删去及重缩放不会改变这些维数。在 $\theta = 0$ 处，使用可数性。 □

对于乘积核心，我们使用 Falconer、Fraser 和 Kempton 的命题 2.5 [7]。其乘积界确定了 维数$_\theta$ $(X \times V)$ 当 维数$_{\mathrm{H}}$ $X =$ 维数$_{\mathrm{B}}$ X 且 维数$_\theta$ V存在时。

推论 5.3 (维数跃迁)。 对于位于 $h_n = n^{-\alpha}$ 的立方体层或地毯层，令 $D =$最大值$\{d, s+(\alpha+1)^{-1}\}$。那么

$$\dim_{\mathrm{B}} F = D, \qquad \mathcal{N}_\epsilon(F) \asymp \epsilon^{-D}, \qquad |(F)_\epsilon| \asymp \epsilon^{d+1-D}.$$

因此 F在 D 处是闵可夫斯基非退化的，且 (37) 当 $s+(\alpha+1)^{-1} < d$ 时适用。对于采用引理 5.2 中任一种高度规律的立方体层，

$$\dim_\theta F = \max\left\{d, s + \frac{\theta}{\alpha+\theta}\right\}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{40}$$

证明。 结合引理 5.2 与推论 5.1。对于立方体，维数$_{\mathrm{H}}$ $X =$ 维数$_{\mathrm{B}}$ $X = s$，因此 X的所有中间维数都 s。引用的乘积界给出 维数$_\theta(X \times V) = s +$ 维数$_\theta$ V，对 $\theta > 0$；应用定理 3.4。在 $\theta = 0$ 处，使用 维数$_{\mathrm{H}}$ $F = d$。所有比较均为 $\epsilon \downarrow 0$，其中常数取决于构造和高度参数。 □

对于地毯，精确的传递关系仍为 $\max\{2, \dim_\theta(X \times V)\}$，并分别有下界和上界版本。已知的地毯谱 [3] 并不能证明可以将 s_B 代入（40）。

回到 F_α 由（1）可知，取 $d = 1$， $b = 3$， $M = 2$，因此 $s = \log_3 2$ 且 $q = 2/3$。其盒维数差恰好在以下条件成立时出现

$$0 < \alpha < \alpha_* := \frac{s}{1-s} \approx 1.70951. \tag{41}$$

乘积核心 $C \times V_\alpha$ 的豪斯多夫维数为 s，盒维数为 $s+(\alpha+1)^{-1}$。对每个 $\alpha > 0$，它都有自身的维数差；而 F_α 仅当其盒维数超过 1时才有维数差。基底$C \times \{0\}$ 没有维数差。这些情况区分了阈值判据（23）与对集合自身维数差的比较。

联系（22）还计算移动缩放核心指数：对于每个固定的 $\kappa > 0$ 和$0 < \theta \leq 1$，使得 $s + \theta/(\alpha+\theta) > 1$,

$$\underline{D}_{\theta,\kappa}(F_\alpha) = \overline{D}_{\theta,\kappa}(F_\alpha) = s + \frac{\theta}{\alpha+\theta}. \tag{42}$$

对于 $\alpha > \alpha_*$，闵可夫斯基含量为 $\mathcal{M}^1(F_\alpha) = 4$。现在，在 5.2 的 $\alpha = \alpha_*$处，将高度替换为引理中的幂对数律。改变 λ 会使豪斯多夫维数、装箱维数、盒维数和中间维数均保持为 1，但会改变归一化管状邻域增长。令 $\beta_* = 1 - s$，所得分层集 F 满足

$$|(F)_\epsilon| \asymp \epsilon\big[1 + (\log(1/\epsilon))^{\lambda\beta_*}\big]. \tag{43}$$

因此$\mathcal{M}^1(F) = \infty$对于 $\lambda > 0$， F对于 $\lambda = 0$是闵可夫斯基非退化的，且 $\mathcal{M}^1(F) = 4$对于 $\lambda < 0$。嵌套集、啁啾和螺旋中也会出现类似的对数修正 [16, 19]。

最后，几何高度 $h_n = \rho^n$， $0 < \rho < 1$给出 $\mathcal{N}_\epsilon(V) \asymp \log(1/\epsilon)$。最终的比值界$h_{n+1} \le \rho h_n$ 给出上界 $O(\log(1/\epsilon))$，其取值取决于 ρ 和初始段。在任一种水平构造中， $s < d$ 因此得到盒维数 d 以及式（37）中的内容。这些比值稀疏估计属于同一序列理论 [5, 12]。

致谢

本研究部分工作是在阿卜杜斯·萨拉姆国际理论物理中心（ICTP）完成的。作者感谢普拉尤赖·多布里拉大学信息学院提供的内部项目经费支持。

人工智能工具的使用

OpenAI ChatGPT（Codex）协助完成了定理与证明的构思、解析检查、文献综述、论述撰写以及图形代码编写。其中包括尺度核心、中间维数、实现和加性管状结果。

参考文献

[1] Luigi Ambrosio、Andrea Colesanti 和 Elena Villa。某些闭集类的外闵可夫斯基内容。*Mathematische Annalen*，342(4)：727–748，2008 年。

[2] Nicolas Angelini 和 Ursula Molter。补集的中间维数。*Proceed-ings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*，第 1–19 页，2026 年。First View，于 2026年6月2日在线发表。

[3] Amlan Banaji 和 István Kolossváry。 Bedford–McMullen 地毯的中间维数及其在利普希茨等价中的应用。*Advances in Mathematics*，449：109735，2024 年。

[4] Tobias Eichinger 和 Steffen Winter。正则变化函数、广义内容与分形弦的谱。载于*Horizons of Fractal Geometry and Complex Dimensions*，*Contemporary Mathematics*第 731 卷，第 63–94 页。美国数学会，2019。

[5] Neven Elezović、Vesna Županović 和 Darko Žubrinić。某些离散动力系统轨迹的盒维数。*Chaos, Solitons & Fractals*，34(2)：244–252，2007。

[6] Kenneth Falconer。《分形几何：数学基础与应用》。John Wiley & Sons，第 3 版，2014。

[7] Kenneth J. Falconer、Jonathan M. Fraser 和 Tom Kempton。中间维数。《数学杂志》，296(1-2)：813–830，2020。

[8] Jonathan M. Fraser. 非齐次自相似集与盒维数。《数学研究》，213(2):133–156，2012。

[9] Jonathan M. Fraser. 非齐次自仿地毯。《印第安纳大学数学杂志》，65(5):1547–1566，2016。[10] Jonathan M. Fraser. Bedford–McMullen 地毯的分形几何。载于 Mark Pollicott 和 Sandro Vaienti 编，《热力学形式主义：*CIRM Jean-Morlet* 讲席，*2019* 年秋季》，《数学讲义》第 2290 卷，495–516 页。施普林格，2021。[11] John E. Hutchinson. 分形与自相似性。《印第安纳大学数学杂志》，30(5):713–747，1981。[12] Pavao Mardešić、Maja Resman 和 Vesna Županović. 不动点的重数与轨道的 ε-邻域的增长。《微分方程杂志》，253(8):2493–2514，2012。[13] Pertti Mattila.《欧几里得空间中集合与测度的几何：分形与可求长性》，《剑桥高等数学研究》第 44 卷。剑桥大学出版社，1995。[14] Curt McMullen. 一般谢尔宾斯基地毯的豪斯多夫维数。《名古屋数学杂志》，96:1–9，1984。[15] Franklin Mendivil 和 J. C. Saunders. 关于闵可夫斯基可测性。分形，19(4):455–467，2011。[16] Siniša Miličić. 广义分形嵌套集的盒维数。*Chaos, Solitons & Fractals*，113:125–134，2018。[17] Jan Rataj 和 Steffen Winter. 关于平行集的体积与表面积。《印第安纳大学数学杂志》，59(5):1661–1686，2010。[18] Maja Resman、Domagoj Vlah 和 Vesna Županović. 菲涅耳积分与啁啾类函数的振荡性。《微分方程与应用》，5(4):527–547，2013。[19] Jean-Philippe Rolin、Domagoj Vlah 和 Vesna Županović. 振荡积分与分形维数。《数学科学通报》，168:102972，2021。[20] Claude Tricot. 曲线与分形维数。施普林格，1995。[21] Darko Žubrinić 和 Vesna Županović. 某些平面向量场的螺旋轨迹的分形分析。《数学科学通报》，129(6):457–485，2005。