arXiv:2611.29473v1 [math.RA] 22 Nov 2026

范数公理与因子超域

ALESSANDRO LINZI

ABSTRACT. Touchard 和作者曾提出这样一个问题：按照 Krasner 的定义，满足范数公理的每个赋值超域是否都具有 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 的形式：即将赋值域 K 视为模相对误差的等价类ρ。问题的关键在于范数公理。若一个赋值超域是域的商 $K^\times/T \cup \{0\}$，则范数公理会迫使 $T = 1 + \mathfrak{m}_\rho$ 成为 K上的一个赋值。由此完成了一个已发表命题的证明，也使得原问题等价于询问每个Krasner赋值超域是否都是这样的商。对于值群 $\mathbb{Z}$，我们直接证明确实如此。若不要求范数公理，答案是否定的。在一个非平凡有序阿贝尔群上对超域进行分层，当且仅当该超域本身是因子超域时，所得结构才是因子超域。因此，Massouros 的超域给出了满足其他所有公理、具有非平凡赋值，却不是因子超域的超域。一般情形下的问题仍未解决。

1. INTRODUCTION

1.1. 问题。 设 K 是一个赋值为 v 、值群为 Γ的域。取 $\Gamma_{\geq 0}$ 的一个初始段 ρ，并令 $\mathfrak{m}_\rho$ 为 K 中赋值大于 ρ每个元素的所有元素组成的集合。$1 + \mathfrak{m}_\rho$ 中的元素构成 $K^\times$的一个子群。商

$$\mathcal{H}_\rho(K) \coloneqq K^\times/(1 + \mathfrak{m}_\rho) \cup \{0\}$$

保留了 K 中的每个元素，误差至多为 ρ。乘法可传递到商上，但加法不行：两个等价类之和是其代表元所有可能的和所对应的等价类组成的集合。因此，$\mathcal{H}_\rho(K)$ 是一个 超域，且 K 的赋值可下降到该超域上。对于$\rho = \{0\}$，可得到模型论中赋值域所用的首项结构 RV(K)；对于离散的 Γ 和 $\rho = \{0, \dots, n-1\}$，则可得到 Krasner、 [7],Tolliver [14] 和 Lee [10]研究的超域。

域的商，或更一般地，环对乘法子群取商，是超结构的经典来源，这一思路可追溯至 Krasner [8]。Krasner 超域和符号超域被 Baker 和 Bowler 用作拟阵与定向拟阵的系数，它们正是以这种方式得到的 [1, 第 2.7 条注记和例 2.10、2.13], ， Connes 和 Consani 在整体域的阿代尔等价类空间上定义的超环结构也是如此 [4]。

Krasner 提炼出了使 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 成为赋值超域的性质。其中起决定作用的是范数公理：每个和 $x \boxplus y$ 都是半径按规定取值的完整超度量球。Touchard 和作者 [12] 研究了赋值超域系统何时来自单个赋值域，并在论文末尾针对单个超域提出了逆向问题。我们

逐字引用。

问题 ([12, 问题 1, 第 23])。 所有值群为 Γ 的赋值超域是否都具有 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 的形式，其中某个赋值域为 K，且某个初始段为 ρ，属于 $\Gamma_{\geq 0}$?

这里的“赋值超域”指带有范数为 ρ的赋值的超域，其含义见 [11,定义 4。6], 定义 2.2 中回顾了这一概念；根据 [11, 命题 4.8(i)] ，这等价于 [12,定义 1。8], 正如该定义之后的说明所述。相同的一系列思想出现在两个地方

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 16Y20；次要分类号 12J10、12J20、13F30。

Key words and phrases. 超域、赋值超域、因子超域、Krasner 赋值、范数公理。

见 [11]。其中的命题 4.11 指出，带有 Krasner 赋值的因子超域具有 $\mathcal{H}_\rho(K)$的形式；注记 4.12 则指出，目前尚不清楚每个 Krasner赋值超域是否都是因子超域。第 7 节第 (2) 项针对定义 3 中较弱的赋值概念提出了类似问题 [11, 1], ，该定义由下文的公理 (V0)–(V2) 组成（在原文中标记为 (V1)–(V3)）：任意一个存在非平凡赋值的超域是否都是因子超域？任意一个存在非平凡赋值的超域是否都是因子超域？

1.2. **结果**。下面的三个结果表明，问题在于范数公理（V3）所强制的内容。满足（V3）时，因子超域表示会自动成为$\mathcal{H}_\rho(K)$ 定理 A，而在离散情形下，这些公理会重建该域，无需给出任何因子表示（定理 B）。不满足（V3）时，非平凡赋值并不会强制产生因子表示（定理 C）。

一个 因子超域 是域 $K_T = K^\times/T \cup \{0\}$ 的商 K，其中除以任意子群$T \leq K^\times$，并带有诱导的超加法（第 2 节）。每个 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 都是因子超域，其中 $T = 1 + \mathfrak{m}_\rho$。第一个结果是，只要存在 Krasner 赋值，逆命题就成立。

定理 *A*（补充 [11, 命题 *4*.11]）。设 *(H, val)* 是一个范数为ρ 且值群为 Γ 的赋值超域。假设 H 作为超域同构于某个因子超域K_T。那么 K 带有一个赋值 w，其值群为 Γ，使得 $T = 1 + \mathfrak{m}_\rho(w)$，且同构 $K_T \to H$ 是赋值超域 $\mathcal{H}_\rho(K, w) \to (H, val)$ 的同构。

这是 [11, 命题 4。11], 其证明见 [11] ，其中只说明了 T由 1-单位组成，也就是说，$T \subseteq 1 + \mathfrak{m}_{\{0\}}(w)$。缺失的等式 $T = 1 + \mathfrak{m}_\rho(w$是 Krasner 的观察，见 [7, 第 148] 页，其表述为 [12, 引理 1。25]；第 3 节详述了这一组合。因此，Touchard 和作者提出的问题等价于 [11, 注 4。12]中的问题：当且仅当每个 Krasner 赋值超域都是因子超域时，该问题才有肯定答案（推论 3.2）。

第二个结果解决了值群 $\mathbb{Z}$ 的情形。

定理 B。设 $(H$,赋值) 是一个范数为 ρ 、值群为 $\mathbb{Z}$ 的赋值超域。那么，对于某个离散赋值域 K，有 $H \cong \mathcal{H}_\rho(K)$，且两者作为赋值超域相同。

这也可以从 Tolliver 对 Krasner 的离散赋值超域与 Deligne 三元组的比较中推出 [14], ，再结合 定理 A；参见 注 4.5。我们的证明沿用相同思路，通过 [14, 引理 4.2 和 4.3]的环，以及 Deligne 的观察：截断离散赋值环是离散赋值环的商；不过，证明直接以 [12] 的公理表述，除 Hungerford 的一个定理外，内容自成一体 [6]。Lee [10,定理 4.8 和 4.10]在一个范围更窄的情形下证明了更多结果：对于混合特征（0，p）且剩余域完美、长度 n 相对于分歧指数足够大的离散赋值超域，他证明了它们与截断离散赋值环以及完备离散赋值环之间存在范畴等价。 定理 B 不需要这些假设，但它只是一个存在性结论。

第三个结果以否定的方式回答了问题 [11, §7(2)]。它使用了 Bowler 和 Su 提出的超域 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$沿有序阿贝尔群进行的分层 $\mathcal{M}$ （定义 4） [3, ： 1]在每个次数 $\mathcal{M}$ 中放置一份 $\gamma \in \Gamma$，如同幂级数域中将剩余域与值群层叠起来一样（第 6 节）。

定理 C. 设 $\mathcal{M}$ 是一个超域，Γ 是一个非平凡的有序阿贝尔群。分层$\mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 上存在一个满射到 $\Gamma \cup \{\infty\}$ 的映射，并满足赋值的公理 (V0)–(V2)；$\mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 是因子超域，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是。特别地，若 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ 是一个

指数为 G 的 *Massouros* 超域2 且 $|G| \geq 4$，则 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 不是因子超域；它不具有任何范数的赋值（定义 *2.2* 所述意义下）。

Massouros [13] 构造了超域 $\mathcal{M}(G)$，并证明它们不是因子超域；正如 [11, §7(2)], 所指出的，它们只允许平凡赋值。等价关系的一个方向来自 [11, 引理 3.6 和命题 3.14]中的剩余计算。另一个方向则利用群代数 $k[t^\Gamma]$的分式域：在该域中， $\mathcal{M}$的因子表示 k_S 会传递到 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$。对于 Krasner 超域、符号超域以及域，也就是说，对于 $S = k^\times$、 S 有序域的正锥，以及 $S = \{1\}$，这项构造出自 Bowler 和 Su [3, 定理 7.5 的证明（情形 1–3], ），他们使用了 Hahn 型域；Krasner 的情形也见于 [11, 命题 2.17(iv)]。命题 7.3 将其推广到任意子群 S。范数公理之所以失效，是因为 $1 \boxminus 1$ 含有赋值为 0 的元素，这正是 [11,命题 4.14]背后的机制。表 1 展示了四个例子。

TABLE 1. 分层 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 于非平凡有序阿贝尔群 Γ之上。“有赋值的”表示 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$具有某个范数的赋值（依照定义 2.2的含义）。第三列依据定理 C；第 1–3 行的情况此前已知，见 [3, 定理 7.5 的证明，情形 1–3], [11, 命题 2.17(iv)]。第四列依据命题 7.3 之后的段落（第 1 行）、注 7.5 （第 2、3 行）以及引理 7.4（第 4 行）。

$\mathcal{M}$	$\mathcal{M} \rtimes \Gamma$	因子?	有赋值?
一个域 k	$\mathcal{H}_{\{0\}}(k(t^\Gamma))$	yes	yes
Krasner 超域	热带超域 of Γ	yes	no
符号超域	Γ 的实热带超域	yes	no
$\mathcal{M}(G)$， $G^2 = 1$， $\lvert G\rvert \geq 4$	定理 C	no	no

对于 $\Gamma = \mathbb{R}$ 第二行和第三行分别是 Viro 热带超域和实热带超域[15, §§5.3 和 7。2]；参见注 7.5。

1.3. 新增内容。本文中的数学内容很基础，且已有若干步骤见诸文献。我们的新增内容包括：对 [11, 命题 4.11] 给出完整证明，并由此证明两个已发表问题（定理 A 和推论 3.2）等价；用 [12] 的语言证明，Touchard 和作者提出的问题对于值群 $\mathbb{Z}$ 有肯定答案（定理 B）；以及定理 C 的迁移原理，它将每个非因子超域转化为对 [11, §7(2)] 的否定答案。对于 Krasner 超域、符号超域和域，分层为因子超域这一事实归功于 Bowler 和 Su [3, 对定理 7.5 的证明（情形 1–3] ），而在 Krasner 的情形下，则归功于 [11,命题 2.17(iv)]；命题 7.3 将他们的构造推广到每个子群 S。新增内容还包括对每个超域 $\mathcal{M}$的等价性、完整写出的从 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 到 $\mathcal{M}$ 的推导，以及对 Massouros 超域的应用。

1.4. **尚未解决的问题**。 Touchard 与作者的主定理 [12, 定理 4。1]当范数 ρ 是某个凸子群的非负部分 $\Delta_{\geq 0}$ 时给出了肯定的回答Δ ，其中该凸子群属于 Γ，例如 $\rho = \{0\}$ 或 $\rho = \Gamma_{\geq 0}$ (推论 3.5)。结合 定理 B，剩下的情况是赋值群不是 $\mathbb{Z}$ 且范数不具有 $\Delta_{\geq 0}$这种形式。以下是我们尚无法解决的这类情况中最具体的一个。

问题 1′。 设 $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 带有字典序，且 $\rho = \{(0, 0)、(0, 1)\}$。每个范数为 ρ 且值群为 Γ的赋值超域，是否都具有 $\mathcal{H}_\rho(K)$的形式?

的凸子群为 $\{0\}$、$\{0\}\times\mathbb{Z}$ 和 Γ，其非负部分为 $\{(0,0)\}$、$\{(0,m)\colon m\geq 0\}$ 以及 $\Gamma_{\geq 0}$，因此 ρ 不是 $\Delta_{\geq 0}$ 的形式，推论 3.5 不适用；定理 B不适用，因为 $\Gamma\ncong\mathbb{Z}$。有关启发式说明，请参见 注 4.4 。

1.5. **组织结构**。 第 2 节 回顾超域、因子超域和 Krasner 赋值。第 3 节 证明 定理 A 并记录 [12, 定理 4。1] 给出。 第 4 节 讨论值群 $\mathbb{Z}$。 第 5 节 至 7 介绍 Massouros 超域、分层以及 定理 C的证明。 第 8 节 介绍本文附带的计算机检验。

当前示例。 全文中， $\mathcal{M}_4$ 表示定义在克莱因四元群$V=\{1,a,b,ab\}$ 与 0 上的 Massouros 的超域， $\mathcal{L}_4$ 表示其在 $\mathbb{Z}$ 上的分层。二者都很小，可以手工计算。

2. Preliminaries

我们紧密遵循 [12] 。

2.1. **超域**。 集合上的一个超运算 H 将每一对 x， $y\in H$ 映射到一个非空子集 $x\boxplus y\subseteq H$。对于子集 A， B，我们令 $A\boxplus B=\bigcup_{a\in A,\ b\in B} a\boxplus b$，且 $x\boxplus A=\{x\}\boxplus A$,$A\boxplus x=A\boxplus\{x\}$。

定义 2.1 ([12, 定义 1.1 和 1.4]). 超域是一个元组 $(H,\boxplus,\cdot,0,1)$，满足：
(CH1) $(x\boxplus y)\boxplus z=x\boxplus(y\boxplus z)$ 对所有 x,y,z成立；(CH2) $x\boxplus y=y\boxplus x$ 对所有 x,y成立；(CH3) 对每个 x，都存在唯一的 $-x$，使得 $0\in x\boxplus(-x)$；(CH4) 若 $z\in x\boxplus y$，则 $x\in z\boxminus y$；(HF2) $H^\times=H\setminus\{0\}$ 在 $\cdot$ 运算下构成阿贝尔群，且对所有 x都有 $x\cdot 0=0$；(HF3) $z\cdot(x\boxplus y)=zx\boxplus zy$ 对所有 x,y,z成立。

这些公理蕴含 $x\boxplus 0=\{x\}$ [12, 注 1.2]。超域的同态 $\varphi\colon H\to H'$ 满足 $\varphi(0)=0$, $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ 以及 $\varphi(x\boxplus y)\subseteq\varphi(x)\boxplus\varphi(y)$；同构是一个双射 φ，满足 $\varphi(x\boxplus y)=\varphi(x)\boxplus\varphi(y)$ 以及 $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$。由 (HF2) 和 (CH3) 中的唯一性可知，同构将 1 映到 1，并将 $-x$ 映到 $-\varphi(x)$。

2.2. **因子超域**。 设 K 是一个域， T 是 $K^\times$的一个子群。记 $[x]_T:=xT$ 为$x\in K^\times$，并记 $[0]_T:=\{0\}$。在 $K_T:=K^\times/T\cup\{[0]_T\}$ 上定义如下运算：对于 $x,y\in K$,

$$[x]_T\boxplus[y]_T:=\{[x+ys]_T : s\in T\},\qquad [x]_T\cdot[y]_T:=[xy]_T. \tag{2.1}$$

Krasner 证明了 K_T 是一个超域 [8]；另见 [12, 命题 1.15]。与某个 K_T 同构的超域称为因子（或商）超域。以下两个事实会反复用到：$-[x]_T=[-x]_T$，以及 $[x+y]_T\in[x]_T\boxplus[y]_T$对所有 x， $y\in K$均成立（取 $s=1$）。

2.3. **赋值**。

定义 2.2 （[11, 定义 4.6]；等价于 [12, 定义 1.8]）。 设 Γ是一个有序阿贝尔群， ρ 是 $\Gamma_{\geq 0}$的一个非空初始段，也就是说，是 $\Gamma_{\geq 0}$的一个向下闭合的非空子集；特别地， $0\in\rho$。与通常一样， ∞ 是一个新符号，满足 $\gamma<\infty$，并且对所有 $\gamma\in\Gamma$都有$\gamma+\infty=\infty+\gamma=\infty$。超域 H 上的范数为……的赋值 ρ 是一个满射 val: $H\to\Gamma\cup\{\infty\}$，满足对所有 x， $y\in H$：
(V0) $\mathrm{val}(x)=\infty$ 当且仅当 $x=0$; (V1) $\mathrm{val}(xy)=\mathrm{val}(x)+\mathrm{val}(y)$; (V2) $\mathrm{val}(z)\geq\min\{\mathrm{val}(x),\mathrm{val}(y)\}$ 对所有 $z\in x\boxplus y$;

(V3)（范数公理）若 $z \in x \boxplus y$，则对于所有 $z' \in H$，

$$z' \in x \boxplus y \iff \mathrm{val}(u) > \rho + \min\{\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y)\} \text{ for all } u \in z \boxminus z'.$$

一个赋值超域是带有某种范数赋值的超域；在 [11, 定义 4。6] 这些称为 Krasner赋值超域。赋值超域的同构$(H,\mathrm{val}) \to (H',\mathrm{val}')$是超域的同构 φ，且 $\mathrm{val}' \circ \varphi = \mathrm{val}$。

在 (V3) 中，$\rho + \gamma$ 是包含 $\delta + \gamma$ 的最小初始段，其中对所有 $\delta \in \rho$均成立；$\mathrm{val}(u) > \rho + \gamma$ 表示 $\mathrm{val}(u) - \gamma > \rho$（对 $u = 0$成立）。在赋值域或赋值超域中，我们记 $\mathfrak{m}_\rho := \{x : \mathrm{val}(x) > \rho\}$; 这个集合包含 0。必须指明赋值时，我们记作 $\mathfrak{m}_\rho(w)$。平凡赋值是满足 $\Gamma = \{0\}$的赋值。仅满足 (V0)–(V2) 的映射称为 [9, 定义 4.1]和 [11, 定义 3.1]中的赋值；参见 [12, 注记 1.9]。定义 2.2 即 [11, 定义 4.6]: 这样的赋值还须满足该处的公理 (KVH)，即 (V3)。表述上的唯一区别是，该处的范数 ρ_v 是包含 0 的值群初始段，而这里我们取 $\rho = \rho_v \cap \Gamma_{\geq 0}$。根据 [11, 命题 4.8(i)]（将 y 替换为 $-y$），这等价于 [12, 定义 1.8], ，后者还包含单值性质：若 $0 \notin x \boxplus y$，则 $\{\mathrm{val}(z) : z \in x \boxplus y\}$ 是单元素集。因此，下面所用的这个问题及其结果均适用。

若 (K, v) 是赋值域且 $T = 1 + \mathfrak{m}_\rho$，则 T 中的元素的赋值均为 0，因此 v 下降为 K_T 上的映射 v_ρ; 它是范数为 ρ [12, 的赋值，见第 1.2] 节。对于这个赋值超域，我们记作 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 或 $\mathcal{H}_\rho(K, v)$。

例2.3。 取带有 3进赋值的 $K = \mathbb{Q}$，并令 $\rho = \{0\}$。于是 $1 + \mathfrak{m}_\rho = 1 + 3\mathbb{Z}_{(3)}$，所以 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 中的一个等价类记录了 3 的确切幂次和首位 3 进制数字，后者为 1 或 2。在其中，$[1] \boxplus [1] = \{[2]\}$，而 $[1] \boxplus [2]$ 由 0 和所有正赋值的等价类组成，即 0 周围半径为 0 的开球。

范数公理的两个推论将被反复使用。它们都包含在 [12, 引理 1.25], 的证明中，而第一个推论也是 [11, 命题 4.14] 的关键步骤。第一个推论指出，$1 \boxminus 1$ 恰好是 0 周围半径为 ρ 的开球。

引理 2.4. 设 $(H,$赋值$)$ 是一个范数为 ρ 的赋值超域。那么 $1 \boxminus 1 = \mathfrak{m}_\rho$.

证明. 我们有 $0 \in 1 \boxminus 1$，且 $\min\{\mathrm{val}(1), \mathrm{val}(-1)\} = 0$由 [12,引理 1.10] 得出。将 (V3) 应用于$x = 1$、$y = -1$ 和 $z = 0$: 元素 z' 属于 $1 \boxminus 1$，当且仅当每个 $u \in 0 \boxminus z'$ 都满足 $\mathrm{val}(u) > \rho$。由于 $0 \boxminus z' = \{-z'\}$ 且 $\mathrm{val}(-z') = \mathrm{val}(z')$，这意味着 $\mathrm{val}(z') > \rho$。□

第二个性质说明，向 1 加上一个 ρ-小量不会改变任何东西。

引理 2.5. 设 $(H,$赋值$)$ 是一个范数为 ρ 的赋值超域。若 $\mathrm{val}(m) > \rho$，则 $1 \boxplus m = \{1\}$。

证明。 由 引理 2.4， $m \in 1 \boxplus (-1)$，因此 $1 \in m \boxplus 1$由（CH4）和（CH2）。由 [12,引理 1。12],$1 \in 1 \boxplus m$ 迫使 $1 \boxplus m = \{1\}$。□

注 2.6（范数由赋值确定）。 设 $(H,$ val) 是一个范数为 ρ的赋值超域。那么

$$\rho = \Gamma_{\geq 0} \setminus \mathrm{val}(1 \boxminus 1).$$

确实，根据引理 2.4 以及 val 的满射性，$\mathrm{val}(1 \boxminus 1) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma > \rho\} \cup \{\infty\}$。元素 $\gamma \geq 0$ 不满足 $> \rho$，当且仅当 $\gamma \leq \delta$ 对于某个 $\delta \in \rho$，也就是说，当且仅当 $\gamma \in \rho$，因为 ρ 是 $\Gamma_{\geq 0}$的初始段 [11, 例 4。24]因此，映射 val 至多是一个范数的赋值，而范数并不是额外的数据。可以变化的是赋值本身：一个超域可以携带不等价的 Krasner 赋值.

3. Valued factor hyperfields: proof of Theorem A

定理 A 综合了两个已发表的事实。根据 [11, 引理 3。6], 因子超域上的赋值 K_T 可拉回为 K上的赋值。由此得到的从 K 到 H 的映射，是赋值超域之间的满射等距同态，其含义见 [12, 定义 1。18],Krasner 的观察 [7, 第 148], 页 [12, 如25], 引理 1。 [11, 所表述，说明此类映射的核是相应层级的 1-单位群。 [11, 命题 4。11]的证明包含第一步和包含关系 $T \subseteq 1+\mathfrak{m}_{\{0\}}$，但没有证明等式 $T = 1+\mathfrak{m}_\rho$。为方便读者，我们在此给出完整的简短论证。范数公理从两侧确定了 T：引理 2.4 给出 $T \subseteq 1+\mathfrak{m}_\rho$，而引理 2.5 给出 $1+\mathfrak{m}_\rho \subseteq T$。

定理 *A* 的证明定理 *A*。令 $\varphi\colon\ K_T \to H$为超域的一个同构，并定义 $w\colon\ K \to \Gamma\cup\{\infty\}$ 为 $w(x) := \mathrm{val}(\varphi([x]_T)$。

步骤 1： w 是域 K 上的赋值，其值群为 Γ [11, 引理 3.6]。根据 (V0)，$w(x) = \infty$ 当且仅当 $x = 0$。乘法性由 (V1) 得出。对于超度量不等式， $[x+y]_T \in [x]_T \boxplus [y]_T$，因此 $\varphi([x+y]_T) \in \varphi([x]_T) \boxplus \varphi([y]_T)$，而 (V2) 给出$w(x+y) \geq \min\{w(x)\ w(y)\}$。由于 φ 是双射且 val 是满射， $w(K^\times) = \Gamma$。

步骤 *2*： $T \subseteq 1+\mathfrak{m}_\rho(w)$。显然，对于 $s = 1$。令 $s \in T$ 满足 $s \neq 1$。由（2.1），$[1-s]_T \in [1]_T \boxplus [-1]_T$，因此 $\varphi([1-s]_T) \in 1\boxminus 1$。由 引理 2.4， $w(1-s) > \rho$。

步骤 *3*： $1+\mathfrak{m}_\rho(w) \subseteq T$。显然，对于 $m = 0$。令 $m \in K^\times$ 满足 $w(m) > \rho$。由引理 2.5， $1\boxplus\varphi([m]_T) = \{1\}$，因此 $[1]_T \boxplus [m]_T = \{[1]_T\}$。特别地 $[1+m]_T = [1]_T$，即$1+m \in T$。

步骤 *4*：结论。由步骤 2 和 3， $T = 1+\mathfrak{m}_\rho(w)$，因此 $K_T = \mathcal{H}_\rho(K,\ w)$ 作为超域同构。 $\mathcal{H}_\rho(K,\ w)$ 的赋值将 $[x]_T$映射为 $w(x) = \mathrm{val}(\varphi([x]_T))$，因此 φ 保持赋值。□

注 3.1（范数公理的用处）。步骤 1 仅使用 (V0)–(V2)。步骤 2 通过 $1\boxminus 1 \subseteq \mathfrak{m}_\rho$ 中的 引理 2.4 使用 (V3)，而步骤 3 则通过 引理 2.5，在给定范数 ρ处使用它。两个带有满足 (V0)–(V2) 的映射的因子超域表明，若给定范数处不满足 (V3)，步骤 2 和步骤 3 均可能失效。

（1） $\mathbb{F}_5/\{\pm 1\}$ 赋予平凡赋值。上的唯一赋值是平凡赋值，因此 $1+\mathfrak{m}_\rho(w) =\{1\}$ 对每个 ρ都成立，步骤 3 显然成立。步骤 2 不成立： $T = \{\pm 1\}$，且 $1\boxminus 1 = \{0, [2]\}$含有一个赋值为 0 的元素。（2） $\mathcal{H}_{\{0,1\}}(\mathbb{Q}_p)$ 赋予 p-进赋值，并将其视为范数为 $\{0\}$ 的候选赋值。它满足 (V0)–(V2)，并且对于范数 $\{0,1\}$ 满足 (V3)，但对于 $\{0\}$ 不满足，这与注 2.6 相符。步骤 2 成立，因为 $T = 1+p^2\mathbb{Z}_p \subseteq 1+p\mathbb{Z}_p = 1+\mathfrak{m}_{\{0\}}$，但步骤 3 不成立：$1+p \notin T$，且 $1\boxplus[p] \neq \{1\}$。

推论 3.2。 以下各项等价。

（1）*Touchard* 与作者提出的问题有肯定答案：每个范数为 H、赋值为 val 的赋值超域 ρ，且值群为 Γ，作为赋值超域都同构于 $\mathcal{H}_\rho(K)$，其中某个赋值域 K 的值群为 Γ。

（2）每个在 定义 *2.2* 意义下存在赋值的超域都是因子超域。

陈述（2）是 [11, 备注 4。12]中的公开问题。引述的 Touchard 与作者提出的问题允许任意一个 K 和任意一个 ρ，它介于（1）和（2）之间，因此与二者等价。

证明。 每个 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 都是因子超域，因此 (1) 蕴含 (2)。反过来，(2) 和定理 A给出 (1)，且范数相同 ρ。 □

备注 3.3。 推论 3.2 还解决了一个诠释问题：问题要求的是超域同构还是赋值超域同构，并无区别。事实上，如果仅将 $H \cong \mathcal{H}_\rho(K)$ 视为超域，那么 定理 A 会在 w 上提供一个赋值 K，该赋值可能不同于给定的赋值，使得 $H \cong \mathcal{H}_\rho(K, w)$ 成为赋值超域。这里需要谨慎，因为一个超域可以带有不等价的 Krasner 赋值 [11, 例 4.24]；定理 A选择w 以匹配 H的给定赋值。

注 3.4（刚性）。范数公理也能从下方确定赋值超加法。设 H 带有两种超加法 $+$ 和 $\boxplus$、一种乘法以及一个映射 val，使得 $(H, +, \cdot, \mathrm{val})$ 和 $(H, \boxplus, \cdot, \mathrm{val})$ 都是范数为 ρ 的赋值超域。若 $x \boxplus y \subseteq x + y$ 对所有 x, y 都成立，则这两种超加法相同。事实上，$0 \in x \boxplus y$ 蕴含 $0 \in x + y$，因此二者具有相同的相反元和 $z \boxminus z' \subseteq z - z'$。给定 x, y，取 $z \in x \boxplus y \subseteq x + y$ 并令$r = \rho + \min\{\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y)\}$。由两种结构中的 (V3)，$x + y = \{z' : \mathrm{val}(u) > r\ \forall u \in z - z'\}$且 $x \boxplus y = \{z' : \mathrm{val}(u) > r\ \forall u \in z \boxminus z'\}$；第二个条件所量化的集合更小，因此 $x + y \subseteq x \boxplus y$。特别是，$\mathcal{H}_\rho(K)$ 的和无法再缩小，否则范数公理便不再成立。

作为凸子群非负部分的范数。 Touchard 与作者的主定理 [12, 定理 4。1]从赋值超域的等距系统构造一个赋值域，其中这些超域的范数穷尽某个凸子群的非负部分。单个赋值超域是仅含一个成员的此类系统，因此我们得到：

推论 3.5 (见 [12, 定理 4。1])。 设$(H,$赋值) 是范数为 ρ 、值群为 Γ 的赋值超域。若 $\rho = \Delta_{\geq 0}$ 对于 Γ 的某个凸子群 Δ 成立，那么对于某个值群为 Γ 的赋值域 K，有 $H \cong \mathcal{H}_\rho(K)$ 作为赋值超域同构。

定理 4 的陈述 [12, 定理 4。1] 只断言存在一个同构 $\mathcal{H}_\rho(K) \simeq H$；该同构可以取为保持赋值的，这一点从其证明中显而易见，而且也可由定理 A推出。

这涵盖了 $\rho = \{0\}$ （情形 $\Delta = \{0\}$，其中 H 是一个 RV 结构）以及 $\rho = \Gamma_{\geq 0}$ （其中H 是一个赋值域）。因此，问题仅在于不属于这种形式的范数；根据定理 B，也仅在于值群不是 $\mathbb{Z}$的情形。

注记 3.6。 设（H,val）是任意一个范数为 ρ的赋值超域。根据 [12, 命题 1。17], 集合 $T_0 := 1 \boxplus \mathfrak{m}_{\{0\}}$ 是 $H^\times$的一个子群，而商 $H_{\{0\}} := H_{T_0}$ 是一个范数为 $\{0\}$的赋值超域。根据推论 3.5，它具有 $\mathcal{H}_{\{0\}}(K)$ 的形式。因此，每个赋值超域的首项层都来自某个赋值域，而问题的反例必须在更精细的精度层面上出现。

4. The discrete case: proof of Theorem B

其思想源于 Deligne 三元组 [5], ，正如 Tol- liver [14]所阐释的，它们与 Krasner 超域相关：在一个范数为 $\{0, \ldots, n-1\}$的赋值超域 H中，将非负赋值的元素按半径为 $n-1$的开球取模，得到一个环 R；该环是离散赋值环 $\mathcal{O}$的一个商，而 H 可由 $\mathcal{H}_\rho(\mathrm{Frac}\,\mathcal{O})$ 恢复。在 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 本身中，R 不过就是$\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^n$。引理 4.1 和 4.2 对应于 [14,引理 4.2 和 4.3]（其中的环为 M_0），只是依据定义 2.2 的公理重新表述并证明；引理 4.1 的第 (2) 部分是 Krasner 的 [7,p。 145], 在 [14,命题 6.1]的证明中使用。

在本节中，(H, val) 是一个赋值超域，其值群为 $\mathbb{Z}$，范数为 ρ。$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的每个初始段都是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 或 $\{0, \ldots, n-1\}$，其中某个 $n \geq 1$。范数 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\{0\}$ 已由推论 3.5 涵盖，取 $\Delta = \mathbb{Z}$ 和 $\Delta = \{0\}$，因此我们假设 $\rho = \{0, \ldots, n-1\}$ 且 $n \geq 2$。那么，$\mathrm{val}(u) > \rho + \gamma$ 意味着 $\mathrm{val}(u) \geq n + \gamma$。令 $\mathcal{O}_H := \{x \in H : \mathrm{val}(x) \geq 0\}$，并固定满足 $\mathrm{val}(\varpi) = 1$ 的 $\varpi \in H$ （在 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 中，即某个一致化元的等价类）。

引理 4.1。 对于 $x, y \in \mathcal{O}_H$，若对所有 $u \in x \boxminus y$ 都有 $\mathrm{val}(u) \geq n$，则记作 $x \sim y$。

(1) $\sim$ 是 $\mathcal{O}_H$ 上的等价关系，并且 $x \sim 0$ 当且仅当 $\mathrm{val}(x) \geq n$。(2) 若 $\mathrm{val}(x) = 0$，则 x 的等价类是 $\{x\}$。(3) 若 x、$y \in \mathcal{O}_H$ 且 $\min\{\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y)\} = 0$，则 $x \boxplus y$ 是一个单独的 $\sim$ 等价类。(4) 若 $x \sim x'$、$y \sim y'$、$z \in x \boxplus y$ 且 $z' \in x' \boxplus y'$，则 $z \sim z'$ 和 $xy \sim x'y'$。

证明。(1) 自反性： $0 \boxminus 0 = \{0\}$，对于 $x \neq 0$，我们有 $x \boxminus x = x\,\mathfrak{m}_\rho$，根据 引理 2.4 和 (HF3)，其元素的值为 $> \rho + \mathrm{val}(x)$，因此值 $\geq n$。对称性： $y \boxminus x = -(x \boxminus y)$。传递性：由于 $0 \in y \boxminus y$，结合律和交换律给出 $x \boxminus z \subseteq x \boxplus (y \boxminus y) \boxminus z = (x \boxminus y) \boxplus (y \boxminus z)$，并且根据 (V2)，两个值为 $\geq n$ 的元素之和只有值为 $\geq n$ 的元素。最后 $x \boxminus 0 = \{x\}$。

(2) 对有序对 $(x,0)$ 和 $z = x \in x \boxplus 0$ 应用 (V3)：元素 z' 属于 $x \boxplus 0 = \{x\}$，当且仅当每个 $u \in x \boxminus z'$ 的值都是 $> \rho$，也就是说，当且仅当 $z' \sim x$。

(3) 由 (V2)， $x \boxplus y \subseteq \mathcal{O}_H$。取 $z \in x \boxplus y$。由 (V3)，元素 $z' \in H$ 属于 $x \boxplus y$，当且仅当每个 $u \in z \boxminus z'$ 的值都是 $> \rho + 0$。因此， $x \boxplus y$ 是满足 $z' \sim z$ 的 $z' \in \mathcal{O}_H$ 的集合。

(4) 与 (1) 中一样， $z \boxminus z' \subseteq (x \boxplus y) \boxminus (x' \boxplus y') = (x \boxminus x') \boxplus (y \boxminus y')$，其所有元素的值均为 $\geq n$。对于乘积，利用 $0 \in x'y \boxminus x'y$ 采用相同的技巧可得 $xy \boxminus x'y' \subseteq (x \boxminus x')y \boxplus x'(y \boxminus y')$，且两个加项都由值为 $\geq n$ 的元素构成。□

令 $R := \mathcal{O}_H/\!\sim$ 并记 $\bar{x}$ 为 x 的等价类。由 引理 4.1（4）， $\bar{x} + \bar{y} := \bar{z}$ 对任意 $z \in x \boxplus y$，以及 $\bar{x}\,\bar{y} := \overline{xy}$ 都是良定义的。

引理 4.2。 R 是一个交换环。它是局部的，其极大理想为 $\bar{\varpi} R$，且 $\bar{\varpi}^{n-1} \neq 0 = \bar{\varpi}^n$。换言之， R 是一个长度为 n 的局部阿廷主理想环（截断离散赋值环，其含义见 [14,定义 1。8]）。

证明。由 H 中的（CH1）和（CH2）可知， $+$ 的结合律和交换律成立；由于 $x \boxplus 0 = \{x\}$， $\bar{0}$ 是单位元；由于 $0 \in x \boxminus x$， $-x$ 是 $\bar{x}$ 的相反元。乘法因 $xw \in xy \boxplus xz$（对 $w \in y \boxplus z$）满足结合律和交换律，单位元为 1，并且由（HF3）满足分配律。每个非零 $x \in \mathcal{O}_H$ 都是 $\varpi^j u$，其中 $j = \mathrm{val}(x)$ 且 $\mathrm{val}(u) = 0$，因此 $\bar{x} = \bar{\varpi}^j \bar{u}$；当 $j \geq n$ 时，由引理 4.1(1)可知 $\bar{x} = 0$。值为 0 的元素在 H 中可逆，其逆元属于 $\mathcal{O}_H$，因此 $\bar{u}$ 是 R 的单位元，而 $\bar{\varpi}$ 是幂零的： $\bar{\varpi}^n = \overline{\varpi^n} = 0$，且由于 $\mathrm{val}(\varpi^{n-1}) < n$，有 $\bar{\varpi}^{n-1} \neq 0$。因此， R 的每个非零元素都是 $\bar{\varpi}^j \bar{u}$，满足 $0 \leq j < n$ 和 $\bar{u} \in R^\times$；所以 R 的每个理想 I 都是 $\bar{\varpi}^j R$，其中 $j \in \{0, \ldots, n\}$ 是满足 $\bar{\varpi}^j \in I$ 的最小者，并且 R 是局部的，其极大理想为 $\bar{\varpi} R$。□

定理 B 的证明。由引理 4.2， R 是一个特殊主理想环：一个只有唯一素理想且该理想幂零的主理想环。Deligne [5, p. 126], 在定理 [14, 7.5]的证明中引用了这样一个结论：对于离散赋值环 $\mathcal{O}$， $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n$ 是成立的；我们改为使用 Hungerford 的一个定理。由 [6, 推论 11]， $R \cong D/I$ 对于主理想整环 D 及理想 I 成立。由于 R 是局部的， I 包含于 D 的唯一极大理想 P 中， $D \setminus P$ 中的元素模 I 后都是单位元，因此 $R \cong D_P/ID_P$。由于 $n \geq 2$， R 不是域，因此 $P \neq 0$ 且 $\mathcal{O} := D_P$ 是一个离散赋值环，其 $R \cong \mathcal{O}/\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n$，因为 R 的长度为 n。这给出了一个环同构 θ： $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n \to R$。取 $\pi \in \mathcal{O}$，使得 θ（模 $\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n$ 的 π）$= \bar{\varpi}$；由于 $\bar{\varpi} \notin (\bar{\varpi} R)^2$， π 是一致化元。令 $K =$ 为 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{O}$，赋予其离散赋值 v，且 $T = 1 + \mathfrak{m}_\rho\ (v) = 1 + \mathfrak{m}_\mathcal{O}^n$。

该映射。每个 $a \in K^\times$ 都是具有 $k = v(a)$ 和 $\tilde{u} \in \mathcal{O}^\times$ 的 $\pi^k \tilde{u}$。根据引理 4.2 和引理 4.1(2)， R 的单位元 $\theta(\tilde{u}$ 模 $\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n)$ 恰好是一个值为 0 的 $u \in H$ 的等价类。令 $\Phi([a]_T) := \varpi^k u$，且 $\Phi(0) = 0$。这是良定义的，因为具有 $s \in T$ 的 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{u}s$ 在模 $\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n$ 意义下具有相同的剩余。它是单射： $\varpi^k u = \varpi^{k'} u'$ 推出 $k = k'$ 和 $u = u'$，从而有 $\tilde{u} \equiv \tilde{u}'$ 模 $\mathfrak{m}_\mathcal{O}^n$ 以及 $\tilde{u}/\tilde{u}' \in T$。它是满射，因为 $x \in H^\times$ 等于 $\varpi^{\mathrm{val}(x)}(\varpi^{-\mathrm{val}(x)} x)$，并且

的每个单位元都 R 具有 $\theta(\tilde{u}$模$\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n)$的形式。由于根据 引理 4.1(2)，具有乘法性，并且它保持赋值。

与 R 的相容性。在 $\mathcal{H}_\rho(K)$ 中，以 $[\pi]_T$ 扮演 ϖ 的角色时，上述构造给出了环 $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n$。事实上，对于 a, $b \in \mathcal{O}$， $[a]_T \boxminus [b]_T$ 的每个元素都是形如 $a-b-b(s-1)$ 且满足 $s \in T$ 的元素的等价类，因此 $[a]_T \sim [b]_T$ 当且仅当 $a \equiv b$ 模 $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n$；并且 $[a+b]_T \in [a]_T \boxplus [b]_T$， $[ab]_T = [a]_T[b]_T$ 表明诱导运算就是 $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n$ 中的运算。对于 $a = \pi^j\tilde{u} \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$，我们有 $\Phi([a]_T) = \varpi^j\tilde{u} = \theta(\pi^j\tilde{u}$ 模 $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n)$，以及 $\Phi(0) = \bar{0} = \theta(0)$。由于 Φ 将 $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_\rho(K)}$ 双射到 $\mathcal{O}_H$，且 θ 是双射， Φ 将 $\sim$等价类中的 $[a]_T$ 映射到 $\sim$等价类中的 $\theta(a$ 模 $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n)$。

和。令 $x, y \in \mathcal{H}_\rho(K)^\times$，并乘以 $[\pi]_T$ 的某个幂（注意 $\Phi([\pi]_T) = \varpi$），使得 $\min\{v(x)\ v(y)\} = 0$；由于 Φ 具有乘法性，且两边都满足 (HF3)，这样做不会造成影响。由引理 4.1(3)，分别应用于 ~~$\mathcal{H}_\rho(K)$~~ 和 H 中， $x \boxplus y$ 是 $\bar{x}+\bar{y}$ 在 $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^n$ 中的等价类，而 $\Phi(x) \boxplus \Phi(y)$ 是 $\Phi(x) + \Phi(y) = \theta(\bar{x}+\bar{y})$ 在 R 中的等价类。根据上一段， $\Phi(x \boxplus y) = \Phi(x) \boxplus \Phi(y)$。与 0 的和显然保持不变。因此， $\Phi\colon \mathcal{H}_\rho(K) \to H$ 是赋值超域的同构。□

注 4.3。 离散性在三个地方发挥了作用：$\mathrm{val}(u) > \rho$ 意味着 $\mathrm{val}(u) \geq n$，因此 $\mathfrak{m}_\rho = \varpi^n\mathcal{O}_H$；元素 ϖ 将 $H^\times \to \mathbb{Z}$ 分解，并给出标准形式 $x = \varpi^k u$；此外，每个截断离散赋值环都是某个离散赋值环的商。对于一般的值群以及诸如 $\{\gamma\colon 0 \leq \gamma \leq \delta\}$ 这样的范数，环 R 仍然有定义（它是模去半径为 δ 的开球后的 $\mathcal{O}_H$），但需要将 R 实现为值群为 Γ 的赋值环的商，并替换标准形式 $\varpi^k u$。我们不知道这两个步骤中的任何一个是否可能失败。

注 4.4（关于问题 1′的启发；非证明）。 在问题 1′中，范数 ρ 属于 $\Delta_{\geq 0}$对应凸子群 $\Delta = \{0\} \times \mathbb{Z}$的值群。 在 $\Delta \cong \mathbb{Z}$内部，它看起来就像 $\{0, 1\}$ 定理 B的范数。我们可以希望赋予 H 一个值群为 Δ的赋值超域，应用 定理 B 于其上，然后沿着 $\Gamma/\Delta \cong \mathbb{Z}$ 按照 [12, 定理 41] 的思路提升所得的域。我们尚未完成这一工作，也不知道应当给哪个值群为 Δ的超域赋予 H。

注 4.5（Tolliver 的路线）。定理 B 也可以由 [14]得到。一个范数为 $\{0, \ldots, n-1\}$、值群为 $\mathbb{Z}$ 的赋值超域，在令 $|x| = c^{\mathrm{val}(x)}$ 取定值 $0 < c < 1$后，便成为 Krasner 意义下的离散赋值超域 [14, 定义 1.4] 。Tolliver 按照 Deligne 的定义赋予它一个三元组 $\mathrm{Tr}(H)$，其环就是我们的 R。根据 [14, 定理 7.5],$\mathrm{Tr}(H) \cong \mathrm{Tr}(\mathcal{H}_\rho(K))$，其中 K 是提升自离散赋值环的分式域 R。根据 [14,定理 1.12], ，该同构及其逆同构提升为 H 与 $\mathcal{H}_\rho(K)$之间的态射，必要时可对绝对值重新缩放。三元组的同构具有分歧指数$r = 1$，因为这些指数相乘；因此，如果将 $\mathcal{H}_\rho(K)$上的绝对值用与 H上相同的常数 c 进行归一化，则无需重新缩放，两个提升都是同一对对象之间的态射，而忠实性 [14, 推论 6.2] 使它们互为逆态射。随后，定理 A 将所得的超域同构提升为赋值超域的同构。我们没有详细写出带绝对值的 Krasner 公理与定义 2.2 之间的对应关系，这正是我们在上文给出直接证明的原因。

5. Massouros hyperfields

Massouros [13, §3] 给出了第一个非因子超域的超域，从而回答了Krasner提出的一个问题 [8]。我们回顾他的构造，并给出其定理的证明。该定理的假设是 G 的指数为 2，且至少有四个元素；与他的证明一样，该证明适用于任意域。对于有限 G，这一结果也是Baker和Jin的一条注记的特例 [2,

注 4。4]: 若有限超域 H 满足 $H^\times$ 不是循环的，且 $1\boxminus 1 \neq H$，则它不是因子超域。[1]对 $|G|$ 需要某个下界（注 5.4）。

定义 5.1 ([13, §3])。 设 G 为阿贝尔群，且 $\mathcal{M}(G) = G \cup \{0\}$，其中将 G 的乘法扩展为 $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$。对所有 $x \boxplus 0 = 0 \boxplus x = \{x\}$，置 $x \in \mathcal{M}(G)$，并且对 $x,\ y \in G$

$$x \boxplus y = \begin{cases} \{x, y\} & \text{if } x \neq y, \\ \mathcal{M}(G) \setminus \{x\} & \text{if } x = y. \end{cases}$$

换言之：两个不同的元素相加得到它们构成的集合，而一个元素与自身相加则得到除自身以外的一切元素。特别地，$-x = x$ 对每个 x都成立。在当前示例中，$1 \boxplus 1 = \{0, a, b, ab\}$ 以及 $a \boxplus b = \{a, b\}$ 属于 $\mathcal{M}_4$。

引理 5.2 ([13, 命题 2])。 对于每个阿贝尔群 G，$\mathcal{M}(G)$ 都是超域。

证明。 交换律已包含在定义中。对于（CH3），$0 \in x \boxplus y$ 与 $x \neq 0$ 仅在 $y = x$时发生。对于（CH4），设 $z \in x \boxplus y$；我们必须证明 $x \in z \boxplus y$。如果 x 或 y 为 0，则显然成立。如果 $x \neq y$，那么 $z \in \{x, y\}$，而 $x \in x \boxplus y$或 $x \in y \boxplus y = \mathcal{M}(G) \setminus \{y\}$。如果 $x = y$，则 $z \neq x$ 且 $x \in z \boxplus x$，这就是 $\{x\}$ 或 $\{z, x\}$。

对于结合律，我们可以假设 x、y、$z \neq 0$。若它们两两不同，则 $(x \boxplus y) \boxplus z$和 $x \boxplus (y \boxplus z)$ 都等于 $\{x, y, z\}$。若恰有两个相同，则两边都等于 $\mathcal{M}(G)$：例如 $(x \boxplus x) \boxplus z \supseteq (z \boxplus z) \cup (0 \boxplus z) = \mathcal{M}(G)$，且 $x \boxplus (x \boxplus z) = (x \boxplus x) \cup (x \boxplus z) = \mathcal{M}(G)$；其他位置的情形经过交换律后，计算相同。若 $x = y = z$，则由交换律可知两边相等。最后，乘以 $g \in G$ 是 $\mathcal{M}(G)$ 的一个固定 0 的双射，它将 $\{x, y\}$ 映为 $\{gx, gy\}$，并将 $\mathcal{M}(G) \setminus \{x\}$ 映为 $\mathcal{M}(G) \setminus \{gx\}$；这就是 (HF3)。□

命题 5.3。 设 G 是一个阿贝尔群，其中对每个 g都有 $g^2 = 1$，并且假设 $|G| \geq 4$。那么 $\mathcal{M}(G)$不是因子超域。

思路：在同构于 $\mathcal{M}(G)$ 的因子超域 k_S 中，子群 S 会包含 -1和所有平方元素，而任何满足 $s \in S$ 的元素 $1 + s$ 都不可能属于 S。在一个有许多平方元素的域中，总能将一个平方元素写成 S 中两个元素的和。

证明。 假设 $\psi\colon k_S \to \mathcal{M}(G)$ 是一个同构，其中 k 是一个域，且 $S \leq k^\times$。我们总结 S 的三个性质。

(a) $-1 \in S$。确实，$-x = x$ 属于 $\mathcal{M}(G)$，因此 $[-1]_S = -[1]_S = [1]_S$。(b) 对所有 $x \in k^\times$，都有 $x^2 \in S$，因为 G 中每个元素的平方都等于 1。(c) 不存在满足 $1 + s \in S$ 的 $s \in S$。否则，$[1]_S = [1 + s]_S \in [1]_S \boxplus [1]_S$，而 $1 \notin 1 \boxplus 1$ 属于 $\mathcal{M}(G)$。

此外 $|k^\times/S| = |G| \geq 4$。

我们首先找到 $y \in S$，使得 $y \neq \pm 1$。如果 $k^\times$ 中的每个平方都是 ± 1，那么每个 $x \in k^\times$ 都满足 $x^4 = 1$，因此 $|k^\times| \leq 4$。结合 $|k^\times/S| \geq 4$，这迫使 $S = \{1\}$ 和 $|k^\times| = 4$，所以$k = \mathbb{F}_5$；但由 (a) 可得 $-1 = 1$，这在 $\mathbb{F}_5$中不成立。因此，某个平方 $y = x^2$ 不同于± 1，并且由 (b) 可知 $y \in S$。

如果 k的特征不为 2，令 $a = \binom{y+1}{2}^2$和 $b = -\binom{y-1}{2}^2$。由于 $y \neq \pm 1$，两者都非零；由 (a) 和 (b)，两者都属于 S，且 $a + b = y \in S$。因此 $s := b/a \in S$和$1 + s = y/a \in S$，这与 (c) 矛盾。

如果特征为 2，那么 $1 + y = (1 + x)^2$，，由于 $y \neq 1$，它非零。因此，根据 (b)，$1 + y \in S$，再次与 (c) 矛盾。□

[1]Baker 和 Jin 在未假设有限性的情况下陈述了该评论，但其证明使用了 Bergelson–Shapiro–Turnwald 定理 [2, 定理 4.1]，，该定理涉及无限域的乘法群中有限指数的子群。对于无限的 H，该陈述并不成立，例如对于 $\mathcal{H}_{\{0\}}(\mathbb{Q}_3)$。

备注5.4。对于 $|G| = 2$，结论不成立： $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$ 同构于 $\mathbb{F}_5/\{\pm 1\}$，这是定理 [2, 1.3(2)证明中三阶超域分类的情形 (2)。事实上，在 $\mathbb{F}_5/\{\pm 1\} = \{0, [1], [2]\}$ 中，我们有 $[1] \boxplus [1] = \{[2], 0\}$，$[2] \boxplus [2] = \{[1], 0\}$ 且 $[1] \boxplus [2] = \{[1], [2]\}$，这就是 $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$ 的表。该结果通过机器在第 8 节中验证。

正如 [11, §7(2)], 所指出的，Massouros 超域只允许平凡赋值，即使是在弱意义下满足 (V0)–(V2) 也是如此：对于 $x \neq 1$，我们有 $x \in 1 \boxplus 1$，因此 $\mathrm{val}(x) \geq 0$；将此应用于x^{-1}，得到 $\mathrm{val}(x) = 0$。要得到非平凡赋值，我们沿着一个值群将 $\mathcal{M}(G)$ 分层。

6. Layered hyperfields

将幂级数域 $k((t^\Gamma))$ 中的元素视为由其首项 $c\,t^\gamma$ 描述。两个次数不同的首项相加，结果是次数较低的那个。两个次数相同的首项相加，结果为 $(c + c')\,t^\gamma$；除非系数相消，此时结果可以是任意次数更高的项。下面的分层将这一规则照搬过来，只是把域 k 替换为任意超域 $\mathcal{M}$。这是 Bowler 和 Su 的 Γ分层 [3, 定义 4.1]，沿群的分裂正合列 $1 \to \mathcal{M}^\times \to \mathcal{M}^\times \times \Gamma \to \Gamma \to 1$ 构造（后两个群按 [3]中的方式采用乘法记法），并在 Γ 上使用相反的顺序（Bowler 和 Su 让较大的元素吸收较小的元素）；另见 [12, 命题 2.5]的证明。它是一个超域这一事实见 [3, 引理 4.2], ，其加法部分依赖于 [3, 引理 3.1], ，该引理对每个超域 $\mathcal{M}$都成立。为使本文自成一体，我们用本文的记号给出一个简短证明，并围绕引理 6.4 的吸收公式来组织。

固定一个超域 $\mathcal{M}$ 和一个有序阿贝尔群 Γ。作为集合， $\mathcal{L} = \mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 由 0 以及满足 $c \in \mathcal{M}^\times$ 和 $\gamma \in \Gamma$的对 (c, γ) 组成；我们用 $c\,t^\gamma$表示 (c, γ)，用 t^γ表示 $1\,t^\gamma$。 $\mathcal{L}$的单位元是 $1 = t^0$。乘法定义为 $(c\,t^\gamma)(c'\,t^{\gamma'}) = cc'\,t^{\gamma+\gamma'}$，且 0 是吸收元。映射 $v(c\,t^\gamma) = \gamma, v(0) = \infty$ 将作为赋值。

定义 6.1。对 $\gamma \in \Gamma$，令 $B_\gamma := \{x \in \mathcal{L} : v(x) > \gamma\}$；其中包含 0。对于非空子集 $A \subseteq \mathcal{M}$，令

$$A\,t^\gamma := \{c\,t^\gamma : c \in A \setminus \{0\}\} \cup \begin{cases} B_\gamma & \text{if } 0 \in A, \\ \varnothing & \text{if } 0 \notin A. \end{cases}$$

因此， $A\,t^\gamma$ 是“按次数 γ放置”的，其中 A 中的消去由所有更高次数的元素取代。并集的行为良好： $\big(\bigcup_i A_i\big)t^\gamma = \bigcup_i A_i\,t^\gamma$。

定义 6.2. $\mathcal{L}$的超加法为 $x \boxplus 0 = 0 \boxplus x = \{x\}$，且对于 $x = c\,t^\gamma$和 $y = c'\,t^{\gamma'}$，

$$x \boxplus y := \begin{cases} \{x\} & \text{if } \gamma < \gamma', \\ \{y\} & \text{if } \gamma' < \gamma, \\ (c \boxplus c')\,t^\gamma & \text{if } \gamma = \gamma'. \end{cases}$$

以下统一描述较为方便。对于非零的 x_1、……、$x_n \in \mathcal{L}$，其中 $x_i = c_i\,t^{\gamma_i}$，令$\mu =$为$_i\,\gamma_i$的最小值，并令 $\sigma(x_1$、……、$x_n) \subseteq \mathcal{M}$为在 $\mathcal{M}$中计算的 c_i 的超和，其中$\gamma_i = \mu$（若只有一个指标取得 μ，则为单元素集 $\{c_i\}$）。于是，对于非零的 x， y，

$$x \boxplus y = \sigma(x, y)\,t^\mu, \qquad \mu = \min\{v(x), v(y)\}. \tag{6.1}$$

例 6.3. 在 $\mathcal{L}_4 = \mathcal{M}_4 \rtimes \mathbb{Z}$ 中，我们有 $t^0 \boxplus a\,t^1 = \{t^0\}$ 和 $a\,t^0 \boxplus b\,t^0 = \{a\,t^0, b\,t^0\}$，而 e

$$t^0 \boxplus t^0 = \{a\,t^0, b\,t^0, ab\,t^0\} \cup B_0,$$

因为 $1 \boxplus 1 = \{0, a, b, ab\}$ 在 $\mathcal{M}_4$中包含 0。因此，和 $1 \boxplus 1 = 1 \boxminus 1$ 在 $\mathcal{L}_4$中包含值为 0 的元素，而 引理 2.4 要求赋值超域中的 $1 \boxminus 1$ 每个元素的值都为 > 0 （参见 引理 7.4）。

关键计算在于形如 $A\,t^\alpha$ 的集合如何吸收另一个加项。

引理 6.4。设 $\varnothing \neq A \subseteq \mathcal{M}$、$\alpha \in \Gamma$ 和 $z = c\,t^\gamma \in \mathcal{L}^\times$。则

$$A\,t^\alpha \boxplus z = \begin{cases} A\,t^\alpha & \text{if } \alpha < \gamma, \\ \{c\}\,t^\gamma & \text{if } \gamma < \alpha, \\ (A \boxplus c)\,t^\gamma & \text{if } \alpha = \gamma. \end{cases}$$

证明。情形 $\gamma < \alpha$。$A\,t^\alpha$ 中的每个元素的值都是 $> \gamma$，因此它与 z 的和为 $\{z\}$。

情形 $\alpha < \gamma$。一个满足 $d \in A \setminus \{0\}$ 的元素 $d\,t^\alpha$ 贡献 $\{d\,t^\alpha\}$。如果 $0 \in A$，我们还必须将 z 加到每个 $w \in B_\alpha$ 上，并且我们断言这些和恰好填满 B_α。根据定义 6.2，每个和都属于 B_α。反之，$w = 0$ 给出 z；每个满足 $\alpha < v(w)$ 的 w 给出 w；每个满足 $v(w)$ 的 w 再次给出 z；元素 $w = d\,t^\gamma$ 给出 $\bigcup_{d \in \mathcal{M}^\times} (d \boxplus c)\ t^\gamma$，其中包含每个 $c' \neq 0$ 的 $c'\,t^\gamma$（因为 $\bigcup_{d \in \mathcal{M}} d \boxplus c = \mathcal{M}$ 和 $d = 0$ 给出其自身），并且包含 B_γ（取 $d = -c$）。因此并集为 B_α。

情形 $\alpha = \gamma$。元素 $d\,t^\gamma$ 满足 $d \in A \setminus \{0\}$ 时，对 $(d \boxplus c)\ t^\gamma$ 有贡献。若 $0 \in A$，则 B_γ 中的元素只对 $z = \{c\}\,t^\gamma = (0 \boxplus c)\ t^\gamma$ 有贡献，因为 $B_\gamma \setminus \{0\}$ 中的所有元素的值都是 $> \gamma$。对 $d \in A$ 取并集，得到 $(A \boxplus c)\ t^\gamma$。□

命题 6.5。对于任意超域 $\mathcal{M}$ 和任意有序阿贝尔群 Γ，分层 $\mathcal{L} = \mathcal{M} \rtimes \Gamma$ 是一个超域，并且 v 满足 (V0)–(V2)。

证明。结合律。如果 x、y 或 z 中有一个为 0，则 (CH1) 两边都化为其余两项之和。否则，由 (6.1) 和 引理 6.4 可得

$$(x \boxplus y) \boxplus z = \sigma(x, y, z)\,t^\mu, \qquad \mu = \min\{v(x), v(y), v(z)\}.$$

要证明这一点，将引理应用于 $A = \sigma(x,\ y)$ 和 $\alpha = \min\{v(x)\ v(y)\}$。若 $\alpha < v(z)$，则 z 不是最小值项之一。若 $v(z) < \alpha$，则它是唯一的一项。若 $\alpha = v(z)$，我们使用 $\sigma(x,\ y) \boxplus c = \sigma(x,\ y,\ z)$，这就是 $\mathcal{M}$ 中的结合律。右边关于 $x,\ y,\ z$ 是对称的，因此由 (CH2)，它也等于 $(y \boxplus z) \boxplus x = x \boxplus (y \boxplus z)$。

交换律显然。逆元：对于非零的 $x = c\,t^\gamma$ 和 y，当且仅当 $v(y) = \gamma$ 且 $0 \in c \boxplus c'$（其中 $y = c'\,t^\gamma$）时，$0 \in x \boxplus y$；也就是说，当且仅当 $y = (-c)\ t^\gamma$。因此，$-x = (-c)\,t^\gamma$ 是唯一的。

可逆性。设 $z \in x \boxplus y$；我们证明 $x \in z \boxminus y$。x、y、z 中有一个为零的情形显然成立（若 $z = 0$，则 $y = -x$ 且 $x \in 0 \boxplus x$）。设 $x = c\,t^\alpha$ 且 $y = c'\,t^\beta$。若 $\alpha < \beta$，则 $z = x$ 且 $x \boxminus y = \{x\}$。若 $\beta < \alpha$，则 $z = y$ 且 $x \in B_\beta \subseteq y \boxminus y$。若 $\alpha = \beta$，则或者 $z = e\,t^\alpha$ 且 $e \in c \boxplus c'$，此时由 $\mathcal{M}$ 中的 (CH4) 得 $c \in e \boxminus c'$，因此 $x \in z \boxminus y$；或者 $c' = -c$ 且 $v(z) > \alpha$，此时 $z \boxminus y = z \boxplus x = \{x\}$。

乘法与分配律。$\mathcal{L}^\times = \mathcal{M}^\times \times \Gamma$ 是阿贝尔群，且 0 是吸收元。乘以 $d\,t^\delta$ 将 $A\,t^\gamma$ 映到 $(dA)\ t^{\gamma+\delta}$ 上，因为它将 B_γ 映到 $B_{\gamma+\delta}$ 上，并且 $0 \in dA$ 当且仅当 $0 \in A$。由 $\mathcal{M}$ 中的 (HF3) 可知，$d\,\sigma(x, y) = \sigma(dx, dy)$，因此 $\mathcal{L}$ 中成立 (HF3)。

赋值。(V0) 和 (V1) 显然成立，且 v 是满射。$A\,t^\mu$ 的每个元素的赋值都至少为 μ，这就是 (V2)。□

7. Proof of Theorem C

在本节中，$\mathcal{M}$ 是一个超域，Γ 是一个有序阿贝尔群，且 $\mathcal{L} = \mathcal{M} \rtimes \Gamma$。根据命题 6.5，$\mathcal{L}$ 是一个超域，且 v 满足 (V0)–(V2)；它是满射，并且当 $\Gamma \neq 0$ 时非平凡。我们分别证明等价关系的两个方向（命题 7.1 和 7.3），然后专门讨论 Massouros 超域。

超域的一个同构 $f\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ 会诱导一个同构 $\mathcal{M}\rtimes\Gamma\to\mathcal{M}'\rtimes\Gamma, c\,t^{\gamma}\mapsto f(c)\,t^{\gamma}$，因为 f 将每个 $A\,t^{\gamma}$ 映到 $f(A)\,t^{\gamma}$，且 $0\in f(A)$ 当且仅当 $0\in A$。因此，对于 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{L}$，是否为因子超域只取决于 $\mathcal{M}$ 的同构等价类。

7.1. **从分层到剩余。** 具有分层结构的因子超域 $\mathcal{L}$ 的剩余是 $\mathcal{M}$。用 [11], 的语言来说，这就是 [11, 引理 3。6]，它提升了赋值；再结合 [11, 命题 3。14]，该命题将 K_T 的剩余超域与剩余域的因子超域 $(Kw)_{\bar T}$ 对应起来；显然，$\mathcal{L}$ 的剩余超域就是 $\mathcal{M}$。我们给出一个直接证明。

命题 7.1。 若 $\mathcal{L}$ 同构于一个因子超域 K_T，则 $\mathcal{M}$ 同构于某个域的因子超域，具体而言，是 K 上某个赋值的剩余域的因子超域。

证明。令 $\varphi\colon K_T\to\mathcal{L}$ 为一个同构，并设 $w(x) := v(\varphi([x]_T))$。定理 A的证明中的步骤 1 仅用到 (V0)–(V2)，因此 w 是 K上的一个赋值。令 $\mathcal{O}_w$、$\mathfrak{m}_w$ 和 k 分别为其赋值环、极大理想和剩余域，并令 res: $\mathcal{O}_w\to k$ 为剩余映射。

T 位于 $1+\mathfrak{m}_w$ 和 $\mathcal{O}_w^{\times}$之间。每个 $s\in T$ 都有 $w(s)=v(1)=0$。若 $w(m)>0$，则$1\boxplus\varphi([m]_T)=\{1\}$ 根据 定义 6.2，因此 $[1+m]_T=[1]_T$，因为 $[1+m]_T\in[1]_T\boxplus[m]_T$；故$1+m\in T$。

令 $T=\mathrm{res}(T)\le k^{\times}$，并令 $k_{\bar T}$为因子超域。$\mathcal{L}$中值为 0 的元素就是$c\,t^0$，且满足 $c\in\mathcal{M}^{\times}$。对于这样的 c，取 $u_c\in\mathcal{O}_w^{\times}$，使得 $\varphi([u_c]_T)=c\,t^0$，并定义

$$\psi\colon \mathcal{M}\to k_{\bar T},\qquad \psi(0)=0,\quad \psi(c)=[\mathrm{res}(u_c)]_{\bar T}.$$

ψ 是群之间良定义的同构 $\mathcal{M}^{\times}\to k^{\times}/T$。另一个 u_c 的取法只相差一个 T 中的因子，因此 ψ 是良定义的；由于 φ 是乘法的，它也是乘法的。它是满射，因为 $\mathrm{res}(\mathcal{O}_w^{\times})=k^{\times}$。若 $\mathrm{res}(u_c)=\mathrm{res}(u_{c'}s)$ 且 $s\in T$，则 $u_c/(u_{c'}s)\in 1+\mathfrak{m}_w\subseteq T$，因此 $[u_c]_T=[u_{c'}]_T$ 和 $c=c'$。

ψ 保持 和。设 $c,\ c'\in\mathcal{M}^{\times}$ 并记 $u=u_c,\ u'=u_{c'}$。根据 定义 6.2 和（2.1），

$$(c\boxplus c')\,t^0=c\,t^0\boxplus c'\,t^0=\{\varphi([u+u's]_T):s\in T\}.$$

回忆一下，$\psi(c)\boxplus\psi(c')=\{[\mathrm{res}(u)+\mathrm{res}(u')\tau]_{\bar T}:\ \tau\in T\}$。设 $e\in\mathcal{M}^{\times}$。若 $e\in c\boxplus c'$，则对某个 $s\in T$，有$e\,t^0=\varphi([u+u's]_T)$；因此 $w(u+u's)=0$，我们可以取 $u_e=u+u's$，并且 $\psi(e)=[\mathrm{res}(u)+\mathrm{res}(u')\,\mathrm{res}(s)]_{\bar T}\in\psi(c)\boxplus\psi(c')$。反过来，假设对某个 $s\in T$，有 $\psi(e)=[\mathrm{res}(u)+\mathrm{res}(u')\,\mathrm{res}(s)]_{\bar T}\neq 0$。那么 $w(u+u's)=0$，因此对某个 $e'\in c\boxplus c'$，有 $\varphi([u+u's]_T)=e'\,t^0$，并且由第一部分可知$\psi(e')=\psi(e)$。由单射性可得 $e=e'\in c\boxplus c'$。对于 $e=0$：$0\in c\boxplus c'$ 当且仅当 $(c\boxplus c')\ t^0$ 包含 0 或一个取值为正的元素，也就是说，当且仅当对某个 $s\in T$，有 $w(u+u's)>0$。这又意味着 $\mathrm{res}(u)+\mathrm{res}(u')\,\mathrm{res}(s)=0$，即 $0\in\psi(c)\boxplus\psi(c')$。涉及 0 的和显然保持不变。因此 ψ 是一个超域同构。□

7.2 从剩余到分层。为证明逆向结论，我们需要一个剩余域为 k、值群为 Γ 且具有乘法首项系数的赋值域。对于 $S=k^{\times}$、对于有序域的正锥 S 以及对于 $S=\{1\}$，Bowler 和 Su 在 [3, 定理 7.5 的证明中，情形 1–3] 使用了 Hahn 型域和下文相同的子群 T；我们将他们的构造推广到任意 S。Hahn 域 $k((t^{\Gamma}))$ 可以满足要求；以下较小的域就足够了。令 $k[t^{\Gamma}]$ 为 Γ 在 k上的群代数：其元素是形如 $f=\sum_{\gamma}c_{\gamma}t^{\gamma}$ 的有限和，其中 $c_{\gamma}\in k$，乘法定义为 $t^{\gamma}t^{\delta}=t^{\gamma+\delta}$。对于 $f\neq 0$，令 $v(f)$ 为满足 $c_{\gamma}\neq 0$ 的最小 γ，并令 $\mathrm{lc}(f):=c_{v(f)}$。

引理 7.2。 $k[t^{\Gamma}]$ 是一个整环。令 $k(t^{\Gamma})$ 为其分式域。映射 v和 lc 唯一地扩张为群同态 $v\colon k(t^{\Gamma})^{\times}\to\Gamma$ 和 $\mathrm{lc}\colon k(t^{\Gamma})^{\times}\to k^{\times}$，且$v(c\,t^{\gamma})=\gamma$以及 $\mathrm{lc}(c\,t^{\gamma})=c$。对于 $x,y\in k(t^{\Gamma})^{\times}$:

(1) 若 $v(x)<v(y)$，则 $v(x+y)=v(x)$ 且 $\mathrm{lc}(x+y)=\mathrm{lc}(x)$;

(2) 若 $v(x) = v(y)$ 且 $\mathrm{lc}(x) + \mathrm{lc}(y) \neq 0$，则 $v(x+y) = v(x)$ 且 $\mathrm{lc}(x+y) = \mathrm{lc}(x) + \mathrm{lc}(y)$；(3) 若 $v(x) = v(y)$ 且 $\mathrm{lc}(x) + \mathrm{lc}(y) = 0$，则 $x + y = 0$ 或 $v(x+y) > v(x)$。
特别地，v，其中 $v(0) = \infty$，是 $k(t^\Gamma)$ 上的一个赋值，其值群为 Γ。

证明。对于非零的 f、$g \in k[t^\Gamma]$，fg 中除 $\mathrm{lc}(f)\,\mathrm{lc}(g)\,t^{v(f)+v(g)}$ 之外的每一项$\gamma+\delta$的次数 $\gamma \geq v$为f，$\delta \geq v$为g，且其中一个不等式是严格的，因此次数为 $> v(f) + v(g)$，因为 Γ 是有序的。因此，$fg \neq 0$ $v(fg) = v(f) + v(g)$，且 $\mathrm{lc}(fg) = \mathrm{lc}(f)\,\mathrm{lc}(g)$。所以 $v(f/g) := v(f) - v(g)$ 以及 $\mathrm{lc}(f/g) := \mathrm{lc}(f)/\mathrm{lc}(g)$ 都是定义良好的同态，并且它们是唯一的延拓。对于 (1)–(3)，将 $x = f/g$和 $y = h/g$写成具有公分母的形式。于是 $x + y = (f+h)/g$，并且 $f+h$的最低次项在 $v(f) < v(h)$ 时就是 f的最低次项；在 $v(f) = v(h)$ 时，则为 $(\mathrm{lc}(f) + \mathrm{lc}(h))\,t^{v(f)}$，且该系数非零；若该系数为零，则 $f + h = 0$ 或 $v(f+h) > v(f)$。除以 g 即可得到 (1)–(3)，而这些结论推出 $v(x+y) \geq \min\{v(x)\ v(y)\}$。□

命题 7.3。设 k 为一个域，$S \leq k^\times$ 为一个子群，$K = k(t^\Gamma)$ 且

$$T := \{x \in K^\times : v(x) = 0,\ \mathrm{lc}(x) \in S\}.$$

则 $\Phi\colon\ K_T \to k_S \rtimes \Gamma$, $\Phi([x]_T) = [\mathrm{lc}(x)]_S\, t^{v(x)}$, $\Phi(0) = 0$是超域的一个同构。因此，如果 $\mathcal{M}$ 是一个因子超域，那么 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$也是因子超域。

证明。T 是 $K^\times$的一个子群，因为 v 和 lc 都是同态。对于 x，$y \in K^\times$ 我们有$\Phi([x]_T) = \Phi([y]_T)$ 当且仅当 $v(x/y) = 0$且 $\mathrm{lc}(x/y) \in S$，也就是说，$x/y \in T$；因此 Φ 定义良好且为单射。由于 $\Phi([c\,t^\gamma]_T) = [c]_S\, t^\gamma$，并且它是乘法的，所以它是满射。还需证明对于 x，$y \in K^\times$，$\Phi([x]_T \boxplus [y]_T) = \Phi([x]_T) \boxplus \Phi([y]_T)$；与 0 的和显然成立。令$\alpha = v(x)$、$\beta = v(y)$、$a = \mathrm{lc}(x)$、$b = \mathrm{lc}(y)$，并回顾 $[x]_T \boxplus [y]_T = \{[x + ys]_T\colon\ s \in T\}$。

若 $\alpha < \beta$，则 $v(ys) = \beta$对每个 $s \in T$均成立，因此 $x + ys$ 的赋值为 α，首项系数为 a，根据引理 7.2(1)。根据 定义 6.2，两边均等于 $\{[a]_S\, t^\alpha\}$。情形 $\beta < \alpha$ 是对称的。

令 $\alpha = \beta$。根据定义 6.2 和 (2.1)，对于 k_S，右侧为 $([a]_S \boxplus [b]_S)\, t^\alpha$，其中$[a]_S \boxplus [b]_S = \{[a + b\lambda]_S : \lambda \in S\}$。对于 $s \in T$，令 $\lambda = \mathrm{lc}(s) \in S$；则 $v(ys) = \alpha$，且 $\mathrm{lc}(ys) = b\lambda$。若 $a + b\lambda \neq 0$，则根据引理 7.2(2)，$\Phi([x + ys]_T) = [a + b\lambda]_S\, t^\alpha$。若 $a + b\lambda = 0$，则根据引理 7.2(3)，$\Phi([x + ys]_T) \in B_\alpha$。这就证明了 $\subseteq$。反过来，令 $\lambda \in S$。取$s = \lambda \in T$，得到只要 $a + b\lambda \neq 0$，就有 $[a + b\lambda]_S\, t^\alpha$。假设 $a + b\lambda = 0$；我们证明 B_α 属于左侧。令 $z \in K$，满足 $z = 0$ 或 $v(z) > \alpha$。根据引理 7.2(3)，$x + y\lambda$ 为 0 或赋值为 $> \alpha$，因此 $m := (z - x - y\lambda)/y$ 为 0 或赋值为 > 0。于是 s：根据引理 7.2(1)，$= \lambda + m$ 的 $v(s) = 0$，且 $\mathrm{lc}(s) = \lambda$，因此 $s \in T$，且 $x + ys = z$。由于 Φ 是满射且保持赋值，$\{\Phi([z]_T)\colon\ z = 0$ 或 $v(z) > \alpha\} = B_\alpha$。这就证明了 $\supseteq$。

对于最后一个断言，若 $\mathcal{M} \cong k_S$，则 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma \cong k_S \rtimes \Gamma \cong K_T$。 □

对于 $S = \{1\}$ 我们得到 $T = \{x\colon\ v(x-1) > 0\} = 1 + \mathfrak{m}_{\{0\}}$，因此 $k \rtimes \Gamma \cong \mathcal{H}_{\{0\}}(k(t^\Gamma))$，表 1的第一行。

7.3. **Massouros 超域**。

引理 7.4. 设 G 是一个阿贝尔群，且 $|G| \geq 2$。则 $\mathcal{M}(G) \rtimes \Gamma$ 在定义 2.2的意义下，不存在任何范数的赋值。

障碍在于 [12, §2 中定理 2 之后所指出的问题。2] 对于 Krasner 超域和符号超域的分层，以及 [11, 命题 4。14]：根据引理 2.4，$1 \boxminus 1$ 可能不含任何值为 0 的元素。

证明。记 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ 和 $\mathcal{L} = \mathcal{M} \rtimes \Gamma$，并令 val′ 为这样的赋值，其值群为$\Gamma'$，范数为 ρ'。由于 $-1 = 1$ 在 $\mathcal{M}$中，所以 $-t^0 = t^0$ 也在 $\mathcal{L}$中，因此 $1 \boxminus 1 = 1 \boxplus 1 = (1 \boxplus 1)\, t^0$，其中$1 \boxplus 1 = \mathcal{M} \setminus \{1\}$ 是在 $\mathcal{M}$ (定义 5.1) 中计算的。因此 $1 \boxminus 1$ 包含 $g\,t^0$ 和 $g^{-1}t^0$，对于

任意 $g \in G \setminus \{1\}$；参见 例 6.3 以了解 $G = V$。根据 引理 2.4，二者在 $> \rho' \ni 0$ 赋值 val′下的值均为′($g\,t^0$)，> 0 且 val′$(g^{-1}t^0) > 0$。但它们的乘积为 $t^0 = 1$，因此两个值之和为 val′$(1) = 0$。这是一个矛盾。□

定理 *C*的证明。由 命题 6.5，$\mathcal{L}$ 是一个超域，且 v 是满足 (V0)–(V2) 的满射映射。由 命题 7.1 和 7.3，$\mathcal{L}$ 是因子超域，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是因子超域。若 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ 的 G 指数为 2，且 $|G| \geq 4$，那么根据 $\mathcal{M}$ 命题 5.3，它不是因子超域，因此 $\mathcal{L}$也不是因子超域，而 引理 7.4表明，$\mathcal{L}$ 不具有任何范数的赋值。□

由 注 5.4，$\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_5/\{\pm 1\}$ 是因子超域，因此根据 $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2) \rtimes \Gamma$ 也是因子超域。命题 7.3还表明，由 引理 7.4 可知，它不具有任何范数的赋值。这进一步说明了 注 3.1：具有满足 (V0)–(V2) 的非平凡映射的因子超域，不一定是任意一个 $\mathcal{H}_\rho(K)$。

注 7.5（表 1 的各行）。带有 $1 \boxplus 1 = \{0, 1\}$ 的 Krasner 超域 $\{0, 1\}$，对于任何至少有三个元素的域 k [1, ，都是 $k_{k^\times}$ 示例 2.10], [11, 命题 2.17(i)]。带有 $1 \boxplus 1 = \{1\}$ 和 $1 \boxplus (-1) = \{0, 1, -1\}$ 的符号超域 $\{0, 1, -1\}$，是 $\mathbb{R}_{\mathbb{R}_{>0}}$[1, 示例 2.13], [11, 命题 2.17(ii)]。根据命题 7.3，它们的分层都是因子超域；这就是定理 7.5 第 1 种和第 2], 种情形的证明；Krasner 分层则是广义热带超域 $\mathcal{T}$（Γ） [11, 示例 2.14], 中也有 [11, 命题 2.17(iv)]。在这两种分层中，系数超域里 -1（t^0）和 -1（$1 = t^0 \in 1 \boxminus 1$），因此 $-1 =$。根据引理 2.4，某个范数的赋值会得到 val′(1) > 0, 这是荒谬的。在 Krasner 分层中，对于 $\alpha \neq \beta$，$t^\alpha \boxplus t^\beta = \{t^{\min\{\alpha,\beta\}}\}$，而 $t^\alpha \boxplus t^\alpha$ 是所有值至少为 α 的元素的集合。因此，对于 $\Gamma = \mathbb{R}$，双射 $t^\gamma \mapsto -\gamma$, $0 \mapsto -\infty$ 是到 Viro 热带超域的同构，其中对于 $a \neq b$ 和 $a \boxplus a = \{c,\ a \boxplus b = \{\max\{a, b\}\} :\ c \leq a\}$ [15,§5.3]。同样，$\pm t^\gamma \mapsto \pm e^{-\gamma}$, $0 \mapsto 0$ 将符号超域在 $\mathbb{R}$ 上的分层与定义在 $\mathbb{R}$ [15, 上的 Viro 实热带超域对应起来2], ；其中若 $|a| > |b|$ 或 $a = b$，则 $a \boxplus b$ 为 $\{a\}$；若 $a = -b$，则为 $[-|a|, |a|]$。对于一般的 Γ，我们使用表 1 中这些分层的名称。最后一行是定理 C。

注 7.6。定理 C 对 [11, §7(2)] 中的问题给出了否定的回答：对于上述的 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ 以及 $\Gamma \neq 0$，$\mathcal{L}$ 上的映射 v 是非平凡的，并满足 (V0)–(V2)，即定义 3.1] 中的 [11, 公理（在那里标记为 (V1)–(V3)），然而 $\mathcal{L}$ 不是因子超域。更一般地，任何不是因子超域的超域 $\mathcal{M}$ 都能给出这样的例子 $\mathcal{M} \rtimes \Gamma$。这与 Touchard 和作者所提出的问题无关，因为根据定义 2.2，$\mathcal{L}$ 不是赋值超域。它表明，在 [11, 注 4.12], 中的问题，即推论 3.2(2) 中的问题的假设里，不能去掉 (V3)：没有范数公理，带有非平凡赋值的超域未必是因子超域。定理 A 本身也需要范数公理；见注 3.1。对于 Krasner 赋值，引理 2.4 强制剩余结构为一个域 [11, 命题 4.14], ，因此这一特定障碍消失了。

8. Computer checks

本文随附的代码库包含一些简短的 Python 脚本，通过穷举法检验有限性和组合性方面的断言。

- `massouros.py` 验证 $\mathcal{M}((\mathbb{Z}/2)^k)$ $k = 1$、2、3 的所有超域公理，并验证同构 $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_5/\{\pm 1\}$（即 注 5.4）。
- `layering.py` 以符号方式表示子集 $A\,t^\gamma$ 并检查，对于 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$ 中，$\mathcal{M}_4$，$\mathbb{F}_3$ Krasner 超域和符号超域的公理 (CH1)–(CH4) 与 (HF3)、引理 6.4 的公式 与逐元素并集进行比较，以及 $\mathcal{M} \rtimes \mathbb{Z}$ 对 $\{0, 1, 2\}$中的所有值三元组验证 (V0)–(V2)。三个值的相对顺序

决定了结合律，因此此窗口涵盖所有情况。它还确认，对于四个经过测试的 $1 \boxminus 1$，(V3) 均不成立； $\mathcal{M}$ 不是域。脚本 mutants.py 确认，该构造的两个故意破坏的变体会被同样的检查拒绝。

- discrete ring.py 脚本 检查，在 $\mathcal{H}_\rho(\mathbb{Q}_p)$ 中，对于 $\rho = \{0, \dots, n-1\}$ 和较小的 p， n，由超加法计算得到的 引理 4.1 中的关系是模 p^n 的同余关系，并且最小赋值为 0 的元素之和是完整的 $\sim$等价类。这仅检验了典范例子。

- factor trivial valuation.py 脚本 检验定理 A 的最小实例：对于素数$p \leq 23$，因子超域 $\mathbb{F}_p/T$ 满足平凡赋值下的范数公理，当且仅当 $T = \{1\}$。

- norm_axiom_needed_for_thmA.py 脚本 检验注 3.1 的第一个例子： $\mathbb{F}_5/\{\pm 1\}$在平凡赋值下满足 (V0)–(V2)，不满足 (V3)，并且 $T \neq 1 + \mathfrak{m}_\rho$。
- norm_audit.py 脚本 检验注 2.6 中 $\mathcal{H}_\rho(\mathbb{Q}_p)$ 对较小的 p 和 ρ $=\{0, \dots, n-1\}$ 的公式，以及注 3.1中的两个例子。
- factor layering.py 脚本针对 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 和 $k = \mathbb{F}_p$、六组数对（p, S）检验命题 7.3。其中包括 Krasner 超域、$\mathbb{F}_5/\{\pm 1\} \cong \mathcal{M}$（$\mathbb{Z}/2$）以及域 $\mathbb{F}_5$。对于相对精度为 2 或 3 的截断 Laurent 级数，它计算单位元上的 T-轨道，并将其与 $u \mapsto [\mathrm{lc}(u)]_S$ 的纤维进行比较。对于取值落在某个窗口内的所有 x, y，它计算 $\Phi([x]_T \boxplus [y]_T)$ 并将其与分层和进行比较。脚本会拒绝一个故意选错的 T。此外，脚本还会在 $\mathbb{Z}$ 的一个有限窗口内，检验注 7.5 中与 Viro 超域的对应关系，并检查 Krasner 分层和符号分层中的 $1 \in 1 \boxminus 1$。

这些脚本为上述证明提供支持，但不能取代它们。

数据可用性。 本节所述的 Python 脚本均包含在随本文提供的代码库中。没有生成或分析其他数据。

致谢。 作者使用人工智能工具协助起草、编辑和检查本稿件。所有数学内容均由作者核实，作者对此承担全部责任。

References

1. Matthew Baker 和 Nathan Bowler， *Matroids over partial hyperstructures*，《Adv. Math.》**343**（2019），821–863。2. Matthew Baker 和 Tong Jin， *On the structure of hyperfields obtained as quotients of fields*，《Proc. Amer. Math. Soc.》**149**（2021），第 1 期，63–70。3. Nathan Bowler 和 Ting Su，
Classification of doubly distributive skew hyperfields and stringent hypergroups，《J. Algebra》**574**（2021），669–698。4. Alain Connes 和 Caterina Consani，
The hyperring of adèle classes **131** 2011 2, , 《J. Number 159 194
Theory》（），第 – 期。5. Pierre Deligne， *Les corps locaux de caractéristique p,*
limites de corps locaux de caractéristique 0, J.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vign´eras, 《Repr´esentations des groupes r´eductifs sur un corps local》，《Travaux en Cours》，Hermann，巴黎，1984 年，第 119–157 页。6. Thomas W. Hungerford， *On the structure of principal ideal rings*，《Pacific J. Math.》**25**（1968），第 3 期，543–547。7. Marc Krasner， *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p \neq 0$ *par ceux de caractéristique*0，《Colloque d'alg`ebre sup´erieure》，于 1956 年 12 月 19 日至 22 日在布鲁塞尔举行，Centre Belge de Recherches Math´ematiques；Etablissements Ceuterick，鲁汶；Librairie Gauthier-Villars，巴黎，1957 年，第 129–206 页。8. ,
A class of hyperrings and hyperfields，《Internat. J. Math. Math. Sci.》**6**（1983），第 2 期，307–311。9. Katarzyna Kuhlmann、ALESSANDRO LINZI 和 Hanna Stoja-lowska， *Orderings and valuations in hyperfields*，《J. Algebra》**611**（2022），399–421。10. Junguk Lee， *Hyperfields, truncated DVRs, and valued fields*，《J. Number Theory》**212**（2020），40–71。

11. ALESSANDRO LINZI, *Notes on valuation theory for Krasner hyperfields* **267** 2025 2, , 《Israel J. Math.》（），第 – 期。12. ALESSANDRO LINZI 和 Pierre Touchard, *On the hyperfields associated to valued fields*, 《J. Pure Appl. Algebra》**229**（2025），第 6 期，论文编号 107985，共 24 页。13. Ch. G. Massouros, *Methods of constructing hyperfields*, 《Internat. J. Math. Math. Sci.》**8**（1985），第 4 期，725–728。14. Jeffrey Tolliver, *An equivalence between two approaches to limits of local fields*, 《J. Number Theory》**166**（2016），473–492。15. Oleg Viro, *Hyperfields for tropical geometry I. Hyperfields and dequantization*, arXiv:1006.3034v2，2010 年。

Independent researcher, Udine, Italy
Email address: alessandro.linzi.phd@icloud.com