arXiv:2611.29481v1 [math.SP] 22 Nov 2026

可积多边形的黎斯平均渐近性

AMANDA CRINER、GUSTAV M ̊ARDBY 和 JACOB SHAPIRO

Abstract. 我们证明了可积多边形上狄利克雷拉普拉斯算子和诺伊曼拉普拉斯算子的 $\gamma > 0$ 阶黎兹均值的完整渐近展开。前三项的系数是熟知的，分别涉及多边形的面积、周长和角点角度。低阶项的系数由收敛的三角级数给出。证明基于可积多边形的热迹恒等式，以及贝塞尔函数在大参数下的渐近性。

1. Introduction

本文研究平面上可积多边形情形下拉普拉斯特征值渐近分布这一经典问题。所谓可积多边形，是指其所有内角均具有 π/n 的形式，其中 $n \geq 2$ 是整数。特别地，每个内角都不超过 $\pi/2$，因此每个可积多边形都是凸多边形。

可积多边形的种类很少。事实上，若一个凸多边形有 N 条边，则其内角和为（$N-2$）π；而可积多边形的每个内角至多为$\pi/2$，因此有（$N-2$）$\pi \leq N\pi/2$，即 $N \leq 4$。由此可知，唯一的可积多边形是矩形、等边三角形、等腰直角三角形和半等边（30-60-90）三角形。这些多边形恰好是能够严格镶嵌平面的多边形 [Mc08]。

特征值渐近性的研究可追溯到 Weyl 的著名工作 [We11]。若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$是一个多边形，且 $\{\lambda_j\}$ 表示 Ω 上拉普拉斯算子的特征值 $-\Delta$ ，按重数重复计数，并满足狄利克雷或诺伊曼边界条件，则特征值计数函数为

$$N(E) := \#\{j : \lambda_j \leq E\}.$$

在这种情况下，Weyl 定律表明

$$N(E) = \frac{|\Omega|}{4\pi} E + o(E), \quad E \to \infty, \tag{1.1}$$

其中 $|\Omega|$ 表示区域的勒贝格测度或面积。对于狄利克雷边界条件，若假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 是开集且其测度有限 [Ro72]，则式（1.1）成立。对于诺伊曼拉普拉斯算子，一个充分条件是 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 具有延拓性质 [FLW23]。这意味着存在一个有界线性算子 $\mathcal{E} : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^2)$，使得对于每个 $\mathcal{E}u = u$，在 Ω 上几乎处处成立 $u \in H^1(\Omega)$。这里 H^1 表示通常的一阶索博列夫空间。

自然会问，Weyl 定律中的余项能否得到改进。对于具有光滑边界的区域，Seeley [Se78]证明计数函数满足更精确的估计

$$N(E) = \frac{|\Omega|}{4\pi} E + O(E^{1/2}), \quad E \to \infty,$$

对于狄利克雷和诺伊曼边界条件均如此。Ivrii [Iv80]在台球流满足一个附加动力学条件的假设下，证明了两项渐近式

$$N(E) = \frac{|\Omega|}{4\pi} E \pm \frac{|\partial\Omega|}{4\pi} E^{1/2} + o(E^{1/2}), \quad E \to \infty.$$

这里，$|\partial\Omega|$ 是 Ω 的周长；负号对应狄利克雷边界条件，正号对应诺伊曼边界条件。这些结果在维数

$d \geq 2$中也更普遍地成立，其中第二项涉及边界的（$d-1$）维曲面测度。在我们的多边形情形中，人们预期角点会带来低阶贡献。

对带角点区域的精细 Weyl 渐近的研究，至少可追溯到 Fedosov 的工作。在平面上， [Fe63], Fedosov 证明，对于具有狄利克雷或诺伊曼边界条件的多边形区域 Ω，按频率计数的特征值计数函数 $n(\nu) := \#\{j : \lambda_j \leq \nu^2\}$具有如下展开式

$$n(\nu) = \frac{|\Omega|}{4\pi}\nu^2 + O(\nu), \quad \nu \to \infty.$$

他还证明，其积分满足

$$\int_0^\nu n(t)\,dt = \frac{|\Omega|}{12\pi}\nu^3 \pm \frac{|\partial\Omega|}{8\pi}\nu^2 + O(\nu), \tag{1.2}$$

其中，负号对应狄利克雷边界条件，正号对应诺伊曼边界条件。他的方法基于将 Marˇcenko 的傅里叶陶伯定理 [Ma55]应用于波迹的短时间展开。Fedosov 将这一结果推广为 d维多面体的 项展开，余项为 $d \geq 2$ $O(\nu^{d-1})$ [Fe64]。

本文考虑的不是计数函数本身，而是它的积分形式或平均形式（按照（1.2）的思路），即所谓的黎兹均值。它通常定义为算子 $(-\Delta - E)_-^\gamma$ 的迹，其中 $E, \gamma > 0$ 且 $x_- := \max(0, -x)$。具体而言，我们研究

$$\mathrm{Tr}(-\Delta - E)_-^\gamma = \sum_{\lambda_j \leq E} (E - \lambda_j)^\gamma, \qquad E \to \infty.$$

我们的主要结果是关于可积多边形上狄利克雷和诺伊曼拉普拉斯算子所对应的黎兹均值的完整渐近展开。除面积、周长和角点贡献外，该展开还包含阶数依次降低的三角级数。

定理 1。 设 $\gamma > 0$，且Ω 为内角为 $\theta_1, \ldots, \theta_N$ 的可积多边形。设$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$为Ω 上非负拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的特征值，采用狄利克雷或诺伊曼边界条件，并按重数重复计入。那么，对每个 $K \geq 1$，黎兹均值 $R^\gamma \Omega(E) := \sum_{\lambda_j \leq E}(E - \lambda_j)^\gamma$ 满足

$$\begin{aligned} R^\gamma_\Omega(E) = {} & \frac{|\Omega|}{4\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + E^\gamma \sum_{i=1}^N \frac{\pi^2 - \theta_i^2}{24\pi\theta_i} \\ & + \sum_{k=1}^K F^\gamma_{\Omega,k}(\sqrt{E})E^{(\gamma+1)/2-k/4} + O(E^{(\gamma+1)/2-(K+1)/4}), \quad E \to \infty. \end{aligned} \tag{1.3}$$

此处，第二项的符号在狄利克雷边界条件下为负，在诺伊曼边界条件下为正。此外，对于每个 $k \geq 1$，系数函数 $F^\gamma \Omega\, k$ 由收敛的三角级数给出；见 (2.27) 和 (3.5)-(3.7)。若 $\gamma > 1/2$，所有这些级数都绝对收敛，且系数函数有界。若 $0 < \gamma \leq 1/2$，除定义 $F^\gamma \Omega{,}1$ 的双重级数外，所有这些级数都绝对收敛；后者在矩形求和意义下条件收敛，而 $F^\gamma \Omega{,}1$ 无界。

定理 1 应与 Frank and Larson 关于一般多边形黎斯平均的近期结果进行比较 [FrLa25，定理 6.2 和 6.3]。他们的结果适用于 $\mathrm{Tr}(-\Delta - E)_-^\gamma$，其中 $\gamma \geq 0$。在 Dirichlet 情形下，他们得到一个对所有 $E > 0$均成立的非渐近展开，其各项分别是面积、周长和角点贡献，并对余项给出了显式界。在 Neumann 情形下，他们得到类似的渐近表述，当 $E \to \infty$ 时，余项为$O(E^{(\gamma+1)/2})$。他们的方法利用拉普拉斯变换的 Tauber 型定理，将 van den Berg 和 Srisatkunrajah 关于多边形的热迹展开 [VaSr88] 转化为黎兹均值

渐近性和余项估计。对于可积多边形，定理1通过将 $O(E^{(\gamma+1)/2})$ 余项替换为完整渐近展开，增强了这些结果；其首项为 $F^{\gamma}\,\Omega$

$_{1}(\sqrt{E})E^{\gamma/2+1/4}$。

与 [FrLa25], 一同，本文的研究动机来自第二作者与 Rowlett [MaRo25], 近期开展的工作；他们研究了可积多边形的其他谱不变量，包括谱ζ函数、ζ正则化行列式以及精确的短时热迹渐近性公式。可积多边形的特征值已得到显式刻画；这种可处理性构成了 [MaRo25]中热迹公式的基础。我们的出发点是将这些公式取在复时间处。我们将这些恒等式与 $\lambda \mapsto (|\lambda| - E)^{\gamma}_{-}$的逆傅里叶变换进行积分，从而得到实部趋于零时黎兹均值的一个公式。我们利用贝塞尔函数计算这些极限，随后在 $E \to \infty$时应用其大自变量渐近展开。阈值 $\gamma = 1/2$ 在所得级数的收敛性中发挥着重要作用。它源于热迹公式中出现的双重求和。将这些求和转化为贝塞尔级数后，除首项双重级数外，所得所有级数对每个 $\gamma > 0$都绝对收敛；首项双重级数当且仅当 $\gamma > 1/2$时绝对收敛。对于 $0 < \gamma \leq 1/2$，这些双重级数不再绝对收敛，但我们证明它们在矩形求和意义下条件收敛。这使我们能够将黎兹均值渐近展开延拓到完整范围 $\gamma > 0$。值得注意的是，阈值 $\gamma = 1/2$ 不同于 [FrLa25] 中的划分：其中范围 $\gamma \geq 1$ 和 $0 < \gamma < 1$分别通过不同的论证加以处理。有趣的是，阈值 $\gamma = 1/2$ 恰好与 $d = 2$ [KS维中的临界博赫纳–里兹指标（$d-1$）/2 一致。

我们猜想，定理1中的渐近展开可推广到任意多边形。我们有几个理由相信这一点。首先，如上所述，Frank and Larson [FrLa25，定理 6.2 和 6.3] 证明了式（1.3）中的前三项对所有多边形均成立。其次，根据 van den Berg 和 Srisatkunarajah [VaSr88], ，多边形的狄利克雷热迹具有三项渐近展开，后接一个指数小余项。诺伊曼热迹也有类似结论 [Ma26]。受这些结果启发，我们提出以下猜想。

猜想 1. 设 $\gamma > 0$，且设Ω 为一个内角为 $\theta_1, \ldots, \theta_N$ 的多边形。设 $R^{\gamma}\Omega(E)$ 表示与Ω上的狄利克雷拉普拉斯算子或诺伊曼拉普拉斯算子相对应的黎兹均值。那么存在函数

$$F^{\gamma}_{\Omega,k} : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad k \geq 1,$$

使得，对于每个 $K \geq 1$,

$$R^{\gamma}_{\Omega}(E) = \frac{|\Omega|}{4\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + E^{\gamma}\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi^2-\theta_i^2}{24\pi\theta_i} + \sum_{k=1}^{K}F^{\gamma}_{\Omega,k}(\sqrt{E})E^{(\gamma+1)/2-k/4} + O\big(E^{(\gamma+1)/2-(K+1)/4}\big), \quad E \to \infty.$$

对于可积多边形，定理 1 证明了这一点，并进一步表明，系数函数由收敛的三角级数给出。

致谢： 我们感谢 Simon Larson 在整个研究过程中给予的讨论、指导和帮助。我们还要感谢 Julie Rowlett 和 Kiril Datchev 参与最初的讨论。A.K. Criner 和 J.Z. Shapiro 的研究得到了空军研究实验室和空军科学研究办公室在实验室任务 21RXCOR069 下的部分支持。如果没有 Phil Buskohl 的支持，A.K. Criner 和 J.Z. Shapiro 的合作将无法实现。

AI 使用声明： 作者使用了 ChatGPT 进行数学讨论和编辑协助，尤其是在附录B中的论证构建方面。所有数学

陈述和证明均由作者独立核查、修订，并以最终形式撰写。

2. Riesz mean asymptotics for rectangles

边长为 a 和 b 的矩形上，满足狄利克雷边界条件的 $-\Delta$ 的特征值为

$$\lambda^D_{m,n}(\square) = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right), \quad m,n \geq 1.$$

特征值 λ 的重数是满足 $\lambda = \lambda^D_{m,n}(\square)$ 的数对 (m,n) 的数量。对于诺伊曼边界条件，特征值 $\lambda^N_{m,n}(\square)$ 及其重数与此相同，只是现在 m 和 n 取遍非负整数。

我们先给出矩形热迹的一个恒等式，该恒等式见 [MaRo25，第 2] :

$$\begin{aligned} H_\square(t) := \sum_{j=0}^{\infty} e^{-t\lambda_j} &= \frac{ab}{4\pi t} \pm \frac{a+b}{4\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{4} \pm \frac{a}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/t} \pm \frac{b}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b^2n^2/t} \\ &\quad + \frac{ab}{2\pi t}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/t} + \frac{ab}{2\pi t}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b^2n^2/t} + \frac{ab}{\pi t}\sum_{m,n\geq 1} e^{-(a^2m^2+b^2n^2)/t}, \quad t>0. \end{aligned}$$

对于每个含有 $\pm$ 的项，诺伊曼边界条件取加号，狄利克雷边界条件取减号。两边都可解析延拓到复变量 z，其中 $\mathrm{Re}(z) > 0$； $\sqrt{z}$_的分支选取为使 $\mathrm{Re}(\sqrt{z})_> 0$。因此，

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-(\sigma+it)\lambda_j} = \frac{ab}{4\pi(\sigma+it)} \pm \frac{a+b}{4\sqrt{\pi(\sigma+it)}} + \frac{1}{4} + \mathcal{R}_\square(\sigma+it), \quad \sigma>0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

这里， $\mathcal{R}_\square(\sigma+it)$ 是包含任何涉及无穷和的项的余项。特别地，

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\square(\sigma+it) &= \frac{ab}{2\pi(\sigma+it)}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)} \pm \frac{a}{2\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)} \\ &\quad + \frac{ab}{2\pi(\sigma+it)}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b^2n^2/(\sigma+it)} \pm \frac{b}{2\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-b^2n^2/(\sigma+it)} \\ &\quad + \frac{ab}{\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq 1} e^{-(a^2m^2+b^2n^2)/(\sigma+it)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

我们采用以下傅里叶变换约定：

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt. \tag{2.3}$$

对于 E， $\gamma>0$，记 $\varphi_{E,\,\gamma}(t) = \varphi(t)$ 为函数的逆傅里叶变换所对应的整函数

$$x \mapsto (|x|-E)^\gamma_- = \begin{cases} (E-|x|)^\gamma, & |x|\leq E, \\ 0, & |x|>E. \end{cases}$$

引理 2. 我们有

$$\varphi(t) = O_{E,\gamma}((1+|t|)^{-\min(\gamma+1,2)}), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

特别地，对每个 E、 $\gamma>0$， $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$ 。

证明。我们有

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(|x|-E)_-^{\gamma}e^{ixt}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^E(E-x)^{\gamma}\cos(xt)dx.$$

对于有界的 t，无需证明，因为

$$|\varphi(t)|\le\frac{1}{\pi}\int_0^E(E-x)^{\gamma}dx=\frac{E^{\gamma+1}}{\pi(\gamma+1)}.$$

因此，只需证明

$$\varphi(t)=O_{E,\gamma}(|t|^{-\min(\gamma+1,2)}),\quad |t|\to\infty.$$

分部积分可得

$$\varphi(t)=\frac{\gamma}{\pi t}\int_0^E(E-x)^{\gamma-1}\sin(tx)dx,$$

因此，只需证明

$$\int_0^E(E-x)^{\gamma-1}\sin(tx)dx=O_{E,\gamma}(|t|^{-\min(\gamma,1)}),\quad |t|\to\infty.$$

若 $\gamma=1$，则直接计算得

$$\int_0^E\sin(tx)dx=\frac{1-\cos(Et)}{t}=O(|t|^{-1}),\quad |t|\to\infty.$$

现在假设 $\gamma>1$。分部积分可得

$$\int_0^E(E-x)^{\gamma-1}\sin(tx)dx=\frac{E^{\gamma-1}}{t}-\frac{\gamma-1}{t}\int_0^E(E-x)^{\gamma-2}\cos(tx)dx.$$

由于.....，该积分一致有界

$$\left|\int_0^E(E-x)^{\gamma-2}\cos(tx)dx\right|\le\int_0^E(E-x)^{\gamma-2}dx=\frac{E^{\gamma-1}}{\gamma-1},$$

因此，引理对 $\gamma>1$成立。最后，假设 $0<\gamma<1$。作代换$u=E-x$ 和 $v=|t|u$，得到

$$\int_0^E(E-x)^{\gamma-1}\sin(tx)dx=\int_0^E u^{\gamma-1}\sin(Et-tu)du=|t|^{-\gamma}\int_0^{E|t|}v^{\gamma-1}\sin(Et-\operatorname{sgn}(t)v)dv.$$

因此，只需证明

$$\int_0^R v^{\gamma-1}e^{\pm iv}dv$$

关于 $R>0$ 一致有界。事实上，由于

$$\left|\int_0^1 v^{\gamma-1}e^{\pm iv}dv\right|\le\int_0^1 v^{\gamma-1}dv=\frac{1}{\gamma},$$

只需证明

$$\int_1^R v^{\gamma-1}e^{\pm iv}dv$$

在 $R>1$ 中一致有界。分部积分得到

$$\int_1^R v^{\gamma-1}e^{\pm iv}dv=\frac{R^{\gamma-1}e^{\pm iR}-e^{\pm i}}{\pm i}\mp\frac{\gamma-1}{i}\int_1^R v^{\gamma-2}e^{\pm iv}dv.$$

由于 $0<\gamma<1$，可得

$$\left|\frac{R^{\gamma-1}e^{\pm iR}-e^{\pm i}}{\pm i}\right|\le 2,$$

and

$$\left| \int_1^R v^{\gamma-2} e^{\pm iv} dv \right| \leq \int_1^R v^{\gamma-2} dv = \frac{1 - R^{\gamma-1}}{1-\gamma} \leq \frac{1}{1-\gamma}.$$

引理得证。 □

现在将 $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-(\sigma+it)\lambda_j}$ 乘以 $\varphi(t)$，并在 $t \in \mathbb{R}$ 上积分。得到

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(\sigma+it)\lambda_j} dt &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-(\sigma+it)\lambda_j} dt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\sigma\lambda_j} \mathcal{F}\varphi(\lambda_j) \\
&= \sum_{\lambda_j \leq E} e^{-\sigma\lambda_j} (E - \lambda_j)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

由于 $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\sum_j e^{-\lambda_j \sigma} < \infty$，根据控制收敛定理，可以交换求和与积分。因此，由（2.1），

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_j \leq E} e^{-\sigma\lambda_j} (E - \lambda_j)^{\gamma} = \frac{ab}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{\sigma + it} dt \pm \frac{a+b}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\sigma+it}} dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \\
+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \mathcal{R}_{\square}(\sigma + it) dt.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

现在我们逐项分析（2.5）中当 $\sigma \to 0^+$ 时的极限。对于左侧，显然

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \sum_{\lambda_j \leq E} e^{-\sigma\lambda_j} (E - \lambda_j)^{\gamma} = \sum_{\lambda_j \leq E} (E - \lambda_j)^{\gamma} = R_{\square}^{\gamma}(E).$$

对于（2.5）的右侧，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \mathcal{F}\varphi(0) = E^{\gamma},$$

而对于 $m \geq 1$，我们计算得到

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(\sigma + it)^{m/2}} dt &= \lim_{\sigma \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{1}{\Gamma(m/2)} \int_0^{\infty} x^{m/2-1} e^{-x(\sigma+it)} dx dt \\
&= \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\Gamma(m/2)} \int_0^{\infty} x^{m/2-1} e^{-\sigma x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt dx \\
&= \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\Gamma(m/2)} \int_0^{E} x^{m/2-1} e^{-\sigma x} (E - x)^{\gamma} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(m/2)} \int_0^{E} x^{m/2-1} (E - x)^{\gamma} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(m/2)} E^{m/2+\gamma} \int_0^{1} x^{m/2-1} (1 - x)^{\gamma} dx \\
&= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(m/2 + \gamma + 1)} E^{m/2+\gamma}.
\end{aligned}$$

注意，对于每个 $\sigma > 0$，富比尼定理都适用，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\varphi(t) x^{m/2-1} e^{-x(\sigma+it)}| dx dt = ||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})} \int_0^{\infty} x^{m/2-1} e^{-\sigma x} dx < \infty.$$

此外，由于 $x^{m/2-1}(E-x)^{\gamma} \in L^1(0,\ E)$ 对于 $m \geq 1$成立，因此可以根据控制收敛定理交换极限与积分。于是，在式 $\sigma \to 0^+$ （2.5）中令 a ，可得边长为 b和 的矩形的黎斯平均为

$$R^{\gamma}_{\square}(E) = \frac{ab}{4\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{a+b}{4\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + \frac{1}{4}E^{\gamma} + \lim_{\sigma\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathcal{R}_{\square}(\sigma+it)dt. \quad (2.6)$$

接下来需要分析余项

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathcal{R}_{\square}(\sigma+it)dt.$$

我们首先对 $\mathcal{R}_{\square}(\sigma+it)$ 中出现的部分和进行估计，这将使我们能够证明某些积分与无穷和之间的交换是合理的。

引理 3. 对于 $\sigma > 0$，我们有

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-n^2/(\sigma+it)} = O_{\sigma}((1+|t|)^{1/2}), \quad (2.7)$$

关于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 一致成立。

证明。令

$$\alpha := \frac{\sigma}{\sigma^2+t^2}, \quad \beta := \frac{t}{\sigma^2+t^2},$$

因此

$$e^{-n^2/(\sigma+it)} = e^{-\alpha n^2}e^{i\beta n^2}.$$

对于有界的 t，设为 $|t| \leq T$，我们有 $\alpha \geq \sigma/(\sigma^2+T^2)$，因此

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{-n^2/(\sigma+it)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\sigma/(\sigma^2+T^2)} \lesssim_{\sigma} 1.$$

因此，只需证明

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-n^2/(\sigma+it)} = O_{\sigma}(|t|^{1/2}), \quad |t| \to \infty,$$

关于 $N \in \mathbb{N}$ 一致成立。为此，我们使用分部求和计算

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-n^2/(\sigma+it)} = \sum_{n=1}^{N} e^{-\alpha n^2}e^{i\beta n^2} = e^{-\alpha N^2}A_N(\beta) + \sum_{n=1}^{N-1}(e^{-\alpha n^2} - e^{-\alpha(n+1)^2})A_n(\beta),$$

其中 $A_n(\beta) \mathrel{..}= \sum_{k=1}^{n} e^{i\beta k^2}$. 根据范德科普特估计 [GrKo91，定理 2。2],

$$A_n(\beta) \lesssim n|\beta|^{1/2} + |\beta|^{-1/2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} e^{-n^2/(\sigma+it)}\right| &\lesssim e^{-\alpha N^2}(N|\beta|^{1/2}+|\beta|^{-1/2}) + \sum_{n=1}^{N-1}(e^{-\alpha n^2}-e^{-\alpha(n+1)^2})(n|\beta|^{1/2}+|\beta|^{-1/2}) \\ &= |\beta|^{1/2}\sum_{n=1}^{N} e^{-\alpha n^2} + |\beta|^{-1/2}e^{-\alpha} \\ &\lesssim \sqrt{\frac{|\beta|}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{|\beta|}} \\ &= \sqrt{\frac{|t|}{\sigma}} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{|t|}+|t|} \\ &\lesssim_\sigma |t|^{1/2}, \quad |t|\to\infty.\end{aligned}$$

这就证明了引理。 □

现在，考虑 (2.2) 中涉及 $(\sigma+it)^{-1/2}$ 的单重求和。由引理 2 和 3，

$$\left|\varphi(t)\frac{1}{\sqrt{\sigma+it}}\sum_{m=1}^{M} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)}\right| \lesssim_\sigma (1+|t|)^{-\min(\gamma+1,2)}, \quad M\in\mathbb{N}, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

特别地，对每个固定的 σ，$\gamma>0$，(2.8) 的右端属于 $L^1(\mathbb{R})$。因此，由控制收敛定理可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{a}{2\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)}dt = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{1}{\sqrt{\sigma+it}}e^{-a^2m^2/(\sigma+it)}dt. \tag{2.9}$$

根据 [GrRy07, 3.896.4] 以及代换 $x=s^2$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{z}}e^{-y/z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-zx}\cos(2\sqrt{xy})dx, \quad \mathrm{Re}(z)>0, \quad y>0.$$

这给出

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{1}{\sqrt{\sigma+it}}e^{-a^2m^2/(\sigma+it)}dt \\ &= \frac{a}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-(\sigma+it)x}\cos(2am\sqrt{x})dxdt \\ &= \frac{a}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-\sigma x}\cos(2am\sqrt{x})\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-itx}dtdx \\ &= \frac{a}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^E (E-x)^\gamma x^{-1/2}e^{-\sigma x}\cos(2am\sqrt{x})dx \\ &= \frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\sqrt{E}}(E-x^2)^\gamma e^{-\sigma x^2}\cos(2amx)dx.\end{aligned} \tag{2.10}$$

在第二个等式中，我们交换了积分次序。这可由富比尼定理得出，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty |\varphi(t)x^{-1/2}e^{-(\sigma+it)x}\cos(2am\sqrt{x})|dxdt \le ||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-\sigma x}dx<\infty.$$

No我们希望将 $\sigma \to 0^+$ 代入（2.10）。在附录 A 中，我们证明（见（A.1））

$$\left| \int_0^{\sqrt{E}} (E - x^2)^\gamma e^{-\sigma x^2} \cos(2amx)\, dx \right| \le C m^{-\gamma-1}, \tag{2.11}$$

对某个与 $m \in \mathbb{N}$ 和 $0 \le \sigma \le 1$ 无关的 $C > 0$。由于 $m^{-\gamma-1}$ 可求和，控制收敛定理允许我们交换极限与无穷和:

$$\begin{aligned} &\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\sqrt{E}} (E - x^2)^\gamma e^{-\sigma x^2} \cos(2amx) dx \\ &= \frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\sigma\to 0^+} \int_0^{\sqrt{E}} (E - x^2)^\gamma e^{-\sigma x^2} \cos(2amx) dx. \end{aligned}$$

然后，由于被积函数被 $(E - x^2)^\gamma \in L^1(0,\ \sqrt{E})$ 所控制，再次应用控制收敛定理即可证明可以交换极限与积分。因此，我们得到

$$\begin{aligned} &\lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{a}{2\sqrt{\pi(\sigma + it)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)} dt \\ &= \frac{a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\sqrt{E}} (E - x^2)^\gamma \cos(2amx) dx \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2a^{\gamma-1/2}\sqrt{\pi}} E^{\gamma/2+1/4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{\gamma+1/2}(2am\sqrt{E})}{m^{\gamma+1/2}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

这里，$J_\nu(z)$ 表示 $\nu \ge 0$ [DLMF，§10.2(ii)] 中 2.12 式中的最后一个等号由 [DLMF，§10.9(i) 节公式 10.94] 得出。类似的计算可得

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{b}{2\sqrt{\pi(\sigma + it)}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b^2n^2/(\sigma+it)} dt = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2b^{\gamma-1/2}\sqrt{\pi}} E^{\gamma/2+1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\gamma+1/2}(2bn\sqrt{E})}{n^{\gamma+1/2}}. \tag{2.13}$$

根据渐近展开 [DLMF，§10.17(i)]

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \to \infty, \tag{2.14}$$

(2.12) 和 (2.13) 右侧的被加数分别为 $O(m^{-\gamma-1})$ 和 $O(n^{-\gamma-1})$。因此，对于任意 $\gamma > 0$，这两个级数都绝对收敛。

接下来，考虑（2.2）中涉及（$\sigma + it$）$^{-1}$的单重求和。根据引理 2 和 3，

$$\left| \varphi(t) \frac{1}{\sigma + it} \sum_{m=1}^{M} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)} \right| = O_\sigma((1 + |t|)^{-\min(\gamma+\frac{3}{2}, \frac{5}{2})}), \quad M \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

因此，由控制收敛定理可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{ab}{2\pi(\sigma + it)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)} dt = \frac{ab}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{1}{\sigma + it} e^{-a^2m^2/(\sigma+it)} dt \tag{2.16}$$

对每个固定的 $\sigma > 0$。然后我们使用

$$\frac{1}{z} e^{-y/z} = \int_0^{\infty} e^{-zx} J_0(2\sqrt{xy}) dx, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{2.17}$$

作为特例得到的 [GrRy07, 6。615], 来计算

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{1}{\sigma+it}e^{-a^2m^2/(\sigma+it)}dt\\
&=\frac{ab}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\varphi(t)e^{-(\sigma+it)x}J_0(2am\sqrt{x})dxdt\\
&=\frac{ab}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\sigma x}J_0(2am\sqrt{x})\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-itx}dtdx\\
&=\frac{ab}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0}^{E}(E-x)^{\gamma}e^{-\sigma x}J_0(2am\sqrt{x})dx\\
&=\frac{ab}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0}^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}e^{-\sigma x^2}J_0(2amx)dx.
\end{aligned}\tag{2.18}$$

根据富比尼定理，交换积分仍然是合理的。由（A.4），我们可以像之前一样两次使用控制收敛定理，交换极限 $\sigma\to 0^+$ 与求和及积分的次序。由此得到

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{ab}{2\pi(\sigma+it)}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-a^2m^2/(\sigma+it)}dt&=\frac{ab}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0}^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}J_0(2amx)dx\\
&=\frac{b\Gamma(\gamma+1)}{2\pi a^{\gamma}}E^{(\gamma+1)/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(2am\sqrt{E})}{m^{\gamma+1}}.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

最后一个等式用到了索宁积分恒等式 [We]。重复这一论证，

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{ab}{2\pi(\sigma+it)}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-b^2n^2/(\sigma+it)}dt=\frac{a\Gamma(\gamma+1)}{2\pi b^{\gamma}}E^{(\gamma+1)/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(2bn\sqrt{E})}{n^{\gamma+1}}.\tag{2.20}$$

由（2.14），（2.19）和（2.20）右端的级数对每个$\gamma>0$都绝对收敛。

最后，考虑（2.2）中的双重和。根据引理2 和3,

$$\left|\varphi(t)\frac{1}{\sigma+it}\sum_{1\le m,n\le N}e^{-(a^2m^2+b^2n^2)/(\sigma+it)}\right|=O_{\sigma}((1+|t|)^{-\min(\gamma+1,2)}),$$

关于 $N\in\mathbb{N}$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 一致成立。由于右端可积，控制收敛定理允许我们交换极限与积分。因此，采用记号

$$\sum_{m,n\ge 1}^{\square}:=\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le m,n\le N},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{ab}{\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq 1} e^{-(a^2m^2+b^2n^2)/(\sigma+it)}dt\\
&=\frac{ab}{\pi}\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{\sigma+it}e^{-(a^2m^2+b^2n^2)/(\sigma+it)}dt\\
&=\frac{ab}{\pi}\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\int_0^{\infty}e^{-(\sigma+it)x}J_0\big(2\sqrt{x(a^2m^2+b^2n^2)}\big)dxdt\\
&=\frac{ab}{\pi}\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\int_0^{\infty}e^{-\sigma x}J_0\big(2\sqrt{x(a^2m^2+b^2n^2)}\big)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-itx}dtdx\\
&=\frac{ab}{\pi}\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\int_0^{E}(E-x)^{\gamma}e^{-\sigma x}J_0\big(2\sqrt{x(a^2m^2+b^2n^2)}\big)dx\\
&=\frac{2ab}{\pi}\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}e^{-\sigma x^2}J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx,
\end{aligned}\tag{2.21}$$

对于固定的 $\sigma>0$。然而，与前面的情况不同，右侧的级数不一定绝对收敛。事实上，由（A.5）可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}e^{-\sigma x^2}J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx\\
&=e^{-\sigma E}C_{E,\gamma}\frac{\cos\big(2\sqrt{E(a^2m^2+b^2n^2)}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{(a^2m^2+b^2n^2)^{\gamma/2+3/4}}+O((a^2m^2+b^2n^2)^{-\gamma/2-1}),
\end{aligned}\tag{2.22}$$

关于 $0\leq\sigma\leq 1$一致。由于余项在 $m,\ n\geq 1$ 上绝对可和，因此（2.21）右侧绝对收敛当且仅当

$$\frac{\gamma}{2}+\frac{3}{4}>1\iff\gamma>1/2.$$

对于 $0<\gamma\leq 1/2$，因此（2.21）中的矩形收敛仅为条件收敛。接下来，我们利用这一收敛性证明，相应的贝塞尔级数在矩形求和下也收敛。记

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}e^{-\sigma x^2}J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx\\
&=e^{-\sigma E}\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}e^{\sigma(E-x^2)}J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx\\
&=e^{-\sigma E}\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx\\
&+e^{-\sigma E}\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma}(e^{\sigma(E-x^2)}-1)J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx\\
&=\frac{1}{2}e^{-\sigma E}\,\Gamma(\gamma+1)E^{(\gamma+1)/2}\frac{J_{\gamma+1}\big(2\sqrt{E(a^2m^2+b^2n^2)}\big)}{(a^2m^2+b^2n^2)^{(\gamma+1)/2}}\\
&+\sigma e^{-\sigma E}\int_0^{\sqrt{E}}x(E-x^2)^{\gamma+1}h_{\sigma}(E-x^2)J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx.
\end{aligned}\tag{2.23}$$

这里， $h_\sigma(y) = \int_0^1 e^{s\sigma y} ds$。根据（A.4），（2.23）右端第二项中出现的积分满足

$$\int_0^{\sqrt{E}} x(E-x^2)^{\gamma+1} h_\sigma(E-x^2) J_0\big(2x\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}\big)dx = O\big((a^2m^2+b^2n^2)^{-\gamma/2-5/4}\big), \tag{2.24}$$

对 $0 \le \sigma \le 1$一致，因此在 m 上绝对可和。$n \ge 1$另一方面，对任意 $\sigma > 0$，式（2.23）的左端根据式（2.21）在矩形求和下可和。因此

$$\sum_{m,n\ge1}^{\square} \frac{J_{\gamma+1}\big(2\sqrt{E(a^2m^2+b^2n^2)}\big)}{(a^2m^2+b^2n^2)^{(\gamma+1)/2}}$$

对每个 $\gamma > 0$ 都存在。最后，在式（ $\sigma \to 0^+$ 中令 2.21，并利用式（2.23），得到 s

$$\begin{aligned} &\lim_{\sigma\to0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{ab}{\pi(\sigma+it)} \sum_{m,n\ge1} e^{-(a^2m^2+b^2n^2)/(\sigma+it)} dt \\ &= \frac{ab\Gamma(\gamma+1)}{\pi} E^{(\gamma+1)/2} \sum_{m,n\ge1}^{\square} \frac{J_{\gamma+1}\big(2\sqrt{E(a^2m^2+b^2n^2)}\big)}{(a^2m^2+b^2n^2)^{(\gamma+1)/2}}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

对每个 $\gamma > 0$。

将式（2.6）中的各项合并，得到黎兹均值

$$\begin{aligned} R_\square^\gamma(E) &= \frac{ab}{4\pi(\gamma+1)} E^{\gamma+1} \pm \frac{a+b}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)} E^{\gamma+1/2} + \frac14 E^\gamma \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\pi} E^{(\gamma+1)/2} \bigg(2ab \sum_{m,n\ge1}^{\square} \frac{J_{\gamma+1}\big(2\sqrt{E(a^2m^2+b^2n^2)}\big)}{(a^2m^2+b^2n^2)^{(\gamma+1)/2}} \\ &\quad + \frac{b}{a^\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{\gamma+1}(2am\sqrt{E})}{m^{\gamma+1}} + \frac{a}{b^\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\gamma+1}(2bn\sqrt{E})}{n^{\gamma+1}} \bigg) \\ &\quad \pm \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\sqrt{\pi}} E^{\gamma/2+1/4} \bigg(\frac{1}{a^{\gamma-1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{\gamma+1/2}(2am\sqrt{E})}{m^{\gamma+1/2}} + \frac{1}{b^{\gamma-1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\gamma+1/2}(2bn\sqrt{E})}{n^{\gamma+1/2}} \bigg), \end{aligned} \tag{2.26}$$

对于 $\gamma > 0$。将式（2.14）代入式（2.26），得到展开式

$$\begin{aligned} R_\square^\gamma(E) &= \frac{ab}{4\pi(\gamma+1)} E^{\gamma+1} \pm \frac{a+b}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)} E^{\gamma+1/2} + \frac14 E^\gamma \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\pi^{3/2}} E^{\gamma/2+1/4} \bigg(ab \sum_{m,n\ge1}^{\square} \frac{\cos\big(2\sqrt{E(a^2m^2+b^2n^2)} - \frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{(a^2m^2+b^2n^2)^{(2\gamma+3)/4}} \\ &\quad + \frac{b}{2a^{\gamma+1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\big(2am\sqrt{E} - \frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{m^{\gamma+3/2}} + \frac{a}{2b^{\gamma+1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\big(2bn\sqrt{E} - \frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{n^{\gamma+3/2}} \bigg) \\ &\quad \pm \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\pi} E^{\gamma/2} \bigg(\frac{1}{a^\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\big(2am\sqrt{E} - \frac{(\gamma+1)\pi}{2}\big)}{m^{\gamma+1}} + \frac{1}{b^\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\big(2bn\sqrt{E} - \frac{(\gamma+1)\pi}{2}\big)}{n^{\gamma+1}} \bigg) \\ &\quad + O(E^{\gamma/2-1/4}), \quad E \to \infty. \end{aligned} \tag{2.27}$$

除了对于 $\gamma > 1/2$ 绝对收敛、对于 $\gamma > 0$按矩形求和收敛的双重和之外，(2.27) 中的每个求和对于 $\gamma > 0$都绝对收敛。在附录 B中，我们建立了(2.27)中双重和的上界，并证明当 $0 < \gamma \le 1/2$时它没有下界。将 J_ν的渐近展开(2.14)中更多的项纳入后，可以得到任意阶的渐近

展开。由于(2.26)中 J_ν 的自变量都与$\sqrt{E}$成比例，因此渐近展开中的每一项依次额外贡献一个因子 $E^{-1/2}$。此外，(2.26)还涉及 $J_{\gamma+1}$ 和 $J_{\gamma+1/2}$，它们的首项分别为 $E^{\gamma/2+1/4}$阶和 $E^{\gamma/2}$阶。因此，由此得到的两列指数结合起来，便产生了定理 1中出现的幂 $E^{(\gamma+1)/2-k/4}$ 。在 J_ν 的渐近展开中，每一项在双重和中也会额外获得一个因子$(a^2m^2+b^2n^2)^{-1/2}$，或者在单重和中额外获得一个因子 m^{-1} 或 n^{-1} 。因此，除首项双重级数贡献之外出现的每个级数，对于任意 $\gamma>0$都绝对收敛。最后，由于J_ν 的完整渐近展开由交替出现的余弦项和正弦项组成，所以所有系数函数都是三角级数。结合引理 5，这就证明了矩形情形下的定理 1。

备注 4: 值得注意的是，在 $a=b$的情形下，(2.26) 与高斯圆问题有关。事实上，令 $\gamma\to 0^+$，黎兹均值就变成了特征值计数函数

$$R^\gamma_\square(E)\to R^0_\square(E)=\#\left\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : m^2+n^2<\frac{a^2}{\pi^2}E\right\},$$

而且，(2.26) 中的双重和形式上趋近于 Hardy公式中关于圆周误差的级数 [Ha15，第 3]节。

3. Riesz mean asymptotics for integrable triangles

本节将说明，第 2 节的证明策略如何导出可积三角形的黎斯平均。回顾一下，边长为ℓ的等边三角形、斜边长为 ℓ的半等边三角形，以及直角边长为 ℓ 的等腰直角三角形，在狄利克雷边界条件下的拉普拉斯特征值为

$$\begin{aligned}
\lambda^D_{m,n}(\triangledown)&=\frac{16\pi^2}{9\ell^2}(m^2+mn+n^2), \qquad m,n>0,\\
\lambda^D_{m,n}(\heartsuit)&=\frac{16\pi^2}{9\ell^2}(m^2+mn+n^2), \qquad m>n>0,\\
\lambda^D_{m,n}(\diamondsuit)&=\frac{\pi^2}{\ell^2}(m^2+n^2), \qquad m>n>0,
\end{aligned}$$

分别参见 [MaRo25]。在每种情况下，将涉及 m 和 n 的严格不等式替换为 $\geq$，即可得到满足诺伊曼边界条件的特征值。在 [MaRo25], 中，以下

相应热迹的恒等式得以确立：

$$
\begin{aligned}
H_{\triangledown}(t) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi t} \pm \frac{3\ell}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{3} \pm \frac{3\ell}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-9\ell^2 m^2/(16t)} \\
&\quad + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-9\ell^2 m^2/(4t)} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3\ell^2 n^2/(4t)} \\
&\quad + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4\pi t} \sum_{m,n\geq 1} e^{-3\ell^2(3m^2+n^2)/(4t)} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4\pi t} \sum_{m,n\geq 1} e^{-3\ell^2(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)/(4t)}, \\
H_{\heartsuit}(t) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{32\pi t} \pm \frac{\ell(3+\sqrt{3})}{16\sqrt{\pi t}} + \frac{5}{12} \pm \frac{\ell\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-3\ell^2 m^2/(16t)} \pm \frac{3\ell}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-9\ell^2 m^2/(16t)} \\
&\quad + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3\ell^2 n^2/(4t)} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-9\ell^2 m^2/(4t)} \\
&\quad + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi t} \sum_{m,n\geq 1} e^{-3\ell^2(3m^2+n^2)/(4t)} + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi t} \sum_{m,n\geq 1} e^{-3\ell^2(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)/(4t)}, \\
H_{\diamondsuit}(t) &= \frac{\ell^2}{8\pi t} \pm \frac{\ell(2+\sqrt{2})}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{3}{8} \pm \frac{\ell\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\ell^2/(2t)} \pm \frac{\ell}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\ell^2/t} \\
&\quad + \frac{\ell^2}{2\pi t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\ell^2/t} + \frac{\ell^2}{2\pi t} \sum_{m,n\geq 1} e^{-\ell^2(m^2+n^2)/t}, \quad t > 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

对于每个满足 $\pm$ 的项，诺伊曼边界条件取正号，狄利克雷边界条件取负号。与第 2 节一样，我们将热迹解析延拓到复参数 z，其中 $\mathrm{Re}(z) > 0$，并将 t 替换为 $\sigma + it$，$\sigma > 0$，$t \in \mathbb{R}$。和之前一样，我们乘以 $\varphi(t)$，对 $t \in \mathbb{R}$ 积分，并令 $\sigma \to 0^+$ 趋于无穷，以得到黎斯平均

$$
\begin{aligned}
R^{\gamma}_{\triangledown}(E) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi(\gamma+1)} E^{\gamma+1} \pm \frac{3\ell}{8\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)} E^{\gamma+1/2} + \frac{1}{3} E^{\gamma} + \lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \mathcal{R}_{\triangledown}(\sigma+it)\, dt, \\
R^{\gamma}_{\heartsuit}(E) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{32\pi(\gamma+1)} E^{\gamma+1} \pm \frac{\ell(3+\sqrt{3})}{16\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)} E^{\gamma+1/2} + \frac{5}{12} E^{\gamma} + \lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \mathcal{R}_{\heartsuit}(\sigma+it)\, dt, \\
R^{\gamma}_{\diamondsuit}(E) &= \frac{\ell^2}{8\pi(\gamma+1)} E^{\gamma+1} \pm \frac{\ell(2+\sqrt{2})}{8\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)} E^{\gamma+1/2} + \frac{3}{8} E^{\gamma} + \lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \mathcal{R}_{\diamondsuit}(\sigma+it)\, dt,
\end{aligned}
$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\triangledown}(\sigma+it) &= \pm\frac{3\ell}{4\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-9\ell^2m^2/(16(\sigma+it))}+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi(\sigma+it)}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-9\ell^2m^2/(4(\sigma+it))}\\
&\quad+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi(\sigma+it)}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-3\ell^2n^2/(4(\sigma+it))}+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq1}e^{-3\ell^2(3m^2+n^2)/(4(\sigma+it))}\\
&\quad+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq1}e^{-3\ell^2(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)/(4(\sigma+it))},\\
\mathcal{R}_{\heartsuit}(\sigma+it) &= \pm\frac{\ell\sqrt{3}}{8\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-3\ell^2m^2/(16(\sigma+it))}\pm\frac{3\ell}{8\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-9\ell^2m^2/(16(\sigma+it))}\\
&\quad+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi(\sigma+it)}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-3\ell^2n^2/(4(\sigma+it))}+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi(\sigma+it)}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-9\ell^2m^2/(4(\sigma+it))}\\
&\quad+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq1}e^{-3\ell^2(3m^2+n^2)/(4(\sigma+it))}+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{8\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq1}e^{-3\ell^2(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)/(4(\sigma+it))},\\
\mathcal{R}_{\diamondsuit}(\sigma+it) &= \pm\frac{\ell\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2\ell^2/(2(\sigma+it))}\pm\frac{\ell}{2\sqrt{\pi(\sigma+it)}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2\ell^2/(\sigma+it)}\\
&\quad+\frac{\ell^2}{2\pi(\sigma+it)}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2\ell^2/(\sigma+it)}+\frac{\ell^2}{2\pi(\sigma+it)}\sum_{m,n\geq1}e^{-\ell^2(m^2+n^2)/(\sigma+it)}.
\end{aligned}$$

请注意，除了第2节中出现的求和外，这里还涉及含半整数的求和。与引理3中的证明相同，可以得到

$$\sum_{n=1}^{N}e^{-(n-1/2)^2/(\sigma+it)}=O_\sigma((1+|t|)^{1/2}),$$

在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $t\in\mathbb{R}$上是一致的。因此，积分与无穷和之间的所有交换，均可完全按照第2节中的方式得到证明。于是，我们可以计算

$$\lim_{\sigma\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathcal{R}_{\triangledown}(\sigma+it)dt,\quad \lim_{\sigma\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathcal{R}_{\heartsuit}(\sigma+it)dt,\quad \lim_{\sigma\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathcal{R}_{\diamondsuit}(\sigma+it)dt$$

与（2.9）-（2.25）中完全相同，以得到

$$\begin{aligned}
R_{\triangledown}^{\gamma}(E) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1}\pm\frac{3\ell}{8\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2}+\frac{1}{3}E^{\gamma}\\
&\quad+\frac{2^{\gamma-1}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2}\pi\,\ell^{\gamma-1}}E^{(\gamma+1)/2}\Bigg(\sum_{m,n\geq1}^{\square}\frac{J_{\gamma+1}\big(\ell\sqrt{3E(3m^2+n^2)}\big)}{(3m^2+n^2)^{(\gamma+1)/2}}\\
&\quad+\sum_{m,n\geq1}^{\square}\frac{J_{\gamma+1}\big(\ell\sqrt{3E(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)}\big)}{\big(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2\big)^{(\gamma+1)/2}}\\
&\quad+\frac{1}{2\cdot3^{(\gamma+1)/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(3\ell m\sqrt{E})}{m^{\gamma+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(\ell\sqrt{3}\,n\sqrt{E})}{n^{\gamma+1}}\Bigg)\\
&\quad\pm\frac{4^{\gamma-1/2}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma-1/2}\sqrt{\pi}\,\ell^{\gamma-1/2}}E^{\gamma/2+1/4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1/2}(3\ell m\sqrt{E}/2)}{m^{\gamma+1/2}},
\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$
\begin{aligned}
R_{\heartsuit}^{\gamma}(E) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{32\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{\ell(3+\sqrt{3})}{16\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + \frac{5}{12}E^{\gamma} \\
&\quad + \frac{2^{\gamma-2}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2}\pi\,\ell^{\gamma-1}}E^{(\gamma+1)/2}\Bigg(\sum_{m,n\geq 1}^{\square} \frac{J_{\gamma+1}\big(\ell\sqrt{3E(3m^2+n^2)}\big)}{(3m^2+n^2)^{(\gamma+1)/2}} \\
&\quad + \sum_{m,n\geq 1}^{\square} \frac{J_{\gamma+1}\big(\ell\sqrt{3E(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)}\big)}{\big(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2\big)^{(\gamma+1)/2}}\Bigg) \\
&\quad + \frac{2^{\gamma-3}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2}\pi\,\ell^{\gamma-1}}E^{(\gamma+1)/2}\Bigg(\frac{1}{3^{(\gamma+1)/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(3\ell m\sqrt{E})}{m^{\gamma+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(\ell\sqrt{3}\,n\sqrt{E})}{n^{\gamma+1}}\Bigg) \\
&\quad \pm \frac{2^{2\gamma-2}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2-1/4}\ell^{\gamma-1/2}\sqrt{\pi}}E^{\gamma/2+1/4}\Bigg(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1/2}\big(\ell\sqrt{3}\,m\sqrt{E}/2\big)}{m^{\gamma+1/2}} \\
&\quad + \frac{1}{3^{\gamma/2-1/4}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1/2}\big(3\ell m\sqrt{E}/2\big)}{m^{\gamma+1/2}}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\diamondsuit}^{\gamma}(E) &= \frac{\ell^2}{8\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{\ell(2+\sqrt{2})}{8\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + \frac{3}{8}E^{\gamma} \\
&\quad + \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\pi\,\ell^{\gamma-1}}E^{(\gamma+1)/2}\Bigg(\sum_{m,n\geq 1}^{\square} \frac{J_{\gamma+1}\big(2\ell\sqrt{E(m^2+n^2)}\big)}{(m^2+n^2)^{(\gamma+1)/2}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1}(2\ell m\sqrt{E})}{m^{\gamma+1}}\Bigg) \\
&\quad \pm \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\ell^{\gamma-1/2}\sqrt{\pi}}E^{\gamma/2+1/4}\Bigg(2^{\gamma/2-5/4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1/2}(\ell\sqrt{2}\,m\sqrt{E})}{m^{\gamma+1/2}} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\gamma+1/2}(2\ell m\sqrt{E})}{m^{\gamma+1/2}}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

对于 $\gamma > 0$。利用（2.14），可得

$$
\begin{aligned}
R_{\triangledown}^{\gamma}(E) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{3\ell}{8\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + \frac{1}{3}E^{\gamma} \\
&\quad + \frac{2^{\gamma-3/2}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2+1/4}\pi^{3/2}\ell^{\gamma-1/2}}E^{\gamma/2+1/4}\Bigg(2\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\frac{\cos\big(\ell\sqrt{3E(3m^2+n^2)}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{(3m^2+n^2)^{(2\gamma+3)/4}} \\
&\quad + 2\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\frac{\cos\big(\ell\sqrt{3E(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{\big(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2\big)^{(2\gamma+3)/4}} \\
&\quad + \frac{1}{3^{\gamma/2+3/4}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\big(3\ell m\sqrt{E}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{m^{\gamma+3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big(\ell\sqrt{3}\,n\sqrt{E}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\big)}{n^{\gamma+3/2}}\Bigg) \\
&\quad \pm \frac{4^{\gamma}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma}\pi\ell^{\gamma}}E^{\gamma/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\big(3\ell m\sqrt{E}/2-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\big)}{m^{\gamma+1}} + O(E^{\gamma/2-1/4}),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\heartsuit}^{\gamma}(E) &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{32\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{\ell(3+\sqrt{3})}{16\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + \frac{5}{12}E^{\gamma} \\
&\quad + \frac{2^{\gamma-5/2}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2+1/4}\pi^{3/2}\ell^{\gamma-1/2}}E^{\gamma/2+1/4}\Bigg(2\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\frac{\cos\left(\ell\sqrt{3E(3m^2+n^2)}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right)}{(3m^2+n^2)^{(2\gamma+3)/4}} \\
&\quad + 2\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\frac{\cos\left(\ell\sqrt{3E(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2)}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right)}{\left(3(m-1/2)^2+(n-1/2)^2\right)^{(2\gamma+3)/4}} \\
&\quad + \frac{1}{3^{\gamma/2+3/4}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(3\ell m\sqrt{E}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right)}{m^{\gamma+3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\ell\sqrt{3}\,n\sqrt{E}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right)}{n^{\gamma+3/2}}\Bigg) \\
&\quad \pm \frac{2^{2\gamma-1}\Gamma(\gamma+1)}{3^{\gamma/2}\pi\ell^{\gamma}}E^{\gamma/2}\Bigg(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\ell\sqrt{3}\,m\sqrt{E}/2-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\right)}{m^{\gamma+1}} \\
&\quad + \frac{1}{3^{\gamma/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(3\ell m\sqrt{E}/2-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\right)}{m^{\gamma+1}}\Bigg) + O(E^{\gamma/2-1/4}),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\diamondsuit}^{\gamma}(E) &= \frac{\ell^2}{8\pi(\gamma+1)}E^{\gamma+1} \pm \frac{\ell(2+\sqrt{2})}{8\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)}E^{\gamma+1/2} + \frac{3}{8}E^{\gamma} \\
&\quad + \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\pi^{3/2}\ell^{\gamma-1/2}}E^{\gamma/2+1/4}\Bigg(\sum_{m,n\geq 1}^{\square}\frac{\cos\left(2\ell\sqrt{E(m^2+n^2)}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right)}{(m^2+n^2)^{(2\gamma+3)/4}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\ell m\sqrt{E}-\frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right)}{m^{\gamma+3/2}}\Bigg) \\
&\quad \pm \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\pi\ell^{\gamma}}E^{\gamma/2}\Bigg(2^{\gamma/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\ell\sqrt{2}\,m\sqrt{E}-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\right)}{m^{\gamma+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\ell m\sqrt{E}-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\right)}{m^{\gamma+1}}\Bigg) \\
&\quad + O(E^{\gamma/2-1/4}).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

除双重求和在 $\gamma > 1/2$ 时绝对收敛、并在 $\gamma > 0$ 下按矩形求和收敛外，(3.5)–(3.7) 中的每个求和对于任意 $\gamma > 0$ 都绝对收敛。在 J_ν 的渐近展开 (2.14) 中加入更多项，便可得到黎兹均值的任意阶展开。由于 (3.2)–(3.4) 中贝塞尔函数的自变量都与 $\sqrt{E}$ 成正比，因此每一项后续项都会额外贡献一个因子 $E^{-1/2}$。此外，这些公式还涉及 $J_{\gamma+1}$ 和 $J_{\gamma+1/2}$，它们的首项贡献的阶分别为 $E^{\gamma/2+1/4}$ 和 $E^{\gamma/2}$。因此，由此产生的两组指数序列结合起来，得到定理 1 中出现的幂 $E^{(\gamma+1)/2-k/4}$。贝塞尔函数渐近展开中的每个后续项，在相应级数中还会额外获得一个径向变量的倒数因子。因此，除首项双重级数贡献之外产生的每个级数，对于任意 $\gamma > 0$ 都绝对收敛。最后，由于 J_ν 的完整渐近展开由交替出现的余弦项和正弦项组成，所有系数函数都是三角级数。结合附录 B，即完成了定理 1 的证明。

Appendix 附录 A. Uniform integral estimates

我们建立第 2 节中所使用的某些积分估计。在整个过程中，$E > 0$ 和 $\gamma > 0$ 均为固定量，且所有隐含常数关于 $0 \leq \sigma \leq 1$ 都是一致的。

为证明（2.11），只需证明

$$I_\sigma(k) \coloneqq \int_0^{\sqrt{E}} (E-x^2)^\gamma e^{-\sigma x^2} \cos(kx)dx = O(k^{-\gamma-1}), \quad k\to\infty. \tag{A.1}$$

记

$$e^{-\sigma x^2} = e^{-\sigma E} e^{\sigma(E-x^2)} = e^{-\sigma E}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j (E-x^2)^j}{j!}.$$

由于级数对 $0\le x\le \sqrt{E}$ 和 $0\le \sigma\le 1$一致收敛，我们可以逐项积分：

$$\begin{aligned} I_\sigma(k) &= e^{-\sigma E}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma^j}{j!}\int_0^{\sqrt{E}}(E-x^2)^{\gamma+j}\cos(kx)dx \\ &= e^{-\sigma E}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma^j}{j!}\sqrt{\pi}\,2^{\gamma+j-1/2}\,\Gamma(\gamma+j+1)E^{\gamma/2+j/2+1/4}k^{-\gamma-j-1/2}J_{\gamma+j+1/2}(k\sqrt{E}). \end{aligned}$$

最后一个等式由 [DLMF，第10.9(i)节，公式 10.9。4]根据（2.14）， $j=0$ 项变为

$$e^{-\sigma E}\,2^\gamma\,\Gamma(\gamma+1)E^{\gamma/2}k^{-\gamma-1}\cos\left(k\sqrt{E}-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\right)+O(k^{-\gamma-2}). \tag{A.2}$$

对于 $j\ge 1$，我们使用 $|J_\nu(x)|\le 1$ 来处理 $x\ge 0$ 和 $\nu\ge 0$ [DLMF，第10.14节，公式 10.14。1], 再结合

$$\frac{\Gamma(\gamma+j+1)}{j!} = O(j^\gamma), \quad j\to\infty.$$

对于 $k\ge 4\sqrt{E}$，这给出

$$\begin{aligned} &\left|e^{-\sigma E}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sigma^j}{j!}\sqrt{\pi}\,2^{\gamma+j-1/2}\,\Gamma(\gamma+j+1)E^{\gamma/2+j/2+1/4}k^{-\gamma-j-1/2}J_{\gamma+j+1/2}(k\sqrt{E})\right| \\ &\qquad \lesssim k^{-\gamma-1/2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+j+1)}{j!}\left(\frac{2\sqrt{E}}{k}\right)^j \lesssim k^{-\gamma-3/2}\sum_{j=1}^{\infty} j^\gamma 2^{-j} \lesssim k^{-\gamma-3/2}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

结合（A.2）和（A.3）可得

$$I_\sigma(k) = e^{-\sigma E}\,2^\gamma\,\Gamma(\gamma+1)E^{\gamma/2}k^{-\gamma-1}\cos\left(k\sqrt{E}-\frac{(\gamma+1)\pi}{2}\right)+O(k^{-\gamma-3/2}),$$

这就证明了（A.1）。

接下来，我们讨论（2.19）、（2.22）和（2.24）中的贝塞尔积分。我们声称 t

$$\begin{aligned} J_\sigma(k) &\coloneqq \int_0^{\sqrt{E}} x(E-x^2)^\gamma e^{-\sigma x^2} J_0(kx)dx = O(k^{-\gamma-3/2}), \quad k\to\infty, \\ \tilde{J}_\sigma(k) &\coloneqq \int_0^{\sqrt{E}} x(E-x^2)^\gamma h_\sigma(E-x^2) J_0(kx)dx = O(k^{-\gamma-3/2}), \quad k\to\infty, \end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $h_\sigma(y) = \int_0^1 e^{s\sigma y} ds$。证明与（A.1）完全类似，可由以下计算得出

$$\begin{aligned} J_\sigma(k) &= e^{-\sigma E} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j}{j!} \int_0^{\sqrt{E}} x(E-x^2)^{\gamma+j} J_0(kx) dx \\ &= e^{-\sigma E} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j}{j!} 2^{\gamma+j} \Gamma(\gamma+j+1) E^{(\gamma+j+1)/2} k^{-\gamma-j-1} J_{\gamma+j+1}(k\sqrt{E}) \\ &= e^{-\sigma E} 2^\gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(\gamma+1) E^{\gamma/2+1/4} k^{-\gamma-3/2} \cos\left(k\sqrt{E} - \frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right) + O(k^{-\gamma-2}), \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\sigma(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j}{(j+1)!} \int_0^{\sqrt{E}} x(E-x^2)^{\gamma+j} J_0(kx) dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^j}{(j+1)!} 2^{\gamma+j} \Gamma(\gamma+j+1) E^{(\gamma+j+1)/2} k^{-\gamma-j-1} J_{\gamma+j+1}(k\sqrt{E}) \\ &= 2^\gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(\gamma+1) E^{\gamma/2+1/4} k^{-\gamma-3/2} \cos\left(k\sqrt{E} - \frac{(2\gamma+3)\pi}{4}\right) + O(k^{-\gamma-2}), \end{aligned} \tag{A.6}$$

这里我们再次使用了 [我们]。

Appendix B. Bounds for double sums

固定 $a,\ b > 0$ 和 $0 \le s \le 1/2$。令

$$r_{m,n} := \left(a^2(m-s)^2 + b^2(n-s)^2\right)^{1/2}.$$

对于 $\gamma > 0$、$t \ge 1$ 和 $N \in \mathbb{N}$，定义

$$S_{\gamma,s,N}(t) := \sum_{1 \le m,n \le N} \frac{\cos(2tr_{m,n} - \theta_\gamma)}{r_{m,n}^{\gamma+3/2}}, \quad \theta_\gamma := \frac{(2\gamma+3)\pi}{4},$$

并令

$$S_{\gamma,s}(t) := \lim_{N\to\infty} S_{\gamma,s,N}(t). \tag{B.1}$$

现在我们建立上界，并证明对于 $0 < \gamma \le 1/2$，$S_{\gamma,\ s}(t)$ 在 t 中无界。

引理 5。极限 $S_{\gamma,\ s}(t)$ 对每个 $\gamma > 0$ 和 $t \ge 1$均存在。此外，关于 $N \in \mathbb{N}$一致地，

$$|S_{\gamma,s,N}(t)| \le C \begin{cases} t^{1/2-\gamma}, & 0 < \gamma < \frac{1}{2} \\ 1 + \log t, & \gamma = \frac{1}{2} \\ 1, & \gamma > \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad t \ge 1. \tag{B.2}$$

部分和在 $[1,\infty)$ 的紧子集上一致收敛。

如果 $0 < \gamma \le \frac{1}{2}$，则存在 $c > 0$ 和一个递增序列 $E_j \to \infty$，使得

$$-S_{\gamma,s}(\sqrt{E_j}) \ge c \begin{cases} (\log E_j)^{1/4-\gamma/2}, & 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \\ \log\log E_j, & \gamma = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{B.3}$$

证明。令 $p := \gamma + \frac{3}{2}$。我们先通过将矩形和分解为正方形壳层来证明上界（B.2）。令

$$T_N(t) := \sum_{1 \le m,n \le N} \frac{e^{2itr_{m,n}}}{r_{m,n}^p}.$$

Then

$$T_N(t) = \sum_{k=1}^{N} H_k(t), \quad H_k(t) := \sum_{m=1}^{k} \frac{e^{2itr_{m,k}}}{r_{m,k}^p} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{e^{2itr_{k,n}}}{r_{k,n}^p}.$$

考虑 $H_k(t)$ 中的第一项和。对于 $1 \le M \le k$，定义

$$A_k(M) := \sum_{m=1}^{M} e^{2itr_{m,k}}.$$

显然， $|A_k(M)| \le k$。另一方面，对于

$$f_k(x) := 2t(a^2(x-s)^2 + b^2(k-s)^2)^{1/2},$$

我们有

$$f_k''(x) = \frac{2ta^2b^2(k-s)^2}{(a^2(x-s)^2 + b^2(k-s)^2)^{3/2}} \asymp \frac{t}{k}, \quad 1 \le x \le k.$$

范德科普特估计 [GrKo91，定理 2。2]因此给出

$$|A_k(M)| \lesssim \left(k\sqrt{\frac{t}{k}} + \sqrt{\frac{k}{t}}\right) \lesssim \sqrt{tk}, \quad t \ge 1,$$

对 $1 \le M \le k$ 一致成立。结合关于 $|A_k(M)|$ 的两个估计可得

$$|A_k(M)| \lesssim \min(k, \sqrt{tk}).$$

权重

$$w_k(x) := (a^2(x-s)^2 + b^2(k-s)^2)^{-p/2}$$

在 x 中为正且递减，并且 $w_k(x) \lesssim k^{-p}$。分部求和得

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{e^{2itr_{m,k}}}{r_{m,k}^p} = A_k(k)w_k(k) + \sum_{m=1}^{k-1} A_k(m)(w_k(m) - w_k(m+1)).$$

由于

$$w_k(k) + \sum_{m=1}^{k-1} (w_k(m) - w_k(m+1)) = w_k(1) \lesssim k^{-p},$$

可得

$$\left| \sum_{m=1}^{k} \frac{e^{2itr_{m,k}}}{r_{m,k}^p} \right| \lesssim \min(k^{1-p}, t^{1/2}k^{1/2-p}).$$

交换 a 与 b，可得 $H_k(t)$ 中第二个和的同一估计。因此，

$$|H_k(t)| \lesssim \min(k^{-1/2-\gamma}, t^{1/2}k^{-1-\gamma}). \tag{B.4}$$

特别地，对于每个固定的 $t \ge 1$，$\sum_{k\ge1} |H_k(t)| < \infty$。由于

$$S_{\gamma,s,N}(t) = \mathrm{Re}\big(e^{-i\theta_\gamma} T_N(t)\big),$$

这证明了 $S_{\gamma,s,N}(t)$ 在 $N \to \infty$ 时收敛。此外，(B.4) 表明

$$\sum_{k=1}^{\infty} |H_k(t)| \lesssim \sum_{k\le t} k^{-1/2-\gamma} + t^{1/2} \sum_{k>t} k^{-1-\gamma} \lesssim \begin{cases} t^{1/2-\gamma}, & 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \\ 1 + \log t, & \gamma = \frac{1}{2}, \\ 1, & \gamma > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

这证实了（B.2）。最后，对于 $0 < \alpha < \beta$、 $\alpha \le t \le \beta$ 和 $N > M$，

$$|T_N(t) - T_M(t)| \le \sum_{k=M+1}^{N} |H_k(t)| \lesssim \beta^{1/2} \sum_{k>M} k^{-1-\gamma} \lesssim \beta^{1/2} M^{-\gamma}. \tag{B.5}$$

这证明了在 $[1,\infty$ 的紧子集上一致收敛）。

现在假设 $0<\gamma\le\frac12$ 并证明下界（B.3）。策略如下。在尺度 R^{-1} 下，我们用一个积分为 1 且傅里叶变换也非负的非负平均核对 $S_{\gamma,\,s}$ 进行平滑处理。所得级数的系数均为非负，其在 $t=0$ 处的值随着 $-\infty$ 趋于 $R\to\infty$。对于每个足够大的 R，同时逼近给出一个点 $t_R\ge R$，使主导项的相位几乎回到其在零点处的值，从而使平均值同样为可比的负值。由于核是非负的，原始和必然在某个附近点处至少同样负。

我们首先构造平均核。选取一个非负函数 $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$，满足 $\operatorname{supp}\psi\subseteq[-1/2,1/2]$ 以及

$$\int_{\mathbb{R}}\psi(u)du=1.$$

定义

$$\rho(u)\coloneqq\int_{\mathbb{R}}\psi(v)\psi(v-u)\,dv.$$

变量代换给出 $\rho(-u)=\rho(u)$。此外，

$$\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\qquad \rho\ge0,\qquad \operatorname{supp}\rho\subset[-1,1],\qquad \int_{\mathbb{R}}\rho(u)du=1.$$

采用傅里叶变换的约定 (2.3)，由富比尼定理可得 $\widehat{\rho}(\xi)\;=\;|\widehat{\psi}(\xi)|^2$。特别地，

$$0\le\widehat{\rho}(\xi)\le1,\quad \widehat{\rho}(0)=1. \tag{B.6}$$

此外，由于 $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$，反复分部积分可得

$$|\widehat{\rho}(\xi)|\le C_L(1+|\xi|)^{-L} \tag{B.7}$$

对每个整数 $L\ge1$ 均成立。对于 $R\ge2$，令

$$\rho_R(u)\coloneqq R\rho(Ru),\quad b_{m,n}(R)\coloneqq\frac{\widehat{\rho}(2r_{m,n}/R)}{r_{m,n}^{p}},$$

并定义

$$G_R(t)\coloneqq\sum_{m,n\ge1}b_{m,n}(R)\cos(2tr_{m,n}-\theta_\gamma).$$

对于每个 R，(B.7) 表明 $G_R(t)$ 在 $t\in\mathbb{R}$ 上绝对且一致收敛。对于 $t>1+1/R$，我们断言

$$G_R(t)=\int_{\mathbb{R}}\rho_R(v)S_{\gamma,s}(t-v)\,dv. \tag{B.8}$$

事实上，由于 ρ_R 是偶函数且取实值，$\cos x=\operatorname{Re}(e^{ix})$ 意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\rho_R(v)\cos(2(t-v)r-\theta_\gamma)\,dv&=\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{R}}\rho_R(v)e^{i(2(t-v)r-\theta_\gamma)}dv\right)\\&=\operatorname{Re}(e^{i(2tr-\theta_\gamma)}\widehat{\rho_R}(2r))=\widehat{\rho}(2r/R)\cos(2tr-\theta_\gamma),\end{aligned}$$

由此得到

$$\sum_{1\le m,n\le N}b_{m,n}(R)\cos(2tr_{m,n}-\theta_\gamma)=\int_{\mathbb{R}}\rho_R(v)S_{\gamma,s,N}(t-v)dv.$$

令 $N\to\infty$，左端收敛到 $G_R(t)$，因为定义级数绝对收敛。对于右端，由于 $\operatorname{supp}\rho_R\subseteq[-1/R,1/R]$，自变量 $t-v$ 位于紧区间$[t-1/R,t+1/R]\subseteq[1,\infty)$ 内，其中部分和$S_{\gamma,\,s,\,N}$根据（B.5）一致收敛。由于$\rho_R\in L^1(\mathbb{R})$，（B.8）由控制收敛定理得出。

接下来，令

$$A_R := \sum_{m,n\geq 1} b_{m,n}(R), \quad \alpha_\gamma := -\cos\theta_\gamma.$$

注意，$G_R(0) = -\alpha_\gamma A_R$。由于 $3\pi/4 < \theta_\gamma \leq \pi$，我们有 $\alpha_\gamma > 0$。定义

$$h_\gamma(R) := \begin{cases} R^{1/2-\gamma}, & 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \\ \log R, & \gamma = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

由 (B.6) 及连续性可知，存在一个 $\eta > 0$ 使得

$$\widehat{\rho}(2r/R) \geq \frac{1}{2} \quad \text{when } r \leq \eta R.$$

因此

$$A_R \geq \frac{1}{2} \sum_{r_{m,n}\leq \eta R} r_{m,n}^{-p}.$$

此外，由于 $r_{m,\ n} \lesssim \max(m,\ n)$，存在一个 $c_0 > 0$ 使得

$$\frac{1}{2} \sum_{r_{m,n}\leq \eta R} r_{m,n}^{-p} \gtrsim \sum_{\max(m,n)\leq c_0 R} \max(m,n)^{-p}.$$

每个壳层 $\{(m,\ n) \in \mathbb{N}^2 : \max(m,\ n) = k\}$ 恰好包含 $2k-1$ 对。由此可知，当 R充分大时，

$$A_R \gtrsim \sum_{k\leq c_0 R} (2k-1)k^{-p} \gtrsim \sum_{k\leq c_0 R} k^{-1/2-\gamma} \gtrsim h_\gamma(R). \tag{B.9}$$

对于 $K \geq 1$，定义尾项

$$\mathcal{T}_R(K) := \sum_{r_{m,n}>KR} b_{m,n}(R).$$

取 $L = 4$ 于 (B.7) 中，

$$\mathcal{T}_R(K) \lesssim R^4 \sum_{r_{m,n}>KR} r_{m,n}^{-p-4}.$$

为估计这一点，将配对 $(m,\ n)$ 分为

$$\mathcal{A}_j := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : 2^j KR < r_{m,n} \leq 2^{j+1} KR\}, \quad j \geq 0.$$

若 $r_{m,\ n} \leq u$，则

$$m = s + \frac{1}{a}\sqrt{a^2(m-s)^2} \leq s + \frac{u}{a}$$

类似地，$n \leq s + u/b$。因此，对于 $u \geq 1$,

$$\#\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : r_{m,n} \leq u\} \leq \left(s + \frac{u}{a}\right)\left(s + \frac{u}{b}\right) \lesssim u^2. \tag{B.10}$$

特别地,

$$\#\mathcal{A}_j \lesssim (2^j KR)^2.$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_R(K) &\lesssim R^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{(m,n)\in\mathcal{A}_j} r_{m,n}^{-p-4} \\ &\lesssim R^4 \sum_{j=0}^{\infty} (2^j KR)^2 (2^j KR)^{-p-4} \\ &\lesssim R^{2-p} K^{-p-2} \lesssim h_\gamma(R) K^{-p-2}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

结合（B.9）和（B.11），我们可以固定一个充分大的 K 使得

$$\mathcal{T}_R(K) \le \frac{\alpha_\gamma}{8} A_R \tag{B.12}$$

当 R 足够大时。

接下来，将满足 $r_{m,n} \le KR$ 的半径依次记为 $r_1, \dots, r_{D_R}$，允许重复。由（B.10），

$$D_R \lesssim K^2 R^2. \tag{B.13}$$

固定一个满足以下条件的 $Q \in \mathbb{N}$

$$\frac{2\pi}{Q} \le \frac{\alpha_\gamma}{4}.$$

将狄利克雷同时逼近定理 [Sc80，第二章，定理 1A] 应用于这些数

$$\beta_\ell := \frac{R r_\ell}{\pi}, \quad 1 \le \ell \le D_R,$$

可得一个整数 q_R 和整数 $z_1, \dots, z_{D_R}$，使得

$$1 \le q_R \le Q^{D_R}, \qquad |q_R \beta_\ell - z_\ell| \le \frac{1}{Q}, \qquad 1 \le \ell \le D_R. \tag{B.14}$$

令 $t_R := R q_R$。于是

$$R \le t_R \le R Q^{D_R}, \tag{B.15}$$

and

$$|2 t_R r_\ell - 2\pi z_\ell| \le \frac{2\pi}{Q}, \qquad 1 \le \ell \le D_R. \tag{B.16}$$

由周期性及不等式 $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$,

$$|\cos(2 t_R r_\ell - \theta_\gamma) - \cos\theta_\gamma| \le \frac{2\pi}{Q}, \qquad 1 \le \ell \le D_R.$$

加上并减去 $G_R(0)$，并根据 $r_{m,\,n} \le KR$ 或 $r_{m,\,n} > KR$ 对求和进行拆分，得到

$$\begin{aligned}
G_R(t_R) &= G_R(0) + \sum_{m,n \ge 1} b_{m,n}(R) \cos(2 t_R r_{m,n} - \theta_\gamma) - G_R(0) \\
&= -\alpha_\gamma A_R \\
&\quad + \sum_{r_{m,n} \le KR} b_{m,n}(R) \big(\cos(2 t_R r_{m,n} - \theta_\gamma) - \cos\theta_\gamma \big) \\
&\quad + \sum_{r_{m,n} > KR} b_{m,n}(R) \big(\cos(2 t_R r_{m,n} - \theta_\gamma) - \cos\theta_\gamma \big) \\
&\le -\alpha_\gamma A_R + \frac{2\pi}{Q} A_R + 2\mathcal{T}_R(K) \\
&\le \Big(-\alpha_\gamma + \frac{\alpha_\gamma}{4} + \frac{\alpha_\gamma}{4} \Big) A_R = -\frac{\alpha_\gamma}{2} A_R.
\end{aligned}$$

由于

$$t_R \ge R > 1 + \frac{1}{R},$$

我们可以应用（B.8）。由此可得

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_R(v) S_{\gamma,s}(t_R - v)\, dv \le -\frac{\alpha_\gamma}{2} A_R.$$

由于 $\rho_R \geq 0$、$\int_{\mathbb{R}} \rho_R = 1$ 和 supp $\rho_R \subseteq [-1/R, 1/R]$，存在某个 $u_R \in [t_R - 1/R, t_R + 1/R]$ 使得

$$S_{\gamma,s}(u_R) \leq -\frac{\alpha_\gamma}{4} A_R.$$

将此结果与（B.9）结合，得到

$$S_{\gamma,s}(u_R) \leq -c\, h_\gamma(R), \tag{B.17}$$

对某个 $c > 0$ 且与 R无关。现在令 $E_R := u_R^2$。由（B.15）和 $u_R \in [t_R - 1/R, t_R + 1/R]$,

$$\left(R - \frac{1}{R}\right)^2 \leq E_R \leq \left(RQ^{D_R} + \frac{1}{R}\right)^2.$$

因此

$$\frac{R^2}{4} \leq E_R \leq 4R^2 Q^{2D_R}.$$

特别地，$E_R \to \infty$，而（B.13）意味着

$$\log E_R \lesssim R^2.$$

由此可知，存在一个 $c > 0$，使得

$$h_\gamma(R) \geq c \begin{cases} (\log E_R)^{1/4-\gamma/2}, & 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \\ \log\log E_R, & \gamma = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

当 R 足够大时。将此与 (B.17) 结合，并提取一个递增序列 $E_j \to \infty$即可完成 (B.3) 的证明。□

对于等边三角形和半等边三角形，(3.5) 和 (3.6) 中的首要双重级数贡献都涉及 (B.1) 中双重和的线性组合。事实上，取 $a = \sqrt{3}, b = 1$，以及 $t = \ell\sqrt{3}E/2$，这些贡献可表示为

$$W_\gamma(t) := 2S_{\gamma,0}(t) + 2S_{\gamma,1/2}(t).$$

对 $W_\gamma(t)$，逐项应用相应的上界即可立即得到上界 (B.2)。然而，要证明其下方无界，我们必须考虑两个双重和之间可能发生的抵消。对于 $s \in \{0, \frac{1}{2}\}$，令 $G_{R,s}$, $A_{R,s}$ 和 $\mathcal{T}_{R,s}(K)$ 分别表示在引理 5 的证明中定义的量 G_R, A_R 和 $\mathcal{T}_R(K)$。固定一个足够大的 K，使得 (B.12) 对 $s = 0$ 和 $s = \frac{1}{2}$ 均成立。于是

$$G_R^W(t) := 2G_{R,0}(t) + 2G_{R,1/2}(t), \quad A_R^W := 2A_{R,0} + 2A_{R,1/2}$$

满足

$$G_R^W(0) = -\alpha_\gamma A_R^W, \quad A_R^W \gtrsim h_\gamma(R),$$

其中 α_γ, h_γ 在引理 5 的证明中定义。接下来，构造一个列表，其中包含与 $s = 0$ 和 $s = \frac{1}{2}$ 对应的所有半径 $r_{m,\,n} \leq KR$，允许重复。根据（B.13），这个合并列表的长度仍为 $O(R^2)$。将狄利克雷同时逼近定理 Sc80，第二章，定理 1A] 应用于与这些半径对应的数值，我们得到一个统一的 Rr/π，使得它对合并列表中的所有半径都满足类似于（B.16）的估计。于是$t_R = Rq_R$

$$G_R^W(t_R) \leq \left(-\alpha_\gamma + \frac{\alpha_\gamma}{4} + \frac{\alpha_\gamma}{4} \right) A_R^W = -\frac{\alpha_\gamma}{2} A_R^W.$$

此外,

$$G_R^W(t_R) = \int_{\mathbb{R}} \rho_R(v) W_\gamma(t_R - v)\, dv.$$

证明的其余部分不变。特别地，存在 $c > 0$ 以及一个递增序列$E_j \to \infty$ 使得 $W_\gamma(\sqrt{E_j})$满足下界（B.3）。

在黎斯平均展开（3.5）–（3.7）中，双重求和的自变量是 $\sqrt{E}$ 的固定正倍数，这些倍数至多影响对数下界的常数。此外，首项系数函数中额外的单级数绝对收敛且一致有界。结合引理 5，这表明对于所有可积多边形，当 $0 < \gamma \leq 1/2$ 时，首项系数函数 $F^{\gamma}\,\Omega_{,1}$ 无界。

References

[DLMF] *NIST Digital Library of Mathematical Functions.* http://dlmf.nist.gov/，2026-06-15 发布的 1.2.7 版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。9, 18

[63] Fe B. V. Fedosov。多边形区域情形下拉普拉斯算子特征值的渐近公式。

Dokl. Akad. Nauk SSSR 151 4 1963 786 789 2 ( ) ( )，– Fe B. V. Fedosov。多面体情形下拉普拉斯算子特征值的渐近公式。

[64] *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 157 3 1964 536 538 2 ( ) ( )，– FLW R. L. Frank、A. Laptev 和 T. Weidl。《薛定谔算子：特征值与 Lieb–Thirring 不等式》。剑桥高等数学研究丛书，第

[23] 200 2023 1 卷。剑桥大学出版社，剑桥（ ）

[25] FrLa R. L. Frank 和 S. Larson。利普希茨区域上狄利克雷和诺伊曼拉普拉斯算子的黎斯平均渐近性。

Invent. Math. 241 3 2025 999 1079 2, 3 ( ) ( )，– GrRy I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik。 *Table of Integrals、 Series、*

[07] *and Products*。第七版。A. Jeffrey 和 D. Zwillinger 编。学术出版社、爱思唯尔，阿姆斯特丹（

2007 8, 10 ）GrKo S. W. Graham 和 G. Kolesnik。

[91] *Van der Corput's Method of Exponential Sums*。伦敦数学学会讲义系列，第

126 1991 7, 20 卷。剑桥大学出版社，剑桥（ ）Ha G. H. Hardy。

[15] 关于将一个数表示为两个平方数之和。 *Quart. J. Math.* 46 (1915), 263–283 13[Iv80] V. Ivrii。带边界流形上拉普拉斯–贝尔特拉米算子谱渐近性的第二项。 *Funktsional. Anal. Prilozhen.* 14 2 1980 25 34 1 ( ) ( )，– KS J. Kim 和 A. Seeger。傅里叶级数和积分的黎斯平均：临界指

[19] 标处的强可和性。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 372 4 2019 2959 2999 3 ( ) ( )，– Ma G. Mardby。超越三项：多边形诺伊曼热迹的指数界。

[26] ◦ *arXiv preprint* *arXiv:2606.04937* 2026 ( )。

3

[55] Ma V. A. Marˇcenko。微分算子谱分析中的塔伯型定理。 *Izv. Akad. Nauk*

SSSR Ser. Mat. 19 5 1955 381 422 2 ( ) ( )，– MaRo G. Mardby 和 J. Rowlett。可积多边形的谱不变量。 *J. Fourier Anal. Appl.* 31(6)

[25] ◦ (2025)，论文编号 69, 45 3, 4, 13 pp Mc B. McCartin。狄利克雷或诺伊曼边界条件下具有拉普拉斯算子三角特征函数的多边形区域。

[08] *Appl. Math. Sci.* 2 58 2008 2891 2901 1 ( ) ( )，–。Ro G.V. Rozenblum。无界区域中第一边值问题的特征

[72] 值。 *Math. USSR Sb.* 18 2 1972 235 248 1 ( ) ( )，— Sc W. M. Schmidt。 *Diophantine Approximation*。《数学讲义》，第 785 卷。

[80] Springer-Verlag，柏林、海德堡（ 1980 23, 24 ）。Se R. Seeley。 $\mathbb{R}^3$域中拉普拉斯算子特征值的尖锐渐近余项估计。 *Adv.*

[78] *Math.* 29 2 1978 244 269 1 ( ) ( )，– VaSr M. van den Berg 和 S. Srisatkunarajah。

[88] $\mathbb{R}^2$ *J.* 中多边形边界区域的热方程。( )

London Math. Soc. 2 37 1 1988 119 127 2, 3 ( ) ( )，–。[ ] We E. W. Weisstein。索宁积分。摘自数学世界——Wolfram 网络资源。

10, 19

https://mathworld.wolfram.com/SoninesIntegral.html [11] We H. Weyl。关于特征值的渐近分布。 *Nachr. Ges. Wiss. Gött., Math.-Phys. Kl.* 87(1911), 110–117 1

Air Force Research Laboratory, Wright-Patterson AFB, OH, USA

Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, 41296 Gothenburg, Sweden*Email address*: mardby@chalmers.se

Department of Mathematics, University of Dayton, Dayton, OH 45469-2316, USA
Email address: jshapiro1@udayton.edu