# 较少理性，更多透明：审查作为（稳健）最优披露

Yiding Feng香港科技大学工业工程与决策分析系，ydfeng@ust.hk

Chien-Ju Ho圣路易斯华盛顿大学计算机科学与工程系，chienju.ho@wustl.edu

Wei Tang香港中文大学决策、运营与技术系，weitang@cuhk.edu.hk

Tianze Wei
香港中文大学决策、运营与技术系，tianzewei@cuhk .edu.hk

arXiv:2611.29456v1 [cs.GT] 22 Nov 2026

**摘要**。 在线平台通常会控制用户做出决策时所依据的信息，以影响用户决策，例如司机是否接受行程，或买家是否完成购买。信息披露领域的一项经典结果表明，审查政策对平台而言是最优的：平台将所有足够有利的选项归为一组，通过共同信息（例如质量徽章）一并呈现，并逐一披露其余选项。然而，这一结果假设用户完全理性。我们研究平台向遵循 Logit 量化响应模型的有限理性用户披露信息的情形，而平台可能并不知道用户的理性水平。

我们的研究结果传达了一个统一的信息：更少理性，更加透明。有限理性以及对用户理性水平的不确定性，都不要求采用更复杂的政策；它们只会改变平台应当归并多少选项，而且只会使政策趋向更高透明度。当用户的理性水平已知时，审查仍然是最优的；对于有限理性用户，最优做法是向其提供至少与理性程度更高的用户同样多的信息。当用户的理性水平未知时，在三个准则下，审查仍然是稳健最优的：最大最小比率、最大最小收益和最小最大后悔；此外，稳健审查可以设计得至少与面向完全理性用户的政策同样透明。这种额外的透明度不会使任何一方受损，并能充当抵御行为不确定性的保险：理性稳健审查确保的收益至少达到已知用户理性水平时可实现收益的 89.96%，而面向完全理性用户设计的政策所能确保的收益可能低至 50%。综合而言，这些结果表明，平台可以继续采用基于徽章的信息披露方式，但当用户可能具有有限理性时，应缩小其适用范围。*

**关键词：** 决策分析、量化响应、审查披露、稳健优化

## 1. 引言

在许多在线市场中，从用户决策中获益的一方同时控制着该决策所依据的信息。网约车平台会决定在司机接受或拒绝请求之前披露多少有关行程的信息，例如预计时长（Wu 等人，2021年；Rhee 等人，2023）。电子商务平台会决定在买家决定是否购买之前，是否为每件商品展示详细的质量等级，或将不同质量的商品归入同一标签下（Bimpikis 等人，2024年）。

本研究的初步会议版本发表于 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA'24）（Feng 等人，2024年）。本文在会议版本的基础上，重新聚焦于在线平台的信息披露，并补充了审查在三项稳健性标准下的理性稳健最优性（第 4 节）、紧确的 89.96%的普遍保证（第 5 节）、关于透明度和福利的结果（第 EC.1 节、第 EC.3.1 节和 EC.3.2 节）、计算结果（第 EC.5 节），并大幅重写了引言（第 1 节）和第 3 节。

自由职业平台决定在客户决定是否聘用某位工作者之前，披露多少有关其过往表现的信息（Garg 和 Johari，2021年）。尽管这些情境各不相同，但它们具有共同的结构：用户决策的价值取决于平台掌握的信息，而当用户采取某种特定行动时，平台会从中获益，例如接受行程、完成购买或聘用工作者。

平台如何披露这些信息，会影响用户的信念，进而影响他们的决策。更透明的披露有助于用户区分合适与不合适的选项；而较粗略的披露则会将不同选项归为同一条共同信息，使用户无法区分它们。因此，平台可以通过选择披露什么、隐瞒什么，来影响用户采取其偏好行动的可能性。由此可见，信息披露政策的设计是在线平台和市场平台面临的一项重要问题，越来越多的研究从信息设计和贝叶斯说服的视角探讨这一问题（Kamenica 和 Gentzkow，2011；Bergemann 和 Morris，2019）。在这一框架下，平台承诺采用一项信息披露政策，也称为信号机制，该机制规定了可能出现的信息集合（或信号），以及如何根据平台私人信息的每种实现生成信号，生成过程也可能是随机的。用户观察到信号后，会运用贝叶斯法则更新自己的信念，然后选择行动。运营管理和在线平台领域的应用包括鼓励用户探索新产品的推荐系统（Che 和 Hörner，2018；Papanastasiou 等，2018）、服务系统中的拥堵信息披露（Lingenbrink 和 Iyer，2019），以及双边平台上信息的策略性发布（Bimpikis 和 Mantegazza，2023）。

这类文献通常假设用户是完全理性的：观察到信号后，她总是选择在其后验信念下期望效用更高的行动。在这一假设下，当平台旨在最大化用户采取平台偏好行动的概率时，最优政策具有一种简单的审查形式（Renault 等人，2017年；Kolotilin 等，2022年）。在产品质量的解释框架中，审查政策将高于某个截断点的所有质量等级合并为一条共同信息，并逐一披露其余质量等级。平台选择这一截断点，使得合并消息恰好令用户愿意采取平台偏好的行动。因此，即使对于某些产品，在信息完全披露时用户会拒绝，用户仍会采取这一行动。审查政策在实践中颇具吸引力，因为它将可能复杂的信息披露问题简化为选择一个截断点，从而易于优化和实施。此外，由此产生的政策类似于常见的认证实践，即将所有足够好的选项归入同一个徽章之下。审查政策及与之密切相关的阈值政策，也在广泛的运营场景中成为最优选择，包括服务系统中的队列信息披露（Lingenbrink 和 Iyer，2019；Anunrojwong 等，2023年）、委托搜索中的信息披露（Xiao 等，2026年），以及线索销售平台上的市场规模信息披露（Sun 等，2026年）。[1] 然而，这一经典主张关键依赖于完全理性：只要平台偏好的行动在期望效用上哪怕略占优势，用户就会采取该行动。

[1]类似的结构也出现在匹配市场（Romanyuk and Smolin，2019）、学校评分（Ostrovsky and Schwarz，2010）、临床试验（Kolotilin，2015）、银行压力测试（Goldstein and Leitner，2018）以及选民劝服（Alonso and Câmara，2016b）。

尽管完全理性是一个经典假设，但大量实证证据表明，在许多经济领域中，理性选择都存在系统性偏离（Simon，1978；Kahneman 和 Tversky，2013；Thaler，2016；DellaVigna，2009）。有限注意力、认知成本和个体特有的噪声，可能导致用户放弃一个仅略具吸引力的选项，或接受一个仅略不具吸引力的选项。本文采用有限理性的经典模型——Logit量化响应模型（McKelvey 和 Palfrey，1995）——以简洁地刻画这种行为。在该模型下，用户以更高的概率选择更具吸引力的行动，而单一参数——理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$——刻画了她对期望效用差异的响应程度。两个极端水平 $\beta = 0$ 和 $\beta = \infty$ 分别对应于随机均匀选择的用户和完全理性的用户，中间水平 $\beta \in (0,\infty)$则涵盖两者之间的范围，其中较大的 $\beta$ 对应于理性程度更高的用户。量化响应模型源于行为博弈论，如今已广泛应用于运营管理领域（见第1节.2）。除了结构简洁之外，该模型还可基于理性疏忽理论加以解释（Matějka 和 McKay，2015），其 Logit 形式也与离散选择的多项Logit模型相同（McFadden，1974）。

这种偏离完全理性的情况会影响信息披露。再次考虑这样一种审查政策：其合并消息使用户在采取平台偏好的行动和拒绝该行动之间恰好无差异。按照标准假设，若出现平局则选择有利于平台的选项；完全理性的用户会确定无疑地采取该行动，而遵循量化响应的用户采取该行动的概率只有一半。因此，为完全理性的用户设计的审查政策，其表现可能远逊于完全理性基准所预测的水平。量化响应为用户行为提供了一个更灵活的模型，但它并未说明，当用户以概率方式作出响应，而非总是选择期望效用更高的行动时，平台应如何调整其信息披露政策。[2] 由此引出我们的第一个研究问题，即用户的理性水平已知时的最优披露政策：

**（问题 1）**当用户是有限理性的，且其理性水平 $\beta$ 已知时，最优信息披露政策是什么？特别是，在完全理性下最优的审查结构，在用户遵循量化响应时是否仍然最优？

完全理性下最优策略的刻画并不能自动推广到概率性选择。在量化响应下，平台必须考虑用户对披露信息的反应有多强，而最优的信息汇集量可能取决于用户的理性水平。

即使可以针对每个已知的理性水平刻画最优披露政策，实施该政策仍要求平台知晓用户的理性水平 $\beta$，而这在实践中可能难以确定，或需要付出高昂的学习成本。例如，平台可能只能观察到每位用户的少数几次决策。平台还可能服务于响应性各不相同的用户，却需要对所有用户采用统一的信息披露政策，例如向产品页面的每位访客展示同一个徽章，而不是针对每位用户量身定制政策。在此类情形下，

[2]完全理性情形下的直觉未必适用。例 EC.1 中我们给出一个实例，其中有限理性用户严格偏好信息量较少的信号机制，而非在 Blackwell 意义上信息量较多的信号机制。完全理性的用户则不会出现这种情况；根据 Blackwell 定理，他们总能从更多信息中获得至少同等的收益。

即使是对平均响应度的估计，也可能无法准确反映任何特定用户的行为。因此，我们仅关注对理性水平的不确定性：平台的私人信息分布以及用户从各个选项中获得的收益，通常可以根据汇总历史结果进行估计；而用户的理性水平是一种个体行为特征，其估计需要该用户自身的选择数据。这些实际考量促使我们提出第二个研究问题，即如何在用户理性水平存在不确定性的情况下设计信息披露政策：

> **（问题 2）**当用户的理性水平 $\beta$ 未知时，在所有可能的理性水平中，哪种信息披露政策在最坏情况下表现最佳？这种对理性水平稳健的政策是否保留了审查结构？平台因这种不确定性而损失多少表现？

第二个问题带来了额外的挑战：即使对每个已知的理性水平而言，审查都是最优的，也不能由此推出，在稳健目标下，某一种单一的审查政策就是最优的。不同的理性水平可能偏好不同的汇集阈值，而一种对某个理性水平表现良好的政策，对另一个理性水平而言可能表现很差。因此，稳健政策必须在不同理性水平下平衡其表现。一种自然的做法是在具有不同截断点的政策之间随机选择，但这样的混合不再是审查政策。因此，事先无法确定单一截断点能否最优地实现这种平衡。一种简单的候选方案是针对完全理性的用户的最优审查政策，但该政策在用户具有有限理性时表现如何，相较于平台知晓用户理性水平时所能获得的收益，这一点并不明显。

这些问题的答案关系到平台在实践中如何设计披露政策。特别是，这些答案将影响经典审查结构在用户具有有限理性时是否仍是合理的设计，以及平台在不了解用户理性水平时可能损失多少性能。

### 1.1. 我们的贡献与技术

我们依次回答这两个研究问题。或许出人意料的是，我们发现，当平台知道用户的理性水平 $\beta$ 时，审查结构仍然是最优的；当平台不知道这一点时，它仍然是稳健最优的。有限理性以及由此带来的不确定性，可能会改变平台应当合并多少信息，而这一数量取决于用户的理性水平和平台采用的稳健性准则。在这两种情况下，任何变化都朝着更高透明度的方向发展：对理性程度较低的用户，最优做法是提供至少同样多的信息；而理性稳健政策所披露的信息，也可以至少与为完全理性的用户设计的政策一样多。不过，这两种偏离经典设定的情况都不需要采用更复杂的信息披露政策。我们还针对用户理性水平不确定所造成的性能损失，给出了紧确界。具体而言，在每个问题实例中，理性稳健审查政策所保证的收益至少达到已知用户理性水平时可获得收益的 89.96%；相比之下，为完全理性的用户设计的最优审查政策只能保证 50%。这些界限从定量角度说明，即使不估计每位用户的理性水平，采用统一的信息披露政策也是合理的。下面我们将阐述并讨论主要贡献。

**已知理性水平时，审查是最优的**。我们首先研究平台知道用户理性水平时的信息设计问题 $\beta$。我们证明，对每一个理性水平，都存在一种最优审查政策（定理1）。这一结果将完全理性条件下审查的经典最优性结论，推广到了遵循 Logit量化响应模型的用户。具体而言，尽管用户现在会对披露的信息作出概率性反应，但将阈值一侧的状态（即平台私人信息可能的实现值）合并为一条共同信息，并逐一披露其余状态（在阈值状态处也可以随机化），仍然是最优的。我们还通过信息设计问题的原始-对偶分析推导出一个可行性规划，并据此刻画最优阈值。这一刻画还给出了一个多项式时间算法，用于计算最优政策（命题EC.5）。

这一刻画的一个重要含义是，理性程度较低的用户，即对期望效用差异的反应不那么敏锐的用户，应该在 Blackwell 意义上获得弱更多的信息（命题 1）。直观而言，经典截断点使合并消息仅具有勉强的说服力，让用户刚好愿意采取偏好的行动，因此有限理性用户只有大约一半的概率采取该行动。通过减少合并，平台使合并消息更具说服力，从而提高这一概率，但代价是发送该消息的频率降低。这一比较静态结果提供了一个有用的管理启示：服务于反应较不敏锐用户的平台，应提高透明度，而不是更激进地合并信息。这种额外的透明度也使用户受益，因为与针对完全理性用户设计的政策相比，用户获得了弱更高的期望效用。

**审查的理性稳健最优性**。接下来，我们考虑一个更具挑战性的情形：平台不知道用户的理性水平，必须承诺采用单一的信息披露政策。我们研究三种标准的稳健性标准，它们反映了对这种不确定性的不同态度： 最大最小比率 标准最大化平台在知晓用户理性水平时所能获得的收益中，平台在最坏情况下能够获得的那一部分；最大最小收益 标准最大化最坏情况下的收益；而最小最大后悔标准最小化相对于该基准收益的最坏情况下的差额。我们的主要结构性结果表明，在每项标准下，都存在某种审查政策是理性稳健最优的（定理 2）。因此，即使用户偏离完全理性，或者平台必须在不知道这种偏离程度的情况下设计政策，审查仍然是最优的。在计算方面，我们的刻画还为在每项标准下计算理性稳健最优审查政策提供了全多项式时间近似方案（FPTAS）（命题EC.6）。

这些结果还带来一项重要的管理启示：考虑用户理性程度的不确定性，不一定要以牺牲平台表现或用户福利为代价。具体而言，在每一种稳健性准则下，都可以选择一项理性稳健最优审查政策，使其披露的信息至少不低于为完全理性的用户设计的最优政策。与为完全理性的用户设计的政策相比，这种额外披露对双方都有利：它至少能改善平台在所选准则下的最坏情况

表现，并在每个理性水平上至少提高用户的期望效用。在产品质量解释下，用户理性程度存在不确定性的平台因此可以相较于完全理性基准缩小通用徽章的覆盖范围，同时仍覆盖完全知情的用户会购买的每一种产品。

**紧确的普适性能保证**。 最后，我们量化不了解用户理性水平所带来的代价，重点考察最大最小比率准则。我们首先证明，对于每一种理性水平和每一个问题实例，为完全理性的用户设计的最优审查政策，都能保证获得至少相当于已知用户理性水平时可达到收益的 50%（定理 3(i)）。随后我们证明，专门针对稳健性优化审查政策，可显著提高这一保证：在每个实例中，理性稳健审查政策的最坏情况比率至少达到 $\Gamma^* \approx 0$。8996 （定理 3(ii)）。这两项保证都是紧确的：一个仅有两个状态的实例就能同时达到这两个界限。因此，最坏情况出现在最简单的情形中，即便只考虑简单实例，也无法提高这两项保证。总而言之，在为完全理性的用户设计的政策下，理性不确定性造成的最坏情况损失最高可达 50%；而采用经过最优设计的理性稳健政策时，损失最高不超过 10.04%。

我们给出的紧确保证为在用户行为存在不确定性的情况下设计信息披露政策的平台提供了两点管理启示。第一，个性化的价值有限。针对每位用户的理性水平量身定制信息披露政策虽能提升表现，但提升幅度至多相当于在完全了解该理性水平时可实现收益的 10.04%。因此，当个体层面行为数据稀缺或个性化成本高昂时，平台无需估计每位用户的理性水平，仅凭一项统一政策便可保留大部分可实现收益。第二，忽视有限理性可能代价高昂。即便在仅有两种状态的情形下，直接采用针对完全理性用户优化的政策，也可能损失高达 50% 的可实现收益。因此，虽然精确估计用户的理性水平或许并非必不可少，但明确考虑其理性程度的不确定性，对于避免重大性能损失至关重要。

**关键技术要素：审查的汇总质量表示**。我们分析中的一个统一技术要素，是用审查政策的合并质量来表示审查政策，即发送公共汇集消息的事前概率，而非像传统表述中那样使用临界状态（例如，Alonsoand Câmara，2016a；Zapechelnyuk，2020；Kolotilin 等，2022年）。给定状态的先验分布后，合并质量可以唯一确定临界状态以及在临界点进行的任何随机化。因此，传统表示法将离散的临界状态与随机化概率配对，而我们的表示法则用凸区间 $q$ 中的单个标量 $[0,1]$为每种审查政策编入索引。这一表示法为我们的三项主要结果提供了共同的分析基础。首先，当理性水平 $\beta$ 已知时，我们利用量化响应函数的 S 形曲率来刻画最优审查政策：当用户偏好平台所倾向的行动时，该函数为凹函数；当用户不偏好该行动时，该函数为凸函数。此外，我们还利用信息设计问题的原始-对偶结构。汇总质量表示法还使我们能够

比较不同理性水平下的最优审查政策，并确定最优合并程度如何随 $\beta$ 变化。

其次，汇总质量表示在确立审查的理性稳健最优性方面发挥着核心作用。如上文所述，该结果并不能由审查在每个已知理性水平下的最优性推出，因为不同的理性水平可能偏好不同的截断点。因此，我们将稳健问题表述为一个极小极大问题，其中对手选择用户的理性水平，也可能以随机方式选择。对于理性水平上的任意固定分布，平台面临一个标准信息说服问题，其间接效用是量化响应函数的加权平均，并且仍然呈 S 形；因此，根据 Kolotilin 等 (2022年) 的刻画，审查是最佳响应。然而，仅凭这一最佳响应性质并不能确立稳健最优性：审查政策的集合是非凸的，因为两个具有不同截断点的审查政策的混合本身并不是审查政策，所以标准极小极大论证无法直接适用。汇总质量表示通过将平台在这一非凸族上的优化转化为紧凸区间 $[0,1]$上的一维优化，解决了这一困难。关键在于，我们证明了平台在任意此类分布下的目标函数关于 $q$呈单峰形状，从而是拟凹的。这一性质使我们能够在 $[0,1]$, 上应用 Sion 最小最大定理（Sion，1958），从而证明单一审查政策对于原始稳健问题是最优的。

第三，汇总质量表示也构成了我们紧确普适性能保证的基础。这些保证的证明构建了一个状态约简框架，用于比较不同审查政策的收益。具体而言，任意两种审查政策的合并质量会自然地将状态划分为三组：两种政策都合并的状态、仅被一种政策合并的状态，以及两种政策都予以揭示的状态。利用这一分解以及量化响应函数的曲率，我们将涉及任意多个状态的收益比较，约化为仅包含两个状态的实例中的比较。这种约化使我们得以建立紧确保证，并找出一个简单的最坏情形实例。

### 1.2. 相关工作

**用于建模有限理性的量化响应**。人们早已认识到人类决策会偏离完全理性（Simon，1956），这推动了将有限理性纳入操作模型的相关研究不断发展（例如参见，Gino andPisano，2008）。我们的研究与通过基于 logit 的随机选择来建模有限理性的研究最为密切相关（McKelveyand Palfrey，1995）。在这些模型中，期望效用较高的行动被选择的概率也较高，而理性参数则刻画个体对效用差异的响应强度。

基于 Logit 的模型已被广泛应用于运营管理领域。例如，Su（2008）采用连续 Logit 法则来刻画报童的订货决策，而Huang 等人 （2013）则研究了在感知等待时间存在逻辑斯蒂误差的情况下，顾客的加入队列决策。Kalkanci 等人 （2011）基于学习到的盈利能力评分，采用 Logit 法则刻画供应商对合同条款的选择。其他应用还包括定价合同（Lim 和Ho，2007；Ho 和 Zhang，2008；Tuncel 等人，2022年）、战略

容量配给下的订货（Chen 等人，2012），以及服务提供商选择（Li 等人，2016）。在这些文献的基础上，我们研究用户根据贝叶斯法则更新信念，并随后按照 Logit 量化响应做出二元决策时的信息披露。与上述研究不同，我们重点考察最优信息披露政策如何取决于用户的理性水平，以及更重要的，在该水平未知时如何设计稳健披露政策。

运营管理中的信息设计。我们的研究建立在丰富的信息设计文献之上，该领域源于 Kamenica 和 Gentzkow（2011）的贝叶斯劝服模型；关于综述，请参阅 Bergemann 和 Morris（2019）以及 Kamenica（2019），关于其在运营领域的应用，请参阅 Candogan（2020）。越来越多的运营管理研究运用这一框架，探讨企业或平台应如何向客户、供应商或公众分享私人信息。在服务系统中，服务提供方会向到达的顾客发送有关队列或等待时间的信息（Lingenbrink 和 Iyer，2019；Anunrojwong 等，2023）。在收益管理中，卖方会分享有关产品可得性或先前购买情况的信息，以影响购买时机（Drakopoulos 等，2021；Küçükgül 等，2022）。在线平台的设计者会披露信息，以促使消费者探索（Papanastasiou 等，2018），或引导供应商在质量、进入和定价方面作出决策（Bimpikis 等人，2024；Bimpikis 和 Mantegazza，2023；Gur 等，2023）。其他应用还包括供应链中的需求披露（Candogan 和 Gurkan，2025）、竞争生产商之间的信息共享（Wei 等，2025）、机器预测披露（Lu 和 Tomlin，2026），以及针对健康风险的公共警告（Alizamir 等，2020；De Véricourt 等，2021）。这些应用中一个反复出现的发现是，最优政策具有简单的阈值形式。计算机科学领域的相关文献则研究选择博弈（Banerjee 等，2026）、推荐与定价（Feng 等，2022；Agrawal 等，2023）以及竞争（Du 等，2024）问题。

我们的研究还涉及一类放宽信息设计中理性程度假设的文献。De Clippel 和 Zhang (2022年）研究接收者在概率推断中的错误如何影响最优说服。Anunrojwong 等 (2024b）研究接收者的效用可能是其信念的非线性函数时的说服问题，并将其方法应用于具有厌恶不确定性的顾客的队列信号传递。Tuncalp 等 (2023）考察共同医疗决策，其中患者的效用具有噪声，且医生不进行精确的贝叶斯更新。Tang 和 Ho (2021年）以及Yu 等 (2023）开展行为实验，并在简单的说服环境中放宽贝叶斯理性假设。

**审查**。审查是一种政策：它披露截断点一侧的状态，并将另一侧的状态合并处理。这种做法出现在各种运营场景中，包括库存披露（Aydinliyim 等，2017年；Calvo 等，2023年；Liu 等，2026年）、产品质量披露（Guo，2009；Guo and Zhao，2009）、企业披露（Jia andMenon，2023）以及场外交易市场基准（Duffie 等，2017年）。例如，在线零售商可能会在库存稀缺时披露确切库存水平，而在库存充足时隐去具体数量。

贝叶斯说服文献也对审查的最优性进行了广泛研究。Kolotilin 等(2022年）根据发送者边际效用的拟凹性刻画其最优性；Kolotilin (2018）和Alonso andCâmara (2016a）则在相关情境中给出了充分条件。Dworczakand Martini (2019）展示了努力诱导问题中的最优审查。在此文献基础上，我们证明，即使接收者的理性水平未知，只要其遵循 Logit 量化响应，审查仍然是最优的，并为其稳健表现推导出紧确保证。

**稳健优化**。我们的研究也与稳健优化和不确定性下的决策有关。我们考察三个标准的稳健性准则：最大最小比率（Sleator 和 Tarjan，1985年）、最大最小收益（Wald，1945年）和最小最大后悔（Savage，1951年）。这些准则已广泛应用于运营场景，包括航空订票（Lan 等人，2008年）、商品组合优化（Rusmevichientong 和 Topaloglu，2012年）、定价（Chen 等人，2022年）和拍卖（Anunrojwong 等，2025，2026年）。

虽然许多研究聚焦于单一稳健性准则，但近期有若干研究开始联合考察多个准则。Chen 等人（2022年）比较了三种准则下的确定性垄断定价，并指出针对某一准则优化的政策在另一准则下可能表现不佳。Anunrojwong 等（2024a）研究了随机定价在三种准则下的表现，而 Anunrojwong 等（2026年）提出了一个广义后悔框架，将这些准则纳入拍卖设计之中。与这项文献相辅相成的是，我们证明，在理性稳健信息设计中，同一种信息政策结构——审查——在三个稳健性准则下均保持最优，不过最优披露阈值可能因准则而异。

## 2. 预备知识

本节介绍我们的模型。我们首先描述环境，然后介绍接收者的有限理性，并用 Logit量化响应模型来刻画，最后说明我们分析所聚焦的审查信号方案类别。

**环境**。 我们考虑经典的贝叶斯劝说环境，状态空间有限，为 $[m] \triangleq\{1, 2, \ldots\ldots, m\}$。状态 $\omega$ 根据共同知识先验分布[3] $\lambda \in \Delta([m])$抽取。我们用$\lambda_i \triangleq \Pr[\omega = i]$ 表示状态 $i \in [m]$ 的先验概率。

有两位参与者：发送者（平台）和接收者（用户）。接收者从二元集合 $\mathcal{A} = \{0, 1\}$中选择一个行动。给定实现的状态 $i \in [m]$和行动 $a \in \mathcal{A}$，接收者获得效用 $v_i(a)$，而发送者获得效用 $a$，也就是说，如果接收者采取行动 1 ，效用为1 ；否则为0 。[4] 在状态实现之前，发送者承诺采用信号机制 $\pi : [m] \to \Delta(\Sigma)$，将每个状态映射到任意信号空间 $\Sigma$ 上的一个概率分布。令 $\Pi$ 表示所有此类方案的集合，并令 $\pi_i(\sigma)$ 表示状态为 $i$时发送信号 $\sigma \in \Sigma$ 的概率。在观察到以正概率发送的信号 $\sigma$ 后

[3]全文中，我们将分布视为其概率质量函数。[4]这遵循标准惯例：发送者效用仅取决于接收者的行动，因此与状态无关；并且在每个状态下，发送者都严格偏好行动 1 而非行动 0 （Kamenica 和 Gentzkow，2011；Alonso and Câmara，2016b；Lingenbrink 和 Iyer，2019；Lipnowski and Ravid，2020；Zuet al.，2025）。

接收者根据贝叶斯法则更新其信念，形成后验信念 $\mu(\sigma) \in \Delta([m])$，其中状态 $i$ 的后验概率为

$$\mu_i(\sigma) \triangleq \frac{\lambda_i \pi_i(\sigma)}{\sum_{j\in[m]} \lambda_j \pi_j(\sigma)} .$$

发送者的目标是最大化她的期望效用，即接收者采取行动1的概率。

**量化响应决策**。 我们使用逻辑斯蒂量化响应框架将接收者建模为有限理性（McKelvey and Palfrey, 1995）。具体而言，接收者并非确定性地选择使其期望效用最大化的行动，而是以与其期望效用乘以参数的指数成正比的概率选择每个行动 $\beta \geq 0$。

形式化地，给定后验信念 $\mu \in \Delta([m])$，令 $v(a \mid \mu) \triangleq \sum_{i\in[m]} \mu_i v_i(a)$ 表示接收者采取行动 $a \in \mathcal{A}$ 时的期望效用。接收者采取行动1 的概率于是为

$$\frac{\exp(\beta \cdot v(1 \mid \mu))}{\exp(\beta \cdot v(1 \mid \mu)) + \exp(\beta \cdot v(0 \mid \mu))} = \frac{1}{1 + \exp(\beta \cdot (v(0 \mid \mu) - v(1 \mid \mu)))} .$$

其中，$\beta \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ 表示接收者的理性水平，刻画了她对期望效用差异的响应强度：$\beta$ 越大，接收者的响应性越强。当 $\beta = 0$ 时，无论后验信念如何，接收者都以均等概率随机选择每个行动；随着 $\beta \to \infty$，她以趋近于 1 的概率选择期望效用更高的行动，模型也趋近于经典的贝叶斯说服环境，其中接收者是完全理性的（我们将在下文说明边界情形 $\beta = \infty$）。

定义量化响应函数 $W_\beta(x) \triangleq 1/(1+\exp(\beta x))$。对于每个有限的 $\beta > 0$，函数 $W_\beta$ 是递减的，在 $(-\infty, 0]$ 上为凹函数，在 $[0, \infty)$ 上为凸函数，并满足 $W_\beta(x) + W_\beta(-x) = 1$；这种 S 形曲率在我们的分析中发挥着核心作用。对于每个状态 $i \in [m]$，略微滥用记号，令 $v_i \triangleq v_i(0) - v_i(1)$ 表示在状态 $i$ 下接收者偏好行动 0 胜过行动 1 的程度。对于任意后验信念 $\mu$，期望效用差为 $v(0 \mid \mu) - v(1 \mid \mu) = \sum_{i\in[m]} \mu_i v_i$，因此接收者采取行动 1 的概率可以简洁地写为 $W_\beta\left(\sum_{i\in[m]} \mu_i v_i\right)$。不失一般性，我们假设 $\{v_i\}_{i\in[m]}$ 关于 $i$ 严格递增，这可以通过重新标记状态并合并取值相同的状态来实现。[5] 对于完全理性边界情形 $\beta = \infty$，我们采用有利于发送方的平局判定，并定义 $W_\infty(x) \triangleq \mathbb{1}[x \leq 0]$。也就是说，当接收者在两个行动之间无差异时，她会选择发送者偏好的行动[6] 1。

由于接收者采取行动1 的概率只通过期望效用差 $\sum_{i\in[m]} \mu_i v_i$ 取决于她的后验信念，因此，任何诱导出相同期望效用差的两个信号都可以合并，而不会影响发送者的期望效用。因此，不失一般性，我们可以将注意力限制在这样的信号传递方案上：每个信号 $\delta \in \mathbb{R}$ 都等于其所诱导的期望效用差，即

[5] 由于每个状态 $i$ 都由唯一确定，$v_i$ 因此我们也将 $v_i$ 称为状态 的取值，其中状态 $i$。[6] 注意，$W_\infty$ 与 $W_\beta$ 的逐点极限重合，$\beta \to \infty$ 但在 $x = 0$ 处除外，此处该极限等于 $1/2$。这一差距是为完全理性接收者设计的信号传递方案可能产生性能损失的根源，详见第 1 节。

$\delta = \sum_{i\in[m]} \mu_i(\delta) v_i$，其中 $\mu_i(\delta)$ 表示给定信号 $\delta$ 时状态 $i$ 的后验概率。给定一个信号传递方案[7] $\pi$，令收益 $_\beta[\pi]$ 表示面对理性水平为 $\beta$ 的接收者时，发送者的期望效用：

$$\textsc{Payoff}_\beta[\pi] \triangleq \sum\nolimits_{i\in[m]} \lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\delta) W_\beta(\delta)\,\mathrm{d}\delta\ .$$

当发送者知道接收者的理性水平为 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ 时，她会选择一种信号机制 $\pi \in \Pi$，以最大化其期望效用。我们将相应的最优期望效用记为

$$\textsc{Opt}\,(\beta) \triangleq \max\nolimits_{\pi\in\Pi} \textsc{Payoff}_\beta[\pi]\ ,$$

并将达到该最大值的信号机制称为理性水平为 $\beta$ 时的最优信号机制。在全文中，问题实例是元组 $\mathcal{I} = (m,\ \{\lambda_i\}^{i\in[m]},\ \{v_i\}^{i\in[m]})$。

**审查信号机制**。现在我们介绍本文的主要研究对象——审查信号机制。审查信号机制会将最低的一些状态（即接收者最倾向于采取行动1的那些状态）合并为单一信号，并完全揭示其余状态；阈值状态可能会在这两组之间拆分。由于状态按照其取值 $\{v_i\}^{i\in[m}$ 排序，我们可以用审查信号机制的合并质量 $q \in [0,1]$ 来参数化该机制，即被合并到共同信号中的状态的先验概率总和，或者等价地，该信号发出的事前概率。特别地，$q = 0$ 对应于完全揭示，而 $q = 1$ 对应于完全合并，后者不揭示任何信息。一旦合并质量 $q$ 确定，先验分布便唯一决定了阈值状态，即至少部分被合并的最高状态，以及阈值状态比例，即该状态被合并的比例。定义1 将这一构造形式化，我们用 $\Pi_C$ 表示所有审查信号机制的集合。

D定义 1. 固定任意合并质量 $q \in [0,1]$。如果 $q = 0$，审查信号机制将完全揭示每个状态，即对于每个 $i \in [m]$，都有 $\pi_i(\delta) = \mathbb{1}[\delta = v_i]$。对于 $q \in (0,1],$，将阈值状态 $l(q)$、阈值状态比例 $\theta(q)$ 以及合并信号 $s(q)$ 定义如下：

$$\ell(q) \triangleq \min\left\{i \in [m] : \sum\nolimits_{j\in[i]} \lambda_j \geq q\right\}\ ;\quad \theta(q) \triangleq \frac{q - \sum_{j\in[\ell(q)-1]} \lambda_j}{\lambda_{\ell(q)}} \in (0,1]\ ;$$
$$s(q) \triangleq \frac{1}{q} \cdot \left(\sum\nolimits_{j\in[\ell(q)-1]} \lambda_j v_j\ +\ \theta(q)\lambda_{\ell(q)} v_{\ell(q)}\right)\ .$$

审查信号机制 $\pi$（合并质量为 $q$）由下式给出

$$\begin{aligned} i \in [\ell(q)-1]: &\qquad \pi_i(\delta) = \mathbb{1}[\delta = s(q)]\ ,\\ i = \ell(q): &\qquad \pi_i(\delta) = \theta(q)\cdot\mathbb{1}[\delta = s(q)] + (1-\theta(q))\cdot\mathbb{1}\left[\delta = v_{\ell(q)}\right]\ ,\\ i \in [\ell(q)+1:m]: &\qquad \pi_i(\delta) = \mathbb{1}[\delta = v_i]\ .\end{aligned}$$

[7] 尽管我们允许使用具有连续信号空间 $\Sigma$ 的信号传递方案，此时 $\pi_i(\cdot)$ 是概率密度函数，但本文考虑的所有信号传递方案（包括最优方案）都具有有限信号空间。因此，在上下文明确时，我们滥用记号，将 $\pi_i(\cdot)$ 视为概率质量函数。

等价地，该机制将严格低于阈值状态 $l(q)$ 的所有状态，与阈值状态中占比为 $\theta(q)$ 的部分合并为一个合并信号，并完全揭示其余状态。合并信号$s(q)$ 等于合并状态的条件均值，这与我们的约定一致：每个信号都等于其所产生的期望效用差。当合并质量 $q$ 的含义可由上下文明确时，我们省略参数，写作 $l,\ \theta, s$，而不写作 $l(q), \theta(q), s(q)$。

我们将状态 $i$ 称为正状态，如果 $v_i > 0$；如果 $v_i < 0$，则称为负状态。在本文余下部分，我们聚焦于满足 $v_1 < 0 < v_m$ 的实例，因此接收者在某些状态下严格偏好行动1，而在另一些状态下严格偏好行动0。对于其余情况，存在一种在每个理性水平下都最优的单一方案：如果所有状态值均为非正，则根据量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的凹性，完全合并是最优的；如果所有状态值均为非负，则根据其在 $[0, \infty)$ 上的凸性，完全揭示是最优的。

## 3. 在已知理性水平下，审查是最优的

本节研究接收者的理性水平 $\beta$ 固定且为发送者所知时的发送者问题。我们证明，发送者可以将注意力限定于审查信号机制，而不会损失最优性。根据定义 1，选择此类机制相当于选择其合并质量，而合并质量进而决定阈值状态、阈值状态比例以及合并信号。定理 1刻画了最优合并质量；这一刻画构成了我们在第 4 节中关于理性稳健性的结果基础。

定理 1. 任取一个实例$\mathcal{I}$ 和任意理性水平 $\beta \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$，都存在一个最优审查信号机制 $\pi^*$，其合并质量为$q = \sum_{i \in [l-1]} \lambda_i + \theta\lambda_\ell$，其中阈值状态$l$ 和阈值状态比例 $\theta$ $s$满足以下可行性规划$\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}$：

$$
\begin{aligned}
(1-\theta)(s^\dagger - v_\ell) &= 0 && (\textit{threshold-matching}) \\
\Big(W_\beta(s^\dagger) - W_\beta(s)\Big) - W'_\beta(s)(s^\dagger - s) &= 0 && (\textit{tangency}) \\
\max_{i \in [m]}\{v_i : v_i \le s^\dagger\} &= v_\ell && (\textit{threshold-selection}) \qquad (\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}) \\
s \le 0,\ s^\dagger &\ge 0 && (\textit{sign-restrictions}) \\
0 \le \theta &\le 1 && (\textit{fraction-bounds})
\end{aligned}
$$

其中，$s = \dfrac{\sum_{i \in [l-1]} \lambda_i v_i + \theta\lambda_\ell v_l}{\sum_{i \in [l-1]} \lambda_i + \theta\lambda_\ell}$是合并信号，$s^\dagger$ 是一个辅助变量。

定理 1 将发送者对所有信号机制的优化简化为对合并质量的一维选择：最大值$_{\pi \in \Pi}$收益$_\beta[\pi]$ = 最大值$_{q \in [0,1]}$收益$_\beta\left[\pi^{(q)}\right]$，其中 $\pi^{(q)}$表示合并质量为 $q$的审查信号机制。该刻画还意味着，对于每一个理性水平 $\beta \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$，都可以在多项式时间内计算出一个最优信号机制（见命题 EC.5）。

对平台而言，这一结果提供了一条简单的实施原则：通用徽章或推荐会合并所有足够有利的实现值，同时单独披露其余实现值。已经使用此类徽章的平台，无需在用户具有有限

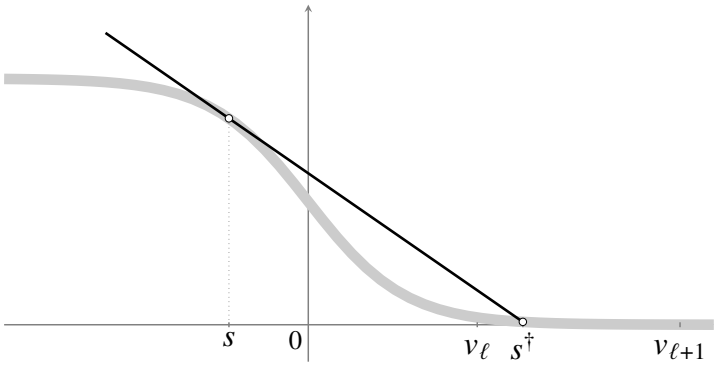



**图1** 可行性规划 $\mathrm{P}_{\text{CENS-OPT}}$ 的图形化解释。灰色实线曲线为量化响应函数$W_\beta(\cdot)$。黑线在汇聚点 $(s,\ W_\beta(s))$ 处与曲线相切，并在辅助点$(s^\dagger,\ W_\beta(s^\dagger))$处与其相交。阈值状态 $l$ 是状态值不大于辅助值 $s^\dagger$ 的最大状态。将切线向该辅助值左侧延伸，并与其右侧的量化响应曲线共同构成量化响应函数的凸上界。该上界是最优性证明的基础。

理性时重新设计其信息披露格式；只需调整徽章的覆盖范围，并且如我们下文所示，相较于完全理性基准缩小其范围。简言之，有限理性会改变最优合并范围，但不会改变审查结构。

下文首先解释可行性规划 $\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}$ 中的约束及其所体现的权衡。随后，我们考察最优合并质量如何随理性程度变化，最后概述定理1的证明。

**经济学与图形解释**。定理1 所刻画的最优合并质量，在合并信号的覆盖范围与其诱导发送者偏好行动的效果之间取得平衡。由于接收者在数值较小的状态下更倾向于采取行动1 ，扩大合并范围会纳入更多不利于行动1的状态。这一扩展提高了发送合并信号的概率，但也会使合并信号 $s$ 增大，从而降低接收者采取行动1的条件概率 $W_\beta(s)$ 。可行性规划确定了这两种效应达到平衡的位置。

量化响应函数的曲率为最优结构提供了直观解释。回忆一下，$W_\beta$在$(-\infty,0]$ 上是凹函数，在 $[0,\infty)$上是凸函数。根据詹森不等式，凹性有利于合并接收者偏好行动1的状态，而凸性则有利于揭示接收者偏好行动0的状态，至少在分别考察两组状态时是如此。与这一直觉一致，在任何理性水平下，都可以选择使最优审查信号机制合并所有数值非正的状态；理性水平只影响有多少来自数值为正的状态的概率质量加入合并范围。

约束 相切条件 确定了一条直线，该直线在汇聚点 $(s,\ W_\beta(s))$ 与量化响应曲线相切，并在辅助点 $(s^\dagger,\ W_\beta(s^\dagger))$再次与曲线相交。约束符号限制 将汇聚点置于曲线的凹区域，将辅助点置于曲线的凸区域。对于每个辅助值 $s^\dagger \geq 0$，相切条件都确定唯一的汇聚点 $s \leq 0$，由此得到从 $[0,\infty)$ 到 $(-\infty, 0]$ 的映射是递减双射：辅助点越靠右，汇聚点就越靠左

（见图1）。约束 阈值选择随后将$l$ 选作阈值状态，即取不大于辅助值 $s^\dagger$ 的最大状态；该状态定义良好，因为 $v_1 < 0 \leq s^\dagger$。

其余约束将这一几何构造与可行信号传递方案联系起来。比例界约束 确保阈值状态比例 $\theta$ 是有效概率。阈值匹配 约束要求：只要阈值状态仍有一部分被揭示，即$\theta < 1$成立，就必须满足 $s^\dagger = v_\ell$。在这种情况下，相切条件变为 $W_\beta(s) + W'_\beta(s)(v_\ell - s) = W_\beta(v_\ell)$。左侧表示将少量阈值状态纳入合并时带来的边际收益，其中计入了合并信号随之发生的变化，以及该变化对接收者针对整个合并池所作响应的影响；右侧则表示转而揭示这部分状态所获得的收益，因此发送者在边际上无差异。这些条件共同确定了最优合并质量。

**更少理性，更加透明。** 尽管审查在不同理性水平下始终是最优的，但最优合并质量会随接收者的响应度而变化。为了解这一点，考虑一个先验均值为正的实例，即 $\sum_{i\in[m]} \lambda_i v_i > 0$，此时没有额外信息的接收者会倾向于采取行动0。对于完全理性接收者，最优审查信号机制$\hat{}\pi^*$ 选择合并质量$\hat{}q$，使合并信号等于$\hat{s} = 0$，从而令接收者恰好对两个行动无差异。在有利于发送方的平局判定下，该信号必然诱发行动1；而有限理性接收者在同一信号下采取行动1的概率只有二分之一。因此，发送者有动机减少合并质量：这样会使合并信号降至零以下，并将采取该行动的概率提高到二分之一以上，尽管合并信号的发送频率也会降低。事实上，对于每个有限理性水平 $\beta < \infty$，最优审查信号机制 $\pi^*$ 都会选择合并质量 $q$，使合并信号满足 $s \leq 0$（定理1）。由于合并信号随合并质量增加，因此可得 $q \leq \hat{}q$；也就是说，针对有限理性接收者的最优机制所合并的质量不高于完全理性基准。（如果先验均值非正，则完全理性基准会合并所有状态，即$\hat{}q = 1$，因此比较显然成立。）下一个命题将这一比较推广到任意两个理性水平。

命题 1. 任取两个理性水平 $\beta \leq \hat{}\beta$。设 $\pi^*$ 和 $\hat{}\pi^*$ 分别是理性水平为 $\beta$ 和 $\hat{}\beta$的有限理性接收者对应的最优审查信号机制。那么，审查信号机制 $\pi^*$ 的合并质量 $q$弱小于审查信号机制 $\hat{}\pi^*$的合并质量 $\hat{}q$。

换言之，发送者会向理性程度较低的接收者最优地披露弱更多的信息，这里“更多”是按照Blackwell序来衡量的（Blackwell，1953）：合并质量较大的审查信号机制可以通过将更多状态并入合并信号，从合并质量较小的机制中获得，因此它是后者的信息模糊化。

量化响应函数的曲率也为这一结果提供了几何直觉。当接收者的理性程度较低，即 $\beta$ 较小时，量化响应曲线会更加平缓。因此，对于任意给定的

辅助点 $(s^\dagger,\ W_\beta(s^\dagger))$，图 1 中的切线与曲线的切点会更靠左，因此相切条件要求采用更低的合并信号 $s$。由于合并信号随合并质量增加而增加，较低的合并信号意味着需要从正值状态中合并较少的概率质量，也就是说，阈值状态更低，或阈值状态比例更小。因此，最优合并质量下降，披露的信息增多。命题1 的形式化证明见第 EC.2.4节。

对于平台而言，命题 1 说明了在先验分布和效用差异不变的情况下，如何根据用户的响应性调整披露。在产品质量解释下，服务响应性较低用户的平台应缩小通用徽章的覆盖范围，将最不利的产品从徽章中移除，并单独披露这些产品。因此，当用户对披露的信息反应不那么敏锐时，平台从提高透明度中获得的收益大于从更积极的合并中获得的收益。提高透明度也有利于用户。在用户的理性水平固定时，在所有将每个非正值状态合并、且合并质量不超过完全理性基准的审查信号方案中，较小的合并质量会弱幅提高她的期望效用（见命题 EC.3）。具体而言，无论用户的理性水平如何，与完全理性用户所适用的方案相比，她在针对自身理性水平的最优方案下都不会更差。因此，平台对响应性较低用户采取的最优应对方式，与这些用户的利益相一致。

**定理1的证明概述**我们现在概述定理1的证明；形式化证明见第EC.2.2节。该证明基于线性规划对偶性。我们将发送者问题表述为一个线性规划，其变量是 $\pi_i(\delta)$ 在每个状态 $i$下发送每个信号 $\delta$ 的概率；约束要求每个 $\pi_i(\cdot)$ 都是一个概率分布，且每个信号都等于其所引致的期望效用差。随后，我们推导相应的对偶规划（见EC.2.1节）。给定可行性规划$\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}$的一个解，我们明确构造一个可行的原始分配和一个可行的对偶分配，并证明它们满足互补松弛条件，由此可知二者都是最优的。

该构造分为两步。首先，对于每个满足（$s,\ s^\dagger,\ l,\ \theta$）审查信号机制的约束切线、阈值选择和符号限制的元组，也就是上文图示解释中描述的每一种配置，我们构造一个可行的对偶分配。根据弱对偶性，其目标值是发送者在任意信号机制下期望效用的上界。该对偶分配对应于图 1 所示的量化响应函数 $W_\beta$（$\cdot$）的凸上界：辅助点 $s^\dagger$左侧的切线，以及其右侧的曲线本身。其次，为了证明审查信号机制能够达到这一上界，我们还要求满足约束比例界约束，以确保相应的原始分配是可行的；并要求满足约束阈值匹配，以确保互补松弛在阈值状态$l$处成立。最后，我们证明满足所有约束的元组存在且唯一。

## 4. 审查是理性程度稳健最优的

第3 节表明，当已知接收者的理性水平时，审查能够使发送者的期望效用最大化（定理 1）。然而在实践中，发送者可能不知道接收者的理性水平，或者只有付出高昂成本才能获知该水平。出于这一考虑，本节研究理性稳健问题：发送者在不知道接收者理性水平的情况下承诺采用单一信号机制，并根据该机制在所有理性水平下的最坏情况性能对其进行评估。我们考虑三种稳健性标准（定义2）：最大最小比率标准最大化该机制所能达到的基准收益 最优值（$\beta$）的最坏情况比例；最大最小收益标准最大化最坏情况收益；而最小最大后悔标准则最小化相对于最优值（$\beta$）的最坏情况差额。或许令人意外的是，定理2 表明，在上述每一种标准下，审查仍然是最优的。这一结果强化了定理1：即使发送者不知道接收者的理性水平，审查仍然保持最优。

D定义 2. 固定任意一个实例 $\mathcal{I}$，并回顾一下，$\mathrm{Opt}(\beta)$ 表示发送者在知晓接收者理性程度 $\beta$ 时的最优期望效用。对于信号机制 $\pi$，定义

- 其 最坏情况比率 $\Gamma[\pi] \triangleq$ 下确界$_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}$ 收益$_\beta[\pi]$ 最优值$(\beta)$；
- 其最坏情况收益 $P[\pi] \triangleq \inf_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}$ 收益$_\beta[\pi]$；并且
- 其最坏情形遗憾 $L[\pi] \triangleq \inf_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}$ (收益$_\beta[\pi]$ – 最优值$(\beta)$)，即相对于基准方案的最大差额的相反数。[8]

在每项准则下，如果一个信号机制在 $\Pi$ 的所有信号传递方案中使相应的最坏情况目标达到最大值，则该信号机制是理性稳健最优的；我们分别用 $\pi^*_{\text{ratio}}$、$\pi^*_{\text{payoff}}$ 和 $\pi^*_{\text{regret}}$ 表示这类方案。它们的最坏情况取值 $\Gamma\left[\pi^*_{\text{ratio}}\right]$、$P\left[\pi^*_{\text{payoff}}\right]$ 和 $L\left[\pi^*_{\text{regret}}\right]$ 分别称为极大极小最优比率、最大最小最优收益和极小化极大最优遗憾。

定理 2. 对于每个实例 $\mathcal{I}$ 以及三个稳健性标准（最大最小比率、最大最小收益和最小最大遗憾），都存在一种审查方式，使其理性稳健最优。

在本节余下部分，我们先讨论定理 2 的若干推论，然后证明最大最小比率准则下的定理。最大最小收益和最小最大遗憾准则的证明结构类似，故留待第EC.3.5节讨论。

**结构相同，信息披露程度不同**。定理 2 表明，三个稳健性准则具有相同的最优披露结构，尽管它们可能要求不同程度的信息披露。因此，对于平台而言，信息披露格式并不取决于稳健性准则：对于所有足够有利的实现值，平台仍可使用通用徽章或推荐，并单独披露其余实现值。稳健性准则仅决定这一共同信息适用的范围有多广。图 2 展示了最优合并质量如何随准则变化，并表明它不一定是唯一的：在左图中，区间内的每一个合并质量都能达到最大最小最优收益。

[8] 文献通常将遗憾定义为 $\mathrm{Opt}(\beta)$ 与 $-$收益$_\beta[\pi]$ 之间的差额，并寻求使其上确界最小的方案（最小最大遗憾）。为了在统一的上确$_\pi$ 下$_\beta$ 框架中处理这三个准则，我们改用负差额来定义最坏情形遗憾。由于 $L[\pi] = -$上确界$_\beta$ ($\mathrm{Opt}(\beta)$ 与 $-$收益$_\beta[\pi]$)之间的差额，因此最大化 $L[\pi]$ 等价于标准最小最大遗憾目标。

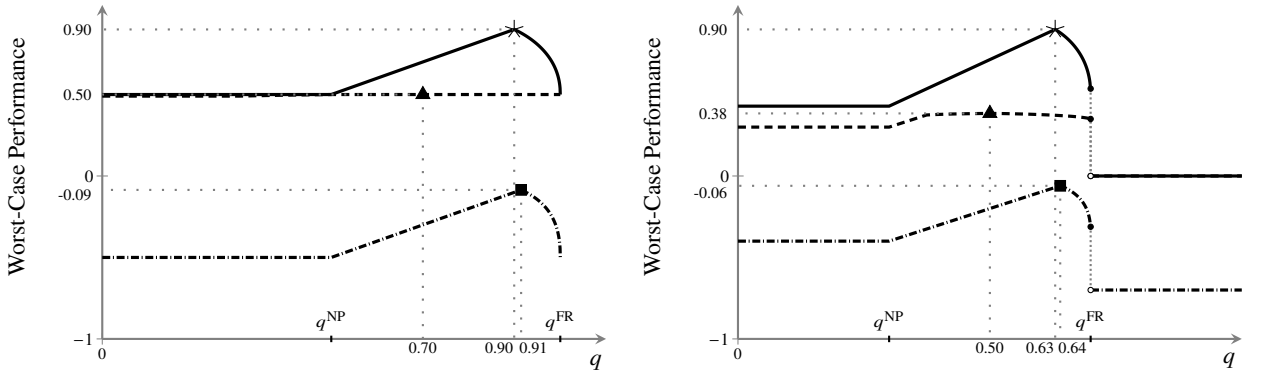



图 2 汇聚质量为 $q$ 时审查的最坏情况比率（实线）、最坏情况收益（虚线）和最坏情形遗憾（点划线；符号约定见定义 2）。刻度标记 $q^{NP}$ 表示非正值状态的先验质量总和，刻度标记 $q^{FR}$ 表示完全理性接收者对应的最优审查汇聚质量。星号、三角形和方块分别标示最大最小比率、最大最小收益和最小最大后悔准则下的最优汇聚质量。左图：三状态实例，其中 $\lambda=(0.3, 0.2, 0.5)$，$v=(-2,-1, 1.6)$，且 $q^{NP}=0.5$ 和 $q^{FR}=1$；当 $q\geq 0.5$ 时，最坏情况收益为常数，因此最大最小收益准则下的最优汇聚质量并非唯一。右图：五状态实例，其中 $\lambda=(0.1, 0.2, 0.2, 0.3, 0.2)$，$v=(-2,-1, 0.5, 1.5, 3)$，且 $q^{NP}=0.3$ 和 $q^{FR}=0.7$；曲线在 $q^{FR}$ 处不连续，实心圆标示取得的值，空心圆标示单侧极限。

**计算可处理性**。结构刻画还使稳健政策设计具有计算可处理性。由于定理 2 将设计问题归结为选择单一的合并质量，我们获得了一个全多项式时间近似方案（全多项式时间近似方案），可根据三个准则中的每一个，计算近似理性稳健最优审查：对于最大最小比率和最大最小收益准则，得到一个 $(1-\epsilon)$-近似；对于最小最大后悔准则，则得到一个加性 $\epsilon$-近似（见命题EC.6和算法 1）。

**更高透明度对双方都有利**。命题1表明，发送者会向理性程度较低的接收者最优地披露更多信息。当接收者的理性水平未知时，类似结论依然成立。对于每一种稳健性准则，都可以选择一种理性稳健最优审查，其合并质量为 $q$，满足 $q^{NP}\leq q\leq q^{FR}$，其中下界 $q^{NP}$ 是非正值状态的先验质量总和，上界 $q^{FR}$ 是面向完全理性接收者的最优审查的合并质量（示例见图2，详情见命题EC.2 ）。因此，不知道接收者理性程度的发送者，无须比假设接收者完全理性的发送者更加不透明：她仍会合并所有接收者对行动1的偏好不严格为负的状态，但也可能披露一些接收者偏好行动0的状态。与为完全理性接收者设计的机制相比，这种额外透明度对双方都有利：在所选稳健性准则下，发送者的最坏情况性能弱增，而接收者在每个理性水平下的期望效用也弱增（命题EC.3）。因此，更高透明度既能保护平台免受用户理性程度不确定性的影响，也能让用户受益。

最大最小比率准则的证明概述。我们将 $\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}\text{Payoff}_{\beta}[\pi]/\text{Opt}(\beta)$ 视为一个零和博弈：发送者选择信号机制，对手选择接收者的理性水平。一个自然的初步想法是应用极小极大定理（冯·诺伊曼，1928；Sion，1958；威廉，2012）。然而，这类定理不能直接应用：对于固定的信号机制 $\pi$，比率 $\text{Payoff}_{\beta}[\pi]/\text{Opt}(\beta)$ 关于 $\beta$ 未必是拟凸函数，而这些定理要求它满足拟凸性。为解决这一问题，我们允许对手在不同理性水平上随机化。这一放宽不会改变问题的值：对于任意固定的信号机制，期望比率关于对手的分布是线性的，因此它在所有分布上的下确界等于它在单个理性水平上的下确界。允许对手随机化后，目标函数关于信号机制和对手的分布均为仿射函数；依据姚氏原理（姚，1977）思路进行标准的极小极大论证，即可交换优化顺序。因此，只需研究发送者对任意理性水平分布的最佳响应。

固定任意一个理性水平 $\eta$ 的分布。面对分布 $\eta$，发送者的目标是在各理性水平上的量化响应收益加权平均，其中每个水平 $\beta$的权重为 $\eta(\beta)$/最优值($\beta$)。这个目标可以改写为一个线性说服问题，其间接效用函数是相应量化响应函数$W_{\beta}(\cdot)$的加权平均，我们证明该函数呈 S 形。根据 Kolotilin 等 Kolotilin 等(2022年的刻画（在下文引理1中正式陈述），这个辅助问题因此存在一个最优审查。因此，面对每一个固定的理性水平分布，发送者都可以只考虑审查方案，而不损失最优性。然而，仅凭这一最佳响应性质，并不能推出某个单一的纯审查方案是稳健最优的，因为审查空间是非凸的：两个截断点不同的审查方案的混合，本身并不是一个审查方案。因此，不能直接应用极小极大定理来交换对手分布上的下确界与对审查方案的上确界。

为克服这一困难，我们利用这样一个事实：每种审查方案都由其合并质量唯一确定 $q\in[0,1]$（定义1）。这种参数化将对非凸审查空间的上确界转化为对紧凸区间 $[0,1]$的上确界。接着，我们证明，对于任意给定的理性水平分布，发送者的目标函数关于合并质量呈单峰，因此也是拟凹的 $q$。由于该目标函数关于 $q$ 也是连续的，并且关于对手的分布是线性的，Sion 最小最大定理（Sion，1958）使我们能够交换对手分布的下确界与合并质量的上确界。因此，某个单一的纯审查方案能够达到稳健最优值。形式化证明先针对理性水平的截断集合 $[0,k]$ 完成这一论证，然后令 $k\to\infty$，并单独处理完全理性的边界情形 $\beta=\infty$ 。

引理1（**Kolotilin 等，2022年**）。设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ 为可测状态空间，$\lambda\in\Delta(\Omega)$ 为概率测度，$V:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为间接效用函数，并考虑优化问题上确界$_{\mu\in MPC(\lambda)}\int V(x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $MPC(\lambda)$ 表示先验$\lambda$的所有均值保持收缩的集合，即某种信号机制能够诱导出的后验均值分布。若 $V$ 为 $S$形，即，

对于某个阈值 $\bar{x}$，它要么在 $(-\infty, \bar{x}]$ 上为凸函数，并在 $[\bar{x}, \infty)$ 上为凹函数；要么在 $(-\infty, \bar{x}]$ 上为凹函数，并在 $[\bar{x}, \infty)$ 上为凸函数，那么就存在最优审查。

我们通过证明定理2 的最大最小比率准则，结束本节。

最大最小比率准则下定理 2 的证明。任取常数 $\beta \in (0, \infty)$。我们首先考虑截断理性水平集合 $\mathrm{B} \triangleq [0, \beta]$。令 $\eta \in \Delta(\mathrm{B})$ 表示 B 上的一个概率分布。稍微滥用一下符号，我们将平均比率定义为 $\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta) \triangleq \int_{\beta \in \mathrm{B}} \text{收益}_{\beta[\pi]} \text{最优值}(\beta) \cdot \eta(\beta)\, \mathrm{d}\beta$。注意，对理性水平 $\beta$ 进行额外随机化不会改变最坏情况比率，即 $\inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta) = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \text{收益}_{\beta[\pi]} \text{最优值}(\beta)$，其中等号成立是因为，在 $\arg\min_{\beta \in \mathcal{B}} \text{收益}_{\beta[\pi]} \text{最优值}(\beta)$ 处的极小值点上，概率测度的下确界由狄拉克质量取得。由于信号机制空间 $\Pi$ 和截断理性水平集合 $\Delta(\mathrm{B})$ 上所有概率分布构成的空间都是紧致且凸的，并且平均比率 $\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta)$ 对两个变量 $\pi$ 和 $\eta$ 连续且仿射，根据姚氏原理（Yao，1977），我们有

$$\sup_{\pi \in \Pi} \inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta) = \inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \sup_{\pi \in \Pi} \Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta)\ .$$

固定任意分布 $\eta \in \Delta(\mathcal{B})$，我们定义由 $\eta$ 参数化的辅助函数 $G_\eta(x)$ 如下：对每个 $x \in (-\infty, \infty)$，

$$G_\eta(x) \triangleq \int_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{W_\beta(x)}{\mathrm{OPT}(\beta)} \cdot \eta(\beta)\, \mathrm{d}\beta\,.$$

利用这个辅助函数，我们可以将 $\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta)$ 改写为以下形式：

$$\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta) = \sum\nolimits_{i \in [m]} \lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\delta) G_\eta(\delta)\ \mathrm{d}\delta = \int_{-\infty}^{\infty} G_\eta(\delta) \cdot \tilde{\pi}(\delta)\, \mathrm{d}\delta\,,$$

其中 $\tilde{\pi}(\delta) \triangleq \sum_{i \in [m]} \lambda_i \pi_i(\delta)$。因此，优化问题 $\sup_{\pi \in \Pi} \Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta)$ 可以等价地视为一个线性劝说问题，其发送者的间接效用函数为 $G_\eta(\cdot)$。我们证明，辅助函数 $G_\eta(\cdot)$ 呈 S 形：它单调不增，在 $(-\infty, 0]$ 上凹，在 $[0, \infty)$ 上凸（见引理 EC.5）。根据引理 1，可以保证对固定的理性水平分布 $\eta$，选择一种审查方式是最佳响应，该分布为

$$\text{下确界}_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \sup_{\pi \in \Pi} \Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta) = \inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \sup_{\pi \in \Pi_C} \Gamma_{\mathcal{B}}(\pi, \eta) = \inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \sup_{q \in [0,1]} \Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)}, \eta\right),$$

其中，最后一个等式成立，是因为每个合并质量 $q \in [0,1]$ 都确定了一个审查方案，记为 $\pi^{(q)}$。通过用合并质量 $q \in [0,1]$ 重新参数化纯审查，我们将原本非凸的纯审查空间上的上确界转化为紧凸定义域 $[0,1]$ 上的上确界。接着，我们证明函数 $\Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)}, \eta\right)$ 关于合并质量是拟凹的（见引理 EC.6）。由于定义域 $[0,1]$ 是紧凸的，根据 Sion 最小最大定理（Sion，1958），我们得到

$$\inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \sup_{q \in [0,1]} \Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)}, \eta\right) = \sup_{q \in [0,1]} \inf_{\eta \in \Delta(\mathcal{B})} \Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)}, \eta\right)\ .$$

结合以上所有部分，我们得到

$$\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi,\eta)=\sup_{q\in[0,1]}\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}\Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)},\eta\right),$$

这确立了纯审查方案的理性稳健最优性。

将这一论证从截断集合 $\mathcal{B}=[0,\beta]$ 扩展到完整理性水平集合$[0,\infty)\cup\{\infty\}$ 遵循标准的极限论证：令截断水平 $\beta$ 不断增大，取相应最优合并质量的一个收敛子序列，并验证极限审查仍然是最优的，包括相对于完全理性接收者也是如此。细节留待第 EC.3.3节。

□

## 5. 通用稳健性能保证

本节将基于最大最小比率准则，建立紧的普适性能保证，其中“普适”是指这些保证对每个实例和每个理性水平都成立。在第5.1节，我们证明，针对完全理性接收者的最优审查可保证最坏情况比率至少为 1/2（定理3(i)）。在第5.2节，我们证明，理性稳健最优审查可将这一保证提高至至少 $\Gamma^*\approx 0$。8996 （定理3(ii)）。这两个界都是紧的，而且方程（1）中的同一个二元状态实例可同时达到这两个界。定理3 总结了这些结果。

定理3. 对于每个实例$\mathcal{I}$，以下结论成立：

*(i)* 针对完全理性接收者的最优审查，其最坏情况比率至少为 1/2；以及 *(ii)* 理性稳健最优审查 $\pi^*_{ratio}$（见定义2）的最坏情况比率至少为 $\Gamma^*$，即最大最小比率至少为 $\Gamma^*$，其中 $\Gamma^*\approx 0$。8996 在方程（3）中定义。

此外，这两个界都是紧的：对于二元状态实例

$$\lambda_1=2/3,\quad \lambda_2=1/3,\quad v_1=-1,\quad v_2=2, \tag{1}$$

完全理性接收者对应的最优审查的最坏情况比率恰为 1/2，，而极大极小最优比率恰为 $\Gamma^*$。

要通过审查实现常数级的最坏情况比率并不容易。事实上，任何比完全理性接收者对应的最优方案汇集更多概率质量的审查，其最坏情况比率都为零：它发送的每个信号都是正面的，因此完全理性接收者绝不会采取发送者偏好的行动（见图 2b）。定理3 表明，与此相反，完全理性接收者对应的最优审查[9] 以及理性稳健最优方案，都能保证发送者最优期望效用的一个常数比例，且这一保证对所有实例和理性水平都成立。这些紧确的保证带来了以下启示。

**个性化的有限价值。** 在任何理性水平下，采用理性稳健最优审查 $\pi^*_{\text{ratio}}$ 的平台所获得的效用至少达到可实现最大效用的89.96% ，也就是它在知晓用户理性水平时能够获得的最优

[9]审查结构对于这一保证至关重要。对于完全理性接收者，也存在非审查方案的最优信号传递方案，而这类方案在面对有限理性接收者时可能表现不佳。参见命题 EC.4。

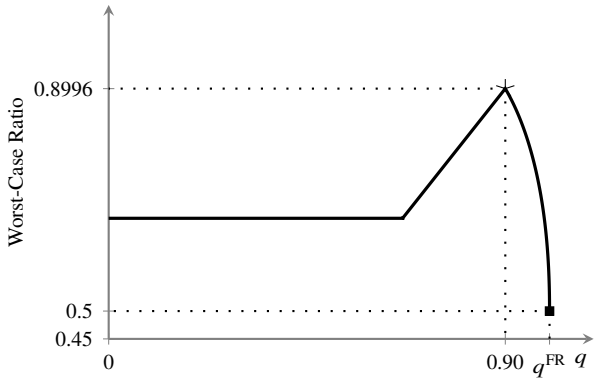



**图 3** 合并质量为 $q$ 的二元状态实例中，审查的最坏情况比率，见方程（1）。星号标记最大最小最优比率 $\Gamma^* \approx 0$。8996，该比率在合并质量约为 0。90时达到；方块标记完全理性接收者的最优审查的最坏情况比率 $1/2$，其合并质量为 $q^{FR} = 1$。

期望效用。由于这一保证适用于任何理性水平，因此也适用于服务这样一群用户的平台：他们拥有相同的先验和效用，但理性水平各不相同。无论这些用户的理性水平服从何种分布，单一的理性稳健审查所获得的期望效用至少达到平台针对每位用户的理性水平定制信号机制时所能获得期望效用的89.96% 。因此，这种个性化至多带来相当于可实现最大效用10.04% 的价值。因此，只有在估计每位用户的理性水平并定制其披露的成本低于这一有限收益时，平台才会从中受益；当个体层面的选择数据稀缺或定制成本高昂时，单一的理性稳健审查便能获得大部分可实现收益。

**量化透明度的价值**。 忽略有限理性、并采用针对完全理性接收者的最优审查的平台，仍能保证至少达到最大可实现效用的50% ，但这一界限是紧的，因此平台可能损失一半的可实现收益。如第4节所示，在每一种稳健性准则下，都可以选择一种理性稳健最优审查，使其合并的质量不多于这一完全理性基准，同时接收者的期望效用至少不减。定理3 根据最大最小比率准则量化了额外透明度带来的收益：它将最坏情况比率的普适保证从 $1/2$ 提高到约0。8996。这一提升只需 modest 的额外披露。以方程（1）中的二元状态实例为例，理性稳健最优审查合并的质量约为0。90，而完全理性基准会合并所有状态（见图3）。平台披露约10% 的先验质量后，相对于完全理性接收者，其收益约减少10% ；作为交换，最坏情况比率提高约40 个百分点，从0。5 升至0。8996。因此，透明度可作为应对用户理性程度不确定性的保险：用户完全理性时只需承受少量损失，便能换来对所有理性水平都高得多的保证。

**即使在简单环境中，行为稳健性也很重要**。方程（1）中的二元状态实例达到了两个紧界。因此，即使只有两个状态且先验概率固定并且不趋于零，最坏情况下的损失也会出现

；这并不需要庞大的状态空间或复杂的先验。[10] 因此，对平台而言，环境简单并不是采用针对完全理性用户校准的信息披露政策的理由：即使在这个二元状态实例中，该政策在最坏情况下也会损失 50% 的收益，而若了解用户的理性水平本可获得这些收益；相比之下，理性稳健政策将损失限制在 10。04%。

**定理 3 的证明概述**。定理3中的两项保证，都是通过在每个理性水平 $\beta$ 下，将合并质量为 $q^\dagger$ 的候选方案审查 $\pi^\dagger$ 与合并质量为$q^\ddagger$的基准方案审查 $\pi^\ddagger$ 进行比较而得到的。候选方案是我们要界定其保证的方案，而基准方案最终是理性水平为 $\beta$ 时的最优审查；根据定理1，它达到 $\mathrm{Opt}(\beta)$ 。为了对这一比较进行定量分析，我们将涉及任意多个状态的收益比较约化为涉及二元状态收益的比较，并将其余贡献归入余项，分别加以界定。这一约化使比率 $\mathrm{Payoff}_\beta[\pi^\dagger] / \mathrm{Payoff}_\beta[\pi^\ddagger]$中只剩下常数个变量，从而便于对该比率进行界定。

这一约化基于一个关于任意两个审查方案的简单观察。每个方案都会合并其阈值状态以下的状态，并揭示其余状态。因此，两个方案的合并质量将状态空间划分为三个区域：两个方案都合并的区域；信息较少的方案合并、而信息较多的方案揭示的中间区域（前者的合并质量更大）；以及两个方案都揭示的区域。这一观察引出了以下分解。

三**分解**。 在实例 $\mathcal{I}$ 上固定两个审查方案 $\pi^\dagger$ 和 $\pi^\ddagger$，其合并质量分别为 $q^\dagger$ 和 $q^\ddagger$。定义

$$\mathrm{T} \triangleq \left\{ i \in [m] : \sum_{j \in [i-1]} \lambda_j < \min\{q^\dagger, q^\ddagger\} \right\}, \qquad \text{（顶部状态）}$$

$$\mathrm{M} \triangleq \left\{ i \in [m] : \max\left\{ \sum_{j \in [i-1]} \lambda_j,\ \min\{q^\dagger, q^\ddagger\} \right\} < \min\left\{ \sum_{j \in [i]} \lambda_j,\ \max\{q^\dagger, q^\ddagger\} \right\} \right\}, \qquad \text{（中间状态）}$$

$$\mathrm{B} \triangleq \left\{ i \in [m] : \sum_{j \in [i]} \lambda_j > \max\{q^\dagger, q^\ddagger\} \right\}. \qquad \text{(b底部状态)}$$

顶部状态 T 由两个方案合并，底部状态 B 由两个方案揭示。中间状态M 由合并质量更大的方案合并，并由另一个方案揭示。图 4 至 6展示了这三组状态，我们将在第 5.1节和第5.2节中始终使用这一分解。这些集合覆盖整个状态空间，但不一定互不相交；其中任意两个集合至多相交于一个状态，即仅部分合并的阈值状态。为便于说明，我们假设 T、M和 B 两两不相交。[11]

尽管这两项保证都依赖于将状态约化为二元状态，但不同情形下的约化方式有所不同。对于定理 3(i)，以及定理 $q^\dagger \le q^\ddagger$ 3(ii)中的情形，我们将双方共同揭示的底部状态视为一个单独的“假想揭示状态”，该状态在两种方案下的期望效用相同。我们

[10]这一发现在概念上类似于先验无关机制设计中的经典结果：随着买家数量减少，竞争比率通常会恶化（Bulow and Klemperer，1996；Allouah and Besbes，2020）。[11]我们可以将任意共享状态拆分为具有相同价值的相邻状态，而不会改变发送者在任一方案下的期望效用（见第 EC.4.2节），因此这一假设只是简化了两个方案之间的比较。

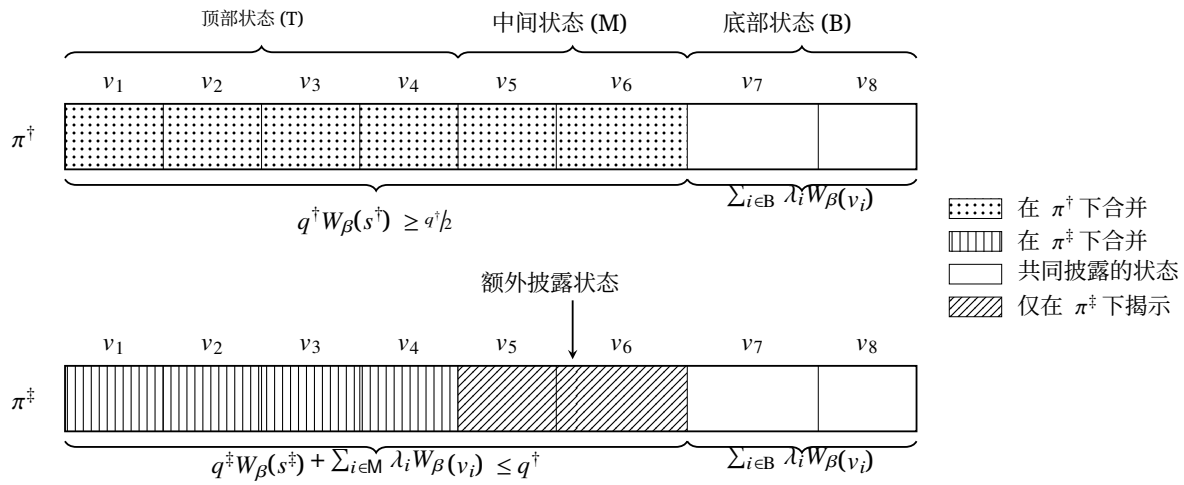



**图 4** 完全理性接收者下最优审查与基准审查的结构和效用分解 $\pi^\dagger$，该基准审查 $\pi^\ddagger$在定理 3(i) 中分析。具体而言，$q^\dagger W_\beta(s^\dagger)$（分别为 $q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)$）表示在信号机制 $\pi^\dagger$（分别为 $\pi^\ddagger$）下，合并状态带来的期望效用。总和 $\sum_{i\in M} \lambda_i W_\beta(v_i)$ 表示审查方案 $\pi^\ddagger$ 下中间状态 M 的效用贡献。总和 $\sum_{i\in B} \lambda_i W_\beta(v_i)$ 表示两种审查方案下底部状态 B 的效用贡献。

随后，在每种方案下，将顶部和中间状态 $T \cup M$ 约化为一个单独的状态；这个状态与假想揭示状态一起构成二元状态比较。对于定理 3(ii)中的情形 $q^\dagger > q^\ddagger$，我们则将底部状态 B 明确约化为一个单独的状态，其总质量和条件均值分别为底部状态的总质量和条件均值。在候选方案 $\pi^\dagger$下，该方案合并 $T \cup M$，这些状态约化为一个单独的状态；该状态与约化后的底部状态一起，再次构成二元状态空间。在基准方案 $\pi^\ddagger$下，该方案只合并 T，并揭示 M，我们利用量化响应函数在 $[0,\infty)$ 上的凸性，将中间状态的贡献上界限定为两个状态的贡献，这两个状态的值分别为 0 和底部状态的条件均值。再加上合并后的顶部状态和约化后的底部状态，便得到三个不同的状态值，而相应的收益等于两个二元状态收益的凸组合。

我们通过证明定理 5.1 来结束第 3(i) 节，并通过证明定理 5.2 来结束第 3(ii) 节。

### 5.1. 完全理性审查信号传递方案的稳健性： ½-最坏情况比率

我们首先评估接收者的理性水平未知时的一种自然政策：为完全理性接收者设计的最优审查信号机制，这是平台在经典模型下会采用的机制。根据定理 3(i)，对于每个实例和每种理性水平，该机制所获得的期望效用至少是已知接收者理性水平时可达到的最优期望效用的一半。

现在我们来说明定理 3(i)背后的直觉（见图 4 示意）。固定一个有限理性水平 $\beta$（当 $\beta = \infty$ 时，候选方案按构造即为最优）。对于完全理性接收者，候选审查信号机制 $\pi^\dagger$ 是最优方案，而对于理性水平为 $\beta$的接收者，基准审查信号机制最优。根据命题 1，候选方案合并的总质量不少于基准方案。因此，基准方案还会揭示中间状态 M，而两种方案都会揭示

底部状态 B；我们可以将其视为一个单一的“假想揭示状态”，因为它在两种方案下贡献的期望效用相同。在候选方案下，顶部和中部状态 T ∪M 被合并为一个值非正的单一信号，因此接收者在收到该信号后采取行动 1 的概率至少为$W_\beta(0) = 1/2$。在基准方案下，由于接收者采取行动 1 的概率至多为 1，我们将发送者从 T ∪M 获得的期望效用上界设为这些状态的总质量。因此，两种方案都可简化为两个状态：合并后的 T∪M 状态，其贡献在候选方案下至少是基准方案的一半；以及假想揭示状态，其贡献在两种方案下相同。给两种收益都加上相同的非负贡献，不会使它们的比率低于 $1/2$，由此得到该保证。

定理 *3(i)* 的证明。 我们考察面向完全理性接收者的最优审查 $\pi^\dagger$ 在所有可能的理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$下的最坏情况比率。分两种情况讨论。

**接收者并非完全理性**（$\beta \in [0,\infty)$）。 固定任意有限理性水平 $\beta \in [0,\infty)$。根据定理 1，针对已知理性水平 $\beta$，选择一种审查信号机制是最优的。设 $\pi^\ddagger$ 表示理性水平 $\beta$下的最优审查。回顾命题 1 可知 $q^\dagger \geq q^\ddagger$，其中 $q^\ddagger$ 是审查信号机制 $\pi^\ddagger$的合并质量。

那么，对于为完全理性接收者设计的最优审查 $\pi^\dagger$，有

$$\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right] = q^\dagger W_\beta(s^\dagger) + \sum\nolimits_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)\,,$$

且理性水平为 $\beta$ 时，发送者的最优期望效用为

$$\textsc{Opt}(\beta) = q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger) + \sum\nolimits_{i\in \mathrm{M}} \lambda_i W_\beta(v_i) + \sum\nolimits_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i) \leq q^\ddagger + \sum\nolimits_{i\in \mathrm{M}} \lambda_i + \sum\nolimits_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i) = q^\dagger + \sum\nolimits_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)\,,$$

其中，不等式成立是因为量化响应函数满足 $W_\beta(\cdot) \leq 1$。因此，我们得到

$$\frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right]}{\textsc{Opt}(\beta)} \geq \frac{q^\dagger W_\beta(s^\dagger) + \sum_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)}{q^\dagger + \sum_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)} \overset{(a)}{\geq} W_\beta(s^\dagger) \overset{(b)}{\geq} \frac{1}{2}\,,$$

其中，不等式 (a) 成立是因为代数事实 $\frac{A+x}{B+x} \geq \frac{A}{B}$对所有 $x \in [0,\infty)$ 以及 $0 \leq A \leq B$ 均成立；不等式 (b) 成立是因为 $W_\beta(s^\dagger) \geq W_\beta(0) = \frac{1}{2}$，这是由于量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 单调不增，且 $s^\dagger \leq 0$。

**接收者是完全理性的**（$\beta = \infty$）。根据定义，$\pi^\dagger$ 是为完全理性接收者设计的最优审查。因此，我们有收益 $_\infty\left[\pi^\dagger\right] =$ 最优值$(\infty)$，且效用比恰好为 1。

结合这两种情况，证明即告完成。 □

定理3 中的二元状态实例表明，$1/2$ 的最坏情况比率是紧的。直观来说，由于该实例的先验均值为零，针对完全理性接收者的最优审查信号机制会合并两个状态，从而产生一个0 的合并信号，因此在每个有限理性水平下，期望效用都恰好为 $1/2$。相比之下，合并质量略低的审查信号机制会诱导

一个严格为负的合并信号。以适当的速率让其合并质量随着 1 逐渐增大，例如当 $\beta$ 增大时（例如，$1-\beta^{-1/2}$），我们可以得到一个期望效用趋近于 1 的审查信号机制，其中 $\beta \to \infty$。因此，最优值($\beta$) $\to 1$，所以完全理性基准的比率趋近于 $1/2$；结合定理 3(i) 中的下界，其最坏情况比率恰为 $1/2$。形式化分析见 EC.4.3。

### 5.2. 普适保证与极大极小最优比率的刻画

现在，我们在最大最小比率准则下，为理性稳健审查确立紧致的普适保证。具体而言，我们通过证明定理 3(ii) 来表明，对于每个实例，极大极小最优比率至少为$\Gamma^* \approx 0。8996$，且对于方程（1）中的二元状态实例，该比率取等号。对于分析，不失一般性地，我们将注意力限制在先验均值非正的实例 $\mathcal{I} = (m, \{\lambda_i\}^{i\in[m]}, \{v_i\}^{i\in[m]})$ 上，即 $\sum_{i\in[m]} \lambda_i v_i \le 0$，以及将每个非正值状态进行合并的审查方案上。[12] 令$\Pi_C^+ \subset \Pi_C$ 表示将每个非正值状态进行合并的审查方案集合。

我们现在概述证明的结构。我们比较合并质量为$q^\dagger$ 的候选审查 $\pi^\dagger \in \Pi_C^+$ 与合并质量为 $q^\ddagger$的基准审查 $\pi^\ddagger \in \Pi_C^+$。基准方案在 $\Pi_C^+$范围内是任意的；在定理 3(ii)的证明中，我们将所得界应用于每个理性水平下的最优审查。根据定理1和引理 EC.1，该最优审查属于 $\Pi_C^+$。对于每一对这样的方案，我们使用三分解将状态划分为顶部状态 T、中间状态 M 和底部状态 B。接着，根据两种方案的合并质量的相对大小，论证分为两种情况。引理 2 讨论 $q^\dagger \le q^\ddagger$的情况，此时基准方案合并的质量不小于候选方案（见图 5）。引理 3 讨论互补的 $q^\dagger > q^\ddagger$情况，此时基准方案比候选方案更具信息性（见图 6）。这两个引理共同为任意一对方案的收益比 $\text{Payoff}_\beta[\pi^\dagger] / \text{Payoff}_\beta[\pi^\ddagger]$ 给出界，从而得到定理 3(ii)。

LEMMA 2. 固定任意实例 $\mathcal{I}$。设 $\pi^\dagger, \pi^\ddagger \in \Pi_C^+$ 为两个审查方案，其合并质量分别为 $q^\dagger$ 和 $q^\ddagger$。若 $q^\dagger \le q^\ddagger$，则对于每个理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$，我们有

$$\frac{P_{AYOFF_\beta}[\pi^\dagger]}{P_{AYOFF_\beta}[\pi^\ddagger]} \ge q^\dagger .$$

现在我们来阐释引理 2 （见图 5 中的示意图）。不同于定理 3(i) 的证明，在该证明中，候选方案池化的质量不低于基准方案；这里，中间状态 M 由候选方案揭示 $\pi^\dagger$，但由基准方案合并 $\pi^\ddagger$。和之前一样，我们将双方共同揭示的底部状态 B 视为一个“假想揭示状态”，其在两种方案下贡献相同的期望效用。基准方案将顶部和中部状态 T ∪M 合并为一个信号 $s^\ddagger$，该信号等于它们的条件均值。在候选方案下，我们用一个单一状态的贡献作为这些状态贡献的下界：该状态的取值等于相同的条件均值，但其质量仅等于顶部状态 T的质量。

[12]证明这两个限制不失一般性的形式化证明分别推迟至引理 EC.8 和命题 EC.2。

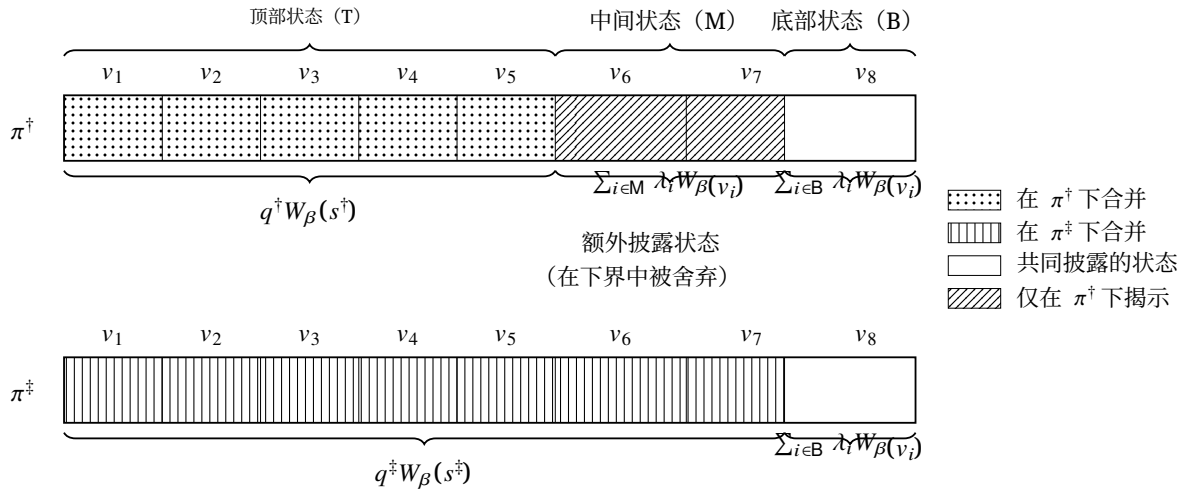



**图 5** 引理 候选审查的结构与效用分解 $\pi^\dagger$ 以及基准审查 $\pi^\ddagger$（分析见引理 2）。 $q^\dagger W_\beta(s^\dagger)$（分别为 $q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)$）表示信号机制 $\pi^\dagger$（分别为 $\pi^\ddagger$）下合并状态的期望效用。总和 $\sum_{i\in B}\lambda_i W_\beta(v_i)$ 表示两种信号机制下共同披露状态的效用贡献。最后，总和 $\sum_{i\in M}\lambda_i W_\beta(v_i)$ 表示仅在候选审查 $\pi^\dagger$ 下揭示的状态的效用贡献；在证明下界时，这部分会被舍弃。

该下界成立有两个原因：候选方案的合并信号不高于基准方案的，这是因为基准方案还额外合并了中间状态，而中间状态的取值不低于该信号；此外，候选方案所揭示的中间状态对其期望效用的贡献为非负。因此，两种方案都可归结为两个状态，而合并状态在候选方案下的贡献至少是基准方案下该贡献的 $q^\dagger/q^\ddagger$。由于假想揭示状态在两种方案下的贡献相同，收益比至少为 $q^\dagger/q^\ddagger \geq q^\dagger$。

引理的证明 2。 任取理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$。由于 $q^\dagger \leq q^\ddagger$，基准审查 $\pi^\ddagger$合并的质量不小于候选审查 $\pi^\dagger$。因此，我们有 $l^\dagger \leq l^\ddagger$。

我们首先证明相应的合并信号满足 $s^\dagger \leq s^\ddagger$。根据合并信号的定义，我们有 $q^\ddagger s^\ddagger = \sum_{i\in T}\lambda_i v_i + \sum_{i\in M}\lambda_i v_i = q^\dagger s^\dagger + \sum_{i\in M}\lambda_i v_i$。对于每个状态 $i \in M$，状态 $i$必定弱高于候选审查的阈值状态 $l^\dagger$。因此，我们有 $v_i \geq v_{l^\dagger} \geq s^\dagger$。将其代入前述方程可得 $q^\ddagger s^\ddagger \geq q^\dagger s^\dagger + \left(q^\ddagger - q^\dagger\right) s^\dagger = q^\ddagger s^\dagger$，从而证明了 $s^\dagger \leq s^\ddagger$。

接下来，利用三分解，我们可以将候选方案审查 $\pi^\dagger$ 下发送者的期望效用收益$_\beta\left[\pi^\dagger\right]$下界化为

$$\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right] = q^\dagger W_\beta(s^\dagger) + \sum_{i\in M}\lambda_i W_\beta(v_i) + \sum_{i\in B}\lambda_i W_\beta(v_i) \geq q^\dagger W_\beta(s^\dagger) + \sum_{i\in B}\lambda_i W_\beta(v_i) \geq q^\dagger W_\beta(s^\ddagger) + \sum_{i\in B}\lambda_i W_\beta(v_i),$$

其中，最后一个不等式由 $s^\dagger \leq s^\ddagger$ 以及量化响应函数 $W_{\beta(\cdot)}$ 单调不增这一事实得出。注意，基准审查 $\pi^\ddagger$ 下发送者的期望效用收益$_\beta\left[\pi^\ddagger\right]$

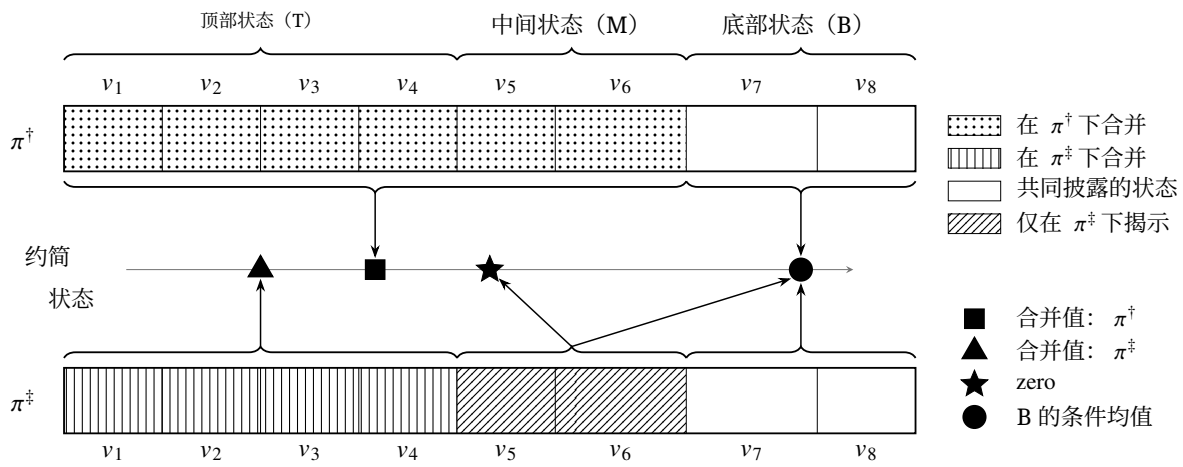



**图 6** 引理 $\pi^\dagger$ 和基准审查 $\pi^\ddagger$ 中分析的候选审查的状态约简示意图 3。如图所示，候选审查 $\pi^\dagger$ 合并顶部和中间状态 T∪M，而基准审查$\pi^\ddagger$ 仅合并顶部状态 T；两种审查方案都会如常披露底部状态 B。中轴绘出了相应约简状态的取值。方形和三角形标记分别表示在分离候选审查 $\pi^\dagger$ 和基准审查 $\pi^\ddagger$的先验均值项后，用于比较的合并值。圆形标记表示底部状态B的条件均值，星形标记表示零。利用量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$的凸性，基准审查 $\pi^\ddagger$ 下的中间状态 M $\pi^\ddagger$ 被约简为两个状态，其取值分别对应星形标记和圆形标记。

恰好展开为 $q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)+\sum_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)$。图 收益$_\beta\left[\pi^\dagger\right]$和 收益$_\beta\left[\pi^\ddagger\right]$的分解见图 5。最后，我们可以给出效用比的上界：

$$\frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right]}{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\ddagger\right]} \geq \frac{q^\dagger W_\beta(s^\ddagger)+\sum_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)}{q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)+\sum_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)} \geq \frac{q^\dagger}{q^\ddagger} \geq q^\dagger,$$

其中，第二个不等式成立是因为 $q^\dagger \leq q^\ddagger$ 且 $\sum_{i\in \mathrm{B}} \lambda_i W_\beta(v_i)\geq 0$，因此我们可以使用如下代数事实：$\frac{A W_\beta}{B W_\beta} \frac{s^\ddagger}{(s^\ddagger)()+x} \geq \frac{A+x}{B}$对所有 $x\in[0,\infty)$和 $0\leq A\leq B$均成立。引理 2的证明至此完成。 □

现在转向互补情形 $q^\dagger > q^\ddagger$，在该情形中，基准方案 $\pi^\ddagger$ 揭示的状态多于候选方案 $\pi^\dagger$。不同于引理 2，这里的比较涉及一种权衡。相较于候选方案，基准方案额外揭示了中间状态 M；由于这些状态的取值为正，这会使来自这些状态的期望效用弱下降。与此同时，由于仅合并顶部状态 T，基准方案发送的合并信号弱下降，从而使来自顶部状态的期望效用弱上升。因此，我们需要对这一权衡给出一个定量上界。同样的配置在第5.1节中出现过，当时我们只是将基准方案下来自顶部和中间状态的发送者条件期望效用上界简单设为1。然而，这种放松只能保证 $1/2$，对于得到更紧的上界而言过于宽松。相反，下面的引理根据三个量对收益比给出界定：候选方案的合并质量 $q^\dagger$、按理性水平 $\beta$缩放的底部状态 B 的条件均值，以及取值为正与取值为非正的状态的先验质量之比 $\xi$。

引理 3. 固定任意实例 $\mathcal{I}$。设 $\pi^\dagger, \pi^\ddagger \in \Pi_C^+$ 为两个合并质量分别为 $q^\dagger$ 和 $q^\ddagger$的审查方案。若 $q^\dagger > q^\ddagger$，则对于每个理性水平 $\beta \in [0,\infty)$，都有 [13]

$$\frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right]}{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\ddagger\right]} \geq \frac{N_{\frac{1-q^\dagger}{q^\dagger}}\left(\beta \cdot \frac{\sum_{i\in B}\lambda_i v_i}{1-q^\dagger}\right)}{Q_\xi\left(\beta \cdot \frac{\sum_{i\in B}\lambda_i v_i}{1-q^\dagger}\right)},$$

其中，辅助函数定义为

$$N_t(u) \triangleq \frac{W_1(-tu)+tW_1(u)}{1+t}, \qquad Q_\xi(u) \triangleq \sup_{t\in[0,\xi]} N_t(u), \tag{2}$$

并且 $\xi \triangleq \frac{1-\sum_{i\in[m]:\ v_i\leq 0}\lambda_i}{\sum_{i\in[m]:\ v_i\leq 0}\lambda_i} \in (0,\infty)$ 是正状态与非正状态之间的先验质量比。

现在，我们来阐释引理3（见图6示意）。核心思路是利用量化响应函数$W_\beta(\cdot)$ 的S形曲率，将两种方案下发送者的期望效用都界定在二元状态收益之内。首先，在两种方案下，我们都将共同揭示的底部状态B 替换为一个状态，其质量为这些状态的总质量，取值为其条件均值。由于$W_\beta(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 上是凸的，这种替换会使底部状态的贡献在两种方案下均弱减相同的量；由于这一共同差值非负，只需对剩余项的比率进行界定。在候选方案 $\pi^\dagger$中，顶部和中间状态T∪M 合并为单一信号，因此候选方案的收益可化为该合并状态与缩减后的底部状态之间的二元状态收益。在基准方案 $\pi^\ddagger$中，仅顶部状态T 被合并，而中间状态M 则被揭示。我们不只是对顶部和中间状态取平均，而是再次利用 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$上的凸性：由于中间状态的取值介于0 与底部状态的条件均值之间，我们可以用恰好取这两个值的两个状态来给它们的贡献设定上界。加上合并后的顶部状态和缩减后的底部状态，基准方案的收益因此可由三个状态的收益界定，其取值分别为基准方案的合并信号、0以及底部状态的条件均值。这一三状态收益是两个二元状态收益的凸组合，而这两个收益均不超过所有可行合并质量下可达到的最大二元状态收益。将候选方案的二元状态收益与这一最大二元状态收益进行比较，即可得到引理3。

引理 3的证明。 固定任意理性水平 $\beta \in [0,\infty)$。对于底部状态 B，我们将其条件均值定义为 $\bar{v}^{\mathrm{B}} \triangleq \frac{\sum_{i\in \mathrm{B}}\lambda_i v_i}{\sum_{i\in \mathrm{B}}\lambda_i}$。为简化记号，我们用 $u \triangleq \beta\bar{v}^{\mathrm{B}} \in [0,\infty)$ 表示底部状态 B 的缩放条件均值，并分别用 $t^\dagger \triangleq \frac{1-q^\dagger}{q^\dagger}$ ($t^\ddagger \triangleq \frac{1-q^\ddagger}{q^\ddagger}$) 表示在候选审查 $\pi^\dagger$（基准审查 $\pi^\ddagger$）下披露质量与合并质量的比率。根据假设，有 $0 \leq t^\dagger \leq t^\ddagger \leq \xi$。令$d \in (-\infty, 0]$ 表示实例 $\mathcal{I}$ 的先验均值，即 $\sum_{i\in[m]}\lambda_i v_i = d$。

对于候选审查 $\pi^\dagger$，底部状态 B 与其余状态 T ∪M 的期望值之和等于先验均值，其表示为 $q^\dagger s^\dagger + (1-q^\dagger)\bar{v}^{\mathrm{B}} = d$。对于基准审查 $\pi^\ddagger$，我们

[13] $q^\dagger = 1$ 的情形可以直接处理。在该情形下，我们有 $\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right] = W_\beta(s^\dagger) \geq \frac{1}{2}$和 $\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\ddagger\right] \leq 1$，从而得到 $\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right] / \textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\ddagger\right] \geq \frac{1}{2}$。

有 $q^{\ddagger}s^{\ddagger}+\left(q^{\dagger}-q^{\ddagger}\right)\rho^{\mathrm{M}}\bar{v}^{\mathrm{B}}+\left(1-q^{\dagger}\right)\bar{v}^{\mathrm{B}}=d$，其中 $\rho^{\mathrm{M}}\triangleq\frac{\sum_{i\in\mathrm{M}}\lambda_i v_i}{\left(q^{\dagger}-q^{\ddagger}\right)\bar{v}^{\mathrm{B}}}\in(0,1]$ 是中间状态 M 的条件均值与底部状态 B 的条件均值之比。重新整理这些方程后，相应的汇聚信号可写为 $s^{\dagger}=-t^{\dagger}\bar{v}^{\mathrm{B}}+\frac{d}{q^{\dagger}}$ 和 $s^{\ddagger}=-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}}+\frac{d}{q^{\ddagger}}$，其中 $c^{\ddagger}\triangleq\frac{\left(q^{\dagger}-q^{\ddagger}\right)\rho^{\mathrm{M}}+1-q^{\dagger}}{q^{\ddagger}}\in[t^{\dagger},t^{\ddagger}]$。

接下来，利用三分解框架，我们可以将候选审查 $\pi^{\dagger}$ 下发送者的期望效用改写为

$$\begin{aligned}\textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{\dagger}\right]&=q^{\dagger}W_{\beta}(s^{\dagger})+\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)\\&=q^{\dagger}W_{\beta}(-t^{\dagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})+(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})+\left(q^{\dagger}W_{\beta}(s^{\dagger})-q^{\dagger}W_{\beta}(-t^{\dagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)-(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)\\&=N_{t^{\dagger}}(u)+\left(q^{\dagger}W_{\beta}(s^{\dagger})-q^{\dagger}W_{\beta}(-t^{\dagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)-(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right),\end{aligned}$$

其中，上式最后两项分别表示先验均值负向偏移带来的效用收益，以及将底部状态约化为单一状态所带来的效用收益。基准审查 $\pi^{\ddagger}$ 下的效用分解中也出现了类似的两项。对于基准审查 $\pi^{\ddagger}$，状态 $i\in\mathrm{M}$ 的价值满足 $v_i\in(0,\ \bar{v}^{\mathrm{B}}]$。首先，利用量化响应函数 $W_{\beta}(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 上的凸性，对中间状态 M 的效用贡献给出上界，如下所示：

$$\sum\nolimits_{i\in\mathrm{M}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)\leq\sum\nolimits_{i\in\mathrm{M}}\lambda_i\left(\left(1-\frac{v_i}{\bar{v}^{\mathrm{B}}}\right)W_{\beta}(0)+\frac{v_i}{\bar{v}^{\mathrm{B}}}W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)=\left(q^{\dagger}-q^{\ddagger}\right)\left((1-\rho^{\mathrm{M}})W_{\beta}(0)+\rho^{\mathrm{M}}W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right).$$

然后，利用上述不等式，我们得到基准审查 $\pi^{\ddagger}$ 下发送者期望效用的上界，即

$$\begin{aligned}\textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{\ddagger}\right]&=q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger})+\sum\nolimits_{i\in\mathrm{M}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)+\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)\\&\overset{(a)}{\leq}q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger})+\left(q^{\dagger}-q^{\ddagger}\right)\left((1-\rho^{\mathrm{M}})W_{\beta}(0)+\rho^{\mathrm{M}}W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)\\&=q^{\ddagger}W_{\beta}(-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})+\left(q^{\dagger}-q^{\ddagger}\right)\left((1-\rho^{\mathrm{M}})W_{\beta}(0)+\rho^{\mathrm{M}}W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\\&\quad+\left(q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger})-q^{\ddagger}W_{\beta}(-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)-(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)\\&\overset{(b)}{=}q^{\ddagger}\left(W_{\beta}(-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})+c^{\ddagger}W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(1-q^{\ddagger}(1+c^{\ddagger})\right)W_{\beta}(0)+\left(q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger})-q^{\ddagger}W_{\beta}(-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)\\&\quad+\left(\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)-(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)\\&=q^{\ddagger}(1+c^{\ddagger})N_{c^{\ddagger}}(u)+\left(1-q^{\ddagger}(1+c^{\ddagger})\right)N_0(u)+\left(q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger})-q^{\ddagger}W_{\beta}(-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)\\&\quad+\left(\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)-(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)\\&\overset{(c)}{\leq}Q_{\xi}(u)+\left(q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger})-q^{\ddagger}W_{\beta}(-c^{\ddagger}\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum\nolimits_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_{\beta}(v_i)-(1-q^{\dagger})W_{\beta}(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right),\end{aligned}$$

其中，不等式 (a) 成立是由于中间状态所贡献效用的上界；等式 (b) 成立是由于恒等式 $q^{\ddagger}c^{\ddagger}=(q^{\dagger}-q^{\ddagger})\rho^{\mathrm{M}}+1-q^{\dagger}$ 和 $1-q^{\ddagger}(1+c^{\ddagger})=(q^{\dagger}-q^{\ddagger})(1-\rho^{\mathrm{M}})$；不等式 (c) 成立是由于方程 (2) 中函数 $Q_{\xi}(\cdot)$ 的定义以及 $q^{\ddagger}(1+c^{\ddagger})\in(0,1]$。

最后，我们可以将效用比界定为

$$\frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger\right]}{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\ddagger\right]} \geq \frac{N_{t^\dagger}(u)+\left(q^\dagger W_\beta(s^\dagger)-q^\dagger W_\beta(-t^\dagger\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_\beta(v_i)-(1-q^\dagger)W_\beta(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)}{Q_\xi(u)+\left(q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)-q^\ddagger W_\beta(-c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_\beta(v_i)-(1-q^\dagger)W_\beta(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)}$$
$$\overset{(a)}{\geq} \frac{N_{t^\dagger}(u)+\left(q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)-q^\ddagger W_\beta(-c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_\beta(v_i)-(1-q^\dagger)W_\beta(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)}{Q_\xi(u)+\left(q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger)-q^\ddagger W_\beta(-c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)+\left(\sum_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_\beta(v_i)-(1-q^\dagger)W_\beta(\bar{v}^{\mathrm{B}})\right)} \overset{(b)}{\geq} \frac{N_{t^\dagger}(u)}{Q_\xi(u)},$$

其中，不等式 (a) 成立是因为 $q^\dagger W_\beta(s^\dagger) - q^\dagger W_\beta(-t^\dagger\bar{v}^{\mathrm{B}}) = \int_d^0 -W'_\beta(-t^\dagger\bar{v}^{\mathrm{B}} + \frac{z}{q^\dagger})\mathrm{d}z \geq \int_d^0 -W'_\beta(-c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}} + \frac{z}{q^\ddagger})\mathrm{d}z = q^\ddagger W_\beta(s^\ddagger) - q^\ddagger W_\beta(-c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}})$。该积分不等式源于这样一个事实：对于每个 $z\in[d,0]$，条件 $c^\ddagger\in[t^\dagger,t^\ddagger]$ 和 $q^\dagger\geq q^\ddagger$ 意味着 $-t^\dagger\bar{v}^{\mathrm{B}}+\frac{z}{q^\dagger}\geq -c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}}+\frac{z}{q^\ddagger}$，且两边均为非正数。由于量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为凹函数，$-W'_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调不减，因此界的方向得以保持。不等式 (b) 源于代数事实：对于所有 $x\in[0,\infty)$，$\frac{A+x}{B+x}\geq\frac{A}{B}$，且 $0\leq A\leq B$。这些条件均成立，因为量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 上的凸性意味着 $\sum_{i\in\mathrm{B}}\lambda_i W_\beta(v_i)\geq(1-q^\dagger)W_\beta(\bar{v}^{\mathrm{B}})$，而量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 的单调性确保 $W_\beta(s^\ddagger)-W_\beta(-c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}})\geq 0$，这是由于 $s^\ddagger\leq -c^\ddagger\bar{v}^{\mathrm{B}}$。引理 3 的证明到此结束。□

现在我们结合引理2 和3 来证明定理3(ii)。

定理*3(ii)*的证明。对于先验质量比为 $\xi$ 的一个实例（定义见引理 3），我们通过比率 $t=(1-q)/q\in[0,\xi]$ 表示候选方案的合并质量 $q$。两个引理给出

$$\sup_{\pi\in\Pi_C}\Gamma[\pi]\geq\sup_{t\in[0,\xi]}\min\left\{\frac{1}{1+t},\inf_{u\in[0,\infty)}\frac{N_t(u)}{Q_\xi(u)}\right\}.$$

这两项分别对应于合并质量弱严格大于候选方案、以及严格小于候选方案的基准方案。[14] 通过代数运算，将前述不等式右侧视为先验质量比的函数，可知其在 $\xi=1/2$ (见引理 EC.9) 处取得最小值，由此得到普适保证

$$\Gamma^*\triangleq\sup_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}\inf_{u\in[0,\infty)}\frac{N_t(u)}{Q_{\frac{1}{2}}(u)}\approx 0.8996\,, \tag{3}$$

正如所需。至此，定理3(ii)的证明完成。□

方程（1）中的二元状态实例达到了普适保证：其极大极小最优比率恰好为$\Gamma^*$（见图3；形式化证明见第EC.4.5节）。要理解原因，请回顾引理3证明中的两个松弛量，它们在此实例中都为零。首先，所有中间状态和底部状态的取值均为 $v_2$，因此针对中间状态的凸性界取等号；用一个取值为其条件均值的单一状态替代底部状态，不会改变这些状态的贡献。其次，先验均值为零，因此与每个合并信号相关的余项为零。由此，在每个有限理性水平下，方程（2）中的表达式恰好给出候选方案和最优基准方案的期望效用。最后，该实例的先验质量比为 $\xi=1/2$，这正是方程（3）中的下界达到最小值时的取值，因此其极大极小最优比率等于 $\Gamma^*$。

[14]完全理性（$\beta=\infty$）的情形由引理 2涵盖：此时，基准审查是完全合并的，这意味着其合并质量不低于候选审查的合并质量，满足引理2中的合并质量条件。

## 6. 结论与未来方向

本文研究平台应如何向遵循 Logit 量化响应模型的有限理性用户披露信息，以及当平台可能不知道用户的理性水平时应如何处理。我们证明，针对完全理性用户的最优审查结构，在偏离经典设定的两种情况下依然成立。当理性水平已知时，审查仍然最优，而且最优情况下，理性程度较低的用户获得的信息至少与理性程度较高的用户一样多。当理性水平未知时，在我们考察的三种稳健准则下，审查仍然是稳健最优的。此外，理性稳健审查所实现的收益至少达到已知用户理性水平时可获得收益的 89.96%；而为完全理性用户设计的策略则具有 50% 的普适保证。这两个界都是紧的。

这些结果呼应了标题所传达的观点：更少理性，更加透明。有限理性及其不确定性只会改变平台应当在多大程度上进行合并，而且方向只会是提高透明度。因此，采用通用徽章的平台无需重新设计其信息披露格式；只需缩小徽章的适用范围，这也会弱幅提升用户的期望效用。此外，针对每位用户的理性水平个性化披露，所能带来的收益至多为可实现收益的10.04%；而忽视有限理性则可能导致损失高达其一半。我们的研究结果也为未来研究开辟了若干方向。

尽管Logit量化响应模型已得到充分确立并被广泛采用，正如第1节所述，一个自然的下一步是考察我们的见解能否推广到其他行为模型。量化响应函数的S形曲率在我们的分析中发挥着核心作用，因此，首先可以考虑具有相同曲率的随机选择模型类别，例如由正态分布的效用冲击产生的Probit模型（Thurstone，1927），以及由指数分布的效用冲击产生的指数多项式选择模型（Alptekinoğlu 和 Semple，2016）。更具雄心的目标是设计披露政策，使其不仅对行为参数稳健，也对行为模型本身稳健（关于模型不确定性下稳健运营管理的综述，参见Lu 和 Shen，2021年）。

我们的模型考虑二元行动，以及收益仅取决于用户行动的平台。当用户在两个以上的行动中进行选择（例如在多个推荐产品中选择）时，其多项Logit响应取决于其信念的多维摘要。在这种情况下，审查和我们的汇总质量表示所依托的一维结构便无法直接适用。一个有前景的研究方向是刻画此类情境下的最优披露和理性程度稳健披露，或可借鉴多项Logit模型下的商品组合优化（Talluri 和 Van Ryzin，2004；Rusmevichientong 和 Topaloglu，2012）。另一种扩展是让平台的收益取决于状态，例如，除了采纳之外，平台还看重匹配质量或长期用户满意度。

## 参考文献

Shipra Agrawal、Yiding Feng 和 Wei Tang。《需求学习下的动态定价与广告》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.14385*，2023年。

Saed Alizamir、Francis de Véricourt 和 Shouqiang Wang。《警惕反复出现的风险：一种信息设计方法》。《管理科学》，66(10):4612–4629，2020。Amine Allouah 和 Omar Besbes。《先验无关的最优拍卖》。《管理科学》，66(10):4417–4432，2020。Ricardo Alonso 和 Odilon Câmara。《选举中的政治分歧与信息》。《博弈与经济行为》，100:390–412，2016a。Ricardo Alonso 和 Odilon Câmara。《说服选民》。《美国经济评论》，106(11):3590–3605，2016b。Aydın Alptekinoğlu 和 John H Semple。《指数多项式选择模型：一种用于商品组合与价格优化的新选择》。《运筹学》，64(1):79–93，2016。Jerry Anunrojwong、Krishnamurthy Iyer 和 Vahideh Manshadi。《拥堵社会服务的信息设计：最优的基于需求的说服》。《管理科学》，69(7):3778–3796，2023年。Jerry Anunrojwong、Santiago R. Balseiro 和 Omar Besbes。《决策中多种稳健性标准的最优选择：稳健定价的建模与应用》，2024a。工作论文，arXiv:2403.12260。Jerry Anunrojwong、Krishnamurthy Iyer 和 David Lingenbrink。《说服风险意识型主体：一种几何方法》。《运筹学》，72(1):151–166，2024b。Jerry Anunrojwong、Santiago R. Balseiro 和 Omar Besbes。《先验无关机制设计中第二价格拍卖的稳健性》。《运筹学》，73(3):1659–1674，2025。Jerry Anunrojwong、Santiago R. Balseiro 和 Omar Besbes。《利用支撑集信息进行稳健拍卖设计》。《管理科学》，2026年。Tolga Aydinliyim、Michael S. Pangburn 和 Elliot Rabinovich。《在线零售中的库存披露》。《欧洲运筹学杂志》，261(1):195–204，2017年。Siddhartha Banerjee、Kamesh Munagala、Yiheng Shen 和 Kangning Wang。《竞争性信息披露的代价》。载于第*58*届 *ACM*计算理论研讨会论文集，2026年。Dirk Bergemann 和 Stephen Morris。《信息设计：统一视角》。《经济文献杂志》，57(1): 44–95，2019。Kostas Bimpikis 和 Giacomo Mantegazza。《平台上的策略性信息发布：进入、竞争与福利》。《运筹学》，71(5):1619–1635，2023年。Kostas Bimpikis、Yiangos Papanastasiou 和 Wenchang Zhang。《双边平台上的信息提供：供给优化》。《管理科学》，70(7):4533–4547，2024年。David Blackwell。《实验的等价比较》。《数理统计年刊》，第265–272页，1953年。Jeremy Bulow 和 Paul Klemperer。《拍卖与谈判》。《美国经济评论》，86(1):180–194，1996。Eduard Calvo、Ruomeng Cui 和 Laura Wagner。《在线零售中的产品可得性披露》。《制造与服务运营管理》，25(2):427–447，2023年。

Ozan Candogan。运营管理中的信息设计。载于《拓展边界：运筹学与运营管理研究的前沿》，第176–201页。INFORMS，2020年。Ozan Candogan和Huseyin Gurkan。供应链管理中的信息设计价值。《管理科学》，71(8):6545–6558，2025。Yeon-Koo Che和Johannes Hörner。作为社会学习机制的推荐系统。《经济学季刊》，133(2):871–925，2018年。Hongqiao Chen、Ming Hu和Georgia Perakis。无分布定价。《制造与服务运营管理》，24(4):1939–1958，2022年。Yefen Chen、Xuanming Su和Xiaobo Zhao。利用量化反应均衡对产能分配博弈中的有限理性进行建模。《管理科学》，58(10):1952–1962，2012年。Geoffroy De Clippel和Xu Zhang。非贝叶斯说服。《政治经济学杂志》，130(10):2594–2642，2022年。Francis De Véricourt、Huseyin Gurkan和Shouqiang Wang。向公众通报疫情信息。《管理科学》，67(10):6350–6357，2021年。Stefano DellaVigna。心理学与经济学：来自实地的证据。《经济文献杂志》，47(2):315–372，2009年。Kimon Drakopoulos、Shobhit Jain和Ramandeep Randhawa。说服顾客提前购买：个性化信息提供的价值。《管理科学》*style>，67(2):828–853，2021*年。*Zhicheng Du*、*Wei Tang*、*Zihe Wang*和*Shuo Zhang*。发送者非对称情况下的竞争性信息设计。载于第*25*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第1203–1203页，2024年。Darrell Duffie、Piotr Dworczak和Haoxiang Zhu。搜索市场中的基准方案。《金融学杂志》，72(5): 1983–2044，2017年。Piotr Dworczak和Giorgio Martini。最优说服的简单经济学。《政治经济学杂志》，127 (5):1993–2048，2019年。Yiding Feng、Wei Tang和Haifeng Xu。无悔在线贝叶斯推荐。载于第*23*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第818–819页，2022年。Yiding Feng、Chien-Ju Ho和Wei Tang。理性稳健信息设计：量化响应下的贝叶斯说服。载于*2024*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第501–546页。SIAM，2024年。Nikhil Garg和Ramesh Johari。设计具有信息性的评分系统：来自在线劳动力市场的证据。《制造与服务运营管理》，23(3):589–605，2021年。Francesca Gino和Gary P. Pisano。迈向行为运营管理理论。《制造与服务运营管理》，10(4):676–691，2008年。Itay Goldstein和Yaron Leitner。压力测试与信息披露。《经济理论杂志》，177:34–69，2018年。Liang Guo。分销渠道中的质量披露形式。《管理科学》，55(9):1513–1526，2009年。

Liang Guo和Ying Zhao。自愿质量披露与市场互动。《市场营销科学》，28(3):488–501，2009年。Yonatan Gur、Gregory Macnamara、Ilan Morgenstern和Daniela Saban。平台的信息披露与促销政策设计。《管理科学》，69(10):5883–5903，2023。Teck-Hua Ho和Juanjuan Zhang。为有限理性顾客设计定价合同：固定费用的表述方式是否重要？《管理科学》，54(4):686–700，2008年。Tingliang Huang、Gad Allon和Achal Bassamboo。服务系统中的有限理性。《制造与服务运营管理》，15(2):263–279，2013年。Xue Jia和R. Menon。股东短视主义、公司控制权与自愿披露。《管理科学》，69 (1):702–721，2023。Daniel Kahneman和Amos Tversky。前景理论：风险决策分析。载于《金融决策基础手册：第一部分》，第99–127页。世界科学出版社，2013年。Basak Kalkanci、Kay-Yut Chen和Feryal Erhun。非对称需求信息下的合同复杂性与绩效：实验评估。《管理科学》，57(4):689–704，2011年。Emir Kamenica。贝叶斯说服与信息设计。《经济学年度评论》，11:249–272，2019年。Emir Kamenica和Matthew Gentzkow。贝叶斯说服。《美国经济评论》，101(6):2590–2615，2011年。Anton Kolotilin。说服性实验设计。《博弈与经济行为》，90:215–226，2015年。Anton Kolotilin。最优信息披露：线性规划方法。《理论经济学》，13(2): 607–635，2018年。Anton Kolotilin、Timofiy Mylovanov和Andriy Zapechelnyuk。作为最优说服的审查。《理论经济学》，17(2):561–585，2022年。Can Küçükgül、Özalp Özer和Shouqiang Wang。设计社会学习机制：在线平台限时销售活动的信息设计。《管理科学》，68(7):4899–4918，2022年。Yingjie Lan、Huina Gao、Michael O. Ball和Itir Karaesmen。有限需求信息下的收益管理。《管理科学》，54(9):1594–1609，2008年。Henri Lebesgue。论奇异积分。《图卢兹大学数学与物理科学学院年刊》，1:25–117，1909年。Xin Li、Pengfei Guo和Zhaotong Lian。有限理性顾客密集型服务中的质量—速度竞争。《生产与运营管理》，25(11):1885–1901，2016年。Noah Lim和Teck-Hua Ho。为有限理性顾客设计价格合同：区块数量是否重要？《市场营销科学》，26(3):312–326，2007年。David Lingenbrink和Krishnamurthy Iyer。不可观测队列中的最优信号机制。《运筹学》，67(5):1397–1416，2019年。

Elliot Lipnowski 和 Doron Ravid。动机透明的廉价交谈。《计量经济学》，88(4)：1631–1660，2020。Zibo Liu、Shi Chen、Kamran Moinzadeh 和 Yong Tan。何时广播？有限库存在线销售的库存披露政策。《信息系统研究》，37(1)：117–137，2026年。Mengshi Lu 和 Zuo-Jun Max Shen。模型不确定性下稳健运营管理综述。《生产与运营管理》，30(6)：1927–1943，2021年。Tao Lu 和 Brian Tomlin。用预测机器增强运营经理，2026年。Filip Matějka 和 Alisdair McKay。对离散选择的理性疏忽：多项Logit模型的新基础。《美国经济评论》，105(1)：272–98，2015。Daniel McFadden。定性选择行为的条件逻辑回归分析。载于 Paul Zarembka 编，《计量经济学前沿》，第105–142页。Academic Press，纽约，1974。Richard D McKelvey 和 Thomas R Palfrey。标准形博弈的量化响应均衡。《博弈与经济行为》，10(1)：6–38，1995。Michael Ostrovsky 和 Michael Schwarz。匹配市场中的信息披露与信息逐步揭示。《美国经济学杂志：微观经济学》，2(2)：34–63，2010。Yiangos Papanastasiou、Kostas Bimpikis 和 Nicos Savva。众包探索。《管理科学》，64(4)：1727–1746，2018。Jérôme Renault、Eilon Solan 和 Nicolas Vieille。最优动态信息提供。《博弈与经济行为》，104：329–349，2017年。Kyung Sun Rhee、Jinyang Zheng、Youwei Wang 和 Yong Tan。通过网约车应用进行信息共享的价值：实证分析。《信息系统研究》，34(3)：1228–1244，2023。Gleb Romanyuk 和 Alex Smolin。匹配市场中的挑肥拣瘦与信息设计。《美国经济学杂志：微观经济学》，11(2)：250–76，2019。Paat Rusmevichientong 和 Huseyin Topaloglu。多项Logit选择模型下收益管理中的稳健商品组合优化。《运筹学》，60(4)：865–882，2012。Leonard J. Savage。统计决策理论。《美国统计学会杂志》，46(253)：55–67，1951。Herbert A. Simon。理性选择与环境结构。《心理学评论》，63(2)：129–138，1956。Herbert A Simon。作为过程的理性与作为思维产物的理性。《美国经济评论》，68(2)：1–16，1978。Maurice Sion。关于一般极小极大定理。《太平洋数学杂志》，8(1)：171–176，1958。Daniel D. Sleator 和 Robert Endre Tarjan。链表更新与分页规则的摊还效率。《美国计算机学会通讯》，28(2)：202–208，1985。Xuanming Su。报童模型中的有限理性。《制造与服务运营管理》，10(4)：566–589，2008。

Yanwei Sun、Niloofar Zamani-Foroushani、Zhe Liu 和 Jiahua Wu。供应竞争下线索销售平台中的信息设计与定价，2026年。Kalyan Talluri 和 Garrett Van Ryzin。一般消费者行为离散选择模型下的收益管理。《管理科学》，50(1)：15–33，2004。Wei Tang 和 Chien-Ju Ho。关于信息设计中的贝叶斯理性假设。载于《*AAAI*人类计算与众包会议论文集》，第9卷，第120–130页，2021年。Richard H Thaler。行为经济学：过去、现在与未来。《美国经济评论》，106(7)：1577–1600，2016。Louis L Thurstone。比较判断定律。《心理学评论》，34(4)：273，1927。Feray Tuncalp、Rouba Ibrahim、Song-Hee Kim 和 Jordan Tong。有限理性下医患共同决策过程的设计。可见 *SSRN 4609983*，2023。Ozge Tuncel、Niyazi Taneri 和 Sameer Hasija。最低订购量合同为何在实践中如此普遍？一项行为研究。《制造与服务运营管理》，24(4)：2166–2182，2022年。J v. Neumann。《论博弈论》。《数学年刊》，100(1)：295–320，1928。Abraham Wald。使最大风险最小化的统计决策函数。《数学年刊》，46(2)：265–280，1945。Xiao Wei、Liu Yang、Peng Sun 和 Zheyuan Huang。古诺竞争中的信息共享，2025年。Michel Willem。《极小极大定理》，第24卷。施普林格科学与商业媒体，2012。Manxi Wu、Saurabh Amin 和 Asuman E Ozdaglar。贝叶斯路由博弈中的信息价值。《运筹学》，69(1)：148–163，2021年。Yangge Xiao、Zhenyu Hu 和 Shouqiang Wang。委托搜索的信息设计。《管理科学》，2026年。Andrew Chi-Chin Yao。概率计算：迈向复杂性统一度量。载于《第*18*届计算机科学基础年度研讨会论文集》，第222–227页。IEEE，1977。Guanghui Yu、Wei Tang、Saumik Narayanan 和 Chien-Ju Ho。通过深度学习在信息设计中编码人类行为。《神经信息处理系统进展》，2023。Andriy Zapechelnyuk。最优质量认证。《美国经济评论：洞见》，2(2)：161–176，2020。You Zu、Krishnamurthy Iyer 和 Haifeng Xu。即时学习说服：对无知的稳健性。《运筹学》，73(1)：194–208，2025。

# 本页特意留白。电子补充材料（EC）从下一页开始。

## EC.1. 第 1 节中遗漏的实例

在本节中，我们展示第1 节中省略的示例，比较完全理性和有限理性下接收者的期望效用。对于采用最佳响应策略的完全理性接收者，披露更多信息意味着其期望效用不会降低，这可由 Blackwell 定理证明（Blackwell，1953）。然而，更多信息未必有利于量化响应接收者。下面我们构造一个三状态实例，其中披露更多信息会降低量化响应接收者的期望效用。在理性参数为 $\beta>0$ 的量化响应模型下（详见第2节），等价地，给定行动0 和1之间的后验期望效用差 $x$，接收者以概率 $W_\beta(x)=1/(1+\exp(\beta x))$选择行动1，并以概率 $1-W_\beta(x)$选择行动0。

示例 EC.1. 考虑一个三状态实例，其先验概率为 $\lambda_i$，接收者效用为 $v_i(0)$ 和$v_i(1)$，接收者效用差为 $v_i=v_i(0)-v_i(1)$，如下表所示：

| 状态 $i$ | 先验质量 $\lambda_i$ | $v_i(0)$ | $v_i(1)$ | $v_i=v_i(0)-v_i(1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 0 | 5 | −5 |
| 2 | 1/4 | 0 | 3 | −3 |
| 3 | 1/2 | 4 | 0 | 4 |

固定理性水平 $\beta=\log 2$。下面比较两种信号机制：一种审查信号机制（形式化定义见定义 1），该机制将状态 1 和 2 合并为一个信号，同时揭示状态 3；另一种是完全揭示信号机制，它始终向接收者揭示真实状态。按照 Blackwell序，完全揭示信号机制比这种审查信号机制包含更多信息。

**将状态 1 和 2 合并的审查**。 合并信号产生的后验效用差为 $-4$，在此情况下，接收者以 $W_{\log 2}(-4)=16/17$ 的概率采取行动1。对于状态 3，接收者以 $1-W_{\log 2}(4)=16/17$ 的概率采取行动 0。因此，接收者的期望效用为

$$u_{\text{cens}}=\frac{1}{4}\times 5\times\frac{16}{17}+\frac{1}{4}\times 3\times\frac{16}{17}+\frac{1}{2}\times 4\times\frac{16}{17}=\frac{64}{17}.$$

**完全揭示**。 在此情况下，对于状态 1，接收者以概率 $W_{\log 2}(-5)=32/33$采取行动1；对于状态 2，她以概率 $W_{\log 2}(-3)=8/9$采取行动1；对于状态 3，她以概率$1-W_{\log 2}(4)=16/17$采取行动 0。因此，接收者的期望效用为

$$u_{\text{reveal}}=\frac{1}{4}\times 5\times\frac{32}{33}+\frac{1}{4}\times 3\times\frac{8}{9}+\frac{1}{2}\times 4\times\frac{16}{17}=\frac{2110}{561}.$$

因此，我们有 $u_{\text{reveal}}-u_{\text{cens}}=-2/561<0$，这表明在量化响应下，完全揭示信号机制会严格降低接收者的期望效用。接收者的期望效用之所以会损失，是因为完全揭示信号机制分别揭示了前两个状态，而这两个状态的接收者效用差均为负。由于函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是凹的，分别揭示这两个状态只会使状态1中选择行动1的概率略微上升（从 $16/17$ 提高到 $32/33$），而使状态2中的这一概率大幅下降（从 $16/17$ 降至 $8/9$）。在此例中，状态2造成的效用损失超过了状态1带来的收益。请注意，此例中的效用比较不属于命题 EC.3 的讨论范围；该命题比较的是将每个接收者效用差非正的状态都合并的审查方案。

## EC.2. 第3节缺失的证明

本节首先给出发送者问题的原问题和对偶问题，然后证明定理 1 和命题1。

### EC.2.1. 发送者问题的原始与对偶规划

我们将发送者问题表述为以下线性规划$\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$及其对应的对偶规划$\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Dual}}$，其中原始变量$\{\pi_i(\delta)\}_{\delta\in\mathbb{R},\ i\in[m]}$表示信号机制。[15]

$$
\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{\pi}\geq\mathbf{0}} && \sum_{i\in[m]}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(\delta)W_\beta(\delta)\,\mathrm{d}\delta && && \\
&\text{s.t.} && \sum_{i\in[m]}\lambda_i\,(v_i-\delta)\,\pi_i(\delta)=0 && \forall\delta\in(-\infty,\infty) && \langle\alpha(\delta)\rangle \\
& && \int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(\delta)\,\mathrm{d}\delta=1 && \forall i\in[m] && \langle\eta(i)\rangle
\end{aligned}
\qquad (\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Primal}})
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\alpha,\eta} && \sum_{i\in[m]}\eta(i) && && \\
&\text{s.t.} && \lambda_i\,(v_i-\delta)\,\alpha(\delta)+\eta(i)\geq\lambda_i W_\beta(\delta) && \forall\delta\in(-\infty,\infty),\ i\in[m] && \langle\pi_i(\delta)\rangle
\end{aligned}
\qquad (\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Dual}})
$$

命题 EC.1. 对于规划$\mathcal{P}_{OPT-Primal}$中的每个可行解$\{\pi_i(\delta)\}$，都存在一种信号机制，使得对于每个状态 $i\in[m]$，有限理性接收者采取行动*1*的概率为$\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(\delta)^{W_\beta}(\delta)d\delta$。此外，发送者最优期望效用（在最优信号机制中）等于规划$\mathcal{P}_{OPT-Primal}$的最优目标值。

命题EC.1 将最优信号机制的设计化简为线性规划$\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$，且不损失最优性。该规划$\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$中的第一个约束确保每当信号 $\delta$ 实现时，接收者采取行动1 的概率恰好为$W_\beta(\delta)$。

命题 EC.1 的证明。固定规划 $\mathrm{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$中的一个任意可行解$\{\pi_i(\delta)\}$。我们按如下方式构造一个信号机制 $\pi^\dagger$。[16] 令信号空间为 $\Sigma^\dagger\leftarrow\{\delta:\ \exists i\in[m],\pi_i(\delta)>0\}$。对于每个实现的状态$i$，令$\pi_i^\dagger(\delta)\leftarrow\pi_i(\delta)$，对每个 $\delta\in\Sigma^\dagger$均如此。根据规划 $\mathrm{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$中的第二个约束，所构造的信号机制 $\pi^\dagger$ 是有效的。当信号 $\delta\in\Sigma^\dagger$ 实现时，后验信念$\mu_i^\dagger(\delta)$等于$^{\lambda_i\pi_i}(\delta)_{\sum_{j\in[m]}\lambda_j\pi_j}(\delta)$。根据规划 $\mathrm{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$中的第一个约束，我们知道$\sum_{i\in[m]}\mu_i^\dagger(\delta)\cdot(v_i-\delta)=0$，这意味着$\delta=\sum_{i\in[m]}\mu_i^\dagger(\delta)\cdot v_i$。因此，给定实现的信号 $\delta$，接收者以概率$W_\beta(\delta)$采取行动1。

到目前为止，我们已经证明，发送者的最优期望效用不低于程序 $\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$的最优目标值。我们通过将最优信号机制 $\pi^*$（信号空间为 $\Sigma^*$）转换为程序 $\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Primal}}$ 的一个可行解 $\{\pi_i^\ddagger(\delta)\}$ 来完成证明，该可行解的目标值等于 $\pi^*$中的发送者最优期望效用。[17] 具体构造如下。首先，我们初始化 $\pi_i^\ddagger(\delta)\leftarrow 0$，对于

[15] 尽管我们允许信号传递方案具有连续信号空间 $\Sigma$——也就是说，$\pi_i(\cdot)$ 可以视为概率密度函数——但本文所考虑的所有信号传递方案（包括最优方案）都具有有限信号支撑。因此，在上下文含义明确时，我们会稍微滥用记号，将 $\pi_i(\cdot)$ 用作概率质量函数。[16]此处我们用上标 † 表示构造的信号传递方案。[17]此处我们用上标 ‡ 表示构造的可行解。

所有 $i \in [m]$、$\delta \in (-\infty, \infty)$。接下来，我们枚举每个信号 $\sigma \in \Sigma^*$，令 $\mu^*(\sigma)$ 表示诱导的后验信念，并令 $\delta \triangleq \sum_{i\in[m]} \mu_i^*(\sigma) v_i$。根据定义，给定后验信念 $\mu^*(\sigma)$，有限理性接收者以概率 $W_\beta(\delta)$ 采取行动1。对于每个状态 $i \in [m]$，我们更新 $\pi_i^\ddagger(\delta) \leftarrow \pi_i^\ddagger \ \delta \ + \pi_i^*(\sigma)$。枚举完每个信号 $\sigma \in \Sigma^*$ 后，可以验证所构造的解 $\pi^\ddagger$ 是可行的，且其目标值等于发送者的期望效用。□

### EC.2.2. 定理1证明

在本小节中，我们给出定理1中省略的证明。该定理证明了，对于任意已知的理性水平，审查信号方案都是最优的。

定理1. 任取一个实例 $\mathcal{I}$ 和任意理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$，都存在一个最优审查信号机制 $\pi^*$，其合并质量为 $q = \sum_{i\in[l-1]} \lambda_i + \theta\lambda_\ell$，其中阈值状态 $l$ 和阈值状态比例 $\theta$ $s$满足以下可行性规划 $\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}$：

$$
\begin{aligned}
(1-\theta)(s^\dagger - v_\ell) &= 0 && (\textit{threshold-matching}) \\
\Big(W_\beta(s^\dagger) - W_\beta(s)\Big) - W'_\beta(s)(s^\dagger - s) &= 0 && (\textit{tangency}) \\
\max_{i\in[m]}\{v_i : v_i \le s^\dagger\} &= v_\ell && (\textit{threshold-selection}) \qquad (\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}) \\
s \le 0,\ s^\dagger &\ge 0 && (\textit{sign-restrictions}) \\
0 \le \theta &\le 1 && (\textit{fraction-bounds})
\end{aligned}
$$

其中，$s = \dfrac{\sum_{i\in[l-1]} \lambda_i v_i + \theta\lambda_\ell v_\ell}{\sum_{i\in[l-1]} \lambda_i + \theta\lambda_\ell}$ 是合并信号，$s^\dagger$ 是一个辅助变量。

证明。当接收者完全理性时，即 $\beta = \infty$，已知审查信号机制是最优的（例如，参见 Renault 等人，2017年；我们在第 EC.2.3 节将此结果重述为引理 EC.1）。在理性水平 $\beta = 0$ 下，无论信号如何，接收者选择每个行动的概率均为二分之一，因此所有信号机制，包括任何审查信号机制，都会使发送者获得 $1/2$ 的期望效用，因而都是最优的。

在接下来的分析中，我们将重点讨论有限的正理性水平 $\beta \in (0,\infty)$。我们通过构造对偶规划 $\mathcal{P}_{\text{OPT-Dual}}$ 的一个满足互补松弛条件的可行对偶解，证明信号机制 $\pi^*$（定义见定理 1）的最优性。设 $(s, s^\dagger, l, \theta)$ 为规划 $\mathrm{P}_{\text{CENS-OPT}}$ 的唯一可行解，其唯一性和可行性将在引理EC.4中论证。

**分配构造。** 为便于分析，我们将最优信号机制 $\pi^*$ 明确写如下：

$$
\begin{aligned}
i \in [\ell-1]: &\quad \pi_i^*(s) = 1; \\
i = \ell: &\quad \pi_i^*(\delta) = \theta \cdot \mathbb{1}[\delta = s] + (1-\theta)\cdot \mathbb{1}[\delta = v_\ell]; \\
i \in [\ell+1:m]: &\quad \pi_i^*(v_i) = 1.
\end{aligned}
$$

由于程序 $\mathrm{P}_{\texttt{CENS-OPT}}$中的比例界约束，信号机制 $\pi^*$ 是可行的。现在，考虑程序 $\mathcal{P}_{\texttt{OPT-Dual}}$的以下对偶分配 $\{\alpha(\delta), \eta(i)\}$。根据 $l < m$ 还是 $l = m$，我们将 $\alpha(\delta)$ 设定如下：

若 $l < m$：

$$\alpha(\delta) = \begin{cases} -W'_\beta(s), & \delta \in (-\infty, s^\dagger], \\ -\dfrac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{\ell+1})}{\delta - v_{\ell+1}}, & \delta \in (s^\dagger, v_{\ell+1}), \\ -\dfrac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{j+1})}{\delta - v_{j+1}}, & \delta \in [v_j, v_{j+1}),\ j \in [\ell+1, m-1], \\ 0, & \delta \in [v_m, \infty). \end{cases}$$

If $\ell = m$：

$$\alpha(\delta) = \begin{cases} -W'_\beta(s), & \delta \in (-\infty, v_m), \\ 0, & \delta \in [v_m, \infty). \end{cases}$$

在两种情况下，我们均按如下方式设置 $\eta(i)$：

$$\eta(i) = \begin{cases} \lambda_i \left( W_\beta(s) + (s - v_i)\alpha(s) \right), & i \in [\ell], \\ \lambda_i W_\beta(v_i), & i \in [\ell+1 : m]. \end{cases}$$

**互补松弛**。现在我们验证所构造的配置满足互补松弛。具体而言，对于每个状态 $i$ 和 $\delta \in (-\infty, \infty)$，只要满足 $\pi_i^*(\delta) > 0$，其对应的对偶约束便取等号，即

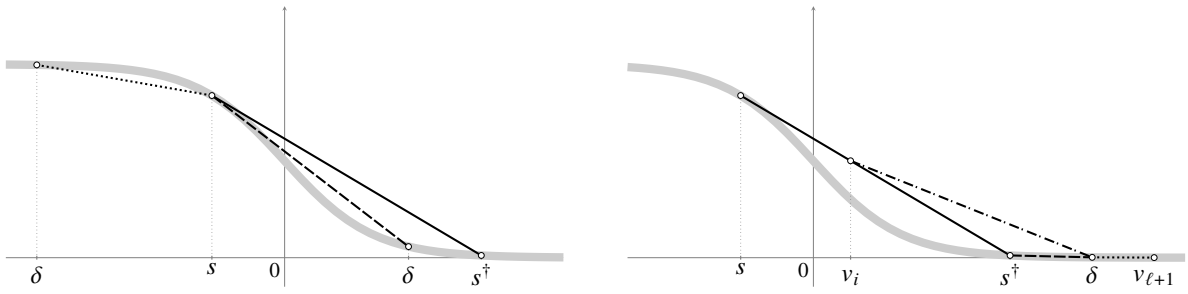
$$W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) = \frac{\eta(i)}{\lambda_i}. \tag{EC.1}$$

我们分别对每个状态 $i \in [m]$ 验证这一点。

- 任取状态 $i \in [\mathrm{l}-1]$，注意到对于 $\delta = s$，只有 $\pi_i^*(\delta) > 0$。由构造可知，方程 (EC.1) 显然成立。- 现在考虑阈值状态 l，同样的论证表明，当 $\pi_\ell^*(s) > 0$ 时，方程 (EC.1) 成立。接下来需要验证与 $\pi_\ell^*(v_\ell) = 1 - \theta > 0$相关的方程 (EC.1)。当 $\theta < 1$时，程序 $\mathrm{P}_{\texttt{CENS-OPT}}$中的阈值匹配约束保证 $s^\dagger = v_\ell$。因此，$W_\beta(v_\ell) + (v_\ell - v_\ell)\alpha(v_\ell)$ $(a)$= $W_\beta(s^\dagger)$ $(b)$= $W_\beta(s) + (s - s^\dagger)\alpha(s)$ $(c)$= $W_\beta(s) + (s - v_\ell)\alpha(s)$ $(d)$ = $\eta(\mathrm{l})\,\lambda_\ell$，其中，等式 (a)、(c) 成立是因为 $v_\ell = s^\dagger$；等式 (b) 得益于程序 $\mathrm{P}_{\texttt{CENS-OPT}}$ 中的约束相切以及 $\alpha(s)$的构造；等式 (d) 则根据 $\eta(\mathrm{l})$的定义成立。当 $\mathrm{l} = m$时，该论证同样适用。若 $\theta < 1$，则 $s^\dagger = v_m$，并且设置$\alpha(v_m) = 0$ 仍可保持等式成立，因为其系数为 0。- 任取状态 $i \in [\mathrm{l}+1 : m]$，注意到对于 $\delta = v_i$，只有 $\pi_i^*(\delta) > 0$。由构造可知，方程 (EC.1) 显然成立。

对偶可行性。为验证与状态 $i \in [\mathrm{l}]$ 对应的 $\pi_i^*(\delta)$ 的对偶约束是否成立，注意到 $\eta(i)\,\lambda_i$ $(a)$= $W_\beta(s) + (s - v_i)\alpha(s)$ $(b)$= $W_\beta(s) - (s - v_i)W'_\beta(s)$，其中等式 (a) 根据 $\eta(i)$ 的定义得出；等式 (b) 则由 $\alpha(s)$ 的构造成立。因此，我们可以将状态 $i \in [\mathrm{l}]$ 对应的 $\pi_i^*(\delta)$ 的这些对偶约束改写为

$$W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) \le W_\beta(s) - (s - v_i)W'_\beta(s). \tag{EC.2}$$




(a) (b)

图 EC.1 定理1证明中方程（EC.2）的对偶分配可行性的图示。灰色实线为量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$。(a)：对于 $\delta \in (-\infty, s^\dagger]$，对偶分配 $\alpha(\delta)$ 是黑色实线斜率的绝对值。我们通过证明以下事实来说明方程（EC.2）成立：若 $\delta \in (-\infty, s]$（或 $\delta \in [s, s^\dagger]$），则黑色点线（分别为虚线）的斜率大于（分别小于）黑色实线的斜率。(b)：对于 $\delta \in (s^\dagger, v_{\ell+1})$，对偶分配 $\alpha(\delta)$ 是黑色点线斜率的绝对值。我们通过证明黑色点划线的斜率小于黑色点线的斜率来说明方程（EC.2）成立。更具体地说，我们将方程（EC.2）改写为方程（EC.4）。方程（EC.4）的右侧是黑色点划线斜率的绝对值。我们用黑色虚线斜率的绝对值为该项提供下界；由于量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 的凸性，该值大于黑色点线斜率的绝对值，也就是方程（EC.4）的左侧。

为验证与 $\pi_i^*(\delta)$ 对应的状态 $i \in [l+1:m]$ 的对偶约束是否成立，对于每个状态 $i \in [l+1:m]$，赋值 $\eta(i) = \lambda_i W_\beta(v_i)$ 可化简为

$$W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) \le W_\beta(v_i)\,. \tag{EC.3}$$

我们首先考虑 $l = m$。阈值选择约束给出 $v_m \le s^\dagger$。由于 $s \le 0 < v_m$，该赋值给出 $\alpha(s) = -W'_\beta(s)$。任取一个状态 $i \in [m]$。若 $\delta < v_m$，则 $W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) = W_\beta(\delta) - (\delta - v_i)W'_\beta(s) \le W_\beta(s) + (v_i - s)W'_\beta(s) = \eta(i)\ \lambda_i$。对于 $\delta \le 0$，该不等式由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的凹性得出。对于 $0 < \delta < v_m \le s^\dagger$，利用量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的凹性比较 0 处的值，并利用约束相切比较 $s^\dagger$ 处的值，即可由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, s^\dagger]$ 上的凸性得出。若 $\delta \ge v_m$，则 $\alpha(\delta) = 0$，且 $W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) = W_\beta(\delta)\ (a) \le\ W_\beta(v_m)\ (b) \le\ W_\beta(s) + (v_m - s)W'_\beta(s)\ (c) \le\ W_\beta(s) + (v_i - s)W'_\beta(s) = \eta(i)\ \lambda_i$；其中，不等式 (a) 由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 的单调性得出，不等式 (b) 由相同的曲率论证和约束相切得出，因为 $0 < v_m \le s^\dagger$；不等式 (c) 则由以下事实得出：$v_i \le v_m$ 且 $W'_\beta(s) \le 0$。因此，当 $l = m$ 时，所有对偶约束均成立。

接下来考虑 $l < m$。我们分别在四种情形下，针对 $\delta$ 的不同取值验证方程（EC.2）和方程（EC.3）：$\delta \in (-\infty, s^\dagger]$；$\delta \in (s^\dagger, v_{\ell+1})$；$\delta \in [v_j, v_{j+1})$，其中某个 $j \in [l+1:\ m-1]$；以及 $\delta \in [v_m, \infty)$。论证主要运用了函数 $W_\beta(\cdot)$ 的曲率以及可行性规划 $\mathrm{P}_{\text{CENS-OPT}}$ 中的约束。对于前两种情形，我们展示状态 $i \in [l]$ 下的分析，并附上论证的图示（见图 EC.1）。第三种情形的分析与第二种类似，第四种情形则显而易见。

- 固定任意一个 $\delta \in (-\infty, s^\dagger]$。我们在图 EC.1a 中示意这一情形。注意，$W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) \overset{(a)}{=} W_\beta(\delta) - (\delta - v_i)W'_\beta(s) = W_\beta(s) - (s - v_i)W'_\beta(s) + \big(W_\beta(\delta) - W_\beta(s)\big) - (\delta - s)W'_\beta(s)$，其中等式 (a) 成立是由 $\alpha(\delta)$ 的构造所致。因此，要证明此情形下的方程（EC.2），只需论证 $(s-\delta)W'_\beta(s) \le W_\beta(s) - W_\beta(\delta)$ 成立。具体而言，若 $\delta \in (-\infty, 0]$，上述不等式成立，因为量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的；若 $\delta \in [0, s^\dagger]$，上述不等式则由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, s^\dagger]$ 上的凸性推出，同时利用量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的凹性进行 0 处的比较，并利用约束相切进行 $s^\dagger$ 处的比较。

- 固定任意一个 $\delta \in (s^\dagger, v_{\ell+1})$。我们在图 EC.1b 中展示了这一情形。根据构造，$\alpha(\delta) = -(W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{\ell+1}))/(\delta - v_{\ell+1})$。重新排列各项后，方程（EC.2）变为[18]

$$-\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{\ell+1})}{\delta - v_{\ell+1}} \le -\frac{W_\beta(\delta) - \Big(W_\beta(s) - W'_\beta(s)(s - v_i)\Big)}{\delta - v_i}. \tag{EC.4}$$

这里我们说明，只需证明将 $v_i$ 替换为$s^\dagger \ge v_i$时上述不等式仍成立即可。为此，注意到上述不等式的右侧作为 $v_i$ 的函数单调递减。具体而言，考虑函数 $f(x) \triangleq -(W_\beta(\delta) - (W_\beta(s) - W'_\beta(s)(s-x)))/(\delta - x)$，并计算其导数 $f'(x) = -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(s) - W'_\beta(s)(\delta - s)}{(\delta - x)^2} \le 0$，其中最后一个不等式成立，是因为当 $\delta \ge s^\dagger$ 时，$W_\beta(\delta) - W_\beta(s) \le W_\beta(\delta) - W_\beta(s)$；而这一点可由约束相切以及量化响应函数 $-\frac{W_\beta(\delta) - \big(W_\beta(s) - W'_\beta(s)(s - s^\dagger)\big)}{\delta - s^\dagger} \overset{b}{=} -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(s^\dagger) - c(\delta - s^\dagger)}{\delta - s^\dagger} = -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{\ell+1})}{\delta - v_{\ell+1}}$ $(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性推出。因此，我们有 $-\frac{W_\beta(\delta) - \big(W_\beta(s) - W'_\beta(s)(s - s^\dagger)\big)}{\delta - s^\dagger}(a) \ge -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(s^\dagger)}{\delta - s^\dagger}(b) = f(s^\dagger)(c) \ge -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{\ell+1})}{\delta - v_{\ell+1}}$；其中，不等式（a）由函数 $f(\cdot)$ 的单调性得出，等式（b）由规划 $\mathrm{P}_{\mathrm{CENS\text{-}OPT}}$ 中的约束相切得出，不等式（c）则由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性得出。

- 固定任意的 $j \in [l+1 : m-1]$ 和任意的 $\delta \in [v_j, v_{j+1})$。于是，我们有 $\alpha(\delta) = -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{j+1})}{\delta - v_{j+1}} \overset{(a)}{\le} -\frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(s^\dagger)}{\delta - s^\dagger} = f(s^\dagger) \overset{(b)}{\le} f(v_i)$，其中不等式 (a) 是由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性推出的，因为 $s^\dagger < \delta < v_{j+1}$；不等式 (b) 则是由前一种情形中确立的 $f(x)$ 的单调性以及 $v_i \le s^\dagger$ 推出的。因此，方程（EC.2）成立。

- 固定任意的 $\delta \in [v_m, \infty)$。根据构造，$\alpha(\delta) = 0$。方程（EC.2）变为 $W_\beta(\delta) \le W_\beta(s) - (s - v_i)W'_\beta(s)$。如果 $v_i \le s$，上述不等式成立，因为量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 单调递减。否则，即如果 $s \le v_i \le s^\dagger$，上述不等式成立，因为 $W_\beta(s) - (s - v_i)W'_\beta(s) \ge W_\beta(s) - (s - s^\dagger)W'_\beta(s) \overset{(a)}{=} W_\beta(s^\dagger) \overset{(b)}{\ge} W_\beta(\delta)$；其中等式 (a) 源于规划 $\mathrm{P}_{\mathrm{CENS\text{-}OPT}}$ 中的约束相切；不等式 (b) 则源于量化响应函数$W_\beta(\cdot)$ 的单调性。

最后，我们验证与状态 $i \in [l+1 : m]$ 下的 $\pi_i^*(\delta)$ 相关的对偶约束。

[18]这里我们利用以下事实：$\delta - v_i \ge 0$ 对于每个状态 $i \in [l],$，因为 $\delta \ge s^\dagger \ge v_\ell \ge v_i$ 其中第二个不等式成立，是因为程序阈值选择中的约束$\mathcal{P}_{\mathrm{CENS\text{-}OPT}}$。

- 固定任意 $\delta \in (-\infty, s^\dagger]$。根据构造，$\alpha(\delta) = -W'_\beta(s)$。于是，我们有 $W_\beta(\delta) + (\delta - v_i)\alpha(\delta) = W_\beta(\delta) + (v_i - \delta)W'_\beta(s) \overset{(a)}{\leq} W_\beta(s) + (v_i - s)W'_\beta(s) \overset{(b)}{\leq} W_\beta(v_i)$，其中不等式（a）由第一个合并状态情形推出，因为 $\delta \leq s^\dagger$；不等式（b）则由约束相切以及量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性推出，因为 $v_i > s^\dagger$。因此，方程（EC.3）成立。- 固定任意 $\delta \in (s^\dagger, v_{\ell+1})$。根据构造，$\alpha(\delta) = -(W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{\ell+1}))/(\delta - v_{\ell+1})$。通过重新排列各项，方程（EC.3）变为 $\frac{W_\beta(v_{\ell+1}) - W_\beta(\delta)}{v_{\ell+1} - \delta} \leq \frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_i)}{\delta - v_i}$，由于函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性以及 $\delta \leq v_{\ell+1} \leq v_i$，该式成立。- 固定任意 $j \in [1 + 1 : m - 1]$ 以及任意 $\delta \in [v_j, v_{j+1})$。根据构造，$\alpha(\delta) = -(W_\beta(\delta) - W_\beta(v_{j+1}))/(\delta - v_{j+1})$。对于状态 $i \in [1 + 1 : j]$，通过重新排列各项，方程（EC.3）变为 $\frac{W_\beta(v_{j+1}) - W_\beta(\delta)}{v_{j+1} - \delta} \geq \frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_i)}{\delta - v_i}$，由于量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性以及 $v_i \leq \delta \leq v_{j+1}$，该式成立。类似地，对于状态 $i \in [j + 1 : m]$，通过重新排列各项，方程（EC.3）变为 $\frac{W_\beta(v_{j+1}) - W_\beta(\delta)}{v_{j+1} - \delta} \leq \frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(v_i)}{\delta - v_i}$，由于量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性以及 $\delta \leq v_{j+1} \leq v_i$，该式成立。- 固定任意 $\delta \in [v_m, \infty)$。根据构造，$\alpha(\delta) = 0$。这里，方程（EC.3）由量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 的单调性推出。

这就完成了定理1的证明。 □

**EC.2.3. 定理 1中用于完全理性接收者最优审查的程序解读。**

在本小节中，我们首先陈述完全理性接收者下审查信号方案的既有最优性结果，然后说明它与我们的程序$\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}$的关系。

引理 EC.1 **(例如，参见 Renault 等人，2017年)**。任取一个$\mathcal{I}$实例。对于完全理性接收者（即理性水平为 $\beta = \infty$），发送者采用一种审查信号机制是最优的，该机制满足合并质量$q = \sum_{i \in [l-1]} \lambda_i + \theta\lambda_\ell$，其中阈值状态$l = \arg\max_{i \in [m]} \{v_i : \sum_{j \in [i-1]} \lambda_j v_j \leq 0\}$，阈值状态比例为 $\theta = \max\{p \in [0,1] : p\lambda_\ell v_\ell + \sum_{i \in [l-1]} \lambda_i v_i \leq 0\}$。

可行性规划 $\text{P}_{\text{CENS-OPT}}$ 还原了完全理性接收者情况下最优审查信号机制的结构。对于完全理性接收者（其理性水平为 $\beta = \infty$），量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 变为 $W_\beta(x) = \mathbb{1}[x \leq 0]$。在这种情况下，$s^\dagger \in [0, \infty)$ 与满足约束相切的 $s \in (-\infty, 0]$ 之间不再存在双射。相反，约束相切的可行解有以下两种形式之一：(i) $\{s^\dagger \in [0, \infty),\ s = 0\}$；或 (ii) $\{s^\dagger = \infty, s \in (-\infty, 0]\}$。请注意，(i) $\{s^\dagger \in [0, \infty),\ s = 0\}$ 对应于 $\sum_{i \in [m]} \lambda_i v_i > 0$ 的实例，因此，引理 EC.1 中的最优审查信号机制会选择阈值状态和阈值状态比例，使得 $s = 0$，即当实现合并信号 $s$ 时，完全理性接收者对行动 0 和行动1 无差异。另一方面，(ii) $\{s^\dagger = \infty, s \in (-\infty, 0]\}$ 对应于 $\sum_{i \in [m]} \lambda_i v_i \leq 0$ 的实例，因此，引理 EC.1 中的最优审查信号机制将阈值状态 l 设为 $= \arg\max_{i \in [m]} \{v_i : v_i \leq s^\dagger\} = m$，即将所有状态合并在一起，不透露任何信息。

### EC.2.4. 命题1证明

在本小节中，我们始终关注理性水平 $\beta \in (0,\infty)$。为简化分析，我们先引入以下定义。对于任意 $\delta \in [0,\infty)$，我们将其切线接触点定义为 $\kappa(\delta) \in (-\infty, 0]$，使得

$$W'_\beta(\kappa(\delta)) = \frac{W_\beta(\delta) - W_\beta(\kappa(\delta))}{\delta - \kappa(\delta)}. \tag{EC.5}$$

显然，我们有 $s = \kappa(s^\dagger)$，其中 $s$ 和 $s^\dagger$ 在定理 1中定义。根据量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$的曲率，即 $W_\beta(\cdot)$ 在$(-\infty, 0]$上为凹函数，在 $[0,\infty)$上为凸函数，我们得到关于切线接触点函数 $\kappa(\cdot)$的以下性质：

引理 EC.2. 切线接触点函数 $\kappa(\cdot)$ 是从 $[0,\infty)$ 到 $(-\infty, 0]$的双射；也就是说，对任意$\delta \in [0,\infty)$，都存在唯一的 $\kappa(\delta) \in (-\infty, 0]$，使得方程 (EC.5) 成立。此外，随着 $\delta \in [0,\infty)$ 增大，切线接触点函数 $\kappa(\cdot)$ 递减。

证明。回忆由方程 (EC.5) 可知，对于固定的 $\delta \geq 0$，其切线接触点 $\kappa(\delta)$ 是函数 $f(x,\delta)$ 的根。考察其一阶偏导数可知，$\frac{\partial f(x,\delta)}{\partial x} > 0, \forall x < 0$；$\frac{\partial f(x,\delta)}{\partial \delta}\Big|_{x=\kappa(\delta)} > 0$。注意，对于 $\delta > 0$，$\lim_{x\to-\infty} f(x,\delta) < 0, f(0,\delta) > 0$。因此存在唯一的负根 $\kappa(\delta)$。然后，对 $f(\kappa(\delta), \delta) = 0$ 关于 $\delta$ 求导，得到 $\frac{\partial \kappa(\delta)}{\partial \delta} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \delta}(\kappa(\delta), \delta)\right) \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}(\kappa(\delta), \delta) \partial \kappa(\delta) < 0$。因此，给定 $\delta_2 > \delta_1 > 0$，有 $\kappa(\delta_2) < \kappa(\delta_1)$。最后，我们考察端点极限。注意，$f(-\delta, \delta) < 0$。由于 $f(\cdot, \delta)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上严格递增，这意味着 $-\delta < \kappa(\delta) < 0$。因此，当 $\delta \to 0$ 时，$\kappa(\delta) \to 0$。若当 $\delta \to \infty$ 时，$\kappa(\delta)$ 仍有界，那么 $W'_\beta(\kappa(\delta))(\kappa(\delta) - \delta)$ 将趋于正无穷，这与 $f(\kappa(\delta), \delta) = 0$ 矛盾。因此，当 $\delta \to \infty$ 时，$\kappa(\delta) \to -\infty$。引理 EC.2 的证明至此完成。

□

根据方程 (EC.5) 中的上述定义，我们还定义每个状态 $p_i$ 的候选阈值比例$i \in [m]$，其中 $v_i \geq 0$ 为

$$p_i \triangleq -\frac{\sum_{j\in[i-1]} \lambda_j \cdot (v_j - \kappa(v_i))}{\lambda_i \cdot (v_i - \kappa(v_i))}. \tag{EC.6}$$

引理 EC.3。对于任意状态 $i \in [m]$，若 $v_i \geq 0$，且对应的候选阈值比例为 $p_i < 0$，则有 $p_j < 0, \forall j \in [i+1, m]$。

证明。考虑两个状态 $i_1$、$i_2 \in [m]$，其中 $i_1 < i_2$ 且 $v_{i_1} \geq 0$。于是，候选阈值比例为 $p_{i_1} = -\frac{\sum_{j\in[i_1-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_1}))}{\lambda_{i_1} \cdot (v_{i_1} - \kappa(v_{i_1}))}$ 和 $p_{i_2} = -\frac{\sum_{j\in[i_2-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_2}))}{\lambda_{i_2} \cdot (v_{i_2} - \kappa(v_{i_2}))}$。假设候选阈值比例 $p_{i_1} < 0$。由于 $v_{i_1} - \kappa(v_{i_1}) > 0$，这必然意味着 $\sum_{j\in[i_1-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_1})) > 0$。注意到 $\sum_{j\in[i_2-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_2})) = \sum_{j\in[i_1-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_2})) + \sum_{j\in[i_1,i_2-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_2})) > \sum_{j\in[i_1,i_2-1]} \lambda_j (v_j - \kappa(v_{i_2})) > 0$，其中最后一个不等式由以下事实得出：$v_j > 0$、$\forall i_1 \leq j < i_2$ 且 $\kappa(v_{i_2}) < 0$。因此，结合 $v_{i_2} - \kappa(v_{i_2}) > 0$ 这一事实，必有 $p_{i_2} < 0$。引理 EC.3 的证明到此完成。□

我们现在可以证明命题 1。

命题 1. 任取两个理性水平 $\beta \le \hat{\beta}$。设 $\pi^*$ 和 $\hat{\pi}^*$ 分别是理性水平为 $\beta$ 和 $\hat{\beta}$ 的有限理性接收者所对应的最优审查信号机制。那么，审查方案 $\pi^*$ 的合并质量 $q$ 不大于审查方案 $\hat{\pi}^*$ 的合并质量 $\hat{q}$。

证明。 我们首先通过证明以下观察结果来展开分析：固定 $\delta \in [0,\infty)$，令 $\kappa(\delta)$（分别为$\hat{\kappa}(\delta)$）为满足方程（EC.5）且对应理性水平 $\beta$（分别为$\hat{\beta}$）的切线接触点。于是有

$$\kappa(\delta) \le \hat{\kappa}(\delta) < 0, \quad \text{if } \beta \le \hat{\beta}\,.$$

为说明这一点，回顾一下，$W_\beta(x) = \frac{1}{1+\exp(\beta x)}$，且 $\frac{\partial W_\beta(x)}{\partial x} = -\beta \cdot \exp(\beta x)\,(1+\exp(\beta x))^2$，根据方程（EC.5），切线接触点 $\kappa(\delta)$ 是函数 $f(x,\beta) \triangleq -\beta \cdot \exp(\beta x)\,(1+\exp(\beta x))^2 \cdot (x-\delta) - \frac{1}{1+\exp(\beta x)} + \frac{1}{1+\exp(\beta\delta)}$ 的根。考察其一阶偏导数可知，对于所有 $x \le 0$，$\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial x} \ge 0$，且 $\frac{\partial f(x,\beta)}{\partial \beta}\Big|_{x=\kappa(\delta)} \le 0$。然后，对 $f(\kappa(\delta),\beta) = 0$ 关于 $\beta$ 求导，得到 $\frac{\partial \kappa(\delta)}{\partial \beta} = -\frac{\partial f(\kappa(\delta),\beta)}{\partial \beta} \Big/ \frac{\partial f(\kappa(\delta),\beta)}{\partial \kappa(\delta)} \ge 0$。因此，给定 $\hat{\beta} \ge \beta$，有 $\hat{\kappa}(\delta) \ge \kappa(\delta)$。

现在给定状态 $i$，其中 $v_i \ge 0$，考虑理性水平 $\beta, \hat{\beta}\,(\beta \le \hat{\beta})$，根据上述关于切线接触点比较的不等式，我们有 $\kappa(v_i) \le \hat{\kappa}(v_i)$，这意味着

$$\hat{p}_i - p_i = \frac{(\hat{\kappa}(v_i) - \kappa(v_i)) \sum_{j\in[i-1]} \lambda_j (v_i - v_j)}{\lambda_i (v_i - \kappa(v_i))(v_i - \hat{\kappa}(v_i))} \ge 0\,.$$

上述不等式确保，对于较大的理性水平 $\hat{l}$，阈值状态不小于较小理性水平 $\beta$下的阈值状态 $l$。如果 $\hat{l} = l$，则仍有 $\theta = \min\{p_\ell, 1\} \le \hat{\theta} = \min\{\hat{p}_{\hat{l}}, 1\}$。

设 $(l,\theta)$ 和 $(\hat{l},\hat{\theta})$ 分别为理性水平 $\beta \le \hat{\beta}$下选取的最优阈值状态和最优阈值状态比例。前述论证给出 $l \le \hat{l}$，并且当阈值重合时，$\theta \le \hat{\theta}$。如果 $l = \hat{l}$，则有 $\hat{q} - q = \lambda_\ell(\hat{\theta} - \theta) \ge 0$。如果 $l < \hat{l}$，则有 $q = \sum_{i\in[l-1]} \lambda_i + \lambda_\ell \theta \le \sum_{i\in[l]} \lambda_i \le \sum_{i\in[\hat{l}-1]} \lambda_i \le \sum_{i\in[\hat{l}-1]} \lambda_i + \lambda_{\hat{l}} \hat{\theta} = \hat{q}$。因此，最优合并质量关于理性水平单调不减。这完成了命题1的证明。□

### EC.2.5. 定理中程序的可行解唯一性

引理 EC.4. 固定任意实例 $\mathcal{I}$ 和任意理性水平 $\beta \in (0,\infty)$。程序 $\mathcal{P}_{CENS\text{-}OPT}$ 中存在唯一的可行解。

引理 EC.4 保证程序 $\mathcal{P}_{\text{CENS-OPT}}$ 中的约束始终存在可行解，从而证明对于每个 $\beta \in (0,\infty)$，都存在最优审查，并且所得元组 $(l,\ \theta, s, s^\dagger)$由该程序唯一确定。结合我们在第 EC.2 节引理 EC.3中针对切线接触点函数 $\kappa(\cdot)$ 和候选阈值比例 $p_i$ 所确立的两个性质，我们在第 EC.2.4节证明引理 EC.4如下：

引理的证明 *EC.4*。 令 $l$ =最大值$\{i \in [m]:\ \ v_i > 0,\ p_i \ge 0\}$且 $\theta$ =最小值$\{p_\ell, 1\}$。若此集合为空，则令$l$ =最大值$\{i \in [m]:\ \ v_i \le 0\}$且 $\theta = 1$。令 $s$ 为相应的合并信号。

我们首先验证可行性。当 $\theta < 1$时，方程 (EC.6) 得出 $s = \kappa(v_\ell)$。因此，令 $s^\dagger = v_\ell$即可满足所有约束。当 $\theta = 1$时，我们有 $s < 0$：若 $v_\ell > 0$，则由 $p_\ell \geq 1$ 和方程 (EC.6) 可知；否则，所有非正状态都会被合并。根据引理 EC.2，存在唯一的 $s^\dagger > 0$ 使得 $s = \kappa(s^\dagger)$。此外，由于当 $v_\ell > 0$时有 $s \leq \kappa(v_\ell)$，并且其他情况下不等式显然成立，因此我们有 $s^\dagger \geq v_\ell$。若 $l < m$，则$p_{\ell+1} < 0$，所以方程 (EC.6) 得出 $s > \kappa(v_{\ell+1})$ 和 $s^\dagger < v_{\ell+1}$。若 $l = m$，则 $s^\dagger \geq v_m$ 即可。因此，约束阈值选择成立，其他约束则由构造可得。

反之，根据阈值选择、阈值匹配约束以及方程 (EC.6)，每个满足 $v_\ell > 0$ 的可行解都必须有 $\theta = \min\{p_\ell, 1\}$。如果 $l < m$，那么合并信号$s = \kappa(s^\dagger) > \kappa(v_{\ell+1})$。合并整个阈值状态会使该信号弱增，因此方程 (EC.6) 意味着候选阈值比例 $p_{\ell+1} < 0$。根据引理 EC.3，阈值状态因此必定是上文指定的状态。如果 $v_\ell \leq 0$，约束要求 $l = \max\{i \in [m] : v_i \leq 0\}$ 且 $\theta = 1$。因此，阈值状态和阈值状态比例是唯一的。它们确定合并信号 $s$，而引理 EC.2 则唯一确定辅助变量 $s^\dagger$。□

## EC.3. 第 4 节中缺失的证明

在本节中，我们确定理性稳健最优池化质量的可行范围，解释为何策略性地揭示信息有利于接收者，并完成定理 2 的证明：补充最大最小比率准则所需的步骤，并证明最大最小收益和最小最大后悔准则。

### EC.3.1. 理性稳健最优池化质量的界限

命题 EC.2. 任取一个实例 $\mathcal{I}$。对于三种稳健性标准（最大最小比率、最大最小收益和最小最大后悔），均可选择一种理性稳健最优审查，使其合并质量位于 $[q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$，其中 $q^{\mathrm{NP}}$ 表示非正值状态的总质量，$q^{\mathrm{FR}}$ 表示面向完全理性接收者的最优审查的合并质量。

请注意，命题 EC.2 的证明确立了更强的逐点支配性质：对于任意理性水平 $\beta$，合并质量不在 $[q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$ 范围内的任何审查，其发送者的期望效用都弱低于合并质量为 $q^{\mathrm{NP}}$ 或 $q^{\mathrm{FR}}$ 的审查。将注意力限制在 $[q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$ 范围内，为计算命题 EC.6 中理性稳健最优信号方案以及确立第 5.2 节中的普适稳健性能保证奠定了基础。

命题 *EC.2*的证明。 我们论证，对于任意理性水平 $\beta$，在合并质量为 $q^{\mathrm{NP}}$ 的审查 $\pi^{(q^{\mathrm{NP}})}$ 下，发送者的期望效用不低于在合并质量为 $q \in [0, q^{\mathrm{NP}}$ 的审查 $\pi^{(q)}$ 下的期望效用；并且，在合并质量为 $q^{\mathrm{FR}}$ 的审查 $\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}$ 下，发送者的期望效用不低于在合并质量为 $q \in$ 的审查 $\pi^{(q)}(q^{\mathrm{FR}}, 1]$ 下的期望效用。

**情形 1：** $q \in [0, q^{\mathrm{NP}})$。 固定一个有限理性水平 $\beta \in [0,\infty)$。在审查 $\pi^{(q)}$ 下，发送者的期望效用为

$$\begin{aligned}\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q)}\right] &= qW_\beta(s(q)) + (1-\theta)\lambda_{\ell(q)}W_\beta(v_{\ell(q)}) + \sum_{i\in[\ell(q)+1:\ell(q^{\mathrm{NP}})]}\lambda_i W_\beta(v_i) + \sum_{i\in(\ell(q^{\mathrm{NP}}):m]}\lambda_i W_\beta(v_i)\\ &\le q^{\mathrm{NP}}W_\beta\left(\frac{qs(q) + (1-\theta(q))\lambda_{\ell(q)}v_{\ell(q)} + \sum_{i\in[\ell(q)+1:\ell(q^{\mathrm{NP}})]}\lambda_i v_i}{q^{\mathrm{NP}}}\right) + \sum_{i\in(\ell(q^{\mathrm{NP}}):m]}\lambda_i W_\beta(v_i)\\ &= q^{\mathrm{NP}}W_\beta(s(q^{\mathrm{NP}})) + \sum_{i\in(\ell(q^{\mathrm{NP}}):m]}\lambda_i W_\beta(v_i) = \textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q^{\mathrm{NP}})}\right],\end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的。对于完全理性情形 $\beta = \infty$，每个非正信号都会引发行动1，而每个正的揭示信号都会引发行动0。因此，将所有非正状态合并不会改变它们的总效用贡献，即，收益$_\infty\left[\pi(q)\right] = q^{\mathrm{NP}} =$收益$_\infty\left[\pi^{(q^{\mathrm{NP}})}\right]$。

**情形2。** $q \in (q^{\mathrm{FR}}, 1]$**.** 在这种情况下，我们有 $s(q^{\mathrm{FR}}) = 0$ **(**见引理 EC.1**)**。固定一个有限理性水平 $\beta \in [0,\infty)$。在审查 $\pi^{(q)}$ 下，发送者的期望效用为

$$\begin{aligned}\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q)}\right] &= qW_\beta(s(q)) + (1-\theta)\lambda_{\ell(q)}W_\beta(v_{\ell(q)}) + \sum_{i\in[\ell(q)+1:m]}\lambda_i W_\beta(v_i)\\ &\le q^{\mathrm{FR}}W_\beta(s(q^{\mathrm{FR}})) + (1-\theta(q^{\mathrm{FR}}))\lambda_{\ell(q^{\mathrm{FR}})}W_\beta(v_{\ell(q^{\mathrm{FR}})}) + \sum_{i\in(\ell(q^{\mathrm{FR}}),\ell(q)]}\lambda_i W_\beta(v_i) + \sum_{i\in[\ell(q)+1:m]}\lambda_i W_\beta(v_i)\\ &= \textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right],\end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$上是凸的。对于完全理性情形 $\beta = \infty$，合并信号 $s(q)$ 严格为正，其余所有揭示信号也均为正。因此，我们有收益$_\infty\left[\pi^{(q)}\right] = 0$。对于审查 $\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}$，零合并信号$s(q^{\mathrm{FR}})$在有利于发送方的平局判定下会引发行动**1**。因此，我们有收益$_\infty\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right] = q^{\mathrm{FR}} > 0$。

注意，除以 最优值$(\beta)$而保持收益不变，或减去 最优值$(\beta)$都能保留逐点比较。因此，结合上述各种情况，我们可以得出结论：理性稳健最优审查的合并质量可以从 $[q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$中选取。命题 EC.2 的证明至此完成。 □

### EC.3.2. 策略性地揭示更多信息有利于接收者

命题 EC.3. 固定任意一个实例 $\mathcal{I}$。对于任意两个审查方案 $\pi$ 和 $\hat{}\pi$，其合并质量分别为 $q$ 和 $\hat{}q$，若 $q^{\mathrm{NP}} \le q \le \hat{}q \le q^{\mathrm{FR}}$，其中 $q^{\mathrm{NP}}$ 为非正状态的总质量，$q^{\mathrm{FR}}$ 为完全理性接收者的最优审查方案的合并质量，则对于任意理性水平，接收者在审查方案 $\pi$ 下的期望效用不低于其在审查方案 $\hat{}\pi$ 下的期望效用。

命题 $q^{\mathrm{NP}} \le q \le \hat{}q \le q^{\mathrm{FR}}$ 中的条件EC.3 对于这一效用比较至关重要。具体而言，例子 EC.1 表明，当这一条件不成立时，披露额外信息（将合并质量降至 $q^{\mathrm{NP}}$以下）可能会严格降低量化响应接收者的预期效用。

命题 *EC.3*的证明。固定任意理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$。令 $s$ 为审查$\pi$ 的合并信号，令$\hat{s}$ 为审查 $\hat{}\pi$的合并信号。由于状态值按递增顺序排列，这意味着，如果某种审查具有更大的合并质量，其合并信号也更大，即 $s \le \hat{s} \le 0$。

对于审查 $\pi$，接收者的期望效用为

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\delta)\left((1-W_\beta(\delta))v_i(0) + W_\beta(\delta)v_i(1)\right)\mathrm{d}\delta \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i v_i(0) - \sum_{i\in[m]} \lambda_i v_i \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\delta) W_\beta(\delta)\mathrm{d}\delta \\ &= \sum_{i\in[m]} \lambda_i v_i(0) - qsW_\beta(s) - \sum_{i\in[m]} \lambda_i(1-\pi_i(s))v_i W_\beta(v_i)\,, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立是因为 $qs = \sum_{i\in[l-1]} \lambda_i v_i + \pi_\ell(s)\lambda_\ell v_\ell$。

对于审查 $\hat{}\pi$，接收者的期望效用$\hat{u}$ 也有类似的表达式，其中 $\hat{}q$，$\hat{s}$。接下来，我们通过相减来比较二者。

$$\begin{aligned} u - \hat{u} &= \hat{q}\hat{s}W_\beta(\hat{s}) - qsW_\beta(s) - \sum_{i\in[m]} \lambda_i(\hat{\pi}_i(\hat{s}) - \pi_i(s))v_i W_\beta(v_i) \\ &= qs(W_\beta(\hat{s}) - W_\beta(s)) + \sum_{i\in[m]} \lambda_i(\hat{\pi}_i(\hat{s}) - \pi_i(s))v_i(W_\beta(\hat{s}) - W_\beta(v_i))\,, \end{aligned}$$

其中，该等式由恒等式 $\hat{}q\hat{s} - qs = \sum_{i\in[m]} \lambda_i(\hat{}\pi_i(\hat{s}) - \pi_i(s))v_i$ 得出。注意，第一项非负： $qs$ 和 $W_\beta(\hat{s}) - W_\beta(s)$ 均非正，其中 $s \le \hat{s}$，且量化响应函数$W_\beta(\cdot)$ 非递增。含有正概率质量的第二项满足 $v_i > 0$；其第一个括号内的项非负，因为审查 $\hat{}\pi$ 比审查 $\pi$ 弱池化了更多状态；第二个括号内的项非负，因为 $\hat{s} \le 0 < v_i$，且量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 非递增。因此，我们可以得出结论：$u \ge \hat{u}$。命题 EC.3 的证明至此完成。□

### EC.3.3. 完成定理 2最大最小比率准则的证明

我们将论证从紧定义域扩展到完整的理性水平集合 $[0,\infty) \cup \{\infty\}$。对每个整数 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{B}_k \triangleq [0,k]$。根据前面对紧定义域 $\mathrm{B}_k$的论证，存在一个审查方案$\pi_k$，使得 $\gamma_k \triangleq \inf_{\beta\in\mathcal{B}_k}$收益$_{\beta[\pi_k]}$最优值$(\beta) = \sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\beta\in\mathcal{B}_k}$收益$_{\beta[\pi]}$最优值$(\beta)$。由于 $\mathrm{B}_k \subset \mathrm{B}_{k+1}$，序列 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$单调不增。我们将其极限定义为 $\gamma^* \triangleq \lim_{k\to\infty}\gamma_k$。由于审查空间 $\Pi_C$是紧致的，因此存在一个审查方案收敛子序列 $\{\pi_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$，其趋近于一个极限审查$\pi^* \in \Pi_C$。对于任何有限理性水平 $\beta \in [0,\infty)$，接收者的量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 是光滑的，因此发送者的期望效用会随所选信号机制连续变化。令 $j \to \infty$ 趋于极限，其中 $\pi_{k_j} \to \pi^*$，我们得到

$$\frac{\textsc{Payoff}_\beta[\pi^*]}{\textsc{Opt}(\beta)} = \lim_{j\to\infty} \frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi_{k_j}\right]}{\textsc{Opt}(\beta)} \ge \lim_{j\to\infty}\gamma_{k_j} = \gamma^*\,.$$

接下来，我们分析完全理性接收者的边界情形，即 $\beta = \infty$。由于 $\pi^*$ 是固定极限审查，它在信号 $\delta$ 上诱导出一个固定的边缘分布。对于有限理性水平 $\beta$，量化

响应函数 $W_\beta(x)$ 的逐点极限为：当 $\beta\to\infty$ 时，$\lim_{\beta\to\infty} W_\beta(x)=1$；当 $x<0$ 时，$\lim_{\beta\to\infty} W_\beta(x)=1/2$；或当 $x=0$ 时，$\lim_{\beta\to\infty} W_\beta(x)=0$。根据针对完全理性接收者的有利于发送者的平局处理约定，我们有 $\lim x>0(\beta\to\infty W_\beta)\ x(\le W_\infty)$。由于极限审查 $x$ 是固定的，且量化响应函数序列 $\{\pi^*(\cdot)\}^{W_\beta}$ 一致有界，勒贝格控制收敛定理（勒贝格，1909年）保证我们可以交换极限与积分。因此，在极限审查 $\beta\ge 0$ 下，发送者的期望效用收敛于在量化响应函数的逐点极限下计算的期望效用。回顾可知，该逐点极限不大于有利于发送者的完全理性响应 $\pi^*(\cdot)$。因此，我们有 $\lim W_\infty \text{Payoff}_{\beta\to\infty}\lim_\beta[\pi^*]=(\beta\to\infty\sum_{i\in[m]}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i^*)\delta(W_\beta)\mathrm{d}\delta\delta=(\sum_{i\in[m]}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i^*)\ \delta\lim((\beta\to\infty W_\beta)\delta\mathrm{d})(\delta\le\sum_{i\in[m]}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i^*)\delta(W_\infty)\ \mathrm{d}\delta$ $\text{Payoff}\delta=$。此外，我们有 $\lim_\infty[\pi^*]\text{Opt}(\beta\to\infty)\ \beta\text{Opt}(=)$。令 $\infty\text{Opt}(\ q^{\text{FR}}\triangleq)$。为说明这一点，首先注意到 $\text{Opt}(\ \infty)\ \beta\le q^{\text{FR}}+\colon\sum_{i\in[m]}(_{v_i>0}\lambda_i W_\beta)$ 成立。取上极限可得 $\lim\sup v_i\text{Opt}(\beta\to\infty)\ \beta$。反过来，考虑一个具有合并质量 $\le q^{\text{FR}}$ 的审查 $\pi^{(q)}\colon q\in[\sum_{i\in[m]},_{v_i\le 0}\lambda_i)$。于是，我们有 $\lim q^{\text{FR}}\text{Payoff}_{\beta\to\infty}$。由于 $\text{Opt}(\ _\beta\left[\pi^{(q)}\right]=q)\ \beta\text{Payoff}\ge$，令 $_\beta\left[\pi^{(q)}\right]$，得到相反方向的界 $\lim\inf q\to q^{\text{FR}}\text{Opt}(\ \beta\to\infty)\ \beta$。由于两个极限均存在，且完全理性边界处发送者的最优期望效用 $\text{Opt}(\ge q^{\text{FR}})$ 严格为正，对 $\text{Payoff}\infty\text{Opt}(\ \beta\to\infty)\ _{\beta[\pi^*]}$ 取 $\beta$ 的极限可得 $\text{Payoff}\ge^{\gamma^*}\text{Opt}(_{\infty[\pi^*]})\ \infty\lim\ge\text{Payoff}_{\beta\to\infty}\text{Opt}(_{\beta[\pi^*]})\ \beta\ge$。由于不等式 $\text{Payoff}\gamma^*\text{Opt}(_{\beta[\pi^*]})\ \beta$ 对每个有限理性水平 $\ge^{\gamma^*}\ \beta\in)$ 以及完全理性边界 $[0,\infty$ 均独立成立，我们可以在扩展定义域 $\beta=\infty)\ \beta\in[0,\infty\{\cup\}$ 上取下确界，从而得到 $\inf\infty\text{Payoff}_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}\text{Opt}(_{\beta[\pi^*]})\ \beta$。反过来，对于每个整数 $\ge\gamma^*$，我们有 $\sup k\in\mathbb{N}\inf_{\pi\in\Pi}\text{Payoff}_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}\text{Opt}(_{\beta[\pi]})\ \beta$ $\sup\le\inf_{\pi\in\Pi}\text{Payoff}_{\beta\in\mathcal{B}_k}\text{Opt}(_{\beta[\pi]})\ \beta$。令 $=\gamma_k$，得到 $\sup\ k\to\infty\inf_{\pi\in\Pi}\text{Payoff}_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}\text{Opt}(_{\beta[\pi]})\ \beta$。因此，审查 $\le\gamma^*$ 在扩展定义域 $\pi^*\in\Pi_C)\ \beta\in[0,\infty\{\cup\}$ 上达到稳健最优值。这就完成了证明。

### EC.3.4. Au最大最小比率准则定理2证明中的辅助引理

本小节介绍最大最小比率准则定理2 证明中用到的辅助引理：量子响应函数加权组合的 S 形性质（引理 EC.5），以及平均比率函数关于合并质量的单峰性和拟凹性（引理 EC.6 和 EC.7）。

引理 EC.5. 固定截断理性水平集 $\mathcal{B}\triangleq[0,\beta]$ 上的任意一个分布 $\eta$，其中 $\beta$ 是任意正常数。考虑函数

$$F_\eta(x)\triangleq\int_{\beta\in\mathcal{B}}\alpha_\beta W_\beta(x)\cdot\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta,$$

其中 $\beta\mapsto\alpha_\beta$ 为正、有界且可测。则函数 $F_\eta(x)$ 具有 *S* 形性质，其中

*(i)* $F_\eta(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上单调不增。*(ii)* $F_\eta(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上凹，在 $[0,\infty)$ 上凸。

*(iii)* $F_\eta(x)$ 关于点 $(0,F_\eta(0))$ 中心对称，即 $F'_\eta(x)=F'_\eta(-x)$。

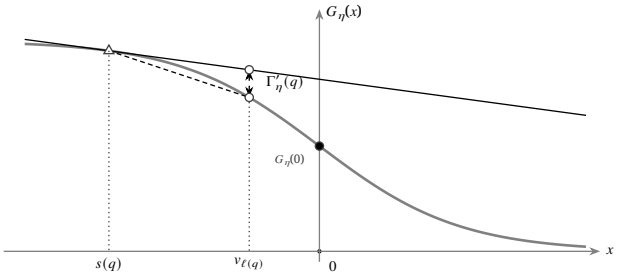
证明。对 $F_\eta(x)$ 关于 $x$ 求一阶和二阶导数，得到 $\frac{\partial F_\eta(x)}{\partial x} = \int_{\beta\in\mathrm{B}} \alpha_\beta \cdot \frac{\partial W_\beta(x)}{\partial x}\,\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta$ 和 $\frac{\partial^2 F_\eta(x)}{\partial x^2} = \int_{\beta\in\mathrm{B}} \alpha_\beta \cdot \frac{\partial^2 W_\beta(x)}{\partial x^2}\,\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta$。回顾一下，对于每个理性水平 $\beta\in[0,\infty)$，量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 都是单调不增的，并且在 $(-\infty,0]$ 上凹，在 $[0,\infty)$ 上凸。由于积分是线性算子，且权重 $\alpha_\beta$ 严格为正，函数 $F_\eta(x)$ 保持这些导数界。因此，对于所有 $x\in(-\infty,\infty)$，它满足 $\frac{\partial F_\eta(x)}{\partial x} \le 0$；对于所有 $x\in(-\infty,0]$，它满足 $\frac{\partial^2 F_\eta(x)}{\partial x^2} \le 0$；对于所有 $x\in[0,\infty)$，它满足 $\frac{\partial^2 F_\eta(x)}{\partial x^2} \ge 0$，由此可知该函数呈 S 形。此外，量化响应函数 $W_\beta(\cdot)$ 关于点 $(0,\frac{1}{2})$ 中心对称。换言之，我们有对称恒等式 $W_\beta(x) + W_\beta(-x) = 2W_\beta(0) = 1$。因此，函数 $F_\eta(x)$ 也满足以下对称恒等式：$F_\eta(x) + F_\eta(-x) = 2F_\eta(0)$。由此，$F_\eta(x)$ 关于点 $(0, F_\eta(0))$ 中心对称，且 $F'_\eta(x) = F'_\eta(-x)$。引理 EC.5 证毕。□

引理 EC.6。固定截断理性水平集 $\mathrm{B}\triangleq[0,\beta]$ 上的任意分布 $\eta$，其中$\beta$是任意正常数。定义 $\Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)},\eta\right)\triangleq\sum_{i\in[m]}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty}\pi(q)_i(\delta)G_\eta(\delta)\,\mathrm{d}\delta$，其中 $\pi(q)$ 是由合并质量 $q\in[0,1]$参数化的审查，而函数 $G_\eta(x)\triangleq\int_{\beta\in\mathrm{B}} W_\beta(x)$ 最优值$(\beta)\cdot\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta$。那么，函数 $\Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)},\eta\right)$关于合并质量 $q\in[0,1]$是单峰的（因而是拟凹的）。证明。为便于表述，当截断理性水平集 B 上的分布为 $\eta\in\Delta(\mathrm{B})$ 时，我们将审查$\pi^{(q)}$ 下的平均比率记为 $\Gamma_\eta(q)\triangleq\Gamma_{\mathcal{B}}\left(\pi^{(q)},\eta\right)$。对于每个合并质量$q\in[0,1]$，根据定义1中合并信号 $s(q)$ 和阈值状态 $\mathrm{l}(q)$ 的定义，函数$\Gamma_\eta(q)$ 可写为 $\Gamma_\eta(q) = qG_\eta(s(q)) + \left(\sum_{i\in[\mathrm{l}(q)}\right.$ $\left.{}_{]}\lambda_i - q\right)G_\eta\left(v_{\ell(q)}\right) + \sum_{i\in[\mathrm{l}(q)+1:\,m]}\lambda_i G_\eta(v_i)$。根据上述表达式以及 $G_\eta(\cdot)$连续可微这一事实，可以验证函数$\Gamma_\eta(q)$是连续的，并且除有限个断点外处处连续可微，这些断点由 $\left\{\sum_{i\in[j]}\lambda_i\right\}_{j\in[0:\,m]}$给出。因此，我们根据这些断点将累积质量区间 $(0,1)$ 划分为 $m$ 个开子区间，即 $(0,\lambda_1),\ldots,(\sum_{i\in[m-1]}\lambda_i,1)$。

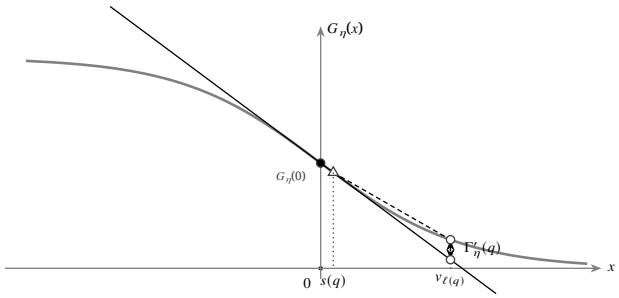
考虑任意一个开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[\mathrm{l}^\dagger-1]}\lambda_i,\sum_{i\in[\mathrm{l}^\dagger]}\lambda_i)$，其中 $\mathrm{l}^\dagger\in[m]$。由于在该开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[\mathrm{l}^\dagger-1]}\lambda_i,\sum_{i\in[\mathrm{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 内，$\mathrm{l}(q) = \mathrm{l}^\dagger$ 始终成立，因此对应的阈值状态值 $v_{\ell}(q)$ 保持不变。令 $G'_\eta(\cdot)$ 和 $s'(\cdot)$ 分别表示函数$G_\eta(\cdot)$ 和 $s(\cdot)$ 的导数。在该子区间上对函数 $\Gamma_\eta(q)$ 求导，得到 $\frac{\partial\Gamma_\eta(q)}{\partial q} = G_\eta(s(q)) + qG'_\eta(s(q))\cdot s'(q) - G_\eta\left(v_{\ell}(q)\right) = G_\eta(s(q)) + G'_\eta(s(q))\cdot\left(v_{\ell}(q) - s(q)\right) - G_\eta\left(v_{\ell}(q)\right)$，其中最后一个等式成立是因为我们有 $\frac{\partial s(q)}{\partial q} = \frac{\partial v_{\ell(q)}}{\partial q}(q)$。从上述推导可以看出，导数 $\frac{\partial\Gamma_\eta(q)}{\partial q}$的符号与 $G_\eta(s(q)) + G'_\eta(s(q))\cdot\left(v_{\ell(q)} - s(q)\right) - G_\eta\left(v_{\ell}(q)\right)$的符号相同。因此，为了便于分析，我们定义如下辅助函数 $D(x,y)$：

$$D(x,y)\triangleq G_\eta(x) + G'_\eta(x)\cdot(y-x) - G_\eta(y)\,.$$

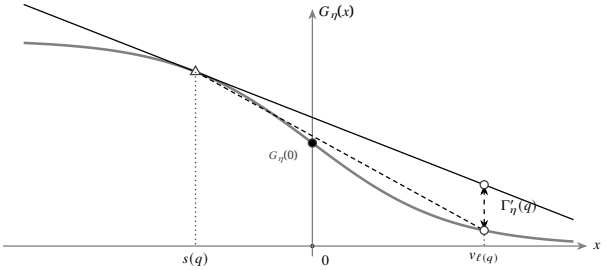
从几何上看，$D(x,y)$ 表示在 $x$处与 $G_\eta(\cdot)$ 相切的切线在 $y$处的取值与实际值 $G_\eta(y)$之差。为确立函数 $\Gamma_\eta(q)$的单峰性，我们分析其符号结构




(a) $s(q) \le 0$ 和 $v_{\ell(q)} \le 0$。




(b) $s(q) > 0$ 和 $v_{\ell(q)} > 0$。




(c) $s(q) \le 0$ 和 $v_{\ell(q)} > 0$。

**图 EC.2** S形曲线在不同变量区域下导数 $\Gamma'_\eta(q)$ 的几何示意图。带双向箭头的竖直虚线表示合并质量为 $q$ 时的 $\Gamma'_\eta(q)$。此处，$s(q)$ 为合并信号，$v_{\ell(q)}$ 为阈值状态值。灰色实线曲线表示 S形函数 $G_\eta(x)$。空心三角形表示点 $(s(q),\ G_\eta(s(q)))$，黑色实线表示该点处曲线的切线。灰色实线曲线上的空心圆表示点 $(v_{\ell(q)},\ G_\eta(v_{\ell(q)}))$，黑色实线切线上的空心圆表示点 $(v_{\ell(q)},\ G_\eta(s(q)) + G'_\eta(s(q))\,(v_{\ell(q)} - s(q)))$。虚线割线连接空心三角形处的点与曲线上空心圆处的点。

，即 $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q$，方法是考察阈值状态值$v_{\ell(q)}$的以下两种情况。我们还在图EC.2中展示了后续分析。

情形1：阈值状态值 $v_{\ell(q)} \le 0$。在这种情况下，根据定义1中合并信号的定义，我们有 $s(q) \le v_\ell(q) \le 0$。接着，根据引理 EC.7(i)，可得 $D(s(q), v_\ell(q)) \ge 0$，这意味着 $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q \ge 0$（示意见图 EC.2a）。因此，我们可以得出结论：对于任何相关阈值状态值为非正的开累积质量子区间，函数 $\Gamma_\eta(q)$ 的导数均为非负，也就是说，函数 $\Gamma_\eta(q)$ 单调不减。

**情况 2：阈值状态值** $v_{\ell(q)} > 0$。 我们针对合并信号 $s(q)$分析以下两种可能的情况。首先，假设 $s(q) > 0$。根据引理 EC.7(ii)，我们得到 $D(s(q), v_{\ell(q)}) \le 0$，这意味着 $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q \le 0$ （图 EC.2b 对此作了示意）。换言之，对于阈值状态值和合并信号均为正的任意开累积质量子区间，函数 $\Gamma_\eta(q)$ 的导数非正，

这意味着函数 $\Gamma_\eta(q)$ 单调不增。其次，假设 $s(q) \le 0$。在这种情况下，尽管 $\partial\Gamma_{\eta(q)}/\partial q$ 没有固定的全局符号，我们认为以下三种情况之一会出现：

(1) $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q \ge 0$ 对于所有合并质量 $q \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 均成立（图 EC.2c 展示了这一子情形的几何实现）。(2) $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q \le 0$ 对于所有合并质量 $q \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 均成立。(3) 对于所有合并质量 $q \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$，$\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q$ 的符号恰好从非负变为非正一次。

为证明这一点，我们首先指出，$D(s(q), v_{\ell(q)}) \ge 0$ 的充要条件为

$$D(s(q), v_{\ell(q)}) \ge 0 \iff s(q) \le \kappa(v_{\ell(q)}),$$

其中 $\kappa(v_\ell(q)) \triangleq \sup\{x \in (-\infty, 0]: D(x, v_\ell(q)) \ge 0\}$。由于集合 $\{x \in (-\infty, 0]: D(x, v_\ell(q)) \ge 0\}$ 包含于 $(-\infty, 0]$，其上界为 0。因此，只要该集合非空，上确界 $\kappa(v_\ell(q))$ 就是定义良好的。注意，我们有

$$D(-v_{\ell(q)}, v_{\ell(q)}) = G_\eta(-v_{\ell(q)}) + 2v_{\ell(q)}G'_\eta(-v_{\ell(q)}) - G_\eta(v_{\ell(q)}) \overset{(a)}{=} 2\left(G_\eta(0) - G_\eta(v_{\ell(q)}) + v_{\ell(q)}G'_\eta(v_{\ell(q)})\right) \overset{(b)}{\ge} 0$$

$$D(0, v_{\ell(q)}) = G_\eta(0) + v_{\ell(q)}G'_\eta(0) - G_\eta(v_{\ell(q)}) \overset{(c)}{\le} 0,$$

其中，等式 (a) 成立是因为我们有对称等式 $G_\eta(v_{\ell(q)}) + G_\eta(-v_\ell(q)) = 2G_\eta(0)$（见引理 EC.5(iii)）；不等式 (b) 和 (c) 则由函数 $G_\eta(\cdot)$ 在 $[0, \infty)$ 上的凸性推出（根据引理 EC.5(ii)），具体而言，$G'_\eta(v_\ell(q)) \ge \frac{G_\eta(v_{\ell(q)}) - G_\eta(0)}{v_{\ell(q)} - 0}$。由于函数 $D(x, v_\ell(q))$ 关于 $x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调不增（因 $v_{\ell(q)} \ge 0$，见引理 EC.7(iii)），结合上述两个不等式可知，集合 $\{x \le 0: D(x, v_\ell(q)) \ge 0\}$ 确实非空。接着，由于合并信号 $s(q)$ 关于 $q$ 单调不减，且 $\kappa(v_\ell(q))$ 在开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 上为常数，数量 $s(q) - \kappa(v_\ell(q))$ 在开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 上单调不减。因此，以下三种情况之一会出现：

(1) $s(q) \le \kappa(v_\ell(q))$ 对所有合并质量 $q \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 均成立。(2) $s(q) \ge \kappa(v_\ell(q))$ 对所有合并质量 $q \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$ 均成立。(3) 对所有合并质量 $q \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$，$s(q)$ 从下方恰好与 $\kappa(v_\ell(q))$ 相交一次。

根据充要条件中建立的等价关系，这三种情形分别对应所提出的三个子情况。为完成论证，仍需证明：一旦 $\partial\Gamma_{\eta(q)}/\partial q$ 的符号由正转负，这一负值性质便会在所有后续开累积质量子区间上保持不变。假设在一个非累积质量断点处，导数为负；也就是说，存在一个合并质量 $q^\dagger \in (\sum_{i\in[\underline{l}^\dagger-1]}\lambda_i, \sum_{i\in[\underline{l}^\dagger]}\lambda_i)$，使得 $D(s(q^\dagger), v_{\ell(q^\dagger)}) < 0$，其中 $s(q^\dagger) \le 0$。现在我们断言

$$v_{\ell(q^\dagger)} \ge -s(q^\dagger).$$

为此，注意到由于 $s(q^\dagger) \le 0$，对于所有 $y \in [s(q^\dagger),\ 0]$，我们有 $D(s(q^\dagger),\ y) \ge 0$（见引理 EC.7(i)）。此外，$D(s(q^\dagger),\ y)$ 关于 $y \in [0, -s(q^\dagger)]$ 单调不减（见引理 EC.7(iv)）。结合这两个性质可得，对于所有 $y \in [s(q^\dagger),\ -s(q^\dagger)]$，有 $D(s(q^\dagger),\ y) \ge 0$。因此，若 $v_{\ell(q^\dagger)} < -s(q^\dagger)$，则 $D(s(q^\dagger), v_\ell(q^\dagger)) \ge 0$，这与 $D(s(q^\dagger), v_\ell(q^\dagger)) < 0$ 的假设矛盾。于是，必有 $v_\ell(q^\dagger) \ge -s(q^\dagger)$。现在，考虑任意开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[l^\ddagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\ddagger]}\lambda_i)$，其中 $l^\ddagger \in [l^\dagger+1:\ m]$。任取一个合并质量 $q^\ddagger \in (\sum_{i\in[l^\ddagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\ddagger]}\lambda_i)$。若 $s(q^\ddagger) \le 0$，则可得$D(s(q^\ddagger), v_\ell(q^\ddagger))$ $(a)\le$ $D(s(q^\dagger), v_\ell(q^\ddagger))$ $(b)\le$ $D(s(q^\dagger), v_\ell(q^\dagger)) < 0$；不等式 (a) 成立，是因为 $0 \ge s(q^\ddagger) \ge s(q^\dagger)$，且函数 $D(x, y)$ 在满足 $y \ge 0$ 时关于 $(-\infty, 0]$ 上的 $x$ 单调不增（见引理 EC.7(iii)）。不等式 (b) 成立，是因为 $s(q^\dagger) \le 0$，且 $v_{\ell(q^\ddagger)} \ge v_\ell(q^\dagger) \ge -s(q^\dagger)$；第一个不等式成立是因为 $q^\ddagger \ge q^\dagger$，第二个不等式则由上述不等式推出。此外，函数$D(x, y)$ 在满足 $x \le 0$ 时关于 $[-x, \infty)$ 上的 $y$ 单调不增（见引理 EC.7(iv)）。若$s(q^\ddagger) > 0$，则根据引理 EC.7(ii)，可直接得出 $D(s(q^\ddagger), v_\ell(q^\ddagger)) \le 0$。

接下来，我们证明函数 $\Gamma_\eta(q)$ 在 $[0,1]$,上绝对连续，这使我们能够运用微积分基本定理来确立 $\Gamma_\eta(q)$ 的全局单调性。我们首先证明函数 $\Gamma_\eta(q)$ 在 $[0,1]$上是利普希茨连续的。回顾一下，对于任意开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[l^\dagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\dagger]}\lambda_i)$，其中 $l^\dagger \in [m]$，函数 $\Gamma_\eta(q)$ 的导数为 $D(s(q), v_\ell(q))$。注意，$s(q) \in [v_1, v_m]$且 $v_\ell(q) \in \{v_i\}_{i\in[m]}$。由于这些点对的定义域是一个紧区间与一个有限集的笛卡尔积，因此它是紧的。由于函数 $D(x, y)$ 在这个紧定义域上连续，因此有界。因此，存在正常数 $M > 0$，使得 $|D(s(q), v_\ell(q))| \le M \Rightarrow \left|\frac{\partial \Gamma_\eta(q)}{\partial q}\right| \le M$。令 $\Gamma'_\eta(\cdot)$ 表示函数 $\Gamma_\eta(\cdot)$ 的导数。对于任意两点 $x, y \in (\sum_{i\in[l^\dagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\dagger]}\lambda_i)$，其中 $x < y$，由微积分基本定理和上述不等式可得

$$|\Gamma_\eta(x) - \Gamma_\eta(y)| = \left|\int_x^y \Gamma'_\eta(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_x^y |\Gamma'_\eta(z)|\,\mathrm{d}z \le M\,|x-y|\,.$$

现在，固定闭累积质量子区间$[\sum_{i\in[l^\dagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\dagger]}\lambda_i]$中的两点 $x^\dagger$、$y^\dagger$。我们可以构造包含于开累积质量子区间 $(\sum_{i\in[l^\dagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\dagger]}\lambda_i)$ 中的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $x^\dagger = \lim_{k\to\infty} x_k$ 且 $y^\dagger = \lim_{k\to\infty} y_k$。由上述不等式可得 $|\Gamma_\eta(x_k) - \Gamma_\eta(y_k)| \le M\,|x_k - y_k|$。根据函数 $\Gamma_\eta(q)$的连续性，令 $k \to \infty$取极限，得到

$$\left|\Gamma_\eta\left(x^\dagger\right) - \Gamma_\eta\left(y^\dagger\right)\right| \le M\left|x^\dagger - y^\dagger\right|,$$

这意味着函数 $\Gamma_\eta(q)$ 在闭累积质量子区间$[\sum_{i\in[l^\dagger-1]}\lambda_i,\ \sum_{i\in[l^\dagger]}\lambda_i]$ 上是利普希茨连续的。然后，取两点 $a, b \in [0,1]$，其中 $a < b$。假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，存在 $k$个断点 $\{t_i\}_{i\in[k]} \subseteq \{\sum_{i\in[j]}\lambda_i\}_{j\in[0:\ m]}$ 位于 $[a, b]$中，并按如下顺序排列：$t_1 < \cdots < t_k$。将三角不等式与上述不等式应用于每个闭累积质量子区间，可得$|\Gamma_\eta(b) - \Gamma_\eta(a)| \le |\Gamma_\eta(b) - \Gamma_\eta(t_k)| + \cdots + |\Gamma_\eta(t_1) - \Gamma_\eta(a)| \le M\,|b - t_k| + \cdots$
$+ M\,|t_1 - a| = M(b - t_k) + \cdots +$

$M\left(t_1-a\right)=M\left(b-a\right)=M\left|b-a\right|$。因此，函数 $\Gamma_\eta\left(q\right)$ 在 $[0,1]$, 上是全局利普希茨连续的，这意味着它在 $[0,1]$ 上绝对连续。

由于 $\Gamma_\eta(q)$ 在每个开累积质量子区间上可微，且断点集合是有限集，勒贝格测度为零，因此 $\Gamma'_\eta(q)$ 几乎处处存在。[19] 根据前面对 $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q$ 符号结构的分析，我们得出结论，存在 $q^*\in[0,1]$，使得 $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q\geq 0$ 对 $q\in[0,q^*]$ 几乎处处成立，而 $\partial\Gamma_\eta(q)/\partial q\leq 0$ 对 $q\in[q^*,1]$ 几乎处处成立。考虑两个点 $a$、$b\in[0,1]$，其中 $a<b$。由于函数 $\Gamma_\eta(q)$ 绝对连续，根据微积分基本定理，我们得到 $\Gamma_\eta(b)-\Gamma_\eta(a)=\int_a^b\Gamma'_\eta(q)\,\mathrm{d}q$。若 $0\leq a<b\leq q^*$，则 $\Gamma'_\eta(q)\geq 0$ 几乎处处成立，因此积分非负。这意味着函数 $\Gamma_\eta(q)$ 在 $[0,q^*]$ 上单调不减。反之，若 $q^*\leq a<b\leq 1$，则 $\Gamma'_\eta(q)\leq 0$ 几乎处处成立，因此积分非正。这意味着函数 $\Gamma_\eta(q)$ 在 $[q^*,1]$ 上单调不增。因此，函数 $\Gamma_\eta(q)$ 是单峰的，因而是拟凹的。引理 EC.6 的证明至此完成。□

引理 *EC.7*。固定一个定义在截断理性水平集合 $B\triangleq[0,\beta]$上的任意分布 $\eta$，其中$\beta$是任意正常数。定义函数 $D(x,y)\triangleq G_\eta(x)+G'_\eta(x)\cdot(y-x)-G_\eta(y)$，其中函数 $G_\eta(x)\triangleq\int_{\beta\in B}w_\beta(x)$ 最优值$(\beta)\cdot\eta(\beta)\,d\beta$。那么，我们有

*(i)* 若 $x\leq y\leq 0$，则，$D(x,y)\geq 0$。*(ii)* 若 $0\leq x\leq y$，则，$D(x,y)\leq 0$。*(iii)* 若 $y\geq 0$，则，$D(x,y)$ 在 $x\in(-\infty,0]$ 上单调不增。*(iv)* 若 $x\leq 0$，则，$D(x,y)$ 在 $y\in[0,-x]$ 上单调不减，在 $y\in[-x,\infty)$ 上单调不增。

证明。我们分别证明这些性质。对于 (i)，函数 $G_\eta(\cdot)$ 在 $(-\infty,0]$( 上是凹的（见引理 EC.5(ii)）。对于任意 $x\leq y\leq 0$，可以验证 $G'_\eta(x)\geq\left(G_\eta(y)-G_\eta(x)\right)/(y-x)$，这意味着 $D(x,y)\geq 0$。对于 (ii)，函数 $G_\eta(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 上是凸的（见引理 EC.5(ii)）。对于任意 $0\leq x\leq y$，可以验证 $G'_\eta(x)\leq\left(G_\eta(y)-G_\eta(x)\right)/(y-x)$，这意味着 $D(x,y)\leq 0$。对于 (iii)，令 $G''_\eta(\cdot)$ 表示 $G_\eta(\cdot)$ 的二阶导数。于是，对于任意 $x\in(-\infty,0]$，对 $D(x,y)$ 关于 $x$ 求导，得到 $\partial D(x,y)/\partial x=G''_\eta(x)(y-x)\leq 0$，其中该不等式成立是因为 $y-x>0$ 且 $G''_\eta(x)\leq 0$，而这可由 $G_\eta(\cdot)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的凹性推出。因此，函数 $D(x,y)$ 关于 $x$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调不增。对于 (iv)，令 $G'_\eta(\cdot)$ 表示 $G_\eta(\cdot)$ 的导数。于是，对 $D(x,y)$ 关于 $y$ 求导，得到 $\partial D(x,y)/\partial y=G'_\eta(x)-G'_\eta(y)$。注意，我们有对称恒等式 $G'_\eta(x)=G'_\eta(-x)$（见引理 EC.5(iii)）。此外，由于 $x\leq 0$，我们知道 $-x\geq 0$。对于任意 $y\in[0,-x]$，由于 $y$和 $-x$均位于定义域 $[0,\infty)$ 上，而函数 $G_\eta(\cdot)$ 在该定义域上是凸的，因此其导数 $G'_\eta(\cdot)$ 在该定义域上单调不减（见引理 EC.5(ii)）。因此，$G'_\eta(y)\leq G'_\eta(-x)=G'_\eta(x)$，从而得到 $\partial D(x,y)/\partial y\geq 0$。反过来，对于任意 $y\in[-x,\infty)$，单调不减性质给出 $G'_\eta(y)\geq G'_\eta(-x)=G'_\eta(x)$，从而得到$\partial D(x,y)/\partial y\leq 0$。引理 EC.7 证毕。□

[19]由于断点构成的有限集的勒贝格测度为零，峰值的确切位置——无论是在某个开子区间内，还是恰好落在断点上——都不会影响导数几乎处处成立的性质。

### EC.3.5. 定理2关于最大最小收益准则和最小最大后悔准则的证明

在本小节中，我们给出定理 2 关于最大最小收益和最小最大后悔准则的省略证明。

定理 2. 对于每个实例 $\mathcal{I}$ 以及三种稳健性标准（最大最小比率、最大最小收益和最小最大后悔）中的每一种，都存在一种审查，使其达到理性稳健最优。

最大最小收益准则下定理 2 的证明。我们通过将平均收益与第 4 节研究的平均比率联系起来，并应用第 EC.3.3节中的极限论证，来证明这一结果。

我们首先考虑截断理性水平集 $\mathcal{B}=[0,\beta]$，其中 $\beta>0$。对于分布 $\eta\in\Delta(\mathcal{B})$，我们将平均收益定义为 $P_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]\triangleq\int_{\mathcal{B}}$收益$_\beta[\pi]\,\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta$。为了将这一目标与平均比率联系起来，我们引入正的归一化常数 $C_\eta\triangleq\int_{\mathcal{B}}$最优值$(\beta)\,\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta$，以及重新加权后的概率分布 $\tilde{\eta}(\beta)\triangleq$最优值$(\beta)\,\eta(\beta)C_\eta$。根据这些定义，对于每个信号机制 $\pi\in\Pi$,

$$P_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]=C_\eta\Gamma_{\mathcal{B}}(\pi,\tilde{\eta})\ .$$

由于因子 $C_\eta$ 为正且与信号机制无关，因此第 4 节最大最小比率证明中确立的审查最佳响应性质，同样适用于平均收益。此外，引理 EC.6及其证明中确立的连续性表明，平均收益 $P_{\mathcal{B}}\left[\pi^{(q)},\eta\right]$关于合并质量 $q\in[0,1]$连续且拟凹。

对理性水平进行随机化不会改变最坏情况收益，因此 $\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}P_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]=\inf_{\beta\in\mathcal{B}}$收益$_\beta[\pi]$。由于平均收益关于分布 $\eta$ 也连续且为仿射函数，我们得到

$$\begin{aligned}\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}P_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]&\le\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}\sup_{\pi\in\Pi}P_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]\\&=\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}\max_{q\in[0,1]}P_{\mathcal{B}}\left[\pi^{(q)},\eta\right]=\max_{q\in[0,1]}\inf_{\eta\in\Delta(\mathcal{B})}P_{\mathcal{B}}\left[\pi^{(q)},\eta\right]\ .\end{aligned}$$

该不等式是弱最小最大不等式，第一个等号源于审查最佳响应性质，最后一个等号则源于 Sion 最小最大定理（Sion，1958）。反向不等式由 $\Pi_C\subseteq\Pi$ 得出。因此，在每个截断集合 $\mathcal{B}$ 上，审查都能达到最大最小收益。

我们利用附录 EC.3.3 节中的论证，将这一结论扩展到完整理性水平集合。对于每个整数 $k\ge1$，我们选择一个最优合并质量 $q_k$，使其属于 $[0,k]$，并将对应的最优值记为 $p_k\triangleq\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\beta\in[0,k]}$收益$_\beta[\pi]$。数值 $p_k$ 递减并趋于极限 $p^*$；由 $[0,1]$ 的紧致性可得一个子序列 $q_{k_j}\to q^*$。对于每个有限理性水平 $\beta$，当 $j$ 充分大时，不等式 收益$_\beta\left[\pi^{\left(q_{k_j}\right)}\right]\ge p_{k_j}$ 对所有这些值均成立。因此，利用合并质量的连续性可得 收益$_\beta\left[\pi(q^*)\right]\ge p^*$。附录 EC.3.3 节中建立的边界不等式进一步蕴含

$$\textsc{Payoff}_\infty\left[\pi^{(q^*)}\right]\ge\lim_{\beta\to\infty}\ \textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q^*)}\right]\ge p^*\ .$$

由于全域最优值不大于每个截断最优值 $p_k$，因此至多为 $p^*$。因此，审查 $\pi^{(q^*)}$在 $[0,\infty)\cup\{\infty\}$上达到最大最小收益。□

最小最大后悔准则下定理2的证明。我们使用前文最大最小收益准则证明中定义的平均收益 $P_{\mathcal{B}}[\cdot,\cdot]$ 和归一化常数 $C_\eta$。对于截断理性水平集 $\mathcal{B}=[0,\beta]$ 和分布 $\eta\in\Delta(\mathcal{B})$，平均后悔满足

$$L_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]\triangleq\int_{\mathcal{B}}\left(\textsc{Payoff}_\beta[\pi]-\textsc{Opt}(\beta)\right)\eta(\beta)\,\mathrm{d}\beta=P_{\mathcal{B}}[\pi,\eta]-C_\eta\,.$$

由于被减去的项 $C_\eta$ 与信号机制无关，最大最小收益准则的前述证明中确立的结果意味着，对于每个固定分布 $\eta$，审查使平均后悔最大化，并且平均后悔 $L_{\mathcal{B}}\left[\pi^{(q)},\eta\right]$ 关于合并质量是连续且拟凹的。平均后悔关于分布 $\eta$ 也是连续且仿射的。因此，与最大最小收益准则的前述证明中相同的弱极小极大论证和Sion论证表明，在每个截断集合 $\mathcal{B}$ 上，审查都能达到最小最大后悔。

对于每个整数 $k\geq 1$，我们在 $[0,k]$ 上选择一个最优合并质量 $q_k$，并将相应的最优值记为 $l_k\triangleq$ 上确界$_{\pi\in\Pi}$ 下确界收益$_\beta[\pi]-$最优值 $(\beta)$。这些值 $l_k$ 递减并趋于极限 $l^*$，且合并质量的一个子序列收敛到某个 $q^*\in[0,1]$。与最大最小收益准则的前述证明一样，连续性意味着，对于每个有限理性水平 $\beta$，收益$_\beta\left[\pi^{(q^*)}\right]-$最优值 $(\beta)\geq l^*$。第EC.3.3节确立了边界收益不等式以及收敛性：最优值 $(\beta)\to$ 最优值 $(\infty)$。因此，

$$\textsc{Payoff}_\infty\left[\pi^{(q^*)}\right]-\textsc{Opt}(\infty)\geq\lim_{\beta\to\infty}\left(\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q^*)}\right]-\textsc{Opt}(\beta)\right)\geq\ell^*\,.$$

全域最优值不大于每个截断最优值 $l_k$，因此也不大于 $l^*$。因此，审查$_{\pi^{(q^*)}}$ 在 $[0,\infty)\cup\{\infty\}$ 上实现了最小最大后悔。 □

## EC.4. 第5节缺失的证明

本节将展示我们的研究结果：完全理性接收者情形下审查结构的必要性、先验均值非正假设，以及定理3的紧性。

### EC.4.1. 仅有完全理性最优性并不能保证稳健性

命题 EC.4. 对于任意 $\varepsilon>0$，都存在一个实例，使得针对完全理性接收者设计的最优非审查方案的最坏情况比率小于 $\varepsilon$。

命题EC.4 表明，仅有完全理性最优性不足以实现理性稳健性：一个在完全理性水平 $\beta=\infty$ 下最优的简单二元信号方案，其最坏情况比率可能任意小。由于量化响应函数的凸性$W_\beta(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 上，合并正状态会使发送者的期望效用弱减，因此，揭示部分正状态的审查结构对于第 1/2节中的最坏情况比率保证至关重要。5.1。

命题的证明 *EC.4*。给定一个足够小的 $\varepsilon>0$，考虑如下包含三个状态的实例：

$$\lambda_1=\varepsilon,\qquad\lambda_2=\lambda_3=\frac{1-\varepsilon}{2},\qquad v_1=-0.01,\qquad v_2=0.01,\qquad v_3=3\,.$$

对于完全理性接收者，假设我们将注意力限制在这样一种信号机制上：该机制将每个状态映射为信号空间上的概率分布，其中信号空间恰好包含两个信号。具体而言，该信号机制将最低的状态汇聚为一个信号，并将其余状态汇聚为另一个信号，同时将阈值状态拆分到这两个组中。于是，满足这一要求的完全理性接收者的最优信号机制 $\tilde{\pi}$ 可表征如下：

$$\tilde{\pi}_1(\delta) = \mathbb{1}[\delta = 0]\ ,$$
$$\tilde{\pi}_2(\delta) = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathbb{1}[\delta = 0] + \left(1 - \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\mathbb{1}\left[\delta = \frac{\frac{0.01(1-3\varepsilon)}{2} + \frac{3(1-\varepsilon)}{2}}{1-2\varepsilon}\right],$$
$$\tilde{\pi}_3(\delta) = \mathbb{1}\left[\delta = \frac{\frac{0.01(1-3\varepsilon)}{2} + \frac{3(1-\varepsilon)}{2}}{1-2\varepsilon}\right].$$

另一方面，对于足够小的 $\varepsilon$，根据定理1可以证明，对于任意有限理性水平 $\beta < \infty$，最优信号机制都是完全揭示，因此 $\mathrm{Opt}(\beta) = \varepsilon W_\beta(-0.01) + w_\beta(0.01)\,(1-\varepsilon)/2 + w_\beta(3)(1-\varepsilon)/2$。通过数值计算可以验证 $\lim_{\beta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}$ 收益$_\beta[\tilde{\pi}]\mathrm{Opt}(\beta) = 0$，由此完成证明。□

## EC.4.2. 状态拆分的等价性

固定任意一个实例 $\mathcal{I} = (m,\ \{\lambda_i\}_{i\in[m]},\ \{v_i\}_{i\in[m]})$。我们可以通过将任意状态$i$ 替换为多个相邻且取值相同的状态，构造一个细化后的实例 $\mathcal{I}^{\mathrm{sp}}$ $v_i$。于是，$\mathcal{I}$ 中的每种审查都会在$\mathcal{I}^{\mathrm{sp}}$ 中对应一种审查，且二者具有相同的合并质量、相同的合并信号，并且对每个理性水平 $\beta \in [0,\infty)\cup\{\infty\}$，发送者的期望效用也相同；而$\mathcal{I}^{\mathrm{sp}}$ 中的任何审查都能映射回$\mathcal{I}$中的一个等价机制。

根据状态拆分程序，固定一个实例 I，其候选审查为 $\pi^\dagger$（阈值状态 $\mathrm{l}^\dagger$，阈值状态比例为 $\theta^\dagger$），基准审查为 $\pi^\ddagger$（阈值状态 $\mathrm{l}^\ddagger$，阈值状态比例为 $\theta^\ddagger$）。若阈值状态不同，即 $\mathrm{l}^\dagger \neq \mathrm{l}^\ddagger$，对于候选阈值状态 $\mathrm{l}^\dagger$，我们可以将其拆分为两个相邻状态，概率分别为 $\theta^\dagger\lambda_{\ell^\dagger}$ 和 $(1-\theta^\dagger)\lambda_{\ell^\dagger}$，拆分依据为候选阈值状态比例 $\theta^\dagger$；并对基准阈值 $\mathrm{l}^\ddagger$进行相同的拆分。若阈值状态相同，即 $\mathrm{l}^\dagger = \mathrm{l}^\ddagger$，我们可以将该阈值状态拆分为三个相邻状态，概率分别为 $\lambda_{\ell^\dagger}\min\{\theta^\dagger,\theta^\ddagger\}$、$\lambda_{\ell^\dagger}\,|\,\theta^\dagger - \theta^\ddagger\,|$ 和 $\lambda_{\ell^\dagger}\left(1 - \max\{\theta^\dagger,\theta^\ddagger\}\right)$。

## EC.4.3. 定理 3(i) 的紧性

下面给出被省略的证明，以证明定理 3(i) 中界限的紧性。

定理 3(i) 紧性的证明。考虑公式 (1) 中的二元状态实例。对于完全理性接收者，最优审查信号机制 $\pi^\dagger$ 会合并两个状态，其中 $q^\dagger = 1$ 和 $s^\dagger = 0$。对于每个有限理性水平 $\beta$，发送者的期望效用为收益 $_\beta\left[\pi^\dagger\right] = W_\beta(0) = \frac{1}{2}$。为证明紧性，对于每个有限理性水平 $\beta > 9$，考虑合并质量为 $q_\beta = 1 - \beta^{-1/2}$的审查。由于 $q_\beta > \lambda_1 = 2/3$，该审查会合并状态

$$\frac{1}{-\frac{2\beta^{-1/2}}{q_\beta}} \qquad \frac{2}{q_\beta W_\beta(s\ q_\beta\ ) \to 1} \qquad \beta\to\infty \qquad \beta s\ q_\beta\ = -\frac{2\sqrt{\beta}}{q_\beta} \to -\infty \qquad \frac{s\ q_\beta\ = \frac{\lambda_1 v_1 + \frac{q_\beta - \lambda_1}{q_\beta}\ v_2}{}}{}$$

部以及状态 的一部分。其合并信号为 ( ) ( ) 。因此，由于 ( )，我们有 ( ) 对于 。由此可得，$\mathrm{Opt}(\beta) \geq$ 收益$_\beta\left[\pi^{(q_\beta)}\right] \longrightarrow 1$对于 $\beta\to\infty$。因此，我们得到 $\Gamma\left[\pi^\dagger\right] = \inf_{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}$收益$_\beta[\pi^\dagger]\mathrm{Opt}(\beta) \leq \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}$ $\mathrm{Opt}(\beta) \leq \frac{1}{2}$。证明完毕。□

### EC.4.4. 第 5.2 节中的非正先验均值实例假设

引理 第 8 节。 对于任意先验均值为正的实例 $\mathcal{I}$，即 $\sum_{i\in[m]}\lambda_i v_i > 0$，存在相应的约化实例 $\tilde{\mathcal{I}}$，使其先验均值为零，且 $\sup_{\pi\in\Pi}\Gamma[\pi,\mathcal{I}] \geq \sup_{\pi\in\Pi_C}\Gamma\left[\pi,\tilde{\mathcal{I}}\right]$。

引理EC.8 使我们在为先验均值为正的实例推导最坏情况比率的统一下界时，可以将注意力限制在先验均值为零的实例上。关键直觉在于：在完全理性接收者的最优审查下，任何高于那些合并状态的状态，在任何理性水平下都不会被合并（根据命题1），因此，这些已揭示状态对候选审查信号方案和基准审查信号方案的效用贡献相同。因此，移除这些已揭示状态，并将其余状态重新归一化为一个零均值实例$\tilde{\mathcal{I}}$，只会降低最坏情况比率。

**约化**。我们首先说明零均值截断点的含义。一个下尾截断点由一对$(k,\ \alpha)$表示，其中 $k\in[m]$ 和 $\alpha\in(0,1]$。它由所有状态 $i\in[k-1]$以及状态 $k$的一部分（比例为$\alpha$）组成，其未归一化均值为 $L(k,\ \alpha) \triangleq \sum_{i\in[k-1]}\lambda_i v_i + \alpha\lambda_k v_k$。如果相应的未归一化均值为零，我们就称该截断点为零均值，即对于下尾截断，有 $L(k,\ \alpha)=0$。由于所选状态具有正质量，这等价于说其条件均值为零。

根据第EC.4.2节中的状态拆分操作，我们不妨细化该实例，使构造中出现的任何零均值截断点都是一个完整状态。同样，在比较两个审查信号机制时，我们可以拆分它们的阈值状态，使两个阈值都是完整状态。由于这些细化在每个理性水平下都能保持发送者的期望效用不变，因此也不会改变 $\mathrm{Opt}(\beta)$ 和上确界$_{\pi\in\Pi_C}\Gamma[\pi]$，故下文均采用此类细化后的实例。

接下来，根据上述下尾零均值截断的定义，并且由于下尾未归一化均值起初为负，而先验总均值为正，因此存在一个下尾零均值截断点$(k^+,\alpha^+)$，使得 $\sum_{i\in[k^+-1]}\lambda_i v_i + \alpha^+\lambda_{k^+}v_{k^+}=0$。将状态 $k^+$ 拆分为两个相邻片段，其质量分别为 $\alpha^+\lambda_{k^+}$ 和$(1-\alpha^+)\lambda_{k^+}$，且二者的取值均为 $v_{k^+}$后，我们可以假定存在一个完整的下部区块$K^+\subseteq[m]$，使得 $\sum_{i\in K^+}\lambda_i v_i=0$，并且 $K^+$ 以外的每个状态都不低于 $K^+$ 中的每个状态。令 $\Lambda^+ \triangleq \sum_{i\in K^+}\lambda_i$，并令 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{I}$ 在区块 $K^+$ 上的归一化限制，即

$$\widetilde{m}\leftarrow|K^+|;\quad \widetilde{v}_i\leftarrow v_i,\quad \widetilde{\lambda}_i\leftarrow\frac{\lambda_i}{\Lambda^+},\qquad i\in K^+.$$

借助上述构造，我们现在可以证明引理EC.8。必要时，我们将 $\mathrm{Payoff}_\beta[\pi]$、$\mathrm{Opt}(\beta)$、$\Gamma[\pi]$记作 $\mathrm{Payoff}_\beta[\pi,\mathcal{I}]$,$\mathrm{Opt}(\beta、\mathcal{I})$、$\Gamma[\pi,\mathcal{I}]$，以表示它们取决于所考虑的实例$\mathcal{I}$。

引理 *EC.8*的证明。任取一个实例$\mathcal{I}$，并按照上述方法构造约化实例$\tilde{\mathcal{I}}$。固定一个理性水平 $\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}$。

现在固定约化实例 $\tilde{\mathcal{I}}$ 的可行范围内任意一个合并质量 $\tilde{q}^\dagger\in[\frac{\sum_{i\in[m]:\ v_i\leq 0}\lambda_i}{\Lambda^+},\ 1]$，并令$\tilde{\pi}^\dagger$ 为在 $\tilde{\mathcal{I}}$ 中具有合并质量 $\tilde{q}^\dagger$ 的相应基础候选审查。我们将其扩展为一种审查

在原始实例 $\mathcal{I}$ 中，对 $\Pi_C$ 应用相同的合并比例于 $K^+$中的状态，并完全揭示 $K^+$之外的每个状态，从而得到信号机制。我们将这种扩展候选审查记为 $\pi^\dagger$。令 $D^+ = [m] \setminus K^+$。那么，我们有

$$\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger, \mathcal{I}\right] = \Lambda^+ \textsc{Payoff}_\beta\left[\tilde{\pi}^\dagger, \tilde{\mathcal{I}}\right] + \sum\nolimits_{i\in D^+} \lambda_i W_\beta(v_i)\,.$$

原始实例中面向完全理性接收者的最优审查信号机制$\mathcal{I}$ 恰好合并了区块 $K^+$。根据命题1，最优合并质量会随着理性水平 $\beta$ 的提高而弱增；等价地，当理性水平 $\beta$ 从 $\infty$降低时，最优合并质量只可能弱减。因此，对于任意理性水平 $\beta$，原始实例$\mathcal{I}$ 中的基准审查都会完整披露整个˜区块 $D^+$。因此，将其限制在 $K^+$ 上，便会在约化实例$\mathcal{I}$中诱导出一种审查信号机制。该受限审查信号机制是约化实例的最优方案。事实上，如果另一种约化信号机制能够带来严格更高的收益，我们就可以在 $K^+$ 上应用该信号机制，并继续完整披露 $D^+$。由此得到的可行信号传递方案将严格优于原始基准方案，这与其最优性相矛盾。因此，我们有

$$\textsc{Opt}(\beta, \mathcal{I}) = \Lambda^+\textsc{Opt}(\beta, \tilde{\mathcal{I}}) + \sum\nolimits_{i\in D^+} \lambda_i W_\beta(v_i)\,.$$

因此，我们可以将效用比界定如下：

$$\frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^\dagger, \mathcal{I}\right]}{\textsc{Opt}(\beta, \mathcal{I})} = \frac{\Lambda^+ \textsc{Payoff}_\beta\left[\tilde{\pi}^\dagger, \tilde{\mathcal{I}}\right] + \sum_{i\in D^+} \lambda_i W_\beta(v_i)}{\Lambda^+\textsc{Opt}(\beta, \tilde{\mathcal{I}}) + \sum_{i\in D^+} \lambda_i W_\beta(v_i)} \geq \frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\tilde{\pi}^\dagger, \tilde{\mathcal{I}}\right]}{\textsc{Opt}(\beta, \tilde{\mathcal{I}})},$$

其中，不等式成立是因为收益$_\beta\left[\tilde{\pi}^\dagger, \tilde{\mathcal{I}}\right] \leq$最优值$(\beta, \tilde{\mathcal{I}})$，$\sum_{i\in D^+} \lambda_i W_\beta(v_i) \geq 0$（这自然由 $W_\beta(\cdot) \geq 0$ 得出），且函数 $x \mapsto \frac{\Lambda^+ A + x}{\Lambda^+ B + x}$在 $x \in [0, \infty)$ 上单调不减，前提是 $0 \leq A \leq B$。

对 $\beta \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ 取下确界，得到 $\Gamma\left[\pi^\dagger, \mathrm{I}\right] \geq \Gamma\left[\tilde{\pi}^\dagger, \tilde{\mathrm{I}}\right]$。最后，对 $\tilde{q}^\dagger \in [\sum_{i\in[m]:\ v_i\leq 0} \lambda_i, 1]$ 取上确界，得到 $\sup_{\pi\in\Pi_C} \Gamma[\pi, \mathrm{I}] \geq \sup_{\pi\in\Pi_C} \Gamma\left[\pi, \tilde{\mathrm{I}}\right]$，这意味着 $\sup_{\pi\in\Pi} \Gamma[\pi, \mathrm{I}] \geq \sup_{\pi\in\Pi_C^{\Lambda^+}} \Gamma\left[\pi, \tilde{\mathrm{I}}\right]$。引理 EC.8 证明完毕。□

### EC.4.5. 定理的紧性3(ii)

下面，我们给出定理中界的紧性证明3(ii)。

定理 3(ii) 紧性的证明。考虑公式 (1) 中的二元状态实例。根据命题 EC.2，只需考虑至少将所有非正状态合并的审查信号方案。由于该实例只有两个状态，每个这样的审查 $\pi$ 都由其合并质量 $q \in [\lambda_1, 1] = [2/3, 1]$, 唯一确定，其中$s$是其合并信号。令 $t \triangleq (1-q)/q$ 表示披露质量与合并质量之比。现在固定任意理性水平 $\beta \in [0, \infty)$。由于状态 1 被完全合并，唯一部分披露的状态是状态 2。令 $u \triangleq 2\beta$。于是，我们有收益$_\beta[\pi] = qW_\beta(s) + (1-q)W_\beta(2) = N_t(u)$，且最优值$(\beta) = \sup_{c\in[0,\frac{1}{2}]} N_c(u) = Q_{1/2}(u)$。对于理性水平 $\beta = \infty$，我们有收益$_\infty[\pi] = \frac{1}{1+t}$且最优值$(\infty) = 1$。因此，对于任意审查信号

机制 $\pi$，其合并质量为 $q$，我们有 $\Gamma[\pi]=\inf^{\beta\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}$收益$_{\beta}[\pi]$最优值$(\beta)=\min\left\{\frac{1}{1+t},\inf_{u\in[0,\infty)}{}^{N_t}(u)\,Q_{1/2}(u)\right\}$。因此，我们得到$\sup_{\pi\in\Pi_C}\Gamma[\pi]=\sup^{t\in[0,\frac{1}{2}]}\min\left\{\frac{1}{1+t},\inf_{u\in[0,\infty)}{}^{N_t}(u)\,Q_{1/2}(u)\right\}$。注意，该表达式右侧恰好是引理 EC.9 中定义的函数 $f(\xi)$在 $\xi=1/2$处的取值。接下来，我们证明最小值运算符是冗余的，因此该表达式可简化为纯上确界—下确界规划（见引理 EC.9(i)）。此外，我们证明，在所有 $\xi\in(0,\infty)$上，$f(\xi)$的下确界在 $\xi=1/2$ 处取得（见引理 EC.9(ii)），从而得到极大极小最优比率 $\Gamma^*$的普适保证。因此，我们得出$\sup_{\pi\in\Pi_C}\Gamma[\pi]=\sup^{t\in[0,\frac{1}{2}]}\inf_{u\in[0,\infty)}{}^{N_t}(u)\,Q_{1/2}(u)=\Gamma^*$。证明完毕。□

**EC.4.6. 定理3(ii)的辅助引理**

引理 *EC.9.* 假设 $\xi\in(0,\infty)$。定义函数 $f(\xi)\triangleq\sup^{x\in[0,\xi]}\min\left\{\frac{1}{1+x},\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_\xi(z)\right\}$，其中函数 $N_x(z)$ 和 $Q_\xi(z)$ 定义见方程 *(2)*。则有以下结论：

*(i)* $f(\xi)=\sup^{x\in[0,\xi]}\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_\xi(z)$。*(ii)* $\inf_{\xi\in(0,\infty)}f(\xi)=f(1/2)=\Gamma^*\approx0.8996$，其中 $\Gamma^*$ 的定义同方程 *(3)*。

证明。我们首先说明，对于任意 $\xi\in(0,\infty)$ 和 $x\in[0,\xi]$，都有 $\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_\xi(z)\le\frac{1}{1+x}$。考虑 $\lim_{z\to\infty}{}^{N_x}(z)\,Q_\xi(z)$。首先，计算 $\lim_{z\to\infty}Q_\xi(z)$。由于 $z\to\infty$，有 $z^{-\frac{1}{2}}\to0$。因此，当$z$充分大时，不等式 $z^{-\frac{1}{2}}\le\xi$成立。接着，当 $x=z^{-\frac{1}{2}}$ 时，对于函数 $N_x(z)$，有$\lim_{z\to\infty}N_{z^{-\frac{1}{2}}}(z)=(\,)$，有$\lim(\,)$ $\lim_{z\to\infty}\frac{W_1(-z^2)+z^{-2}W_1(z)}{1}=1$，其中最后一个等号是因为 $W_1(-\infty)=1$ 和 $W_1(\infty)=0$。根据方程 (2) 中函数 $Q_\xi(\cdot)$ 的$1+z^{-2}$定义，当 $z$ 充分大时，有 $Q_\xi(z)\ge N_{z^{-\frac{1}{2}}}(z)$，这意味着 $\liminf_{z\to\infty}Q_\xi(z)\in[1,\infty)$。根据方程 (2) 中函数 $N_x(\cdot)$ 的定义，有 $N_x(z)=\frac{W_1(-xz)+xW_1(z)}{1+x}\le1$，~~其中该不等式~~是因为 $W_1(\cdot)\le1$。因此，有 $Q_\xi(z)\le1$，这意味着 $\lim_{z\to\infty}Q_\xi(z)=1$。接下来，计算 $\lim_{z\to\infty}{}^{N_x}(z)\,Q_\xi(z)$。若 $x=0$，则有 $N_0(z)=W_1(0)=\frac{1}{2}$，这意味着 $\lim_{z\to\infty}{}^{N_0}(z)\,Q_\xi(z)=\frac{1}{2}<\frac{1}{1+x}\big|_{x=0}$。若 $x\in(0,\infty)$，则有 $\lim_{z\to\infty}N_x(z)=\frac{W_1(-\infty)}{1+x}=\frac{1}{1+x}(\,)$，这意味着 $\lim_{z\to\infty}{}^{N_x}(z)\,Q_\xi(z)=\frac{1}{1+x}$。综合以上两种情况，我们有

$$\inf_{z\in[0,\infty)}\frac{N_x(z)}{Q_\xi(z)}\le\lim_{z\to\infty}\frac{N_x(z)}{Q_\xi(z)}\le\frac{1}{1+x}.$$

因此，对于函数 $f(\xi)$，外层 min 运算符在数学上是冗余的。换言之，我们可以将函数 $f(\xi)$简化为 $f(\xi)=\sup^{x\in[0,\xi]}\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x(z)Q_\xi(z)}$。

接下来，我们声称，对于任意满足 $\xi_1<\xi_2$ 的 $\xi_1,\xi_2\in(0,\infty)$，有 $f(\xi_2)\le f(\xi_1)$。由于 $[0,\xi_1]\subset[0,\xi_2]$，根据方程 (2) 中函数 $Q_\xi(\cdot)$ 的定义，我们有 $Q_{\xi_1}(z)\le Q_{\xi_2}(z)$。由于函数 $N_x(z)$ 与 $\xi$ 无关，对于每个 $x\in[0,\xi_1]$，我们有 $\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_{\xi_2}(z)\le\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_{\xi_1}(z)$。然后，我们将定义域 $[0,\xi_2]$ 划分为两个区间：基准区间 $[0,\xi_1]$和扩展区间 $(\xi_1,\xi_2]$，进而可以将 $f(\xi_2)$ 改写为等价形式 $f(\xi_2)=\max\left\{\sup^{x\in[0,\xi_1]}\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_{\xi_2}(z),\ \sup^{x\in(\xi_1,\xi_2]}\inf_{z\in[0,\infty)}{}^{N_x}(z)\,Q_{\xi_2}(z)\right\}$。对于 $f(\xi_2)$ 的第一项，根据上述不等式，我们有

$$\sup_{x\in[0,\xi_1]}\inf_{z\in[0,\infty)}\frac{N_x(z)}{Q_{\xi_2}(z)}\le\sup_{x\in[0,\xi_1]}\inf_{z\in[0,\infty)}\frac{N_x(z)}{Q_{\xi_1}(z)}=f(\xi_1).$$

对于 $f(\xi_2)$ 的第二项，我们首先为 $f(\xi_1)$ 建立一个辅助下界。考虑函数 $N_x(z)$。对于 $x \in [0, \xi_1]$，我们有 $N_x(z) = \frac{W_1(-xz) + xW_1(z)}{1+x} \leq W_1(-\xi_1 z) + \xi_1 W_1(z) = (1+\xi_1) N_{\xi_1}(z)$，其中该不等式成立是因为函数 $x \mapsto W_1(-xz) + xW_1(z)$ 在 $[0, \xi_1]$ 上单调不减。然后，对 $x \in [0, \xi_1]$ 取上确界，得到 $Q_{\xi_1}(z) \leq (1+\xi_1) N_{\xi_1}(z)$。整理上述不等式可得 $\frac{N_{\xi_1}(z)}{Q_{\xi_1}(z)} \geq \frac{1}{1+\xi_1}$。对 $z \in [0, \infty)$ 取下确界，我们有 $\inf_{z \in [0,\infty)} \frac{N_{\xi_1}(z)}{Q_{\xi_1}(z)} \geq \frac{1}{1+\xi_1}$，这意味着 $f(\xi_1) = \sup_{x \in [0,\xi_1]} \inf_{z \in [0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\xi_1}(z)} \geq \frac{1}{1+\xi_1}$。接下来，对于任意 $x \in (\xi_1, \xi_2]$，有

$$\inf_{z \in [0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\xi_2}(z)} \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{1+x} \overset{(b)}{<} \frac{1}{1+\xi_1} \overset{(c)}{\leq} f(\xi_1),$$

其中，不等式 (a) 来自为比较 $f(\xi)$ 中两个内部项而构造的不等式，不等式 (b) 成立是因为 $x > \xi_1$，不等式 (c) 则由上述不等式得出。因此，结合 $f(\xi_1)$ 中上述两个不等式，我们得到 $f(\xi_2) = \max\left\{ \sup_{x \in [0,\xi_1]} \inf_{z \in [0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\xi_2}(z)}, \sup_{x \in (\xi_1,\xi_2]} \inf_{z \in [0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\xi_2}(z)} \right\} \leq \max\{ f(\xi_1), f(\xi_1) \} = f(\xi_1)$。

接下来，我们证明当 $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$ 时，函数 $N_x(z)$ 单调不增。对 $N_x(z)$ 关于 $x$ 求一阶导数，并将量化响应函数的一阶导数记为 $W_1'(\cdot)$，可得 $\frac{\partial N_x(z)}{\partial x} = \frac{(1+x)(-zW_1'(-xz) + W_1(z)) - (W_1(-xz) + xW_1(z))}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)W_1'(-xz) + W_1(z) - W_1(-xz)}{(1+x)^2}$。由于分母始终为正，该导数的符号由分子决定。定义辅助函数 $J(x)$ 为 $J(x) \triangleq -z(1+x)W_1'(-xz) + W_1(z) - W_1(-xz)$。对 $J(x)$ 关于 $x$ 求导，得到 $\frac{\partial J}{\partial x} = z^2 (1+x) W_1''(-xz) \leq 0$，其中不等式成立是因为 $-xz \leq 0$，且量化响应函数 $W_1(\cdot)$ 在非正定义域（$-\infty, 0]$）上是凹函数，即其二阶导数 $W_1''(\cdot)$ 非正。由于 $J(x)$ 单调不增，若能证明 $J(1/2) \leq 0$，则可推出对所有 $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$，$N_x(z)$ 都单调不增。这保证了 $N_x(z)$ 的最大值可限定在 $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 上。代入 $h \triangleq \exp(\frac{1}{2}z) \geq 1$，计算 $J(1/2)$，得到 $J\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} z W_1'\left(-\frac{1}{2}z\right) + W_1(z) - W_1\left(-\frac{1}{2}z\right) = \frac{3h \ln h}{(1+h)^2} + \frac{1}{1+h^2} - \frac{h}{1+h}$。我们希望证明对所有 $h \in [1, \infty)$，计算所得的表达式均非正。将该表达式定义为 $H(h) \triangleq \frac{3h \ln h}{(1+h)^2} + \frac{1}{1+h^2} - \frac{h}{1+h}$。为简洁地给出对数项的界，我们采用代换 $r = \frac{h-1}{h+1} \in [0, 1)$，并对 $\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ 作泰勒级数展开。将所有高阶项的分母替换为 3，可得一个有理上界：$\ln h = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+1}}{2k+1} \leq 2r + \frac{2r^3}{3} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} = 2r + \frac{2r^3}{3(1-r^2)} = \frac{2(h-1)}{h} + \frac{2(h-1)^3}{3h(h+1)^2} = \frac{(h-1)(h^2+10h+1)}{3h(h+1)}$。将此上界代回 $H(h)$ 的定义，并提取公因子 $\frac{h-1}{h+1}$，得到 $H(h) \leq \frac{3h}{(1+h)^2} \left( \frac{(h-1)(h^2+10h+1)}{3h(h+1)} \right) + \frac{1}{1+h^2} - \frac{h}{1+h} = \frac{h-1}{h+1} \left( \frac{h^2+10h+1}{3(h+1)^2} - \frac{h}{h^2+1} \right) = -\frac{(h-1)^5}{3(h+1)^2(h^2+1)} \leq 0$，其中最后一个不等式成立是因为对所有 $h \in [1, \infty)$，项 $(h-1)^5$ 非负，且分母严格为正。

最后，我们刻画 $\xi \in (0, \infty)$ 上 $f(\xi)$ 的全局最小值。固定任意 $\xi \in [\frac{1}{2}, \infty)$。注意，对于 $x \in [\frac{1}{2}, \xi]$，$N_x(z) \leq N_\xi(z)$ 成立。因此，将 $Q_\xi(z)$ 的上确界定义域扩展到阈值 $1/2$ 之外，并不会增大该上确界。换言之，对于任意 $z \in [0, \infty)$，都有 $Q_\xi(z) = Q_{1/2}(z)$。将 $N_x(z) \leq N_\xi(z)$ 除以严格正分母 $Q_{1/2}(z)$，其中 $Q_{1/2}(z) = \sup_{x \in [0, 1/2]} N_x(z) \geq N_0(z) = \frac{1}{2}$，

对于任意 $z \in [0,\infty)$，我们得到 $N_x(z)Q_1(z) \leq N_{\frac{1}{2}}(z)Q_1(z)$。对上述不等式两边关于 $z \in [0,\infty)$ 取下确界，对于任意 $x \in (\frac{1}{2},\xi]$，我们有

$$\inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_\xi(z)} = \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\frac{1}{2}}(z)} \leq \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_{\frac{1}{2}}(z)}{Q_{\frac{1}{2}}(z)},$$

其中，第一个等号是因为 $Q_\xi(z) = Q_{\frac{1}{2}}(z)$。接着，我们在常数 $\frac{1}{2}$ 处分割 $f(\xi)$ 的上确界定义域，该定义域由 $[0,\xi]$ 给出，然后将 $f(\xi)$ 改写为 $f(\xi) = \max\left\{\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_\xi(z), \sup_{x\in(\frac{1}{2},\xi]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_\xi(z)\right\}$。对于第二项，我们有

$$\sup_{x\in(\frac{1}{2},\xi]} \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_\xi(z)} \leq \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_{\frac{1}{2}}(z)}{Q_{\frac{1}{2}}(z)} \leq \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\frac{1}{2}}(z)} = f(\frac{1}{2}),$$

其中，第一个不等式是由上述不等式得出的。对于 $f(\xi)$ 的第一项，我们有

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_\xi(z)} = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \inf_{z\in[0,\infty)} \frac{N_x(z)}{Q_{\frac{1}{2}}(z)} = f(\frac{1}{2}),$$

其中，第一个等号是因为 $Q_\xi(z) = Q_{\frac{1}{2}}(z)$。考虑到关于 $f(\frac{1}{2})$ 的上述两个不等式，对于任意 $\xi \geq \frac{1}{2}$，我们有 $f(\xi) = \max\left\{\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_\xi(z), \sup_{x\in(\frac{1}{2},\xi]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_\xi(z)\right\} \leq \max\{f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2})\} = f(\frac{1}{2})$。反过来，由于区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 是完整定义域 $[0,\xi]$ 的子集，因此在完整定义域 $[0,\xi]$ 上取上确界满足 $f(\xi) = \sup_{x\in[0,\xi]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_\xi(z) = \sup_{x\in[0,\xi]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_{\frac{1}{2}}(z) \geq \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \inf_{z\in[0,\infty)} N_x(z)Q_{\frac{1}{2}}(z) = f(\frac{1}{2})$，其中，第二个等号是因为 $Q_\xi(z) = Q_{\frac{1}{2}}(z)$。综合这些界可得，对于所有 $\xi \in [\frac{1}{2},\infty)$，$f(\xi) = f(\frac{1}{2})$。

总之，由于函数 $f(\xi)$ 在 $\xi \in (0,\frac{1}{2}]$ 上单调不增，并且对每个 $\xi \in [\frac{1}{2},\infty)$ 都变为常数，因此，$f(\xi)$ 在 $\xi \in (0,\infty)$ 的整个定义域上的一个全局最小值在 $\xi = \frac{1}{2}$ 处取得。通过数值计算 $f(\frac{1}{2})$，我们得到极大极小最优比率的普适保证为 $\Gamma^* \approx 0.8996$。至此，引理EC.9的证明结束。□

## EC.5. 计算方面

本节给出已知理性水平下计算最优信号机制以及近似理性稳健最优信号机制的计算结果。

### EC.5.1. 已知理性水平下的最优审查计算

命题 EC.5. 固定任意实例 $\mathcal{I} = (m, \{\lambda_i\}_{i\in[m]}, \{v_i\}_{i\in[m]})$。对于任意已知理性水平 $\beta \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$，存在一个多项式 $(m)$ 时间算法，可计算出最优信号机制。

证明。 当接收者完全理性时，根据引理 EC.1，可以在多项式时间内计算出最优信号机制。当接收者并非完全理性时，回顾定理1可知，最优信号机制是一种审查信号机制。因此，要找出最优信号机制，只需找出阈值状态 $l$ 和阈值状态比例 $\theta$。为确定 $l$，$\theta$，考虑以下过程：对于

每个状态 $i \in [m]$，其中 $v_i \geq 0$，计算相应的候选阈值比例 $p_i$，其中 $p_i$ 的定义见方程 (EC.6)。如果集合 $\{i \in [m]: v_i \geq 0, p_i \geq 0\}$ 非空，则将阈值状态设为 $\mathrm{l} = \max\{i \in [m]: v_i \geq 0, p_i \geq 0\}$，并将阈值状态比例设为 $\theta = \min\{p_\ell, 1\}$。否则，如果不存在这样的状态，则将 l 设为 $= \max\{i \in [m]: v_i \leq 0\}$，并设 $\theta = 1$。容易看出，上述过程的复杂性至多为 $O(m)$。命题 EC.5 的证明到此完成。□

### EC.5.2. 计算近似理性稳健最优审查

命题 EC.6. 任取一个实例 $\mathcal{I} = (m, \{\lambda_i\}_{i\in[m]}, \{v_i\}_{i\in[m]})$。给定任意 $\epsilon \in (0, 1)$，对于每一种稳健性准则，都存在一个全多项式时间近似方案（算法1），其运行时间为 $poly(m, 1/\epsilon)$，并计算出相应的审查方案 $\hat{\pi}_{ratio}$ / $\hat{\pi}_{payoff}$ / $\hat{\pi}_{regret}$，使得

$$\Gamma[\hat{\pi}_{ratio}] \geq (1-\epsilon)\Gamma\left[\pi^*_{ratio}\right], \quad P\left[\hat{\pi}_{payoff}\right] \geq (1-\epsilon)P\left[\pi^*_{payoff}\right], \quad L\left[\hat{\pi}_{regret}\right] \geq L\left[\pi^*_{regret}\right] - \epsilon.$$

命题EC.6 背后的直觉有三点。首先，只需将注意力限制在审查方案上，这就将问题简化为针对合并质量 $q \in [0,1]$ 的一维搜索（见定理2）。这使我们能够对相关的合并质量定义域进行一致离散化。其次，回顾命题EC.5，对于任何已知的理性水平 $\beta$，都可以在 $\mathrm{poly}(m)$ 时间内计算出最优审查。第三，对于理性水平集合的离散化，我们不采用均匀离散化，而是设置非均匀网格点，使得对于每个候选信号，接收者的量化响应概率 $W_\beta(\cdot)$ 在相邻点之间的变化至多为 $O(\epsilon)$，从而进一步控制发送者期望效用在网格上的变化。

命题的证明 *EC.6*。取一个较小的正数 $\eta > 0$。令 $q^{\mathrm{NP}} \triangleq \sum_{i\in[m]:v_i\leq 0}\lambda_i$ 表示非正状态的总质量，$q^{\mathrm{FR}}$ 表示完全理性接收者的最优审查的合并质量，$\pi^{(q)}$ 表示合并质量为 $q$ 的审查。

我们首先介绍合并质量定义域的离散化。我们选择一个合并质量网格 $Q \subseteq [q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$，使其包含两个端点，且网格间距至多为 $\Delta \leq \frac{\eta q^{\mathrm{FR}}}{2}$。[20] 因此，共有 $O(1/\eta)$ 个合并质量网格点。接下来，我们关注理性水平集合 $[0,\infty) \cup \{\infty\}$ 的离散化。我们不只是将其均匀划分，而是希望达到这样的目标：对于非零信号，在相邻两个理性水平网格点之间，量化响应 $W_\beta(\delta)$ 的变化至多为 $\eta$。注意，候选信号总数为 $O(m + 1/\eta)$：$\delta \in \{s(q): q \in Q\} \cup \{v_i: v_i \geq 0, i \in [m]\}$。对于每个非零候选信号 $\delta$，我们利用显式公式 $\beta(\delta, k) = \frac{1}{\delta}\log\left(\frac{1}{\lceil 1/\eta \rceil / k} - 1\right)$ 生成 $O(1/\eta)$ 个有限理性水平网格点，其中 $k \in [\lceil 1/\eta \rceil - 1]$。我们还无条件地纳入两个边界理性水平 $\{0,\infty\}$。对于零信号（$\delta = 0$），无需生成特定网格点，因为对于任何有限理性水平，$W_\beta(0) = \frac{1}{2}$，且 $W_\infty(0) = 1$。对所有候选信号应用此过程后，可得到一个包含 $O(m/\eta + 1/\eta^2)$ 个点的理性水平网格 $B$。由此构造可知，对于相邻的理性水平，每个候选信号 $\delta$ 的量化响应 $W_\beta(\delta)$ 变化至多为 $\eta$。

[20] 由于命题 EC.2，我们将搜索范围限制在此区间内。

固定一个合并质量 $q \in Q$。对于任意有限理性水平 $\beta$，令 $\hat{\beta} \in B$ 为严格大于 $\beta$ 的最小网格点。于是，可以将理性水平 $\beta$ 下审查 $\pi^{(q)}$ 的发送者期望效用收益 $_{\beta}\left[\pi^{(q)}\right]$ 分解为两部分：一部分是来自累积质量 $q^{\mathrm{FR}}$ 的效用贡献，另一部分是来自剩余质量（$1-q^{\mathrm{FR}}$）的效用贡献。为便于表述，令 $T_{\beta}(q)$ 表示审查 $\pi^{(q)}$ 下来自累积质量 $q^{\mathrm{FR}}$ 的效用贡献；其中，若 $\mathrm{l}(q) < \mathrm{l}(q^{\mathrm{FR}})$，则 $T_{\beta}(q) \triangleq qW_{\beta}(s(q)) + (1-\theta(q))\lambda_{\ell(q)} W_{\beta}\left(v_{\ell(q)}\right) + \sum_{i \in [\mathrm{l}(q)+1, \mathrm{l}(q^{\mathrm{FR}})-1]} \lambda_i W_{\beta}(v_i) + \theta(q^{\mathrm{FR}})\lambda_{\ell(q^{\mathrm{FR}})} W_{\beta}\left(v_{\ell(q^{\mathrm{FR}})}\right)$；若 $\mathrm{l}(q) = \mathrm{l}(q^{\mathrm{FR}})$，则 $T_{\beta}(q) \triangleq qW_{\beta}(s(q)) + \left(\theta(q^{\mathrm{FR}}) - \theta(q)\right)\lambda_{\ell(q^{\mathrm{FR}})} W_{\beta}\left(v_{\ell(q^{\mathrm{FR}})}\right)$，并且 $R_{\beta} \triangleq (1-\theta(q^{\mathrm{FR}}))\lambda_{\ell(q^{\mathrm{FR}})} W_{\beta}\left(v_{\ell(q^{\mathrm{FR}})}\right) + \sum_{i \in [\mathrm{l}(q^{\mathrm{FR}})+1:m]} \lambda_i W_{\beta}(v_i)$ 表示来自剩余质量（$1-q^{\mathrm{FR}}$）的效用贡献，它仅取决于 $q^{\mathrm{FR}}$ 和 $\beta$。对于理性水平 $\hat{\beta}$，$\hat{\beta}(q)$ 和 $R^{\hat{\beta}}$ 的相应表达式也同样成立。零均值池化信号的候选方案需要单独处理。若 $s(q^{\mathrm{FR}}) = 0$，则可直接得到其最坏情况性能：$\Gamma\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right] = 1/2$, $P\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right] = q^{\mathrm{FR}}/2$,，且 $L\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right] = -q^{\mathrm{FR}}/2$。对于所有其余候选方案，我们使用理性网格估算其目标值。

对于下文的候选方案比较，固定 $q \in Q$，其中 $s(q) < 0$。关于这两项效用贡献，我们有以下两个观察：（1）对于来自累积质量 $q^{\mathrm{FR}}$ 的效用贡献，

$$\left|T_{\beta}(q) - T_{\hat{\beta}}(q)\right| \le \eta q^{\mathrm{FR}}, \tag{EC.7}$$

由于对于任意非零信号 $\delta$，$|W_{\beta}(\delta) - W^{\hat{\beta}}(\delta)| \le \eta$，且 $T_{\beta}(q)$ 或 $T^{\hat{\beta}}(q)$ 中的系数之和为 $q^{\mathrm{FR}}$；（2）对于来自剩余质量（$1-q^{\mathrm{FR}}$）的效用贡献，我们有 $R_{\beta} \ge R^{\hat{\beta}}$，因为对于任意状态 $i \ge \mathrm{l}(q^{\mathrm{FR}})$，函数 $\beta \mapsto {}_{1+}{}^{1}\exp(\beta\delta)$ 在固定信号 $\delta > 0$ 下单调不增。

接下来，固定理性水平 $\beta$，比较具有两个合并质量 $q^{\dagger} < q^{\ddagger}$ 的审查方案下发送者的期望效用。于是，我们有

$$\textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{(q^{\dagger})}\right] - \textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{(q^{\ddagger})}\right] \ge q^{\dagger}W_{\beta}(s^{\dagger}) - q^{\ddagger}W_{\beta}(s^{\ddagger}) \overset{(a)}{\ge} (q^{\dagger} - q^{\ddagger})W_{\beta}(s^{\ddagger}) \overset{(b)}{\ge} q^{\dagger} - q^{\ddagger}, \tag{EC.8}$$

其中，不等式 (a) 成立，是因为这两个合并信号满足 $s^{\dagger} \le s^{\ddagger}$，且量化响应函数 $W_{\beta}(\cdot)$ 单调不增；不等式 (b) 成立，则是因为 $W_{\beta}(\cdot) \le 1$ 且 $q^{\dagger} - q^{\ddagger} < 0$。根据上述不等式，我们可以直接得到 $\mathrm{Opt}(\beta) \le \max_{q \in Q} \mathrm{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{(q)}\right] + \Delta$。从剩余质量 $(1-q^{\mathrm{FR}})$ 中减去效用贡献 $R_{\beta}$ 后，上述不等式变为 $\max_{q \in [q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q) \le \max_{q \in Q} T_{\beta}(q) + \Delta$。结合方程 (EC.7)，我们得到

$$\left|\max_{q \in [q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q) - \max_{q \in [q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q)\right| \le \eta q^{\mathrm{FR}} + \Delta \le \frac{3}{2}\eta q^{\mathrm{FR}}, \tag{EC.9}$$

其中，$\hat{\beta} \in B$ 是严格大于 $\beta$ 的最小网格点。[21]

接下来，我们希望在审查条件下，对任意理性水平点 $\beta$ 以及严格大于 $\beta$ 的最小网格点 $\hat{\beta} \in B$，界定比率、收益和遗憾差距 $\pi^{(q)}$。

[21] 对于满足 $s(q^{\mathrm{FR}}) = 0$ 的合并质量 $q^{\mathrm{FR}}$，方程 (EC.7) 对于右端点为 $\hat{\beta} = \infty$ 的最后一个理性水平网格区间不成立。 9
$T_{\beta}(q') \ge q'(1-\eta) \ge q^{\mathrm{FR}} - \Delta - \eta q^{\mathrm{FR}}$ $q' \in [q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$ $T_{\infty}(q) = q^{\mathrm{FR}}$ $q \in [q^{\mathrm{NP}}, q^{\mathrm{FR}}]$ $T_{\beta}(q) \ge$
不过，方程 (EC.) 对该区间仍然成立。这是因为 $\max_{\mathrm{FR}}(\,)$ 和 $\max_{\mathrm{FR}}(\,)(\,)(\,)$，其中 是小于 的最大合并质量网格点。

**比率**。 在这种情况下，我们有

$$\frac{\textsc{Payoff}_{\hat{\beta}}\left[\pi^{(q)}\right]}{\textsc{Opt}(\hat{\beta})} = \frac{T_{\hat{\beta}}(q)+R_{\hat{\beta}}}{\max_{q'\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q')+R_{\hat{\beta}}} \overset{(a)}{\leq} \frac{T_{\hat{\beta}}(q)+R_{\beta}}{\max_{q'\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q')+R_{\beta}}$$
$$\overset{(b)}{\leq} \frac{T_{\beta}(q)+R_{\beta}}{\max_{q'\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q')+R_{\beta}} + 5\eta = \frac{\textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{(q)}\right]}{\textsc{Opt}(\beta)} + 5\eta,$$

其中，不等式 (a) 成立是因为函数 $x \mapsto \frac{A+x}{B+x}$ 在 $0 \leq A \leq B$ 和 $R_{\hat{\beta}} \leq R_{\beta}$ 时单调不减；不等式 (b) 成立是因为 $\left|T_{\beta}(q)-T_{\hat{\beta}}(q)\right| + \left|\max_{q\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q) - \max_{q\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q)\right| \leq \left|T_{\beta}(q)+R_{\beta} - \max_{q'\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q')+R_{\beta}\right| + \left|\max_{q\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q)+R_{\beta} - \max_{q'\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q')+R_{\beta}\right| \leq \eta q^{\mathrm{FR}} + \frac{3}{2}\eta q^{\mathrm{FR}} = 5\eta$，其中最后一个不等式由方程 (EC.7) 和 (EC.9) 得出，并且 $\max_{q'\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q') \geq T_{\hat{\beta}}(q^{\mathrm{FR}}) \geq \frac{q^{\mathrm{FR}}}{2}$。

**收益**。 在这种情况下，我们有

$$\textsc{Payoff}_{\hat{\beta}}\left[\pi^{(q)}\right] = T_{\hat{\beta}}(q)+R_{\hat{\beta}} \leq T_{\beta}(q)+\eta q^{\mathrm{FR}}+R_{\beta} = \textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{(q)}\right]+\eta q^{\mathrm{FR}},$$

其中，不等式由方程 (EC.7) 和 $R_{\hat{\beta}} \leq R_{\beta}$ 得出。

**遗憾**。 在这种情况下，我们有

$$\left|\left(\textsc{Payoff}_{\hat{\beta}}\left[\pi^{(q)}\right]-\textsc{Opt}(\hat{\beta})\right)-\left(\textsc{Payoff}_{\beta}\left[\pi^{(q)}\right]-\textsc{Opt}(\beta)\right)\right|$$
$$= \left|\left(T_{\hat{\beta}}(q)-T_{\beta}(q)\right)-\left(\max_{q\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\hat{\beta}}(q)-\max_{q\in[q^{\mathrm{NP}},q^{\mathrm{FR}}]} T_{\beta}(q)\right)\right| \leq \frac{5}{2}\eta q^{\mathrm{FR}},$$

其中，不等式由方程 (EC.7) 和 (EC.9) 得出。

根据上述结果，与分别具有合并质量 $q_{\mathrm{ratio}}$ / $q_{\mathrm{payoff}}$ / $q_{\mathrm{regret}}$ 的理性稳健最优审查 $\pi^{*}_{\mathrm{ratio}}$ / $\pi^{*}_{\mathrm{payoff}}$ / $\pi^{*}_{\mathrm{regret}}$ 相比，我们可以界定估计的理性稳健信号机制 $\hat{}\pi_{\mathrm{ratio}}$ / $\hat{}\pi_{\mathrm{payoff}}$ / $\hat{}\pi_{\mathrm{regret}}$ （其合并质量分别为 $\hat{}q_{\mathrm{ratio}}$ / $\hat{}q_{\mathrm{payoff}}$ / $\hat{}q_{\mathrm{regret}}$）所造成的加性损失。令 $\hat{}\Gamma[\pi] \triangleq \inf_{\beta\in B}$收益$_{\beta}[\pi]$最优值$(\beta)$，$\hat{}P[\pi] \triangleq \inf_{\beta\in B}$收益$_{\beta}[\pi]$，且 $\hat{}L[\pi] \triangleq \inf_{\beta\in B}$收益$_{\beta}[\pi]$ − 最优值$(\beta)$。因此，我们有 $\hat{}q_{\mathrm{ratio}} \in \arg\max_{q\in Q} \hat{}\Gamma\left[\pi^{(q)}\right]$、$\hat{}q_{\mathrm{payoff}} \in \arg\max_{q\in Q} \hat{}P\left[\pi^{(q)}\right]$，以及 $\hat{}q_{\mathrm{regret}} \in \arg\max_{q\in Q} \hat{}L\left[\pi^{(q)}\right]$。

**比率**。 在这种情况下，我们有

$$\Gamma[\hat{\pi}_{\mathrm{ratio}}] \overset{(a)}{\geq} \hat{\Gamma}[\hat{\pi}_{\mathrm{ratio}}]-5\eta \overset{(b)}{\geq} \hat{\Gamma}\left[\pi^{(q^{\dagger}_{\mathrm{ratio}})}\right]-5\eta \overset{(c)}{\geq} \Gamma\left[\pi^{(q^{\dagger}_{\mathrm{ratio}})}\right]-5\eta \overset{(d)}{\geq} \Gamma\left[\pi^{*}_{\mathrm{ratio}}\right]-6\eta,$$

其中，$q^{\dagger}$ 比率$\in Q$ 是小于或等于 $q_{\mathrm{ratio}}$的最大合并质量网格点，不等式 (a) 成立，因为 $\hat{}\Gamma[\hat{}\pi_{\mathrm{ratio}}] \leq$收益$_{\hat{}\beta}[\hat{\pi}_{\mathrm{ratio}}]$最优值$(\hat{}\beta) \leq \Gamma[\hat{}\pi_{\mathrm{ratio}}]+5\eta$，其中，$\hat{}\beta \in B$是大于或等于 $\beta \in \arg\min_{\beta'\in[0,\infty)\cup\{\infty\}}$收益$_{\beta'}[\hat{\pi}_{\mathrm{ratio}}]$最优值$(\beta')$ 的最小理性水平网格点；不等式 (b) 成立，因为所选合并质量使估计目标函数最大化；不等式 (c) 成立，因为所选理性水平集合 $B$ 是完全理性水平集合的子集；不等式 (d) 成立，因为根据方程 (EC.8) $\beta \geq \beta\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right] \geq$) 和 $q^{\mathrm{FR}} W_{\beta}\left(s\ q^{\mathrm{FR}}\right) \geq \frac{q^{\mathrm{FR}}}{2}$ $W_{\beta}$ 最优值( ) 收益 ) ( )，最后一个不等式源于量化响应函数(·)

是单调不增的，并且 $s$（$q^{\mathrm{FR}}$）$\le 0$，对于任意有限理性水平 $\beta$，将最大最小最优合并质量向下取整至 $Q$ 所造成的损失至多为 $\frac{2\Delta}{q^{\mathrm{FR}}} \le \eta$。—

**收益**。在这种情况下，我们有

$$P\left[\hat{\pi}_{\mathrm{payoff}}\right] \overset{(a)}{\ge} \hat{P}\left[\hat{\pi}_{\mathrm{payoff}}\right] - \eta q^{\mathrm{FR}} \overset{(b)}{\ge} \hat{P}\left[\pi^{(q^{\dagger}_{\mathrm{payoff}})}\right] - \eta q^{\mathrm{FR}} \overset{(c)}{\ge} P\left[\pi^{(q^{\dagger}_{\mathrm{payoff}})}\right] - \eta q^{\mathrm{FR}} \overset{(d)}{\ge} P\left[\pi^{*}_{\mathrm{payoff}}\right] - \frac{3}{2}\eta q^{\mathrm{FR}},$$

其中 $q^{\dagger}$ 收益 $\in Q$ 是小于或等于 $q_{\mathrm{payoff}}$的最大合并质量网格点，不等式 (a) 成立，因为 $\hat{}P\left[\hat{}\right.$ $\left.\pi_{\mathrm{payoff}}\right] \le$收益$_{\beta^{\dagger}}\left[\hat{}\pi_{\mathrm{payoff}}\right] \le P\left[\hat{}\pi_{\mathrm{payoff}}\right] + \eta q^{\mathrm{FR}}$其中 $\beta^{\dagger} \in B$是大于或等于 $\beta \in \arg\min_{\beta' \in [0,\infty) \cup \{\infty\}}$ 收益 $_{\beta'}\left[\hat{}\pi_{\mathrm{payoff}}\right]$的最小理性水平网格点；不等式 (b) 成立，因为所选合并质量使估计目标函数最大化；不等式 (c) 成立，因为所选理性水平集合 $B$ 是完全理性水平集合的子集；不等式 (d) 成立，因为根据方程（EC.8），将最大最小最优合并质量向下取整至 $Q$，损失至多为 $\Delta \le \frac{\eta q^{\mathrm{FR}}}{2}$。

—

**遗憾**。在这种情况下，我们有

$$L\left[\hat{\pi}_{\mathrm{regret}}\right] \overset{(a)}{\ge} \hat{L}\left[\hat{\pi}_{\mathrm{regret}}\right] - \frac{5}{2}\eta q^{\mathrm{FR}} \overset{(b)}{\ge} \hat{L}\left[\pi^{(q^{\dagger}_{\mathrm{regret}})}\right] - \frac{5}{2}\eta q^{\mathrm{FR}} \overset{(c)}{\ge} L\left[\pi^{(q^{\dagger}_{\mathrm{regret}})}\right] - \frac{5}{2}\eta q^{\mathrm{FR}} \overset{(d)}{\ge} L\left[\pi^{*}_{\mathrm{regret}}\right] - 3\eta q^{\mathrm{FR}},$$

其中，$q^{\dagger}$ 遗憾 $\in Q$ 是小于或等于 $q_{\mathrm{regret}}$的最大合并质量网格点。不等式 (a) 成立，因为 $\hat{}L\left[\hat{}\right.$ $\left.\pi_{\mathrm{regret}}\right] \le$收益$_{\beta^{\ddagger}}\left[\hat{}\pi_{\mathrm{regret}}\right]$ −最优值$(\beta^{\ddagger}) \le L\left[\hat{}\pi_{\mathrm{regret}}\right] + \frac{5}{2}\eta q^{\mathrm{FR}}$其中，$\beta^{\ddagger} \in B$是大于或等于 $\beta \in$的最小理性水平网格点 $\arg\min_{\beta' \in [0,\infty) \cup \{\infty\}}$ 收益$_{\beta'}\left[\hat{}\pi_{\mathrm{regret}}\right]$ −最优值$(\beta')$。不等式 (b) 成立，因为所选合并质量使估计目标函数最大化；不等式 (c) 成立，因为所选理性水平集合 $B$ 是完整理性水平集合的子集；不等式 (d) 成立，因为根据方程（EC.8），将最大最小最优合并质量向下取整至 $Q$，最多会损失 $\Delta \le \frac{\eta q^{\mathrm{FR}}}{2}$。

注意到 $\Gamma\left[\pi^{*}_{\mathrm{ratio}}\right] \ge \Gamma\left[\pi^{(q^{\mathrm{FR}})}\right] \ge \frac{1}{2}$和 $P\left[\pi^{*}_{\mathrm{payoff}}\right] \ge P\left[\pi^{(\overline{q^{\mathrm{FR}}})}\right] \ge \frac{q^{\mathrm{FR}}}{2}$。取 $\eta = \epsilon/12$，即可得到所述的近似保证。最后，我们分析运行时间。根据我们的构造，存在 $O(1/\epsilon)$ 个合并质量网格点，以及 $O(m/\epsilon + 1/\epsilon^2)$ 个理性水平网格点。对于每个理性水平，根据命题 EC.5，计算基准审查需要 $O(m)$，而评估所有可能的候选审查方案需要 $O(1/\epsilon)$。因此，总运行时间至多为 $O((m+1/\epsilon)^2/\epsilon)$，它关于 $m$ 和 $1/\epsilon$ 是多项式的。命题 EC.6 的证明至此完成。□

### EC.5.3. 计算近似理性稳健审查方案的全多项式时间近似方案

我们在算法1中给出了用于计算近似理性稳健审查方案的全多项式时间近似方案的正式描述。

**算法1** 用于计算近似理性稳健审查方案的全多项式时间近似方案。

1: **输入：** 实例 $\mathrm{I} = (m, \{\lambda_i\}^{i\in[m]}, \{v_i\}^{i\in[m]})$、理性水平集合 $[0,\infty)\cup\{\infty\}$，以及 $\epsilon\in(0,1)$。

2: **输出：** 近似理性稳健审查方案 $\hat{\pi}_{\text{ratio}}$、$\hat{\pi}_{\text{payoff}}$ 和 $\hat{\pi}_{\text{regret}}$。

3: 计算非正状态的总质量 $q^{\text{NP}} = \sum_{i\in[m]:\ v_i\le 0}\lambda_i$，以及完全理性接收者合并质量的最优审查 $q^{\text{FR}}$。

4: 设定 $\eta = \epsilon/12$、$N = \lceil 2/\eta\rceil$ 和 $K = \lceil 1/\eta\rceil$。

5: 构造合并质量网格

$$Q = \left\{ q^{\text{NP}} + \frac{j}{N}(q^{\text{FR}} - q^{\text{NP}}) : j = 0,\dots,N \right\}.$$

6: 初始化理性水平网格 $B = \{0,\infty\}$。对于每个非零信号

$$\delta \in \{s(q) : q\in Q\}\cup\{v_i : v_i > 0\},$$

将每个非负值 $\beta = \delta^{-1}\log((K-k)/k)$、$k = 1,\dots,K-1$ 加入 $B$。

7: 对于每个 $\beta\in B$，计算最优值$(\beta)$，使用命题EC.5。对于每个 $q\in Q$，计算 [22]

$$\hat{\Gamma}\left[\pi^{(q)}\right] = \inf_{\beta\in B}\frac{\textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q)}\right]}{\textsc{Opt}(\beta)},\ \hat{P}\left[\pi^{(q)}\right] = \inf_{\beta\in B}\ \textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q)}\right],\ \hat{L}\left[\pi^{(q)}\right] = \inf_{\beta\in B}\ \textsc{Payoff}_\beta\left[\pi^{(q)}\right] - \textsc{Opt}(\beta).$$

8: 选择 $\hat{q}_{\text{ratio}}$、$\hat{q}_{\text{payoff}}\in Q$，分别使估计的最坏情况比率和收益最大化；选择 $\hat{q}_{\text{regret}}\in Q$，使估计的负遗憾目标最大化。

9: **返回** $\hat{\pi}_{\text{ratio}} = \pi^{(\hat{q}_{\text{ratio}})}$、$\hat{\pi}_{\text{payoff}} = \pi^{(\hat{q}_{\text{payoff}})}$ 和 $\hat{\pi}_{\text{regret}} = \pi^{(\hat{q}_{\text{regret}})}$。

[22] 对于合并质量 $q^{\text{FR}}$，如果 $s(q^{\text{FR}}) = 0$，则无需进行网格搜索，即可直接得到其最坏情况性能 $\Gamma\left[\pi^{(q^{\text{FR}})}\right] = 1/2$、$P\left[\pi^{(q^{\text{FR}})}\right] = q^{\text{FR}}/2$ 和 $L\left[\pi^{(q^{\text{FR}})}\right] = -q^{\text{FR}}/2$。