图到黎曼流形的近等距嵌入

Sirui Liu，*IEEE* 学生会员，李宗鹏，*IEEE* 高级会员，以及李宝春，*IEEE* 会士

arXiv:2611.29469v1 [cs.IT] 22 Nov 2026

摘要

图以顶点表示对象，以边表示关系；正边权定义最短路径度量。度量嵌入利用目标空间几何分析距离。早期的基础性结果针对线性空间：纳什将黎曼流形等距嵌入欧几里得空间，而 Bourgain 将 n 点度量嵌入希尔伯特空间，畸变为 $O(\log n)$。相比之下，流形假设认为高维数据接近低维光滑流形，因此这类流形本身可以作为目标空间。由此自然引出一个问题：有限图度量能够以多大的畸变，在内蕴距离下嵌入低维光滑流形？尽管星形图 $K_{1,3}$ 不能等距嵌入任何完备黎曼流形，但我们证明，近等距嵌入总是存在：对于 $\varepsilon > 0$ 以及任意有限连通正权图，我们构造一个光滑连通闭可定向曲面，使其位于 $\mathbb{R}^3$ 中，并且其顶点可进行非收缩的 $(1+\varepsilon)$-嵌入，其中 ε可以任意小，且与图的参数无关。这一构造能够在图与曲面之间转移通信方案。对于独立单播，分数路由将流量拆分到多条路径上，而网络编码则允许中继节点组合消息。空间信息流允许中继节点位于任意位置，并按带宽乘以距离计费。虽然在欧几里得空间中，编码优势（最优路由成本与编码成本之比）等于一，但我们证明，有限正权无向图上的编码优势可以转移到光滑闭曲面上，且因子可任意接近一。多重单播猜想的反例及其放大构造，给出了具有无界编码优势的光滑闭曲面。反过来，对于可定向亏格为 g 的有限无向图，以及亏格为 g 的光滑闭可定向曲面，编码优势至多为 $C\log(g+2)$，其中 C 为绝对常数。

索引词

度量嵌入、网络编码、黎曼流形、空间信息流。

I. 引言

图用顶点表示对象，用边表示关系 [1], [2]。在一个边权为正的连通图中，两个顶点之间的距离是连接它们的最短路径的长度。此类最短路径度量广泛出现在组合学、理论计算机科学、信息论和网络科学中，在通信网络中也有直接含义：当边权重表示链路传输成本时，最短路径决定了成本最低的路由。分析离散距离的一种方法，是将度量空间映射到具有几何或代数结构的目标空间，同时控制畸变；畸变衡量两两距离的相对变化。这样，目标空间的分析和几何工具便可应用于原空间。

连续几何和离散几何中的许多基础性嵌入定理都以线性空间为目标。在连续情形下，黎曼从流形内部发展了其内蕴几何：黎曼度量定义了流形上曲线的弧长，而两点之间曲线长度的下确界则给出它们的内蕴距离。随后，纳什 [3], [4] 证明，每个光滑黎曼流形都能等距嵌入到维数足够高的欧几里得空间中。在离散情形下，Bourgain [5] 证明，每个 n 点度量空间都能以畸变 $O(\log n)$ 嵌入希尔伯特空间；后续研究则确立了将图度量嵌入各种赋范空间时的畸变界 [6]–[8]。这些结果以线性空间为目标，而机器学习和高维统计学中的流形假设则认为，高维数据集中在低维光滑流形 [9], [10]附近。在这一假设下，高维数据的分析可以聚焦于底层流形，而不受环境维数的支配。要确定流形假设对有限样本施加了哪些约束，必须找出哪些有限度量空间可以嵌入配备内蕴距离的低维光滑黎曼流形；由于每个有限度量都是某个有限正权图的最短路径度量，这等价于刻画哪些有限正权图度量允许此类嵌入——这一问题迄今尚未得到系统解答。

如果要求无畸变的等距嵌入，那么目标度量的光滑性会排除许多有限图。尽管 Kuratowski 映射能将每个有限度量空间等距嵌入到 ℓ_∞ [7]、 [11] 中，但其 ℓ_∞ 范数并不光滑。在一个完备、连通的光滑黎曼流形上，任意两点都可以通过一条曲线连接，该曲线的长度等于它们的
内蕴距离。当按弧长参数化时，这样的曲线称为极小测地线；它沿切向方向平滑延伸，不能转角或产生分支。这直接排除了四顶点星形图的等距嵌入

Sirui Liu 任职于中国北京清华大学网络科学与网络空间研究院，同时任职于中国山东泉城实验室。电子邮箱：liu-sr24@mails.tsinghua.edu.cn。李宗鹏任职于中国山东泉城实验室，同时任职于中国北京清华大学网络科学与网络空间研究院。电子邮箱：zongpeng@tsinghua.edu.cn。通讯作者。李宝春任职于加拿大多伦多大学。电子邮箱：bli@ece.toronto.edu。

$K_{1,\,3}$：它的三个叶节点经由中心两两之间的距离均为 2，因此在任何等距嵌入中，对于任意一对叶节点，连接它们并经过中心的单位长度极小测地线首尾相接后，都会形成一条长度为 2 的极小测地线。于是，从中心到三个叶节点的三条测地线在中心处必然两两指向相反方向，这对于三个单位向量来说是不可能的。由于等距嵌入对$K_{1,\,3}$已经无法实现，一个自然的问题随之产生：一旦允许乘法畸变大于 1，每个有限连通正权图的最短路径度量是否都能近等距嵌入到某个配备内蕴距离的光滑低维黎曼流形中?

我们对此问题给出肯定的回答。设 $G=(V,\ E,\ c)$ 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的有限连通正权图。对于任意 $\varepsilon>0$，我们构造一个亏格为 $m-n+1$ 的光滑闭连通可定向曲面 $M\subset\mathbb{R}^3$，以及一个单射 $f\colon V\to M$，使得 M 上的内蕴距离满足

$$d_G(u,v)\le d_M\big(f(u),f(v)\big)\le(1+\varepsilon)d_G(u,v),\qquad u,v\in V. \tag{1}$$

直观地说，这样的曲面是没有边界的闭曲面，其亏格表示把手的数量（例如，球面的亏格为 0，环面的亏格为 1；形式化定义见第三节-B）。由于每个有限度量都是以两两距离作为权重的完全图的最短路径度量，(1) 表明，每个有限度量空间都能以任意接近 1 的畸变嵌入到一个二维光滑闭曲面中，而该曲面的拓扑结构和黎曼度量可能取决于数据。因此，若要让流形假设约束有限的内蕴距离数据，候选流形就必须满足进一步的条件。例如，Fefferman等人 [9]的统计模型对流形体积设定了上界，并对可达半径设定了下界。

这一构造还使得通信方案能够在图与光滑曲面之间转换：在通信网络中，正边权表示单位带宽的链路成本。当多个彼此独立的源汇对同时通过有限无向网络进行通信时，分数路由会将每个会话的流量分配到多条路径上，而网络编码还允许中间节点以代数方式组合收到的消息。Li 和 Li 的多重单播猜想 [12]断言，在边容量相同的条件下，网络编码无法扩大分数路由的可达速率区域——这一假设被用于外存整数排序和常数度乘法电路的条件下界 [13], [14]——直到 Zhang等人 [15]以及 Braverman 和 He [16] 近期给出了反例，在有限无向图上推翻了该猜想。将这一比较推广到连续几何，依赖于吞吐量与成本之间的等价关系：当且仅当在无向多单播网络中，网络编码相较于分数路由没有成本优势时，多重单播猜想成立；此处总网络成本是边流量与边长乘积的总和。

Li 和 Wu [17], [18] 提出了空间信息流模型，以在连续度量空间中表述这一最低成本网络布局问题；随后，Xiahou 等人 [19] 在此框架下发展了几何网络设计：终端固定在空间中，任意数量的中继节点和编码节点都可以放置在任意位置，以布局链路，其成本等于带宽乘以距离；目标是使链路总成本最小。对于欧几里得空间 [17] 中的独立单播会话，以及 ℓ_p^n 中针对 $1\le p<2$ [20]的情形，最优网络编码成本始终等于最优分数路由成本。Xiahou 等人 [19] 提出了黎曼流形上是否存在多播编码优势的问题；然而，在空间信息流模型问世后的十多年里，最优网络编码成本是否可能低于光滑流形上的最优分数路由成本，这个问题始终悬而未决。

要建立离散图与光滑闭曲面上的空间信息流之间的对应关系，仅控制顶点距离是不够的，因为中继节点可以放置在曲面上的任意位置，而且链路可以任意短。尽管 $\mathbb{R}^3$ [21]中的光滑曲面所给出的 Gromov–Hausdorff 逼近能够产生顶点集的近等距嵌入，但它们既无法控制曲面亏格，也无法避免加性距离误差；当任意短的中继链路不断累积时，这些误差无法给出一致的乘性成本界。相反，我们将 G 视为度量图 $|G|$，它由长度为 c_e的区间粘合而成；我们将 G 无交叉地嵌入 $\mathbb{R}^3$，取一个细管状邻域的边界作为亏格为 $m-n+1$的光滑闭曲面 M，并直接构造连续映射 $\iota\colon\ |G|\to M$和 $\pi\colon\ M\to|G|$，使其满足

$$\mathrm{Lip}(\iota)\le1+\varepsilon,\qquad\mathrm{Lip}(\pi)\le1,\qquad\pi(\iota(v))=v,\quad v\in V.$$

在这里，ι使任意图上的解的成本最多增加至原来的 $1+\varepsilon$倍，而全局非扩张映射 π则将中继节点和编码节点任意放置的曲面布局逐条链路投影回 $|G|$，且不会增加成本。沿最短路径展开这些链路，并将每条无分支线段链收缩回其原始边，即可在离散图 G 上得到一个成本不高于原方案的方案。因此，对于 V上所有有限多播单播需求族，最优分数路由成本和最优网络编码成本都同时介于各自对应图上成本的1倍与 $1+\varepsilon$ 倍之间。

因此，对于图顶点上的任意非空需求族，转移前后的编码优势之比都可以做到任意接近 1。结合近期对多重单播猜想的反例、共同速率差距的放大以及吞吐量–成本对偶性，定理 4 得出：存在编码优势任意大的有限正权无向图实例，进而存在一族具有无界编码优势的光滑闭曲面。在这一族中，图的规模和独立环的数量都趋于无穷大，并且每个构造出的曲面的亏格等于独立环的数量。这引出了一个互补问题：在光滑闭曲面上实现任意大的编码优势，是否必然需要高亏格?

我们对此给出了肯定的回答。对于图，我们采用可定向亏格，即图能够在其上无交叉绘制的闭可定向曲面的最小亏格。我们证明，对于可定向亏格至多为 g 的有限正权无向图，以及亏格至多为 g 的光滑连通闭可定向曲面，编码优势均至多为 $C\log(g+2)$，其中 C 是一个绝对常数。因此，要实现编码优势 A，亏格必须为 $g \geq \exp(A/C) - 2$。

尽管光滑流形上的极小测地线不能在内点处拐弯或分支，但映射（ι，π）使我们能够在二维光滑闭曲面上保留图顶点距离，且畸变可任意接近 1，同时控制整个度量图 $|G|$ 与曲面之间双向传递路径的长度。这一空间信息流结果展示了该构造更广泛的意义。更一般地，对于其他以距离或路径长度定义的问题，只要相应的可行结构能在（ι，π）下双向传递，相同的长度界就可能有助于关联图与曲面上的相应量。

我们的主要贡献有三点。

1) **有限度量空间到光滑闭曲面的近等距嵌入**。对于每个具有 n 个顶点和 m 条正权边的有限连通无向图 G，以及每个 $\varepsilon > 0$，我们构造一个亏格为 $m-n+1$、属于 $\mathbb{R}^3$ 的光滑闭连通可定向曲面 M，一个从度量图到曲面的（$1+\varepsilon$）-Lipschitz映射 $\iota\colon |G| \to M$，以及一个非扩张映射 $\pi\colon M \to |G|$，使得 $\pi \circ \iota$ 固定每个顶点。任意两个顶点像之间的内蕴距离介于它们的图距离与该距离的 $1+\varepsilon$ 倍之间。完全图表示为每个有限度量空间提供了这样的近等距嵌入。

2) **空间信息流中的编码优势转移**。在源汇对传输独立消息的多单播通信中，分数路由将流拆分并沿路径转发，而网络编码允许中间节点以代数方式组合消息；总成本按链路带宽与距离乘积之和衡量，编码优势定义为最优分数路由成本与最优网络编码成本之比。我们证明，编码优势可从有限正权无向图转移到光滑闭曲面 $\mathbb{R}^3$，且两者编码优势之比可任意接近 1。将这一转移应用于已知的编码优势可任意大的无向图实例，可得到一族编码优势无界的光滑闭曲面。

3) **图与曲面上编码优势的亏格上界**。图的可定向亏格是指能够无交叉嵌入该图的闭可定向曲面的最小亏格。对于可定向亏格至多为 g的任意有限连通正权无向图，或对于亏格至多为 g 且中继放置不受限的任意光滑闭连通可定向黎曼曲面，任意有限组独立单播需求的最优分数路由成本至多为最优网络编码成本的 $C\log(g+2)$倍，其中 C 为一个绝对常数。

第二节回顾相关工作，第三节介绍预备知识。第四节陈述主要结果，第五节概述其证明。第六节构造具有指定边长的空间图嵌入，第七节构造光滑曲面以及两个方向上的映射。第八节研究空间信息流中的编码优势，第九节总结全文。

II. 相关工作

A. 有限度量嵌入

将有限度量空间映射到赋范线性空间时，目标空间的几何决定了可达到的畸变。在没有光滑性要求时，Kuratowski 映射可将每个有限度量空间等距嵌入有限维 ℓ_∞ [7], [11]；对于希尔伯特空间，Schoenberg 判据指出，存在等距嵌入当且仅当平方距离矩阵是条件负半定的 [23]。允许乘法畸变时，Johnson 和 Lindenstrauss [24] 确立了希尔伯特空间有限子集的降维结果，而 Bourgain [5] 证明，每个n点度量空间都能以 $O(\log n)$ 畸变嵌入希尔伯特空间；全面综述请参见 [7], [8]。

沿着这一研究方向，Linial等人 [6] 研究了将有限度量嵌入 L_1的问题。网络流与割度量之间的联系在于：割度量对割两侧的顶点赋予距离 1，对同一侧的顶点赋予距离 0。由于每个有限 L_1 度量都是这些割度量的非负线性组合，[7], 因此，对无向图上所有正边长下的 L_1 畸变给出一个统一上界，就能限制该图上最稀疏割值与最大并发流值之比 [25]。每个 n点度量都能以 L_1 $O(\log n)$畸变嵌入， [5], [6], 而对于有界亏格图，这一界不会随顶点数增长：OpenAI [26]证明，有限连通正权平面图的最短路径度量可以以常数畸变嵌入 L_1；结合 Sidiropoulos 随机平面化定理 [27]， O可将亏格至多为 g的有限连通正权图以$g+2$ L_1 ($\log(g+2)$) 畸变嵌入。此类嵌入到 ℓ_∞、希尔伯特空间和 L_1 的研究，规定了线性目标空间的类型，并考察畸变如何随顶点数或亏格变化；相比之下，我们考虑嵌入到二维光滑闭曲面中，其亏格和黎曼度量可以根据输入图进行调整，从而实现任意接近 1 的乘法畸变。

B. 嵌入光滑曲面的度量嵌入

当离散集等距嵌入到完备光滑黎曼流形中时，两两距离等于极小测地线的长度。由于光滑流形上的极小测地线不能急剧弯曲或出现分支点，有限

星形 $K_{1,\,3}$ 无法等距嵌入到任何完备光滑黎曼流形中（见 [28, 定理 2.1]的证明）。对于无限离散集，Eilat 和 Klartag [29] 证明，如果一个完备连通黎曼曲面包含一个平面网的等距副本——即欧几里得平面中与每个点的距离都不超过某个固定值的离散集——那么整个曲面必定与欧几里得平面等距。

允许存在较小的距离误差，会引出一个不同的问题：光滑曲面能否近似整个度量图，包括其边的内部？沿边区间测得的距离使有限连通度量图成为一个紧内度量空间，因此可以用 Gromov–Hausdorff 距离将其与曲面进行比较 [30], [31]。Cassorla [21]证明，在此距离下，任意紧内度量空间都可以用光滑曲面近似 $\mathbb{R}^3$。对于一个固定的有限图，由于不同顶点之间存在正的最小间距，取足够小的加性误差并对曲面重新缩放，即可在顶点集上得到一个非收缩（$1+\varepsilon$）嵌入。然而，这种近似无法控制曲面的亏格，且只能给出加性距离界；当中继节点可以任意放置在曲面上时，将各链路的加性误差界相加，无法得到网络总成本的一致乘性界。若要控制亏格，可以改为从图在三维空间中的邻域着手。有限连通图在 $\mathbb{R}^3$ 中的无交叉嵌入若有 n 个顶点和 m 条边，其细管状邻域的边界是一个亏格为 $m-n+1$ [32]、[33]的光滑闭可定向曲面。 这些拓扑结果确立了此类邻域的存在性及其拓扑类型，但并未探讨如何在 $\mathbb{R}^3$ 中指定任意正边长，也未定量比较曲面上的内在距离与图上的最短路径距离。

C. 流形假设

流形假设常被视为当今人工智能和大语言模型研究背后的基础理论，它认为高维观测位于某个低维光滑流形附近。受这一观点启发，非线性降维方法从有限样本中提取低维坐标：例如，Isomap [34], 利用样本邻域图上的最短路径距离来近似流形上的测地距离；而局部线性嵌入 [35], 、拉普拉斯特征映射 [36], 以及一些表示学习方法 [10] 则以相关方式利用局部几何结构。

在检验流形假设或根据有限样本定量重建流形时，现有数学结果除了要求低维光滑性，还会对体积、弯曲程度以及候选流形上不同部分彼此接近的程度设定界限。例如，Fefferman 等人 [9], 检验了数据是否位于体积有界且可达半径下界大于零的流形附近，从而确保流形不会弯曲得过于剧烈，也不会几乎与自身相交；关于从随机样本恢复流形拓扑 [37] 以及从有限或含噪的内蕴距离重建黎曼流形 [38], [39] 的结果，同样假设可达半径、曲率或单射半径有界。我们的嵌入定理表明，若不施加这类几何界限，并允许二维光滑闭曲面的亏格和度量依赖于数据，那么任意有限度量空间都能以任意接近 1 的畸变嵌入其中；因此，仅假设数据位于低维光滑流形上，并不能在任意小的乘法畸变范围内限制有限内在距离结构。

D. 多重单播猜想

网络编码允许中间节点在转发消息之前，以代数方式组合收到的消息 [40]–[42]。对于无向网络上的多个独立单播会话，Li 和 Li [12] 以及 Harvey 等人 [43] 提出了多重单播猜想，断言在边容量相同的情况下，网络编码与分数路由具有相同的可达速率区域；根据线性规划对偶性，这等价于：对于任意给定的需求和非负边成本，网络编码所需的总传输成本不会低于最优分数路由 [12]。多商品流的研究结果揭示了在特定图与终端配置下，分数路由可行性与割条件之间的联系 [44]–[48]。对于会话数量较少、终端位置特殊或拓扑受限的网络，编码上界和图归约证明了在某些情况下，编码速率不会超过分数路由速率 [49]–[56]。此外，Braverman 等人 [22]证明，只要在单个无向图上公共编码速率高于公共分数路由速率，就能将这一比率推广到一个图族，使其随顶点数呈多对数级增长。

该猜想还被用作外存整数排序、常数度布尔乘法电路和数据结构下界的条件假设 [13], [14], [57]。近来有几种构造推翻了该猜想：Zhang 等人 [15] 利用可逆电路，在一个次立方、单位容量的无向图上构造了一个二元线性编码反例；Braverman 和 He [16] 则在一个二部图上构造了一个 $\mathbb{F}_9$ 线性反例。Li 等人 [58] 以整数乘法构造 [59] 中的有限网络及后续电路改进为基础，构造了一个二元线性反例，并改进了外存整数排序的上界；而 [59] 中的异或交换单元的网格排列则给出了一个含 32 个顶点的反例 [60]。

E. 空间信息流

空间信息流将通信网络置于连续度量空间中：源终端和汇终端的位置固定，中继节点和编码节点可以放置在空间中的任意位置，而总网络成本定义为链路带宽乘以距离的总和

[17], [18]。对于多个独立单播需求，Li 和 Wu [17] 证明，在欧几里得空间中，最优网络编码成本等于最优分数路由成本；Liu 和 Li [20] 通过将有限子集近等距嵌入到 ℓ_1中，将这一等式推广到 ℓ_p^n 中的 $1 \le p \le 2$ 。

Xiahou等人 [19]使用到有限维 ℓ_p 空间中的嵌入，研究无向图上的多单播。他们的论证可推广到任何不存在编码优势的度量空间。假设存在一个从图的顶点到此类空间的映射，保持每个源节点与其汇节点之间的最短路径距离。如果每条边的权重都不小于其端点像之间的距离，那么对于图上的这些需求，编码与分数路由的最优成本相同。Xiahou等人 还提出了一个问题：在黎曼流形上，网络编码的成本是否可能低于分数路由。

我们通过将编码优势反向转移——从无向图转移到光滑闭曲面——来回答这个问题。通过比较度量图与整个曲面上两个方向的成本，我们证明，即使允许将中继节点放置在曲面上的任意位置，这种优势依然存在。

III. 预备知识

A. 度量图

设 $G=(V,\ E,\ c)$是一个边长为正数 $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$的有限连通无向简单图，记作 $c_e = c(e)$。将每条边 $e \in E$ 替换为长度为 c_e 的闭区间，并将其端点与相邻顶点粘合，得到紧致度量图 $|G|$。我们用 d_G 表示 $|G|$ 上的最短路径度量及其在 V上的限制。

每个 有限度量空间都可表示为一个边权为正的完全图的最短路径度量 h.

引理 III.1 (有限度量的完全图表示)。 设 (X, d) 是一个有限度量空间。给完全图 K_X 的每条边 $\{x, y\}$ 赋予长度 $c_{\{x,y\}} = d(x, y)$ 后， X 上 K_X 的最短路径度量就等于 d。

证明。 对于 $x \neq y$，边 $\{x, y\}$ 给出 $d_{K_X}(x, y) \le d(x, y)$；而根据三角不等式，从 x 到 y 在K_X 中的任意路径，其长度都至少为 $d(x, y)$。对于 $x = y$，这两个距离都为零。■

给定度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y)，映射 $F\colon X \to Y$的 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}(F)$ 是满足下式的最小 $L \ge 0$

$$d_Y\big(F(x), F(x')\big) \le L\, d_X(x, x')$$

对所有 $x, x' \in X$均成立；若不存在这样的 L，则 $\mathrm{Lip}(F) = +\infty$。满足 $\mathrm{Lip}(F) \le 1$的映射称为非扩张。满足下式的映射 $f\colon X \to Y$

$$d_X(x, x') \le d_Y\big(f(x), f(x')\big) \le D\, d_X(x, x')$$

对所有 $x,\ x' \in X$ 称为畸变至多为 D 的非收缩嵌入。

B. 光滑曲面

光滑黎曼曲面 M 在每一点的切平面上都带有一个平滑变化的内积，该内积定义了 L_M上任意分段光滑曲线 γ的弧长 γ。对于带有诱导度量的光滑曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$，使用 $\mathbb{R}^3$ 的标准欧几里得内积测量切向量，即可直接得到该弧长。当 M 连通时， $x,\ y \in M$ 之间的内蕴距离定义为

$$d_M(x, y) = \inf_{\gamma} L_M(\gamma),$$

其中，下确界取遍连接 x 和 y 于 M上的所有分段光滑曲线。

无边界紧致光滑曲面称为光滑闭曲面；在 $\mathbb{R}^3$中，如果一个光滑闭曲面拥有连续的单位法向量场，则称其为可定向的。从拓扑学角度看，一个连通的光滑闭可定向曲面 M 由其把手数量决定，该数量称为其亏格 $g(M) \ge 0$。相应地，有限无向图的可定向亏格是指能够将该图无交叉地嵌入其中的连通闭可定向曲面的最小亏格。

C. 空间信息流

设 $(X,\ d_X)$ 为一个度量空间，且 $\mathcal{D} = \{(s_i,\ t_i,\ r_i)\}_{i=1}^{k}$是$X$中的一个有限索引独立单播需求族，其中会话 i 的源终端和目的终端为 $s_i,\ t_i \in X$ ，其 $s_i \neq t_i$ ，目标速率为 $r_i > 0$。即使终端对和速率相同，不同索引也表示独立消息。按照 [17], [19], ， X中的有限方案网络由一个有限有向多重图 $N = (W,\ A)$、一个节点放置映射 $p\colon W \to X$、非负链路带宽 $b_a \ge 0 (a \in A)$，以及实现 $\mathcal{D}$的本地路由或网络编码操作构成，其中 p 将所有终端固定在其指定位置，并将任何额外的中继节点或编码节点任意放置在 X中。我们采用零误差网络编码。每个节点根据其本地源消息和先前收到的信息确定其发送内容，每个目的终端都必须准确恢复其请求的消息。令 b_a 表示该方案通过有向链路 a发送数据的平均速率。总成本为

$$\mathrm{Vol}_X(N, p) = \sum_{a \in A} b_a\, d_X\big(p(a^-), p(a^+)\big), \tag{2}$$

其中， a^- 和 a^+ 分别表示弧 a的尾端和首端；不同的抽象节点可以位于 X中的同一点，并且允许存在平行弧。

我们将所有能够实现 $\mathcal{D}$ in X 的有限分数路由方案网络和有限网络编码方案网络上式 (2) 的下确界分别记为 $\mathrm{Route}_X(\mathcal{D})$ 和 $\mathrm{Code}_X(\mathcal{D})$。类似地，对于有限连通正权无向图 $G=(V,\ E,\ c)$ 及其上的需求族 $\mathcal{D}$，$\mathrm{Route}_G(\mathcal{D})$ 和 $\mathrm{Code}_G(\mathcal{D})$ 分别表示图 G 上的最优分数路由成本和最优网络编码成本，其中每条无向边 $e\in E$ 的成本为其两个方向传输的带宽总和乘以 c_e 。

给定映射 $F\colon X\to Y$，使得对于每个会话， $F(s_i)\neq F(t_i)$，映射后的需求族 is

$$F\mathcal{D}=\big\{(F(s_i),F(t_i),r_i)\big\}_{i=1}^{k}. \tag{3}$$

每当 $\mathrm{Code}_X(\mathcal{D})>0$ 时，编码优势定义为

$$\mathrm{Adv}_X(\mathcal{D})=\frac{\mathrm{Route}_X(\mathcal{D})}{\mathrm{Code}_X(\mathcal{D})}, \tag{4}$$

其中 $\mathrm{Adv}_G(\mathcal{D})=\mathrm{Route}_G(\mathcal{D})/\mathrm{Code}_G(\mathcal{D})$ 在图上的定义类似。

IV. Main Results

A. 图与有限度量空间的近等距嵌入

每个有限连通正权图的顶点集配备其最短路径度量后，都能以任意接近 1 的畸变非收缩地嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑闭曲面。

定理 IV.1（有限正权图的近等距嵌入）。令 $G=(V,E,c)$ 为一个有 n 个顶点和 m 条边、边长为 $c_e>0$（对所有 $e\in E$）的有限连通无向简单图。对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个亏格为.....的光滑连通闭可定向曲面 $M\subset\mathbb{R}^3$

$$g(M)=m-n+1 \tag{5}$$

以及一个单射 $f\colon V\to M$，使得

$$d_G(u,v)\le d_M\big(f(u),f(v)\big)\le(1+\varepsilon)\,d_G(u,v),\qquad u,v\in V. \tag{6}$$

根据引理 III.1，每个有限度量空间都是某个正权完全图的最短路径度量，因此都允许近等距嵌入到光滑闭曲面中。

推论 IV.2（有限度量空间的近等距嵌入）。设（X、d）是一个具有 $n\ge 2$ 个点的有限度量空间。对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个亏格为 $M\subset\mathbb{R}^3$ 的光滑连通闭可定向曲面

$$g(M)=\frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{7}$$

以及一个单射映射 $f:X\to M$ 使得

$$d(x,y)\le d_M\big(f(x),f(y)\big)\le(1+\varepsilon)\,d(x,y),\qquad x,y\in X. \tag{8}$$

证明。将定理 IV.1 应用于引理 III.1 中的正权完全图 K_X，该图有 n 个顶点和 $n(n-1)/2$ 条边。■

B. 空间信息流中的成本与编码优势转移

在空间信息流中，中继节点和编码节点可以放置在曲面上的任意位置，因此，仅控制图顶点之间的距离并不能限制多跳链路的总成本。对于每个具有 n 个顶点和 m 条正权边的有限连通无向简单图$G=(V,\ E,\ c)$，以及每个 $\varepsilon>0$，都存在一个亏格为 $m-n+1$ 的光滑连通闭可定向曲面 $M\subset\mathbb{R}^3$ 和连续映射（第七节中的定理 VII.5）

$$\iota:|G|\to M,\qquad \pi:M\to|G|, \tag{9}$$

使得 $\pi(\iota(v))=v$ 对所有 $v\in V$ 均成立，并且

$$\mathrm{Lip}(\iota)\le 1+\varepsilon,\qquad \mathrm{Lip}(\pi)\le 1. \tag{10}$$

施加限制 $f=\iota|_V$ 即可得到定理 IV.1：上界由 $\mathrm{Lip}(\iota)\le 1+\varepsilon$ 得出，而 $d_G(u,\ v)=d_G(\pi(f(u))\ \pi(f(v)))\le d_M(f(u)\ f(v))$ 给出了下界和单射性。此外， ι和 π在 $|G|$ 与整个曲面 M之间双向传递通信方案，确保对于 V上的所有有限多播需求族，同一个曲面 M 都能以不超过 $1+\varepsilon$ 的因子保持最优分数路由成本和最优网络编码成本。

定理 IV.3（通信成本与编码优势的双向保持）。 设 $G = (V、 E、 c)$ 是一个具有 n 个顶点和 m 条正权边的有限连通无向简单图。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个亏格为 $m - n + 1$ 的光滑连通闭可定向曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 以及一个单射映射 $f : V \to M$，使得对于 V上的每个有限多播需求族 $\mathcal{D}$，

$$\mathrm{Route}_G(\mathcal{D}) \le \mathrm{Route}_M(f\mathcal{D}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{Route}_G(\mathcal{D}), \tag{11}$$

$$\mathrm{Code}_G(\mathcal{D}) \le \mathrm{Code}_M(f\mathcal{D}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{Code}_G(\mathcal{D}). \tag{12}$$

每当代码$_G$（$\mathcal{D}$）> 0时，

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathrm{Adv}_G(\mathcal{D}) \le \mathrm{Adv}_M(f\mathcal{D}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{Adv}_G(\mathcal{D}). \tag{13}$$

定理 IV.3 将每个图实例的编码优势传递到相应的曲面。现有的反例和放大构造给出了具有任意大的编码优势的图实例。将传递定理应用于这些实例，可得以下结果。

定理 IV.4（光滑闭曲面上任意大的编码优势）。 对于每个 $A > 1$，存在一个光滑连通闭可定向曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 以及一个定义在 M 上的有限多单播需求族 $\mathcal{D}$，使得

$$\mathrm{Route}_M(\mathcal{D}) > A\ \mathrm{Code}_M(\mathcal{D}) > 0. \tag{14}$$

C. 编码优势的亏格上界

当图的可定向亏格或光滑闭曲面的亏格至多为 g 时，多单播编码优势由 $O(\log(g+2))$ 统一界定。

定理 IV.5（编码优势的亏格上界）。 存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对于每个整数$g \ge 0$，如果 X 是以下两者之一：可定向亏格至多为 g 的有限连通正权无向图，或亏格至多为 g 的光滑连通闭可定向黎曼曲面，则定义在 X上的每个有限多单播需求族 $\mathcal{D}$ 均满足

$$\mathrm{Route}_X(\mathcal{D}) \le C\log(g+2)\ \mathrm{Code}_X(\mathcal{D}), \tag{15}$$

其中 log 表示自然对数。令 $g = 0$，可知平面图以及亏格为0 的光滑闭曲面（拓扑球面）上的多播编码优势有绝对常数上界。此外，若 $\mathrm{Code}_X(\mathcal{D}) > 0$且 $\mathrm{Adv}_X(\mathcal{D}) \ge A$，则 $g + 2 \ge \exp(A/C)$。

V. 证明概述

定理 IV.1 和 IV.3 的核心在于构造 (9)–(10) 中度量图 $|G|$ 与光滑闭曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 之间的双向映射 $\iota : |G| \to M$ 和 $\pi : M \to |G|$。我们首先在 $\mathbb{R}^3$ 中绘制 G，使其没有交叉，且每条边都具有指定的空间弧长。由于通常无法在 $\mathbb{R}^3$ 中直接用直线线段绘制任意正边长而不产生交叉，我们先将顶点放置在曲线上的互异点处(t, t^2, t^3)，使任意三点不共线、任意四点不共面，从而确保相邻顶点之间的直线段绝不相交；将图形缩小后，每条线段都会短于其目标长度。接着，我们在每条边的中部周围放置两两不相交的细实心圆柱体，并将每个圆柱体内的直轴向线段替换为平滑的振荡曲线。选择足够高的振荡频率，再调整振幅，就能独立延长每条边至任意所需长度，同时不触碰其他边，也不改变顶点附近的直线方向。

接下来，我们将这个空间图加厚为半径较小的光滑实心管状区域 r，并将其边界作为光滑闭可定向曲面 M。从拓扑上看，将图加厚会把每个独立环变成一个把手，因此亏格为 M genus$m - n + 1$。从几何上看， M由较小的顶点连接部和沿各边周围连接这些连接部的细圆形管组成：将每个顶点连接部收缩到其图顶点，并将管的每个圆形横截面投影到对应的图边上的点，即定义了 $\pi : M \to |G|$；而在每个顶点连接部中选取一个代表点，并用沿管道、穿过端部连接部的曲线连接相邻的代表点，即定义了 $\iota : |G| \to M$。这里有一个关键细节：弯曲管道内侧的长度略短于其中心曲线的长度，而每条边两端的小段都会并入顶点连接部；如果我们将空间边长设为与 c_e 相等，那么管壁上的路径可能会比其在图边上的投影更短，从而导致 π 拉伸距离。因此，我们在第一步固定 $0 < \eta < \varepsilon$，并将每条边的目标空间边长设为 $L_e = (1+\eta)c_e$。当管半径 r 足够小时，连接部直径、端部截短以及曲率引起的长度差，相对于额外长度 ηc_e 都可以忽略不计，从而确保 π 不会增大距离，而 ι 拉伸距离的幅度至多为 $1 + \varepsilon$。这三个阶段如图 1 所示。

有了 ι和 π，通信方案便可在离散图 G 与光滑闭曲面 M之间双向转换，使我们能够比较这两种情形下分数路由和网络编码的最优成本。图的边成本等于其带宽乘以长度，而曲面链路的成本等于其带宽乘以端点间的内蕴距离。通过 ι 将 G 上任意路由或编码方案的顶点映射到 M，同时保持所有带宽和节点

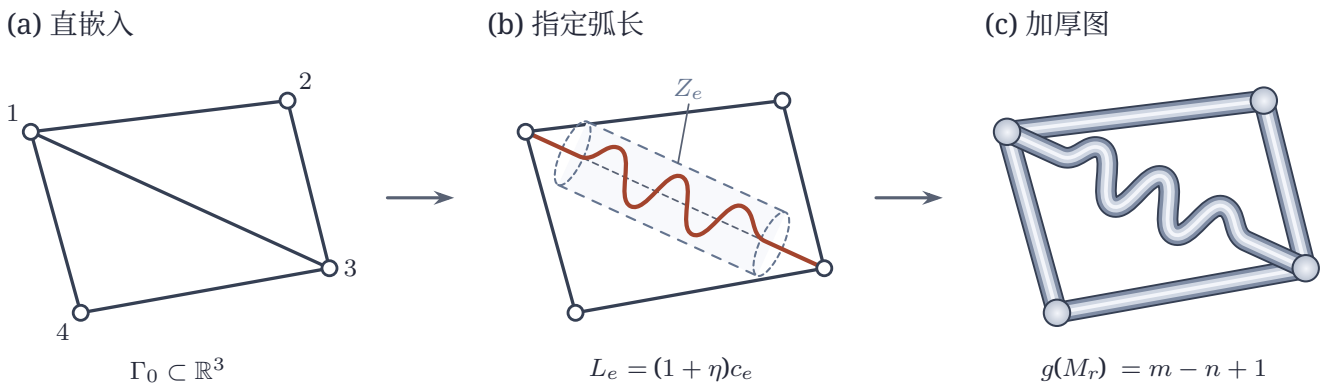

图 1. 曲面 M_r 的构造。无交叉绘图 Γ_0 中的每条边都在各自的圆柱体中延长。这里只展示了边 $e = \{1, 3\}$ 的变形。将所得曲线加厚后，便得到一根具有相同波形轴的管。该示例有 $n = 4$、$m = 5$，亏格为 2。

操作不变，可使每条链路的长度至多为原边长度的 $1+\varepsilon$ 倍，因此 M 上的最优成本至多为 G上最优成本的$1+\varepsilon$ 倍。反过来，即使 M 上的有限方案将中继节点和编码节点放置在曲面上的任意位置，非扩张映射 π 也会将所有节点投影到 $|G|$的顶点或边内部，并将每个终端送回V 中的原始顶点，且不会增加任何链路距离。将投影后的每条链路沿最短路径展开后，落在 $|G|$ 某条边内部的节点会将该边分割成串联的多个线段；由于边内部没有需求终端，用一条容量等于各线段双向带宽总量最小值的单边替代分段后的边，既能保持端到端通信，又不会增加成本。这表明 M 上的最优成本至少与 G上的相同。对两种最优成本的界限相除，即得定理 IV.3 中关于编码优势的双边估计。对于固定的 $\varepsilon > 0$，如果一列图实例的编码优势趋于无穷大，那么相应曲面实例的编码优势也趋于无穷大。由此证明定理 IV.4。

最后，我们在定理 IV.5 中证明固定亏格 g 下的 $O(\log(g+2))$ 编码优势界。对于可定向亏格至多为 g 的有限图，将平面图的常数畸变 L_1 嵌入与随机平面化相结合，可将该图的最短路径度量嵌入 L_1，畸变为 $O(\log(g+2))$。每个有限 L_1 度量都是割度量的非负加权和；对于每个将顶点分为两侧的割，任何有效的编码方案都必须承载至少与该割分隔开的总需求量相等的双向流量。将这些割不等式乘以 L_1 权重后求和，可得最优分数路由成本至多为最优编码成本的 $O(\log(g+2))$ 倍。对于亏格至多为 g 的光滑闭可定向曲面，我们将任意有限编码方案中的链路绘制为曲面上的极小测地线，并稍作扰动，使它们只在有限多个内点处相交，同时使成本增加任意小。在每个交叉处插入一个纯转发中继节点，就能将曲面方案转化为绘制在曲面上且没有交叉的有限图；每个连通分量的可定向亏格至多为 g，因此应用有界亏格图界，即可得到曲面上的相同界。

VI. 具有指定边长的空间嵌入

定理 VI.1 (具有指定边长的空间嵌入)**.** 设 $G = (V, E)$ 是一个有限无向简单图，每条 $e \in E$边均指定了正边长 $L_e > 0$。那么，G 存在一种空间嵌入 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$，其中每条边都是长度为 L_e 的光滑嵌入弧，且在其两个端点附近均为直线段；不同的边仅在公共端点处相交；关联于同一顶点的边在该顶点处具有不同的切向方向。

定理 VI.1 的证明。 为 $v \in V$ 选取互不相同的实数 t_v，并将各顶点放置在

$$p_v = (t_v, t_v^2, t_v^3) \in \mathbb{R}^3. \tag{16}$$

根据范德蒙德行列式，没有三个点共线，也没有四个点共面 [8, 引理 5.4.2]。因此，用直线段连接各对顶点，就得到完全图在 $\mathbb{R}^3$中的无交叉嵌入：没有公共端点的两条线段只有在其四个端点共面时才可能相交；共享一个端点的两条线段只有在其三个端点共线时才可能重叠。将此直线图限制到 G，并对 $\mathbb{R}^3$ 进行统一缩放，即可得到无交叉直线嵌入 $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$，其中关联边在每个顶点处的方向各不相同，且表示每条边 $e \in E$ 的直线段 $\Gamma_{0,\,e}$ 长度为 $l_e^0 < L_e$。

对每条边 $e \in E$，选取线段 $\Gamma_{0,e}$ 上的一个内点 x_e，以及包含 x_e 的 $\Gamma_{0,e}$ 的一个开子线段 I_e。由于紧集 $\Gamma_0 \setminus I_e$ 不包含 x_e，它与 x_e 之间的欧几里得距离为正，因此存在一个以 x_e 为中心、满足 $B_e \cap \Gamma_0 \subset I_e$ 的开球$B_e \subset \mathbb{R}^3$。由于 E 是有限集，且点 x_e 两两不同，我们可以缩小这些开球 B_e，使其闭包两两不相交。在每个 B_e 内，选取一个闭实心直圆柱 $Z_e \subset B_e$，其圆柱轴 A_e 是 $B_e \cap \Gamma_{0,e}$ 的一个闭子线段。于是这些圆柱 Z_e 两两不相交，并且满足

$$Z_e \cap \Gamma_0 = A_e. \tag{17}$$

固定一条边 $e \in E$。在局部欧几里得坐标中，将圆柱轴写为

$$A_e = \{(t, 0, 0) : -a_e \le t \le a_e\} \tag{18}$$

取 $a_e > 0$。选择一个非负光滑函数 ψ_e：$[-a_e, a_e] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，它在 $(-a_e, a_e)$ 上不恒为零，并且在 $-a_e$ 和 a_e 的邻域内恒为零，然后考虑用曲线替换 A_e

$$\gamma_{\alpha,N}(t) = \big(t,\, \alpha\psi_e(t)\sin(Nt),\, 0\big), \qquad -a_e \le t \le a_e, \tag{19}$$

对于参数 $\alpha \ge 0$ 和 $N > 0$。由于其第一坐标为 t，$\gamma_{\alpha,N}$ 是一条光滑嵌入弧；由于 ψ_e 在 $\pm a_e$ 附近为零，该弧在两端附近与 A_e 重合，因此与 $\Gamma_{0,e}$ 的其余部分光滑连接。

令 $M_e = \max_{t\in[-a_e,a_e]} \psi_e(t) > 0$，并选择足够小的 $\alpha_0 > 0$，使得 $\alpha_0 M_e$ 严格小于 Z_e 的半径。于是，对所有 $0 \le \alpha \le \alpha_0$ 和所有 $N > 0$，$\gamma_{\alpha,N}$ 完全位于 Z_e 内。当 $\alpha = \alpha_0$ 时，$\gamma_{\alpha_0,N}$ 的弧长随着 $N \to \infty$ 趋于无穷大。事实上，取一个正长度的闭子区间 $J \subset (-a_e, a_e)$，以及一个常数 $\mu_e > 0$，使得在 J 上 $\psi_e(t) \ge \mu_e$。在这些点

$$t_k = \frac{\pi/2 + k\pi}{N}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

位于 J 中时，γ_{α_0} 的第二个坐标 $_N(t_k)$ 的符号交替变化，且其绝对值至少为 $\alpha_0\mu_e$，因此相邻点 $\gamma_{\alpha_0,\ N}(t_k)$ 和 $\gamma_{\alpha_0,\ N}(t_{k+1})$ 之间的欧几里得距离至少为 $2\alpha_0\mu_e$。由于 J 中满足 $N_J \ge N|J|/\pi - 2$ 的此类点的数量为 N_J，$\gamma_{\alpha_0,\ N}$ 的总弧长至少为 $2\alpha_0\mu_e(N_J - 1)$；当 $N \to \infty$ 时，该长度趋于无穷大。

固定足够大的 N，使得将 A_e 替换为 $\gamma_{\alpha_0,\ N}$ 后，边 e 的总长度严格大于 L_e。固定 N 后，边 e 的总长度是 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 的连续函数，在 $\alpha = 0$ 处等于 $l_e^0 < L_e$，并在 $\alpha = \alpha_0$ 处大于 L_e。根据介值定理，存在某个 $\alpha \in (0,\ \alpha_0)$，使边 e 的总长度恰好为 L_e。

在每个圆柱体 Z_e $(e \in E)$ 内分别进行此替换，不会产生自交或不同边之间的交点，因为这些圆柱体 Z_e 两两不相交，且各自仅沿 A_e与 Γ_0 相交。每个顶点附近的直线段及不同切向方向保持不变，由此完成 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$的构造。■

VII. 光滑曲面的构造

我们将第五节中构造的空间嵌入图 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 加厚，以得到一个光滑闭可定向曲面$M_r \subset \mathbb{R}^3$。我们构造度量图 $|G|$ 与 M_r之间的两个映射 ι： $|G| \to M_r$ 和 π： $M_r \to |G|$，如式 (9)–(10) 所示，从而证明定理 IV.1。

设 $G = (V, E)$ 是一个具有 n 个顶点和 $m \ge 1$ 条边的有限连通无向简单图，并设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是定理 VI.1 中针对正边长 $L_e > 0$构造的空间嵌入。在每个顶点位置 $p_v \in \mathbb{R}^3$附近，关联边均为方向各异的直线段。对于每个顶点 v，在原点处固定一个连通紧致光滑模板曲面 $U_v^0 \subset \mathbb{R}^3$。从一个半径足够大的球面开始，该球面以原点为中心；沿每个关联边的方向开一个孔，并将每个开口平滑地延伸为一段半径为 1 的短直圆柱形出口。这些出口彼此不相交，并共同构成关联管的连接部。对于 $r > 0$，将模板按 r 缩放，并平移至 p_v，以定义顶点连接部

$$U_v = p_v + rU_v^0. \tag{21}$$

当 r 足够小时，U_v 的每个出口都是一个直圆柱面，半径为 r，围绕 p_v附近对应的直边线段。根据管状邻域构造 [32], [33],，存在一个 $r_0 > 0$，使得对所有 $0 < r < r_0$，截去每条边两端后，都会留下长度为 ℓ_e 的核心弧 γ_e；以该核心弧为中心、半径为 r 的圆形管 T_e 平滑地连接两个连接部的出口。这些部分在 $\mathbb{R}^3$中构成一个光滑嵌入连通闭可定向曲面 M_r。G 的每个独立环都会在加厚区域中产生一个把手，因此 M_r 的亏格为

$$g(M_r) = m - n + 1. \tag{22}$$

连接部 U_v 与管 T_e 的内部两两不相交。连接部与管恰好在 v与 e关联时沿公共边界圆相交。记 $\|\cdot\|$和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$为 $\mathbb{R}^3$ 上的标准欧几里得范数和内积。分段光滑曲线 X：$[a, b] \to M_r$的长度为 $L_{M_r}(X) = \int_a^b \|X'(t)\|\, dt$。将每条核心弧按弧长参数化为$\gamma_e$：$[0, \ell_e] \to \mathbb{R}^3$，使得 $\|\gamma_e'(s)\| = 1$。当 r_0足够小时，T_e上的每个点都有唯一的、随该点平滑变化的如下形式的表示

$$x = \gamma_e(s) + ru, \qquad s \in [0, \ell_e], \quad \|u\| = 1, \quad \langle u, \gamma_e'(s)\rangle = 0. \tag{23}$$

顶点连接部从每条相邻边的末端割下一小段直线，而穿过连接部本身则会增加一条短路径。由于 U_v 是通过将固定模板按 r 缩放得到的，这两段长度均为 $O(r)$。

引理 VII.1 (连接部与核心弧的长度界)。存在常数 A、$C > 0$，与 r 无关，使得对于所有 $0 < r < r_0$、$v \in V$ 和 $e \in E$，都有 $L_e - Ar \le \ell_e \le L_e$；并且 U_v 中任意两点都可以在 U_v 内由一条长度至多为 Cr 的分段光滑曲线连接。

证明。令 $a_{v,e}$ 表示从原点到 U_v^0 沿边 e 方向的出口端圆中心的轴向距离。于是，从 $e=\{u,v\}$ 两端截去的直线段总长度为 $(a_{u,e}+a_{v,e})r$。取$A=\max_{e=\{u,v\}\in E}(a_{u,e}+a_{v,e})$，得到 $L_e - Ar \le \ell_e \le L_e$。每个模板 U_v^0 都是连通紧致光滑曲面，且具有有限的内在直径。选取 C 使其大于这些直径中的最大值。模板内任意两点都可以由一条长度至多为 C 的分段光滑曲线连接。按 r 缩放并平移至 U_v 后，该长度乘以 r，从而得到连接部的长度界。

□

为定义投影 π，我们将管的轴向坐标 s 重新缩放为图的边上的坐标。在弯曲段内侧，轴向坐标的变化速度可能略快于弧长。下一个引理将这个比例限制在 $1+O(r)$以内。

引理 VII.2 (管上的轴向位移)**.** 存在一个与 r无关的常数 $K\ge 0$，使得只要 $0<r<r_0$且 $rK\le 1/2$，任意分段光滑曲线 $X(t)=\gamma_e(s(t))+ru(t)$，$t\in[a,b]$，在任意管 T_e 上都满足

$$|s(b)-s(a)| \le (1+2Kr)L_{M_r}(X). \tag{24}$$

证明。 Γ 的有限条光滑边弧是固定的。令 $K\ge 0$ 为修剪前它们的最大曲率，则在每条修剪后的核心弧上都有 $\|\gamma_e''(s)\|\le K$。在每个光滑子区间上，对 $\langle u(t),\ \gamma_e'(s(t))\rangle = 0$ 求导，得到

$$\langle u'(t), \gamma_e'(s(t))\rangle = -s'(t)\langle u(t), \gamma_e''(s(t))\rangle.$$

将 $X'(t) = s'(t)\gamma_e'(s(t)) + ru'(t)$ 与单位向量 $\gamma_e'(s(t))$ 作内积，并应用柯西–施瓦茨不等式和 $\|u(t)\|=1$，我们得到

$$\|X'(t)\| \ge \left|\langle X'(t), \gamma_e'(s(t))\rangle\right| = |s'(t)|\left|1 - r\langle u(t), \gamma_e''(s(t))\rangle\right| \ge (1-rK)|s'(t)|. \tag{25}$$

对于 $rK\le 1/2$，我们有 $(1-rK)^{-1}\le 1+2Kr$，因此 $|s'(t)|\le (1+2Kr)\|X'(t)\|$。在 $[a,b]$ 上积分，得到 (24)。 □

反过来，为了构造 $\iota:|G|\to M_r$，我们必须连接每根管两端连接处中的代表点。定理 VI.1 的证明中构造的每条空间边都位于各自的平面内。将其核心弧沿该平面的法向量平移 r，便可在管上得到一条长度相同的曲线。在两个连接处各添加一条短路径后，总长度至多为 $L_e + O(r)$。

引理 VII.3 (连接端部连接区的曲线长度)**.** 在每个连接部中任取一点 $q_v\in U_v$。存在一个与 r 无关的常数 $B>0$，使得对所有 $0<r<r_0$ 以及每条边 $e=\{u,v\}\in E$，都存在一条位于 M_r 上、连接 q_u 与 q_v 的分段光滑曲线 λ_e，且满足 $L_{M_r}(\lambda_e)\le L_e + Br$。

证明。 在 (19) 的局部欧几里得坐标中，振荡部分和两端的直线段都位于第三坐标为零的平面内。取该平面的一个常单位法向量 w_e。于是对所有 $s\in[0,\ell_e]$，都有 $\langle w_e, \gamma_e'(s)\rangle = 0$，因此平移曲线 $X_e(s)=\gamma_e(s)+rw_e$, $s\in[0,\ell_e]$ 完全位于 T_e 上。由于 w_e 为常数，其长度恰为 $\ell_e\le L_e$。根据引理 VII.1，我们可以用长度至多为 Cr 的分段光滑曲线分别将 q_u 与 $X_e(0)$ 在 U_u 中连接起来，并将 $X_e(\ell_e)$ 与 q_v 在 U_v 中连接起来。将这三条曲线首尾相接，得到 λ_e；取 $B=2C$，便有 $L_{M_r}(\lambda_e)\le L_e + Br$。

□

现在定义投影 $\pi:M_r\to|G|$。将每个连接部 U_v 映射到 $|G|$的顶点 v。对于每条边 $e=\{u,v\}\in E$，将核心从 u 定向到 v，使得 $s=0$ 与 U_u 相接，且 $s=\ell_e$ 与 U_v相接。将 T_e 上轴向坐标为 s 的点映射到沿 e从 u 起弧长为 $c_e s/\ell_e$ 的点，其中 c_e 是度量图中 e的长度。这些定义在公共边界圆上相互一致，因此 π 在 M_r上连续。当核心长度 ℓ_e 吸收了引理 VII.2 中的因子 $1+2Kr$ 时，我们可以通过将曲线细分为管道内部、连接部内部或连接圆附近平直圆柱邻域中的子弧，证明 π 不会增大距离。图 2 展示了局部管道几何结构和两个映射。

引理 VII.4 （ π的非扩张性）。 若 $0<r<r_0$ 满足 $rK\le 1/2$ 和 $c_e\,(1+2Kr)\ \le \ell_e$ 对每个 $e\in E$均成立，则$\mathrm{Lip}(\pi)\le 1$。

证明。 在每个边界圆 $U_v\cap T_e$ 两侧的某个小邻域内，曲面是一个半径为 r、环绕直边线段的直圆柱面。令 e_v 为沿该线段指向 T_e 的单位向量。取边界圆上的一点 x_0，并将 $h(x)=\langle x-x_0,\ e_v\rangle$ 记作轴向坐标。于是，在管道一侧 h 非负，在连接部一侧则非正；而 $\pi(x)$ 位于沿 e 从 v 起弧长为 $(c_e/\ell_e)\max\{h(x)\ 0\}$ 的位置。令 $X:[a,b]\to M_r$ 为连接 x 与 y 的任意分段光滑曲线。管道内部、连接部内部以及直圆柱邻域覆盖 $X([a,b])$。由 X 的连续性和 $[a,b]$ 的紧致性，可将 $[a,b]$ 划分为有限个闭区间 $[t_{j-1},t_j]$，使得每个子弧 $X_j = X|_{[t_{j-1},t_j]}$ 完全位于上述某个开集中。

1）在 T_e的内部，引理 VII.2 和 $c_e(1+2Kr)\ \le \ell_e$ bound the $|G|$ 中端点映像之间的距离为 $(c_e/\ell_e)|s(t_j)-s(t_{j-1})|\le L_{M_r}(X_j)$。2）在 U_v的内部，映射 π 为常值，取值为 v，因此端点映像之间的距离为零。3）在直圆柱邻域中，柯西–施瓦茨不等式给出 $|(h\circ X)'(\tau)|\le\|X'(\tau)\|$。取正部是非扩张的，且 $c_e/\ell_e\le 1$，因此端点映像之间的距离至多为 $|h(X(t_j))-h(X(t_{j-1}))|\le L_{M_r}(X_j)$。

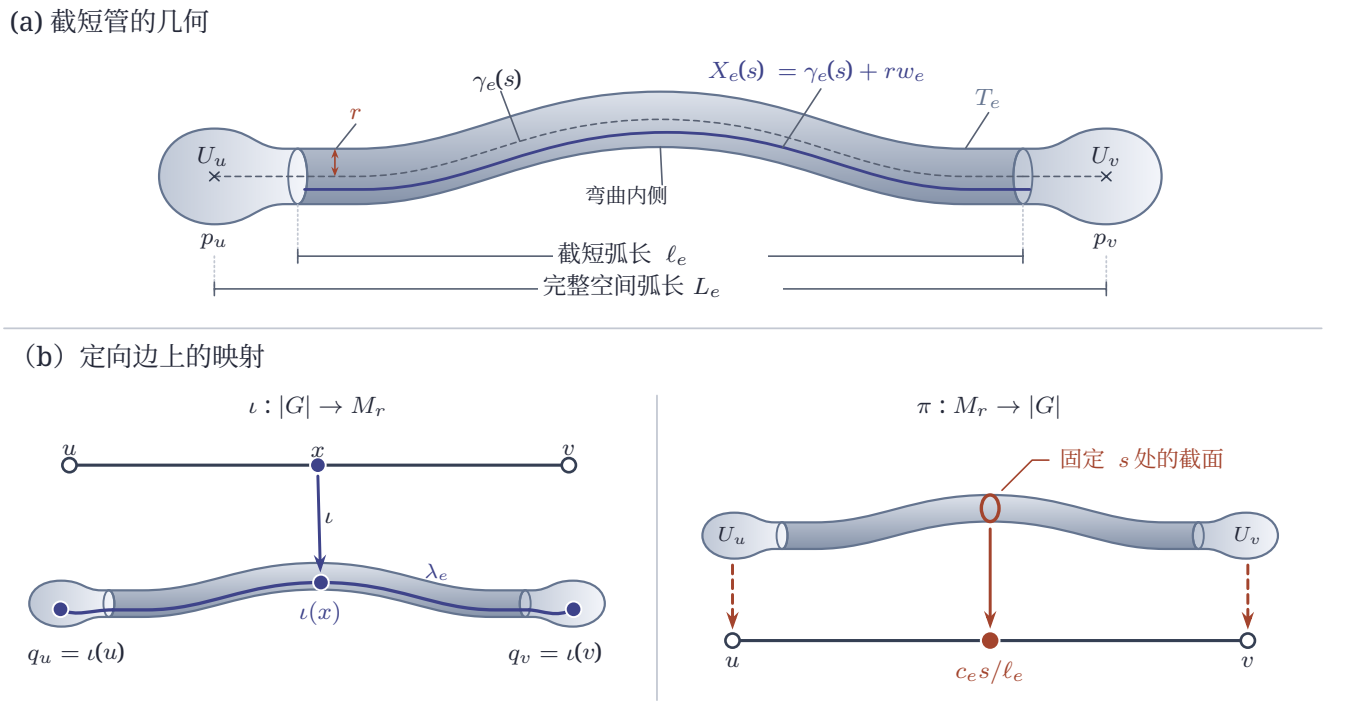

图 2. 局部几何和两个映射。(a) 在 p_u, p_v 附近修剪后，留下一个弧长为 $\ell_e = L_e - O(r)$ 的核心。虚线是核心 γ_e。它沿垂直于边所在平面的法向方向平移 X_e 后，长度仍然相同，尽管弯曲段内侧的长度较短。(b) ι 以恒定速度遍历 λ_e，包括两个连接处中的连接弧。在 π 下，每个连接处整体映射到其顶点，而 s 处的截面映射到沿 e 距离 $c_e s/\ell_e$、从 u 起算的点。

对各子弧求和，并对 d_G 应用三角不等式，得到 $d_G(\pi(x)\ \pi(y)) \le L_{M_r}(X)$。对从 x 到 y 的所有分段光滑曲线取下确界，得到 $d_G(\pi(x)\ \pi(y)) \le d_{M_r}(x,\ y)$。□

最后，规定空间边长 $L_e = (1+\eta)c_e$，满足 $0 < \eta < \varepsilon$。当管半径 r 足够小时，引理 VII.1–VII.3 中的 $O(r)$ 误差使我们能够满足引理 VII.4 的非扩张条件，同时使每条连接曲线 λ_e 的长度至多为 $(1+\varepsilon)c_e$。

定理 VII.5 (度量图与光滑闭曲面之间的双向映射)。 设 $G = (V, E, c)$ 为一个具有 n 个顶点和 m 条正权边的有限连通无向简单图。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个亏格为 $m - n + 1$ 的光滑连通闭可定向曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 以及连续映射 $\iota : |G| \to M$ 和 $\pi : M \to |G|$，使得 $\mathrm{Lip}(\iota) \le 1 + \varepsilon$、$\mathrm{Lip}(\pi) \le 1$，并且对所有 $v \in V$ 都有 $\pi(\iota(v)) = v$。

定理 VII.5 和 IV.1 的证明。 如果 $n = 1$，那么 $m = 0$，我们取 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面和常值映射。假设$m \ge 1$。固定 $0 < \eta < \varepsilon$，令 $L_e = (1+\eta)c_e$，并由定理 VI.1 构造空间嵌入 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$。由于 $r \to 0$，我们有 $c_e(1+2Kr)/(L_e - Ar) \to (1+\eta)^{-1} < 1$，并且对每条边 $e \in E$ 都有 $(L_e + Br)/c_e \to 1 + \eta < 1 + \varepsilon$。由于 E 是有限的，我们可以选择 $0 < r < r_0$，使得 $rK \le 1/2$ 且 $Ar < \min_{e \in E} L_e$，从而对所有 $e \in E$同时成立，

$$c_e(1 + 2Kr) \le L_e - Ar \le \ell_e, \qquad L_e + Br \le (1+\varepsilon)c_e. \tag{26}$$

引理 VII.4 给出 $\mathrm{Lip}(\pi) \le 1$。令 $\iota(v) = q_v \in U_v$，并将表示每条边 $e = \{u, v\}$ of$|G|$ 的长度为 c_e 的区间，沿引理 VII.3 提供的曲线 $\lambda_e \subset M_r$ 以恒定速度映射。这些映射在公共顶点处一致，从而给出连续映射 $\iota : |G| \to M_r$。由引理 VII.3 和不等式 (26) 中的最后一个不等式，$L_{M_r}(\lambda_e) \le (1+\varepsilon)c_e$。因此，最短路径度量 d_G 给出 $\mathrm{Lip}(\iota) \le 1 + \varepsilon$，而 $q_v \in U_v$ 给出 $\pi(\iota(v)) = v$，对于每个 $v \in V$均成立。令 $M = M_r$ 即得定理 VII.5。限制到顶点上得到 $f = \iota|_V$，其中 $d_G(u, v) = d_G(\pi(f(u))\ \pi(f(v))) \le d_M(f(u)\ f(v)) \le (1+\varepsilon)d_G(u, v)$，从而证明定理 IV.1。□

VIII. 空间信息流中的成本与编码优势

两项观察使我们能够比较离散图 G 与光滑闭曲面 M上的通信成本。首先，通过 Lipschitz映射移动空间信息流方案中的所有节点，最多会使其成本增加利普希茨因子。其次，当曲面方案的投影将节点置于度量图 $|G|$的边上时，通过边细分引入的中继节点和编码节点无法降低原离散图 G上的最优成本。我们将证明这些结论，比较图与曲面之间两个方向上的成本，然后界定固定亏格下的编码优势。

A. 映射下的最优路由成本与成本转移

在多单播会话的分数路由中，各会话彼此独立。每个会话都可以在度量空间中使用连接其终端的直接链路，或在图中使用最短路径。因此，在任意度量空间或边权为正的无向图上，最优分数路由成本等于按速率加权的源汇距离之和。

引理 VIII.1（最优分数路由成本公式）。 对于任意度量空间 (X, d_X) 及其有限多单播需求族 $\mathcal{D} = \{(s_i, t_i, r_i)\}_{i=1}^{k}$，以及任意有限连通正权无向图 $G = (V, E, c)$ 及其在 V 上的需求$\mathcal{D}$，相应的成本为

$$\mathrm{Route}_X(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} r_i d_X(s_i, t_i), \qquad \mathrm{Route}_G(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} r_i d_G(s_i, t_i). \tag{27}$$

证明。 在 (X, d_X) 中，为每个会话 i 添加一条从 s_i 到 t_i、带宽为 r_i 的直接弧，即可达到等式 (27) 右侧的第一个成本。在 G 上，沿着从 s_i 到 t_i 的最短路径发送流 r_i，即可达到第二个成本。反过来，从一个可行分数路由方案中移除有向环后，流分解可将每个会话 i 的流表示为若干条有向 s_i–t_i 路径流之和，其总速率为 r_i。根据三角不等式或图距离的定义，这类路径的长度至少分别为 $d_X(s_i, t_i)$ 或 $d_G(s_i, t_i)$。按各路径流的速率对路径长度加权，对所有会话求和，并对可行路由取下确界，即得反向不等式。 □

在空间信息流模型中，网络编码没有类似的显式成本公式，但每条链路的成本与其端点之间的距离成正比。因此，通过一个 L-Lipschitz映射将方案中的所有节点移至另一个度量空间，同时保留其局部操作，路由成本和编码成本的增幅都至多为 L 倍。

引理 VIII.2（Lipschitz映射下的成本转移）。 假设 $F\colon X \to Y$ 满足 $\mathrm{Lip}(F) \le L < \infty$，且在 $\mathcal{D}$中的终端位置集合上是单射。那么

$$\mathrm{Route}_Y(F\mathcal{D}) \le L\ \mathrm{Route}_X(\mathcal{D}), \qquad \mathrm{Code}_Y(F\mathcal{D}) \le L\ \mathrm{Code}_X(\mathcal{D}). \tag{28}$$

证明。 取任意一个满足 X中 $\mathcal{D}$的有限路由或网络编码方案 (N, p)。保留有向多重图 N、链路带宽 b_a以及所有局部路由或编码操作，并将位置 p 替换为 $F \circ p$。由于 F 在终端位置上是单射，所得方案满足 Y中的 $F\mathcal{D}$。根据 Lipschitz 界，式 (2) 中每条弧 a 的成本满足$b_a d_Y(F(p(a^-))\ F(p(a^+))) \le L\, b_a d_X(p(a^-))\ p(a^+)$。对所有弧求和，并对 X 中的可行方案取下确界，即得 (28)。 □

B. 图与光滑闭曲面之间的成本转移与编码优势

定理 VII.5 的两个映射连接了紧致度量图 $|G|$ 和光滑闭曲面 M。当 $\pi\colon\ M \to |G|$ 将 M 上的通信方案投影回 $|G|$ 时，其中继节点和编码节点可能落在边内部，从而将离散图 G 的一条边分割成一系列线段。为了返回到 G，我们使用 Li 和 Li [12] 的链路扩展和路径收缩操作，证明在图边内部引入细分节点能够同时保持最优路由成本和最优编码成本。

引理 VIII.3（边细分下的成本不变性）。 设 G' 是通过对有限连通正权无向图 $G =$（V、 E、 c） 的边进行有限次细分得到的图。假设所有线段长度均为正，并且每条被细分的边 e 上各线段长度之和为 c_e。对于 V 上的任意有限多单播需求族 $\mathcal{D}$，

$$\mathrm{Route}_{G'}(\mathcal{D}) = \mathrm{Route}_G(\mathcal{D}), \qquad \mathrm{Code}_{G'}(\mathcal{D}) = \mathrm{Code}_G(\mathcal{D}). \tag{29}$$

证明。 取 G 上的任意可行方案。对于每条原始边 e，沿着 G' 中对应的细分路径转发其传输，并使两个方向上的聚合带宽均为 b_e。该方案仍然可行，且路径上的成本为 $b_e \sum_{j=1}^{q} a_j = b_e c_e$，其中 a_j 为各线段长度。因此， G' 上的最优成本不大于 G 上的最优成本。

反过来，取 G' 上任意满足 $\mathcal{D}$ 的可行路由或编码方案。假设一条原始边 $e \in E$ 被划分为 q 段，长度分别为 a_1、 . . . 、 a_q，两个方向上的聚合带宽分别为 b_1、 . . . 、 b_q。所有终端都位于 V 中，因此这条路径的内部既没有分支点，也没有需求终端。Li 和 Li [12] 的路径收缩会将整条路径（包括其内部转发或编码操作）替换为容量为 $\min_{1\le j\le q} b_j$ 的原始边 e，同时保持所有会话的端到端速率可行性。收缩后边的成本为

$$c_e \min_{1\le j\le q} b_j = \Big(\sum_{j=1}^{q} a_j\Big) \min_{1\le j\le q} b_j \le \sum_{j=1}^{q} a_j b_j. \tag{30}$$

相反 将每条细分后的边进行.....，便可在 G 上得到一个成本不高于原方案的可行方案，从而证明（29）。 □

在紧致度量图 $|G|$上的空间信息流模型中，两个点之间的抽象链路按其最短路径距离 d_G计费。沿着 $|G|$ 中的一条最短路径展开每条此类链路，便可得到有限细分中的一条路径，因此引理 VIII.3 表明，离散图 G 与度量图 $|G|$上的最优成本相等。

引理 VIII.4 （ G 与 $|G|$上最优成本相等）。对于每个有限连通正权无向图$G = (V, E, c)$ 以及每个有限多单播需求族 $\mathcal{D}$ 在 V上，

$$\mathrm{Route}_{|G|}(\mathcal{D}) = \mathrm{Route}_G(\mathcal{D}), \qquad \mathrm{Code}_{|G|}(\mathcal{D}) = \mathrm{Code}_G(\mathcal{D}). \tag{31}$$

证明。将 G 上的任意可行方案放置在 $|G|$中相同的顶点上。现在，边 $e = \{u, v\}$上任一方向所用的带宽均按最短路径距离 $d_G(u,\ v) \le c_e$计费。例如，在边长分别为 1、1、3 的三角形中，长度为三的边的两个端点在 $|G|$中的距离为二。总成本不会增加，因此 $|G|$ 上的最优路由成本和编码成本分别不高于 G上的相应最优成本。

反过来，取 $|G|$ 上满足 $\mathcal{D}$的一个有限方案（$N,\ p$）。对于每条弧 $a \in A$，在 $|G|$ 中选择一条从 $p(a^-)$到 $p(a^+)$的最短路径。在沿途顶点处引入转发节点，以带宽 b_a传递相同的消息，同时保留这些位置上已有抽象节点的操作。该方案仍然可行，且总成本保持不变，因为路径长度为 $d_G(p(a^-)\ pa^+)$。展开所有链路后，原有顶点 V 以及位于边内部的有限多个抽象节点位置共同确定一个有限细分 G'。将每条展开后的路径按线段逐段转发，经过其遇到的所有细分顶点，并合并位于同一位置的抽象节点的操作。由此得到 G'上的同成本方案。根据引理 VIII.3，我们可以得到 G上成本不高于此的方案。取下确界即可证明（31）。 □

结合定理 VII.5 中的两个映射，以上四个引理推出定理 IV.3。

定理 *IV.3* 的证明。 取亏格为 $m - n + 1$ 的光滑闭曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$，以及定理 VII.5 中的映射 $\iota\colon |G| \to M$ 和 $\pi\colon M \to |G|$。设 $f = \iota|_V$。由于对所有 $v \in V$，$\pi(\iota(v)) = v$，映射 f 在 V 上是单射，映射 π 在 $f(V)$ 上是单射，并且 $\pi(f\mathcal{D}) = \mathcal{D}$。将引理 VIII.2 应用于 π（$\mathrm{Lip}(\pi) \le 1$），并应用于 ι（$\mathrm{Lip}(\iota) \le 1 + \varepsilon$），得到

$$\mathrm{Route}_{|G|}(\mathcal{D}) \le \mathrm{Route}_M(f\mathcal{D}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{Route}_{|G|}(\mathcal{D}), \tag{32}$$

$$\mathrm{Code}_{|G|}(\mathcal{D}) \le \mathrm{Code}_M(f\mathcal{D}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{Code}_{|G|}(\mathcal{D}). \tag{33}$$

根据引理 VIII.4，在这些界中用 G 替换 $|G|$，得到 (11) 和 (12)。如果 $\mathsf{Code}_G(\mathcal{D}) > 0$，则 (12) 意味着 $\mathsf{Code}_M(f\mathcal{D}) \ge \mathsf{Code}_G(\mathcal{D}) > 0$。将 (11) 和 (12) 中对应的界相除，得到 (13)。 □

例如，附录 C 中的异或交换网络有 32 个顶点和 84 条单位长度边。其最优分数路由成本为 126，而一种可行的编码方案成本为 125。在定理 IV.3 中取 $0 < \varepsilon < 1/125$，可得到一张亏格为 $84 - 32 + 1 = 53$ 的光滑闭曲面，在该曲面上，最优网络编码成本低于最优分数路由成本。

定理 *IV.4* 的证明。 固定 $A > 1$。无向多单播网络上的反例 [15], [16] 表明，采用网络编码比采用分数路由能够达到更高的公共速率。 [22] 中的构造由此给出一个图族，在该图族上，最大公共速率之比可以任意大。根据吞吐量–成本对偶性 [19, 定理 4.1], , 存在一个有限连通正权无向图 G 和一个需求族 $\mathcal{D}$，使得 $\mathsf{Adv}_G(\mathcal{D}) > 2A$。在定理 IV.3 中取 $\varepsilon = 1$，可得到一张曲面 M 及相应的需求 $f\mathcal{D}$，满足

$$\mathrm{Adv}_M(f\mathcal{D}) \ge \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Adv}_G(\mathcal{D}) > A. \qquad \square$$

C. 固定亏格下的编码优势

我们分两步证明：对于可定向亏格至多为 g 的图，以及亏格至多为 g 的光滑闭曲面，其编码优势满足 $O(\log(g+2))$ 界。首先，我们将有界亏格图的最短路径度量嵌入 L_1，并将所得度量分解为割度量的非负组合。随后，信息论割界给出图上的成本不等式。对任意有限曲面码的链路进行微小扰动，再在交叉处插入转发节点，即可将曲面情形化归为嵌入该曲面且没有交叉的有限图。

定理 *IV.5* 的证明。 若 $\mathcal{D}$ 为空，则两种成本均为零，故 (15) 成立。以下假设 $\mathcal{D}$ 非空。

首先考虑一个有限连通无向简单图 $H = (V_H, E_H, \ell)$，其可定向亏格至多为 g，边长为正数 ℓ_e，且具有最短路径度量 d_H。平面图度量的常数失真嵌入定理 [26, 定理 1。1]以及随机平面化推论 [27, 推论 I。3] 表明，(V_H, d_H) 可嵌入 L_1，且其畸变至多为$D = C\log(g+2)$，其中 $C > 0$为绝对常数。对于 $g = 0$，平面界可直接应用。重新缩放后，所诱导的L_1度量 ρ在 V_H上满足 $d_H(x,y) \le \rho(x,y) \le D\, d_H(x,y)$，对所有 $x, y \in V_H$均成立。由于每个有限 L_1度量都是割度量的非负线性组合 [7], , 因此存在权重 $w_S \ge 0$ 对应于 $S \subset V_H$，使得 $\rho = \sum_{S \subset V_H} w_S \delta_S$，其中 $\delta_S(x,y) = 1$当且仅当 x, y中恰有一个属于 S时成立，而 $\delta_S(x,y) = 0$在其他情况下成立。

在 H上固定一个针对 $\mathcal{D}$ 的任意可行网络编码，并令 $b_e \ge 0$ 表示边 $e \in E_H$ 双向使用的总带宽。对于每个顶点子集 $S \subset V_H$，所有源自 S且在 $V_H \setminus S$处被请求的独立消息，都必须能够从进入 $V_H \setminus S$ 的传输以及源自该处的消息中恢复。因此，从 S指向 $V_H \setminus S$ 的总带宽至少等于这些会话的速率之和。反向应用同样的论证并将两者相加，可得双向割界

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \delta_S(s_i, t_i) \le \sum_{e=\{x,y\}\in E_H} b_e \delta_S(x, y). \tag{34}$$

将 (34) 两边乘以 $w_S \ge 0$，对所有 $S \subset V_H$ 求和，并对每条边使用 $d_H(x,\ y) \le \ell_e$ 以及引理 VIII.1，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Route}_H(\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{k} r_i d_H(s_i, t_i) \le \sum_{i=1}^{k} r_i \rho(s_i, t_i) \\ &\le \sum_{e=\{x,y\}\in E_H} b_e \rho(x, y) \le D \sum_{e\in E_H} b_e \ell_e. \end{aligned} \tag{35}$$

Tak在 H 上对所有可行编码方案取下确界，得到 $\mathsf{Route}_H(\mathcal{D}) \le D\mathsf{Code}_H(\mathcal{D})$.

现在令 M 为一亏格至多为 g 的光滑、连通、闭可定向黎曼曲面。固定 M 上满足 $\mathcal{D}$ 、成本为 V_0 的一个有限编码方案，并固定 $\delta > 0$。合并 M 上位于同一点的抽象节点，并移除带宽为零的链路以及端点重合的链路。记 J 为剩余弧的集合，其带宽为 $b_j > 0$、 $j \in J$。选取 $\tau > 0$ 使得 $\tau \sum_{j\in J} b_j < \delta$。将每条弧 $j \in J$ 画成连接 M 上其端点的极小测地线，并对 M 上的曲线作光滑扰动。先在公共端点附近分开相交的弧，再扰动其内部，使所得的每条曲线 α_j 的长度小于其端点间的内蕴距离加上 τ。曲线内部避开所有已有的节点位置，且除公共端点外，这些曲线仅在有限个横截双交点处相交。

在每个内部交叉处插入一个中继节点，使其沿各自的曲线转发每条链路的传输，将该族$\{\alpha_j\}_{j\in J}$ 分割成内部互不相交的子弧。为消除任何平行边或自环，在每条端点不同的子弧内部放置一个转发节点；在每条端点重合的子弧内部放置两个不同的转发节点。细分不会改变总成本。将所有节点（包括孤立的终端）作为顶点，并将细分后的弧及其弧长作为^无向边，即可得到一个嵌入在 M中且没有交叉的有限无向简单图 G 。原代码沿这些细分后的弧运行，总成本小于$\sum_{j\in J} b_j(d_M(p(j^-)\ p(j^+))\ +\tau)\ < V_0 + \delta$。

^记 G的连通分量为 $H_1, \dots, H_q$。每个 H_t都能无交叉地嵌入 M，因此其可定向亏格至多为 g。由于每个会话的目标速率 r_i均为正，要满足可行性，其源节点 s_i 和汇节点 t_i 必须由一条传输路径连接。因此它们位于同一个连通分量中，从而将会话索引划分为若干集合 I_t，每个连通分量 H_t对应一个集合，并有相应的需求子族 $\mathcal{D}_t$。 H_t 中的每条路径都是一条分段光滑曲线，在 M中的长度与其相同，因此对于 $\mathcal{D}_t$中的每个会话，均有 $d_M(s_i, t_i)\ \le d_{H_t}(s_i, t_i)$。对每个连通分量应用引理 VIII.1 和图界并求和，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Route}_M(\mathcal{D}) &= \sum_{t=1}^{q} \sum_{i\in I_t} r_i d_M(s_i, t_i) \le \sum_{t=1}^{q} \mathrm{Route}_{H_t}(\mathcal{D}_t) \\ &\le D \sum_{t=1}^{q} \mathrm{Code}_{H_t}(\mathcal{D}_t) \le D(V_0 + \delta). \end{aligned} \tag{36}$$

令 $\delta \to 0$ 和 n 对 M 上所有有限编码方案取下确界，得到 $\mathsf{Route}_M(\mathcal{D})\ \le D\ \mathsf{Code}_M(\mathcal{D}$). □

IX. 结论

我们证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，任何具有 n 个顶点和 m 条正权边的有限连通无向简单图，其顶点上的最短路径度量都存在一种非收缩嵌入，以畸变不超过 $1 + \varepsilon$ 的方式嵌入到亏格为 $m-n+1$ 的光滑连通闭可定向曲面中，且该曲面属于 $\mathbb{R}^3$ 。这种近等距嵌入可推广到任意有限度量空间。对于数据分析中的流形假设，这意味着，当曲面的拓扑和度量可以随样本变化时，光滑二维曲面上的内蕴距离可以用任意小的乘性误差逼近任意有限样本度量。在空间信息流模型中，对于任意有限连通正权无向图和任意 $\varepsilon > 0$，我们构造一个光滑闭曲面，使得对于图上的每个多单播需求族，曲面上的最优分数路由成本和网络编码成本均介于图上相应成本与该成本的 $1 + \varepsilon$ 倍之间。将这些成本界应用于已知的、具有任意大编码优势的无向图实例，可得到一族光滑闭曲面，在其上最优分数路由成本与最优网络

编码成本之比可以任意大。当图的可定向亏格或曲面的亏格至多为 g 时，对于某个绝对常数 C，编码优势至多为 $C\log(g+2)$。

映射 $(\iota,\ \pi)$ 将整个度量图 $|G|$ 连接到光滑闭曲面 M。通过映射 ι，图上的路径映到曲面后，其长度至多增加 $1+\varepsilon$ 倍；而 π 则将曲面上的任意辅助点及连接这些点的分段光滑曲线映回图上，且不会增加曲线长度。因此，对于成本为距离或曲线长度的非负加权和的问题，只要可行配置及其权重能够在图与曲面之间双向转移，两者上的最优成本就相差不超过 $1+\varepsilon$ 倍。空间信息流中的成本转移与编码优势展示了这一机制；同样的约化也可能适用于其他涉及离散图与光滑流形的问题。

关于流形嵌入与空间信息流，还有三个问题有待探讨。首先，流形假设的统计检验和几何重建通常会对曲率、可达半径、单射半径或面积等量施加正则性界。在此类给定界的条件下，哪些有限度量空间仍可近等距嵌入光滑曲面？其次，固定亏格下编码优势的 $O(\log(g+2))$ 上界能否改进？第三，在 ℓ_p^n 中，对于 $1\le p\le 2$，多播编码优势等于 1，其中包括欧几里得空间；而在某些光滑闭曲面上，该优势大于 1。在哪些其他度量空间或黎曼流形中，多播编码优势始终为 1？哪些几何性质决定了这种差异？

致谢

本文的研究问题、核心思想和整体证明框架均由作者构思并设计。作者使用 OpenAI ChatGPT 协助起草数学文本并润色数学表达式，还使用包括 Google Gemini 在内的人工智能工具编辑和润色摘要及第 I–IX 节的语言。作者还使用 OpenAI Codex 编写了图 1 和图 2 的 TikZ 代码。作者核查了所有数学证明、技术细节和最终文本，并对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] B. Bollobás，《现代图论》，《数学研究生教材》系列。美国纽约州纽约：施普林格，1998年，第184卷。[2] R. Diestel，《图论》，第5版，《数学研究生教材》系列。德国柏林、海德堡：施普林格，2017年，第173卷。[3] J. Nash，“C^1 等距嵌入”，《数学年刊》，第60卷，第3期，第383–396页，1954年。[4] ——，“黎曼流形的嵌入问题”，《数学年刊》，第63卷，第1期，第20–63页，1956年。[5] J. Bourgain，“有限度量空间到希尔伯特空间的 Lipschitz 嵌入”，《以色列数学杂志》，第52卷，第1–2期，第46–52页，1985年。[6] N. Linial、E. London 和 Y. Rabinovich，“图的几何及其若干算法应用”，《组合数学》，第15卷，245，1995 2，215期，第 – 页。[7] M. M. Deza 和 M. Laurent，《割与度量的几何》，《算法与组合数学》系列。德国柏林、海德堡：施普林格，1997年，第15卷。[8] J. Matoušek，《离散几何讲义》，《数学研究生教材》系列。美国纽约州纽约：施普林格，2002年，第212卷。[9] C. Fefferman、S. Mitter 和 H. Narayanan，“流形假设检验”，《美国数学会杂志》，第29卷，第4期，第983–1049页，2016年。[10] Y. Bengio、A. Courville 和 P. Vincent，“表示学习：综述与新视角”，《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，第35卷，第8期，第1798–1828页，2013年。[11] C. Kuratowski，“关于不可分度量空间的若干问题”，《数学基础》，第25卷，第1期，第534–545页，1935年。[12] Z. Li 和 B. Li，“网络编码：多单播会话的情形”，载于《第42届Allerton通信、控制与计算年度会议论文集》，美国伊利诺伊州蒙蒂塞洛，2004年，第11–19页。[13] A. Farhadi、M. Hajiaghayi、K. G. Larsen 和 E. Shi，“通过网络编码证明外存整数排序的下界”，载于《第51届ACM SIGACT计算理论年会（STOC）论文集》，美国亚利桑那州菲尼克斯，2019年，第997–1008页。[14] P. Afshani、C. B. Freksen、L. Kamma 和 K. G. Larsen，“通过网络编码证明乘法的下界”，载于《第46届自动机、语言与程序设计国际研讨会（ICALP）论文集》，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）系列，第132卷，希腊帕特雷，2019年，第10:1–10:12页。[15] X. Zhang、B. Li 和 Z. Li，“网络编码在无向多单播网络中可以胜过路由”，arXiv:2610.09367，2026年10月。[16] M. Braverman 和 Z. He，“多单播猜想是错误的”，arXiv:2610.10108，2026年10月。[17] Z. Li 和 C. Wu，“空间信息流：多单播”，载于《2012年IEEE国际信息论研讨会（ISIT）论文集》，美国马萨诸塞州剑桥，2012年，第1897–1901页。[18] ——，“空间信息流”，卡尔加里大学，技术报告2012-0728-sif，2012年。[19] T. Xiahou、Z. Li、C. Wu 和 J. Huang，“多单播网络编码的几何视角”，《IEEE信息论汇刊》，第60卷，第5期，第2884–2895页，2014年。[20] S. Liu 和 Z. Li，“空间信息流：ℓ_p^n中的多单播”，载于《2025年IEEE国际信息论研讨会（ISIT）论文集》，美国密歇根州安娜堡，2025年，第1–6页。[21] M. Cassorla，“用曲面逼近紧内度量空间”，《印第安纳大学数学杂志》，第41卷，第2期，第505–513页，1992年。[22] M. Braverman、S. Garg 和 A. Schvartzman，“无向图中的编码要么极其有用，要么毫无用处”，载于《第8届理论计算机科学创新会议（ITCS）论文集》，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）系列，第67卷，美国加利福尼亚州伯克利，2017年，第18:1–18:18页。[23] I. J. Schoenberg，“对 Maurice Fréchet 文章《关于一类可向量映射到希尔伯特空间的距离空间的公理化定义》的评论”，《数学年刊》，第36卷，第3期，第724–732页，1935年。[24] W. B. Johnson 和 J. Lindenstrauss，“到希尔伯特空间的 Lipschitz 映射的扩张”，载于《现代分析与概率会议》，《当代数学》系列，R. Beals、A. Beck、A. Bellow 和 A. Hajian 编。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1984年，第26卷，第189–206页。[25] A. Gupta、I. Newman、Y. Rabinovich 和 A. Sinclair，“图的割、树与 ℓ_1嵌入”，《组合数学》，第24卷，第2期，第233–269页，2004年。[26] OpenAI，“平面图度量可嵌入 L_1 且畸变为常数”，OpenAI Math Release 预印本，2026年9月23日，Lean 断言与证明：https://github.com/openai/math/blob/main/lean/docs/089.md。 [在线]。可访问：https://github.com/openai/math/blob/main/preprints/Planar-Graph-Metrics-Embed-into-L1-with-Constant-Distortion-September-23-2026/paper.pdf

[27] A. Sidiropoulos，“最优随机平面化”，载于《第51届IEEE计算机科学基础年会（FOCS）论文集》，美国内华达州拉斯维加斯，2010年，第163–170页，doi：10.1109/FOCS.2010.23。

[28] 1804 07136, 2018 [ ] 1804 07136

[29] 226, 1, 349 391, 2021

S. Ren，“图到黎曼流形的等距嵌入”，arXiv：。在线。可访问：https://arxiv.org/abs/。M. Eilat 和 B. Klartag，“离散度量空间的黎曼嵌入刚性”，《数学创刊》，第卷，第期，第–页。[30] M. Gromov，《黎曼与非黎曼空间的度量结构》，Birkhäuser现代经典丛书。美国马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser，2007年。[31] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生教程丛书。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2001年，第33卷。[32] M. W. Hirsch，《微分拓扑学》，《数学研究生教材》系列。美国纽约州纽约：施普林格，1976年，第33卷。[33] S. Friedl 和 G. Herrmann，“空间图的图形邻域”，载于《2019–20年MATRIX年刊》，MATRIX图书系列，D. R. Wood、J. de Gier、C. E. Praeger 和 T. Tao 编。瑞士尚：施普林格，2021年，第4卷，第627–646页。[34] J. B. Tenenbaum、V. de Silva 和 J. C. Langford，“非线性降维的全局几何框架”，《科学》，第290卷，第5500期，第2319–2323页，2000年。[35] S. T. Roweis 和 L. K. Saul，“通过局部线性嵌入进行非线性降维”，《科学》，第290卷，第5500期，第2323–2326页，2000年。[36] M. Belkin 和 P. Niyogi，“用于降维和数据表示的拉普拉斯特征映射”，《神经计算》，第15卷，1396，2003 6，1373期，第–页。[37] P. Niyogi、S. Smale 和 S. Weinberger，“如何从随机样本中高置信度地找出子流形的同调”，《离散与计算几何》，第39卷，第1–3期，第419–441页，2008年。[38] C. Fefferman、S. Ivanov、Y. Kurylev、M. Lassas 和 H. Narayanan，“流形的重构与插值。I：几何惠特尼问题”，《计算数学基础》，第20卷，第5期，第1035–1133页，2020年。[39] C. Fefferman、S. Ivanov、M. Lassas 和 H. Narayanan，“从含噪内在距离重构黎曼流形”，《SIAM数据科学数学杂志》，第2卷，第3期，第770–808页，2020年。[40] R. Ahlswede、N. Cai、S.-Y. R. Li 和 R. W. Yeung，“网络信息流”，《IEEE信息论汇刊》，第46卷，1216，2000 4，1204期，第–页。[41] S.-Y. R. Li、R. W. Yeung 和 N. Cai，“线性网络编码”，《IEEE信息论汇刊》，第49卷，第2期，第371–381页，2003年。[42] R. Koetter 和 M. Médard，“网络编码的代数方法”，《IEEE/ACM网络汇刊》，第11卷，第5期，第782–795页，2003年。[43] N. J. A. Harvey、R. D. Kleinberg 和 A. R. Lehman，“在 k对通信问题中比较网络编码与多商品流”，麻省理工学院计算机科学与人工智能实验室，美国马萨诸塞州剑桥，技术报告 MIT-LCS-TR-964，2004年11月24日。[44] T. C. Hu，“多商品网络流”，《运筹学》，第11卷，第3期，第344–360页，1963年。[45] P. D. Seymour，“四端点流”，《网络》，第10卷，第1期，第79–86页，1980年。[46] H. Okamura 和 P. D. Seymour，“平面图中的多商品流”，《组合理论杂志》B辑，第31卷，第1期，第75–81页，1981年。[47] H. Okamura，“图中的多商品流”，《离散应用数学》，第6卷，第1期，第55–62页，1983年。[48] A. Chakrabarti、L. Fleischer 和 C. Weibel，“割条件何时足够：串并联网络中多流问题的完整刻画”，载于《第44届ACM计算理论年会（STOC）论文集》，美国纽约州纽约，2012年，第19–26页。[49] K. Jain、V. V. Vazirani 和 G. Yuval，“无向图中多单播会话的容量”，《IEEE信息论汇刊》，第52卷，第6期，第2805–2809页，2006年。[50] N. J. A. Harvey、R. D. Kleinberg 和 A. R. Lehman，“信息网络的容量”，《IEEE信息论汇刊》，第52卷，第6期，第2345–2364页，2006年。[51] X. Yin、Z. Li、Y. Liu 和 X. Wang，“网络编码中多单播猜想的归约方法”，《IEEE信息论汇刊》，第64卷，第6期，第4530–4539页，2018年。[52] M. I. Qureshi 和 S. Thakor，“无向多重单播网络信息流的一个界”，《IEEE信息论汇刊》，第68卷，第7期，第4453–4469页，2022年。[53] S. Liu、Y. Hou、J. H. Wang 和 Z. Li，“关于多单播猜想：会话支配”，载于《2026年IEEE计算机通信会议（INFOCOM）论文集》，日本东京，2026年，第1–10页。[54] S. Liu、Z. Li、X. Fan 和 H. Chen，“多单播猜想的会话交互框架”，载于《2026年IEEE国际信息论研讨会（ISIT）论文集》，中国广州，2026年，第1–6页。[55] S. Liu、L. Que、Z. Li 和 B. Li，“关于多单播猜想：超越割度量”，arXiv:2608.06070，2026年8月。[56] S. Liu、Z. Li 和 B. Li，“多单播可行性何时等价于单汇点可路由性”，arXiv:2610.33655v2，2026年10月。[57] P. Dvoˇrák、M. Koucký、K. Král 和 V. Slívová，“数据结构下界与热门猜想”，载于《第29届欧洲算法年会（ESA）论文集》，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）系列，第204卷，线上会议，2021年，第39:1–39:15页。[58] B. Li、Z. Li 和 S. Liu，“无向多单播网络编码与更快的外存整数排序”，arXiv:2610.20079v3，2026年11月。[59] OpenAI，“低于 $n\log\ n$的整数乘法”，OpenAI Math，2026年9月23日。 [在线]。可访问：https://github.com/openai/math/blob/main/preprints/Integer-multiplication-below-n-log-n-September-23-2026/paper.pdf [60] “交换，不要路由：无向网络编码猜想的一个33顶点反例”，由 dysfunctor 维护的 GitHub 仓库，2026年10月，附录 C（32顶点变体）。 [在线]。可访问：https://github.com/dysfunctor/network-coding-counterexample/tree/2ad45b0