arXiv:2611.29502v1 [econ.GN] 22 Nov 2026

如何错配消费者*

Wenhao Li†

本版本：2026年11月7日

摘要

平台应该向所有消费者展示所有产品，还是至少展示他们最喜欢的产品？或者，平台能否通过错配部分消费者来提高消费者剩余：只向他们展示较不偏好的产品，甚至将他们排除在交易之外？我证明，在垄断和双寡头市场中，错配都能通过促使价格降低来提高总消费者剩余。在双寡头市场中，消费者最优匹配采用临界值政策：沿着每条估值差相等的对角线，估值较低的消费者只会与较不偏好的产品匹配，其中一些消费者之后还可能被排除。估值相互独立且服从均匀分布时，与完全匹配相比，这种做法可使总消费者剩余提高约 41%。

*我谨向 Nageeb Ali 和 Nima Haghpanah 致以诚挚谢意，感谢他们的指导与支持。我感谢 Alessandro Bonatti、Kalyan Chatterjee、Yuhta Ishii、Vijay Krishna、Ran Shorrer、Ron Siegel 和 Alex Smolin 提供的宝贵讨论，也感谢研讨会和会议的与会者提出的意见。

†香港大学商学院（电子邮件：wenhao.econ@gmail.com）。

1 引言

设想一个平台，它知道消费者对一系列产品的估值，并选择向他们展示哪些产品。平台应该展示所有产品或消费者最喜欢的产品，还是应该错配部分消费者，只向他们展示消费者较不喜欢的产品？直觉上，人们可能会认为，如果平台优先考虑消费者剩余，就应该展示所有产品，或至少展示消费者最喜欢的产品。毕竟，展示所有产品似乎是加强市场竞争的最佳方式，因为这样一来，任何企业都不会认为自己拥有被锁定的消费者。或许令人意外的是，我的分析表明，提高消费者剩余的最佳方式实际上可能涉及错配：只向消费者展示她较不喜欢的产品。这种扭曲可能引发价格折扣，从而提高消费者剩余。

即使在垄断市场中，也可以看到这种基本的经济力量。考虑一家与连续统消费者互动的单一企业，这些消费者的估值在 $[0,1]$ 上均匀分布。为简便起见，假设生产成本为零。平台观察每位消费者的估值，并决定是否授予其使用该企业产品的权利。被排除在外的消费者获得的收益为零。

首先，假设平台授予所有消费者进入垄断市场的使用权，如图1中的图(a)所示。因此，垄断者将价格设定为 $1/2$。只有那些对产品的估值高于该价格的消费者才会购买，从而获得正的剩余。

现在来看同一张图中的图(b)。这里，平台排除了估值介于 $13/20$ 和 $15/20$之间的消费者。通过这样做——排除 $2/20$ 的消费者——平台促使垄断者将价格降至 $9/20$。其直觉是，移除这些顾客后，与能够接触所有消费者的情况相比，企业将价格降至低于 $1/2$时的损失会更小。[1] 由于价格下降，两个蓝色区域内的消费者从中受益。薄荷绿区域内的消费者如今也能负担得起与垄断者交易，因此获得了正的剩余。另一方面，估值介于 $13/20$ 和 $15/20$ 之间的被排除消费者则

[1]为什么会有这样的价格下降？当前述消费者群体被排除在外时，垄断者没有激励将价格设定在该区间内。具体来说：对于低于 p的价格，垄断者的利润将为 $p(1-p-2/20)$，其中计入了被排除的 $2/20$ 消费者。该函数在 $9/20$ 处达到峰值，最大值为 $81/400$。对于高于 $15/20$的价格，最优利润为 $(15/20)(1-15/20) = 75/400$，并且恰好在 $15/20$处实现。

处境更差。但综合考虑所有因素，消费者剩余的净增益严格为正。[2]

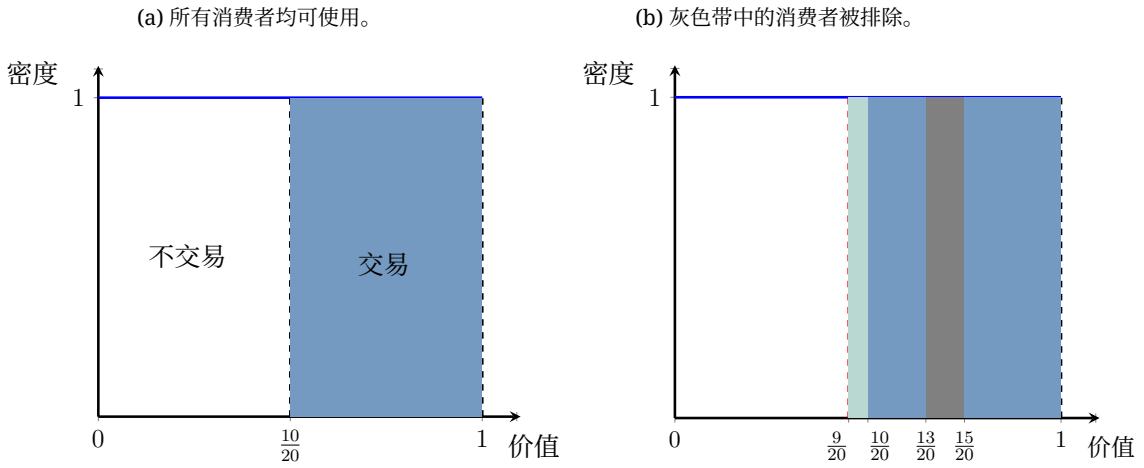


图1：排除消费者可能提高消费者剩余

这个例子表明，排除部分消费者可以提高总消费者剩余。但消费者最优排除政策是什么？消费者最优政策会排除估值处于区间 $[0.443, 0.731]$内的中等价值消费者。然而，平台不会以 100% 的概率排除这些消费者，而是选择相应的排除概率，使垄断者愿意将价格降至约 0。443，并且在该价格与区间内更高的价格之间无差异。图 2展示了由此产生的需求曲线，纵轴为价格，横轴为需求。在完全访问的情况下，垄断者面对的是图中蓝色所示的线性需求曲线。在消费者最优排除政策下，红色所示的诱导需求曲线在 0。443 至 0。731 之间与单位弹性需求曲线重合，从而产生约为 0。197 的恒定垄断利润。该政策将消费者剩余从 $1/8$ 提高至约 0。134。

[2]消费者剩余的增加为 $(1/2 - 2/20)(1/20)$ $+(1/20)(9.5/20 - 9/20)$。由于排除部分消费者而导致的减少为 $(2/20)(14/20 - 1/2)$。最终，消费者剩余的净增益为 $(1/20)(0.5/20)$。事实上，在这个均匀分布示例中，对于每个临界值 $c \in (1/2,\ 3/4)$，都存在足够小的 ε，使得平台通过排除区间 $[c, c + \varepsilon]$ 内的消费者，能够实现严格更低的垄断价格和严格更高的消费者剩余。

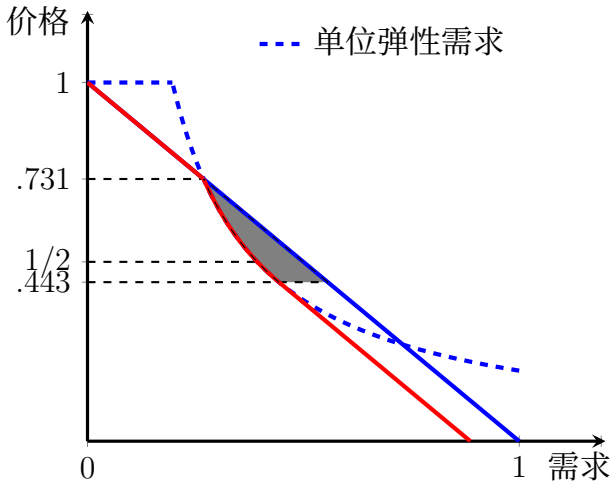


图 2：消费者最优准入政策

消费者最优排除政策具有需求保持属性：在所有使垄断者获得相同最大利润的排除政策中，该政策在每个价格下都能产生最大的需求。我证明，对于任意估值分布以及垄断者利润的任何目标降幅，都存在这样的需求保持型排除政策。此外，在所有带来相同垄断利润的政策中，该政策使消费者剩余最大。因此，平台只需决定让垄断者保留多少利润。由此，消费者最优排除政策总能选择为需求保持型政策。

图 1 中的例子似乎表明，要提高总消费者剩余，就必须牺牲一些消费者：被排除者会失去剩余，尽管其他消费者能从较低的价格中受益。但这并非必然。平台不必确定性地排除选定的消费者，而可以将排除以概率方式分散到更大的消费者群体中。这样的政策仍能促使垄断价格下降，同时确保价格下降带来的好处超过每位消费者因可能被排除而遭受的期望损失。因此，平台可以实现事前帕累托改进：根据各自的估值，每位消费者的期望剩余都至少不变，且部分消费者的期望剩余严格增加。

更一般地说，对于消费者而言，哪些排除政策是中期帕累托有效的？给定任意排除政策及其诱导的垄断价格，平台能否找到另一种排除政策，使其诱导出不同的价格，从而让每一位消费者都至少同样受益，并让其中一些消费者严格受益？在该诱导价格下，保证

没有消费者的境况变差，等价于对每位消费者的排除概率施加一个上界。因此，该问题可以表述为一个受容量约束的垄断问题：在满足这些个体上界并诱导出目标价格的条件下，选择排除概率。我通过推广需求保持型排除的思想来解决这一问题：在所有满足容量约束且使垄断者获得相同最大利润的排除政策中，存在一种需求保持型排除政策，并且它能最大化消费者剩余。因此，要判断某种排除政策是否为中期帕累托有效，我们只需将其与需求保持型排除政策进行比较。

尽管提高消费者剩余未必会以牺牲任何消费者为代价，但通常会损害社会剩余和交易量。在对数凹价值分布下，完全访问可使社会剩余和交易量均达到最大。任何严格提高消费者剩余的排除政策，都必然会同时降低二者。

然而，在双寡头市场中，提高消费者剩余未必会以牺牲社会剩余或交易量为代价。

我考虑如下双寡头情形。两家企业各自向连续统消费者销售一种差异化产品，这些消费者具有单位需求和异质估值。为简便起见，边际成本为零。在企业选择价格之前，平台承诺采用一项匹配规则，以决定每位消费者可以使用哪些产品：两种产品、仅其中一种，或两种都不能使用。企业可以观察到该规则，但无法观察个体估值，随后便选择统一价格。消费者得知自己对可使用产品的确切估值，并在这些产品之间作出选择。他们始终可以选择不购买任何产品，从而获得零收益，但无法自行使用被排除的产品。我假设估值服从对称对数凹分布，并将讨论范围限定在对称匹配和对称纯策略均衡。

不同于垄断，平台无需排除消费者即可促使价格降低。假设平台希望促使对称均衡价格 p略低于最小的完全匹配均衡价格 p^*。在完全匹配下，当竞争对手收取 p 时，企业会偏好将价格偏离至高于 p 的水平。[3] 为了阻止

[3]在对数凹性条件下，每家企业的完全匹配最佳响应都是唯一且连续的。由于p^* 是最小的对称完全匹配均衡价格，因此对任意 $p \in (0, p^*)$ 的最优响应都高于 p。

这种向上偏离，平台可以通过让选定的消费者仅看到他们较不偏好的产品来制造错配。

图 3展示了在估值相互独立且服从均匀分布的情况下，平台如何利用错配来阻止向上价格偏离，并促使对称均衡价格降低至 $p = 1/3$ 。在左图中，平台只将蓝色区域内的消费者匹配给企业1，只将黄色区域内的消费者匹配给企业2，尽管这些消费者更偏好另一家企业的产品。蓝色区域是黄色区域沿对角线 $v_1 = v_2$反射所得的区域。[4] 其他消费者仍可使用两种产品。右图展示了这种不匹配策略如何影响企业 i 以价格 q 销售、而竞争对手收取 p时的需求。与完全匹配相比，错配使价格为 $q = p$时的需求保持不变，并使所有更高价格下的需求至多不变。

要理解其中的原因，不妨考察企业1。在价格为 p时，相较于完全匹配，企业1失去了黄色区域的消费者，但获得了蓝色区域的消费者。由于这两个区域的质量相等，其在 p 的销售额保持不变。在完全匹配下，黄色区域中的消费者 $v = (v_1, v_2)$在价格上涨不超过 $v_1 - v_2$时，仍会继续向企业1购买。相比之下，蓝色区域中的镜像类型消费者 $v' = (v_2, v_1)$只与企业1匹配，当价格上涨超过 $v_1' - p = v_2 - p$ 时便会停止购买。根据构造，$v_1 - v_2 > v_2 - p$。因此，在目标价格 p下，与完全匹配相比，企业1失去的价格敏感型消费者更少，而获得的价格敏感型消费者更多，这使向上价格偏离变得不那么有吸引力。事实上，可以验证，在这种错配策略下，任何单边价格偏离都无利可图，因此 p 是对称均衡价格。矛盾的是，错配虽然使这些消费者被单个企业锁定，却加剧了价格竞争，因为它让企业的需求对价格上涨更加敏感。

[4]蓝色区域定义为 $0 \le v_1 - p \le 1/16$ 和 $1/4 \le v_2 - v_1 \le 7/12$。

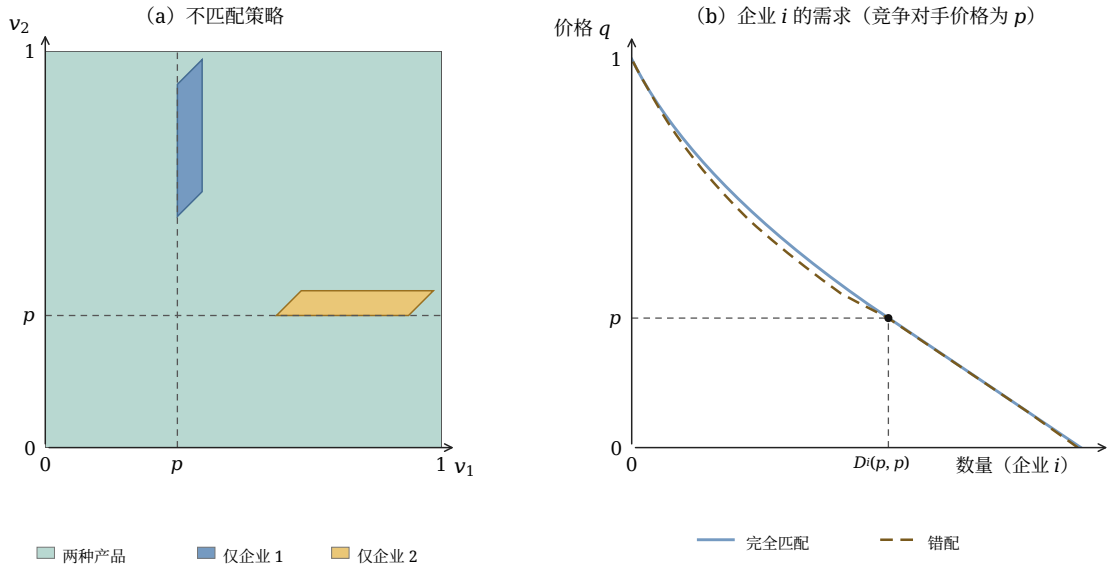


图3：错配可以塑造需求，并诱导出目标均衡价格$p = 1/3$。

这解释了为什么在双寡头市场中，提高消费者剩余未必需要以牺牲社会剩余或交易量为代价：平台可以通过错配而非排除来促使均衡价格下降。我证明，当目标价格 p足够接近 p^*时，只需对少量经过恰当挑选的消费者进行错配，就足以使较低价格维持为均衡。此外，我还证明，恰当随机化的错配策略能够同时提高社会剩余和交易量，并为消费者带来事前帕累托改进。

以消费者为导向的平台应如何设计其匹配政策？我证明，存在一种消费者最优匹配，将这种对称错配与排除相结合，从而使均衡价格 p^o 低于完全匹配均衡价格 p^*。这种匹配可以分两步构造。首先，排除估值低于 p^o 的产品。然后，对于估值认为两种产品都高于 p^o 的消费者，沿每条估值差相等的对角线实施临界值政策：临界值以下的消费者只与其较不偏好的产品匹配，而临界值以上的消费者仍可使用两种产品。其次，排除现在只考虑一家企业的特定消费者。这些消费者可能是最初只对一种产品的估值高于 p^o 的消费者，也可能是在第一步中被错配的消费者。

在第二步中，排除只考虑一家企业的消费者会改变该企业的需求，而不影响其竞争对手的需求。因此，这一排除问题可归结为一个受容量约束的垄断问题：排除对象仅限于步骤 1 后只考虑该企业的消费者。因此，我可以应用需求保持型排除规则来解决这一问题，从而完成消费者最优匹配的构造。

图 4 展示了估值相互独立且服从均匀分布时的两步刻画，其中分布定义于 $[0,1]$。在步骤 1 中，灰色区域内的消费者因对两种产品的估值都低于 p^o而被排除。蓝色区域表示仅向消费者展示企业1：其中一些消费者对企业1产品的估值高于 p^o，另一些消费者对两种产品的估值都高于p^o ，但却与他们较不偏好的产品相匹配。黄色区域与之对称，表示仅向消费者展示企业2。薄荷绿区域表示仍可使用两种产品的消费者。蓝色区域与薄荷绿区域之间以及黄色区域与薄荷绿区域之间的曲线边界展示了临界值结构：沿着每条估值差相等的对角线，估值较低的消费者会被匹配到较不偏好的产品，而估值较高的消费者仍可使用两种产品。在步骤 2 中，根据需求保持型排除规则，进一步排除仅向其展示一种产品的消费者，如右图中新增的灰色区域所示。

这种匹配带来的消费者剩余比完全匹配均衡高出约 41%。交易量也有所增加，[5] 尽管有些消费者被排除在外：较低的价格促成了足够多的额外购买，弥补了因排除而损失的购买。

[5]交易量从完全匹配下约 82.8% 上升至所构造匹配下的 88.0%。

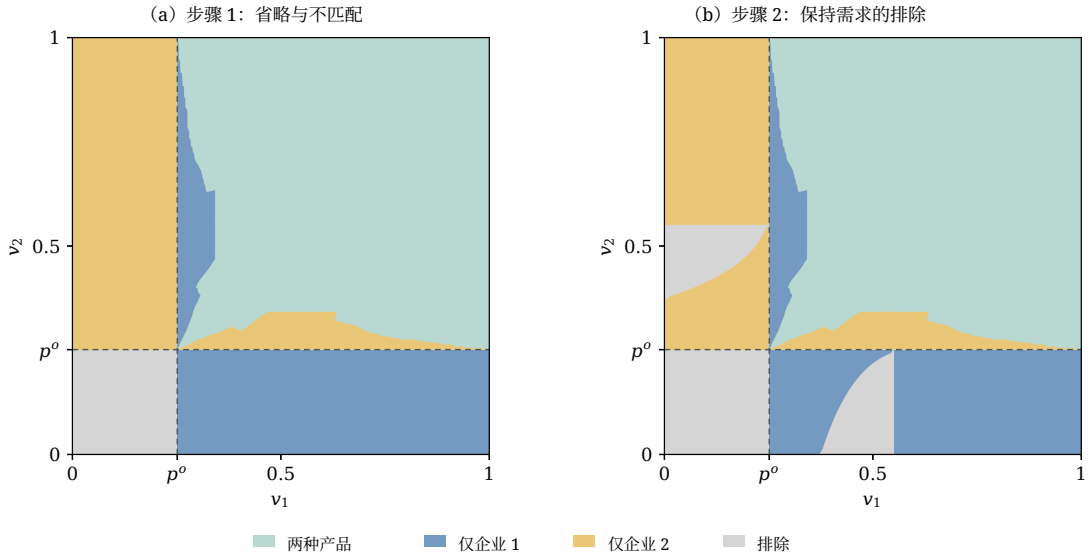


图4：消费者最优匹配的两步结构

临界值有一个简单的经济学解释。对于偏好差异相同的消费者，错配造成的匹配质量损失相同。然而，错配估值较低的消费者，会使被分配到的企业获得支付意愿较低的顾客，从而降低价格上涨的吸引力。因此，对于每一种偏好差异，估值较低的消费者会在步骤 1 中被错配，并可能在步骤 2 中随后被排除；而估值较高的消费者仍可使用两种产品。当两种估值都高于均衡价格 p^o时，无须只展示消费者偏好的产品，尽管这种分配在该价格下不会牺牲消费者剩余，而且有助于阻止向下偏离。

除了消费者剩余，仁慈的平台还可能寻求最大化社会剩余或交易量。我将证明，对于这两种目标，如果估值相互独立，最优匹配的形式会更加简单：它只采用消费者最优构造的第一步，不再进行后续排除。最大化交易量的匹配形式尤其简单。将所得的对称均衡价格记为 p^T。较低估值的临界值就是 $|v_i - v_j| + p^T$。类型为 v、具有 $v_i > v_j > p^T$ 的消费者，仅当 $v_j < v_i - v_j + p^T$ 时才与产品 j 匹配；否则，她仍可使用两种产品。

图5 展示了独立均匀估值下，图(a)中的社会最优匹配和图(b)中的贸易最优匹配。在两个图中，灰色区域的消费者被排除在外，因为他们对两种产品的估值都低于

均衡价格。蓝色和黄色区域的消费者分别只能使用企业1和企业2的产品，而薄荷绿区域的消费者仍可使用两种产品。在图(a)中，薄荷绿区域与蓝色、黄色区域之间的曲线边界，展示了沿每条估值差相等的对角线形成的临界值结构。在图(b)中，相应的边界则是直线。这两种政策都不会排除那些在由此产生的均衡价格下原本会购买产品的消费者。社会最优匹配形成对称均衡价格 $p^S \approx 0.311$ ，并使社会剩余相较于完全匹配提高约3.35%。贸易最优匹配形成 $p^T = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$，使交易量相较于完全匹配提高约12.0%。

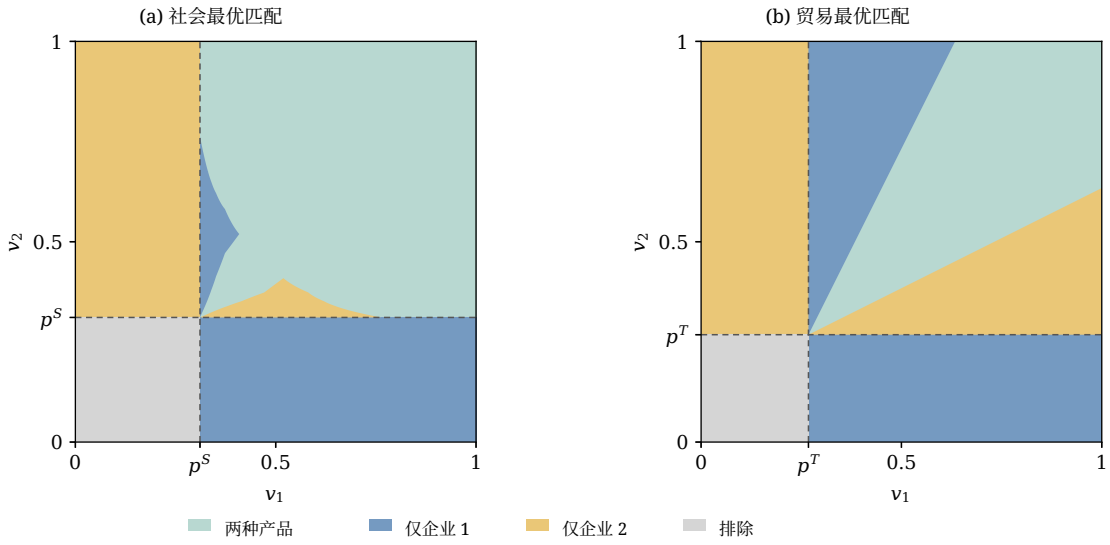


图5：社会最优匹配与贸易最优匹配

迄今为止，我一直在考虑一个选择匹配政策以实现自身目标的平台。另一种解读是：单个消费者（而非连续统消费者）在其估值实现之前，预先承诺采取一种依赖于估值的注意力或认知政策，以限制自己未来的选择。这种承诺可以促使企业提供更低的价格，从而使消费者受益。本文刻画了最优承诺政策。

全文中，匹配与企业的价格相互独立。如果平台能够根据标示价格自由决定使用权，那么在企业成本已知时，它就可以实现边际成本定价：只需在两家企业都按边际成本定价时授予完全访问权，并彻底排除任何偏离的企业。而当边际成本是私有信息时，

允许匹配取决于价格则会从根本上改变问题。这一点在垄断情形下尤其明显：平台实际上向企业提供一系列价格—访问政策组合供其选择，从而将问题转化为筛选问题。本文模型则着重考察另一种机制：平台如何利用排除和错配影响企业的价格，进而提高消费者剩余、社会剩余和交易量，甚至为消费者带来事前帕累托改进。

这一分析可以视为一项规范性研究：仁慈的平台旨在最大化消费者剩余、社会剩余或交易量。收益最大化平台是否会追求类似目标，取决于其收入来源。例如，消费者访问费可以让平台攫取消费者剩余的预期值，按卖家收入收取的佣金可以攫取部分生产者剩余，而交易带来的附带收入则能鼓励更多交易。平台间竞争也可能促使平台提高消费者剩余，以吸引并留住消费者。因此，收益最大化平台可能会发现，出于与仁慈的平台相同的原因限制产品访问权也有利可图。

相关文献。本文对一类文献作出贡献：这类文献表明，向消费者提供更多信息或更好的产品选择未必会让消费者受益，因为企业会通过调整价格作出回应。Armstrong 和 Zhou (2022年指出，消费者最优信息可能促使消费者购买较不偏好的产品，从而加剧价格竞争。Armstrong 和 Vickers (2022年研究了消费者考虑模式如何影响竞争，并指出认知度提高未必有利于消费者。Condorelli 和 Szentes(2026年刻画了买方最优匹配；在这种匹配中，扭曲匹配可能通过影响匹配后价格使买方受益。我的分析建立在这些见解之上，但研究的是一个不同的问题：当企业收取统一价格时，平台应如何最优地设计消费者的考虑集。我表明，将消费者匹配至较不偏好的产品可以加剧竞争，尽管这会使这些消费者被个别企业所锁定；此外，我还刻画了由此产生的最优匹配政策。

相关文献考察了平台如何通过根据价格决定产品曝光程度来影响卖家的定价激励。Dinerstein、Einav、Levin 和 Sundaresan （2018年）研究了帮助消费者发现偏好产品与鼓励卖家降低价格之间的权衡。Ichihashi 和 Smolin（2026年）

研究了拥有私人信息的卖家情形下的最优价格依存型推荐，并建立了与机制设计的联系。相比之下，本文中的平台承诺不受价格影响地进行匹配。平台并非通过以更高的产品曝光奖励价格下降来影响企业的定价激励，而是通过塑造企业所面临的需求来实现这一点。

改善消费者福利的另一种方法，是设计提供给企业的信息，从而促进价格歧视。Bergemann 、 Brooks 和 Morris(2015 年) 刻画了通过垄断市场细分可实现的剩余结果，而 Ali、Lewis 和 Vasserman(2023年) 则表明，在个性化定价下，自愿披露如何使消费者受益。 Elliott、Galeotti、Koh 和 Li(2026年) 刻画了价格竞争下的信息设计，并证明，当信息可以自由设计时，限制产品访问权无法进一步改善消费者最优结果。本文转而研究统一定价，即企业无法针对个体消费者量身定制定价。在这种情形下，限制产品访问权为改善消费者福利提供了一种不同的工具。

垄断分析与Roesler 和 Szentes (2017年) 以及 Condorelli 和 Szentes(2020年) 有关；他们的最优设计分别通过消费者学习和对估值分布的选择产生单位弹性需求。本文中，估值分布是固定的，消费者在获得使用权后能够准确获知自己的估值。平台只能排除消费者，但消费者最优排除政策也能在一定价格区间内产生单位弹性需求。

2 垄断

2.1 环境

垄断者以零边际成本向消费者质量为 1 的消费者销售一种产品，每位消费者最多需求一个单位。消费者的估值 v 服从定义在 $[\underline{v}, \bar{v}] \subseteq \mathbb{R}_+$上的累积分布函数 F 。令 f 表示其密度函数。一位估值为 v 且以价格 p 购买的消费者获得效用 $v - p$；否则，她获得零效用。

我们引入一个控制消费者使用产品权限的平台。在垄断者设定价格之前，平台公开承诺一项可测的匹配政策 $\phi : [\underline{v}, \bar{v}] \to [0, 1]$，其中 $\phi(v)$ 是估值为

–

v 的消费者获得使用权的概率。垄断者观察匹配政策，但不知道各个消费者的估值，并选择统一价格。随后，平台观察消费者的估值并实施匹配政策。获得使用权的消费者会得知自己的估值，并决定是否购买；被排除的消费者无法购买该产品，且收益为零。

给定匹配政策 ϕ，价格为 p 时的需求为 $D_\phi(p) = \int_p^{\bar{v}} \phi(v)\, dF(v)$，垄断利润为 $\Pi_\phi(p) = pD_\phi(p)$。最优价格使 Π_ϕ 最大化。当存在多个最优价格时，我们在最低的最优价格下评估匹配。[6]

估值为 v 的消费者的期中消费者剩余为 $u(v;\phi, p) = \phi(v)(v-p)_+$。总消费者剩余为

$$CS(\phi, p) = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} u(v;\phi,p)\, dF(v).$$

社会剩余为 $SS(\phi, p) = \int_p^{\bar{v}} v\phi(v)\, dF(v)$，而交易量则简单地为 $D_\phi(p)$。

在完全匹配下，记为 ϕ^{full}，每位消费者都能使用该产品，因此对每个 v，都有 $\phi^{\text{full}}(v) = 1$。令 $D(p) = 1 - F(p)$ 表示完全匹配需求，$\Pi^F(p) = pD(p)$ 表示相应的垄断利润。用 p^M 表示完全匹配下利润最大化价格中的最低价格。

平台选择匹配政策，以影响垄断者的价格及由此产生的市场结果。我们首先考察，相较于完全匹配，限制使用权是否能够提高消费者剩余。

2.2 排除可以使消费者受益

在价格固定时，排除消费者不可能增加消费者剩余。但排除会改变垄断者的需求，并可能促使其降低价格，从而使继续购买的消费者受益。这种价格效应能否超过排除导致的消费者剩余损失?

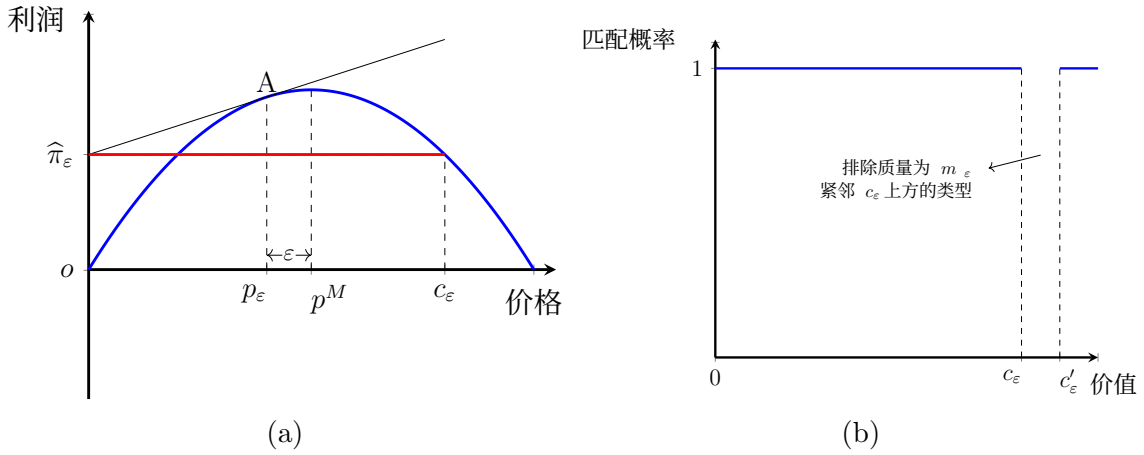
假设1 (正则垄断基准)。 密度函数 f 在其支撑集内部连续可微且为正。完全匹配下的垄断利润 Π^F 有唯一的最大化点 $p^M > v$，且 $(\Pi^F)''(p^M) < 0$。

[6] 由于 F 是无原子的且具有紧支撑集，Π_ϕ 对每个匹配 ϕ 都在 $[0, \bar{v}]$ 上连续。因此，其最大化点集合非空且紧，从而存在一个最低的最优价格。

如果在我们的最低最优价格约定下，某种匹配带来的消费者剩余严格高于完全匹配，那么完全匹配就是可改进的。

命题1。 在假设 *1*下，完全匹配可以改进。

我通过构造一种优于完全匹配的匹配方式来证明命题 1 。图 6 展示了完全匹配利润函数处处严格凹时的构造。固定一个较小的 $\varepsilon > 0$，并考虑诱导价格 $p_\varepsilon = p^M - \varepsilon$。在图(a)中，与完全匹配利润曲线在 p_ε 处相切的直线斜率为正 $m_\varepsilon = (\Pi^F)'(p_\varepsilon$，纵截距为 $\widehat{\pi}_\varepsilon$。令 $c_\varepsilon > p^M$ 为完全匹配利润曲线下降至 $\widehat{\pi}_\varepsilon$时对应的价格。如图(b)所示，平台排除估值落在区间 $[c_\varepsilon, c'_\varepsilon]$内的消费者，并选择该区间使排除的消费者质量等于 m_ε。



(a) (b)

图6：构造一种能够降低垄断价格的匹配。图(a)利用完全匹配利润曲线在 $p^M - \varepsilon$ 处的切线确定排除阈值。图 (b) 排除紧邻该临界值上方、质量为 m_ε 的消费者。

为什么这种排除会导致价格下降？对于任意价格 $q < c_\varepsilon$，所有被排除的消费者原本都会购买，因此垄断者的利润变为 $\Pi^F(q) - q m_\varepsilon$。由凹性可知，图(a)中的切线位于完全匹配利润曲线之上。从这一上界中减去 $q m_\varepsilon$，可知垄断者的利润不会超过 $\widehat{\pi}_\varepsilon$，而在 p_ε处可达到该利润。高于 c_ε 的价格也无利可图，因为排除无法提高利润，且完全匹配利润已经低于 $\widehat{\pi}_\varepsilon$。因此，在所构造的匹配下， p_ε 是最优的。附录A.1表明，在命题1的较弱假设下，同样的构造也成立。

价格下降使仍保有使用权的消费者受益；而被排除的消费者损失的消费者剩余很少，因为当 ε趋于零时，他们的估值趋近于 p^M 。价格下降带来的收益关于 ε是一阶量，而排除造成的损失为 $o(\varepsilon)$。因此，当 ε足够小时，总消费者剩余严格增加。

该命题表明，完全匹配未必能使消费者剩余最大化。接下来，我们探讨如何最优地选择排除政策。

2.3 消费者最优匹配与需求保持原则

命题 1表明，排除可以增加消费者剩余，但并未告诉我们如何最优地选择排除政策。我们通过将这一问题拆分为两个决策来着手解决：给垄断者留下多少利润，以及排除哪些消费者。

如果一种匹配能使总消费者剩余最大化，且每种匹配均按其最低最优垄断价格进行评估，则该匹配称为**消费者最优**匹配。

令 $\bar{\pi} = \max_p \Pi^F(p)$ 表示完全匹配下的垄断利润。固定一个利润水平 $\pi \in (0, \bar{\pi}]$。如果一种匹配在每个价格下诱发的需求都不低于任何其他能为垄断者留下相同最大利润 π 的匹配所诱发的需求，则称该匹配在 π 处**需求保持**。

以下结果表明，需求保持匹配总是存在，并且在为垄断者留下相同利润的匹配中，该匹配能使消费者剩余最大化。

定理1（需求保持匹配）。对于每个 $\pi \in (0, \bar{\pi}]$，都存在一个需求保持匹配 ϕ_π，它在所有使垄断者获得 π 利润的匹配中使消费者剩余最大。因此，消费者最优匹配存在，并且可以选择为需求保持匹配。

我们通过图7说明这一构造，并为便于说明，假设完全匹配需求 D 是凹函数。附录 A.2 证明该定理无需这一假设。

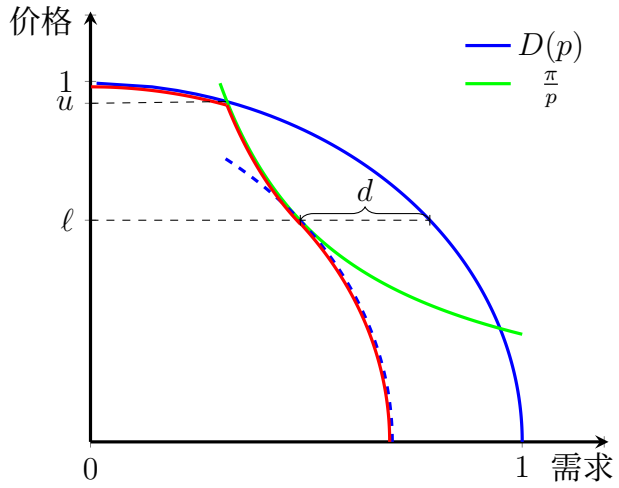


图7：构造需求保持匹配。红色曲线是那些使垄断者利润 π的匹配所能达到的需求逐点上界。它结合了完全匹配需求、等收入曲线 π/p，以及完全匹配需求的水平平移。

固定 $\pi \in (0, \bar{\pi})$ 。图 7中，纵轴表示价格，横轴表示数量。蓝色曲线表示完全匹配需求 $D(p)$，绿色曲线则表示 π/p。

考虑任意一种使垄断者利润 π的匹配。其诱导需求不可能超过完全匹配需求，因为平台只能排除消费者。此外，在任何价格 $p > 0$下，诱导需求都不可能超过 π/p ，否则垄断者就能获得高于 π的利润。因此，诱导需求曲线必须位于蓝色曲线和绿色曲线的左侧。

然而，这两个上界还不够，因为排除会影响多个价格下的需求。价格为 p 时，完全匹配需求与诱导需求之间的水平距离，衡量的是估值高于p的被排除消费者的数量：

$$D(p) - D_\phi(p) = \int_p^{\bar{v}} [1 - \phi(v)]\, dF(v).$$

随着价格下降，这一距离不可能缩小，因为降低价格只会使更多估值高于该价格的消费者加入群体。

图7 展示了这一限制如何确定最大可行需求曲线。从蓝色曲线与绿色曲线的上方交点 u 开始，随着价格下降，两条曲线之间的水平间距不断增大，并在 d 处达到最大值

价格 ℓ。因此，任何使垄断者利润达到 π 的匹配，都必须排除估值超过 ℓ 的消费者，且被排除的消费者数量至少为 d。同样的排除还必须使每一个更低价格下的需求至少减少 d。

因此，在 ℓ以下，诱导需求不能超过蓝色虚线曲线；该曲线是将完全匹配需求水平向左平移 d得到的。将这一限制与原有的两个界结合起来，便得到图7中的红色曲线：在 u以上，它与完全匹配需求重合；在 ℓ 与 u之间，它沿着绿色曲线；在 ℓ以下，它沿着蓝色虚线曲线。

关键观察是，红色曲线可以通过单一匹配实现。为说明这一点，请注意，诱导需求曲线的斜率决定了向每种估值类型授予使用权的概率。红色曲线的斜率在（ℓ, u）区间之外与完全匹配需求的斜率一致，因此平台向这些消费者提供完全访问。在 ℓ与 u之间，它诱导出需求 π/p，这要求访问概率为

$$\phi_\pi(v) = \frac{\pi}{v^2 f(v)}, \qquad \ell < v < u.$$

由于 D 的凹性，该概率介于零和一之间。因此，平台部分排除具有中间估值的消费者，同时保留其余类型的完全访问。

按照构造，诱导需求曲线在 ℓ 与 u之间与 π/p 重合，因此该区间内的每个价格都能带来 π的垄断利润。没有其他价格能够带来更高利润。根据我们的最低最优价格约定，垄断者收取 ℓ。

最后，为什么这种匹配能在利润 π下使消费者剩余最大化 p？ 价格为 $\int_p^{\bar{v}} D_\phi(v)$ dv时，消费者剩余为。需求保持匹配诱导出逐点最大的需求。此外，如图 π所示，任何使垄断者获得利润 ℓ的匹配，其最优价格都不可能低于7 。在任意价格 $p < \ell$下，即使可行需求达到最大，也仍严格低于 π/p，因此垄断者无法在该价格下获得利润 π 。因此，所构造的匹配既实现了可能的最低最优价格，又在每个价格下诱导出最大的需求，从而使消费者剩余最大化。

附录A.2 证明，对于一般的价值分布，即使不假设凹性，也存在需求保持匹配。因此，平台的问题可归结为选择利润水平 π，而无需在所有可能的排斥策略中进行搜索。

2.4 中期帕累托改进与容量约束下的排除

到目前为止，我们已经证明，排除可以增加总消费者剩余，但可能使被排除的消费者处境变差。平台在利用排除来降低垄断价格时，是否必定会有一些消费者受损？答案是否定的。通过随机化排除，平台可以使每种消费者类型的中期剩余弱增，并使某些类型的中期剩余严格增加。

~如果几乎所有消费者类型在匹配 ϕ下获得的中期剩余都不低于在另一匹配 ϕ 下的中期剩余 ϕ ，且有正测度的类型获得严格更高的中期剩余，我们就称匹配 ϕ 在中期帕累托意义上改进了另一匹配 ϕ 。如果存在另一种匹配在中期帕累托意义上改进了某一匹配，我们就称该匹配可在中期帕累托意义上改进。

命题 2. 在假设*1*成立时，完全匹配可在中期帕累托意义上改进 .

为证明这一结果，我们对图6中的构造稍作修改。在该图中，平台将一小部分消费者完全排除，以促使垄断者降低价格。但垄断者的定价激励取决于临界值c_ε以上被排除消费者的总量，而不取决于是否确定排除某些特定消费者。因此，我们可以将相同的排除总量分摊到更多消费者身上，让每位消费者都有较小的概率被排除。

估值为 $v > p^M$ 的消费者在完全匹配下获得剩余 $v - p^M$ 。如果价格降至 $p_\varepsilon = p^M - \varepsilon$，她的期望剩余就变为 $\phi_\varepsilon(v)(v - p_\varepsilon)$。因此，要保障她的中期剩余，必须满足

$$v - p^M \leq \phi_\varepsilon(v)(v - p_\varepsilon),$$

或者，等价地，

$$1 - \phi_\varepsilon(v) \leq \frac{\varepsilon}{v - p_\varepsilon}.$$

估值接近原垄断价格的消费者可以容忍相对较高的排除概率，因为失去使用权所牺牲的剩余很少。附录A.1表明，这些个体上限留有足够空间，可以排除所需数量的消费者，从而促使价格降低。事实上，排除概率可以设定为严格低于这些上限，因此，在完全匹配下购买的每位消费者，其预期收益都严格增加。

因此，平台可以提高总消费者剩余，同时不使任何消费者类型的处境变差，尽管有些消费者偶尔会失去对产品的使用权。[7]

更一般地，假设平台希望在保证每位消费者至少获得指定水平的中期剩余的同时，使消费者总剩余最大化。它应如何设计匹配？令 $h(v) \geq 0$ 表示保证给类型为 v 的消费者的中期剩余。这可以是她在任何基准匹配下的中期剩余，例如完全匹配，也可以是她从外部选项中获得的收益。我们考虑以下问题

$$\begin{aligned} \max_{\phi,p} \quad & CS(\phi,p) \\ \text{subject to} \quad & p \in \arg\max_{q} \Pi_{\phi}(q), \\ & u(v;\phi,p) \geq h(v) \quad \text{for almost every } v. \end{aligned} \tag{1}$$

关键在于，中期福利保证会转化为对排除的约束。为此，先固定一个目标垄断价格 p。估值为$v > p$ 的消费者获得的中期剩余为 $\phi(v)(v-p)$。要保证她至少获得 $h(v)$，就必须满足

$$\phi(v)(v-p) \geq h(v),$$

或者等价地，

$$1 - \phi(v) \leq 1 - \frac{h(v)}{v-p}.$$

因此，保护消费者的中期剩余会对其排除概率设定一个上界。要使这成为可能，我们必须有 $h(v) \leq (v-p)_+$ 几乎处处成立v；否则，即使以价格 p 提供完全访问，某些消费者也无法获得其保证剩余。只要这一条件成立，就定义

$$k_{h,p}(v) = \begin{cases} 1 - \dfrac{h(v)}{v-p}, & v > p, \\ 1, & v \leq p. \end{cases}$$

[7] Haghpanah 和 Siegel(2023年) 研究了多产品垄断市场中的帕累托改进型细分，允许不同的消费者群体面对不同的价格和产品菜单。此处，垄断者收取统一价格，并通过限制消费者的使用权来实现帕累托改进。

那么，中期保障等价于要求每种类型 v 的排除概率不高于 $k_{h,\ p}(v)$。低于 p 的消费者可以任意排除，因为他们在目标价格下获得的剩余为零，不过这种排除可能会影响垄断者降低价格的激励。记

$$K_{h,p}(q) = \int_q^{\bar{v}} k_{h,p}(v)\, dF(v).$$

该函数衡量在每个价格之上符合排除条件的消费者质量，同时考虑他们各自的福利保证。因此，在目标价格固定时，问题（1）就变成了一个排除容量有限的垄断问题。接下来，我们求解这个更一般的问题；它也将在双寡头分析中出现。

2.4.1 容量约束垄断问题

考虑与第 2.1 节相同的垄断环境。一些消费者符合排除条件； $K(q)$ 表示这些符合条件的消费者在 q 处的需求。假设K 连续， $K(\bar{v}) = 0$，并且

$$0 \le K(a) - K(b) \le D(a) - D(b) \qquad (0 \le a < b \le \bar{v}).$$

给定目标价格 p，容量约束垄断问题，记作 CM(D, K, p)，是指选择每位符合排除条件的消费者的排除概率，以使消费者剩余最大化，同时满足 p 是垄断者的最优价格。该问题未必可行：可能不存在一种排除符合条件消费者的方式，使得 p 成为最优垄断价格。只要问题可行，就存在一个解（附录 A.2.1）。

我们通过首先放松诱导垄断价格为D、 K、 p的要求来求解 CM(p)。松弛问题涉及两个选择：留给垄断者多少利润，以及排除哪些消费者。我们首先固定垄断利润并解决后一个问题，将第2.3节的需求保持原则加以扩展。然后，我们回到目标价格问题，通过选择与 p一致的最高可行利润来求解该问题。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$用 D 表示排除后的需求，用 $M = D - D$ 表示由此产生的需求损失。

^引理1（容量约束下的可行需求）。**</style}需求曲线 可由容量可行的排除规则诱导，当且仅当**（$\bar{v}$）$= 0$ 且

$$0 \le M(a) - M(b) \le K(a) - K(b) \qquad (0 \le a < b \le \bar{v}). \tag{2}$$

第一个不等式表示，需求损失只会随着价格下降而增加；第二个不等式表示，需求损失的增长速度不会超过排除容量。特别地，可行需求介于 $D - K$ 和 D 之间。

若某容量可行的排除规则所诱导的需求在每个点上都弱高于所有使垄断者获得相同最大利润 π 的容量可行排除规则，则该规则在利润为 π 时是需求保持型的。定义

$$\underline{\pi}_K := \max_{q \in [0,\bar{v}]} q[D(q) - K(q)].$$

垄断者在最大排除下的最大利润为 π_{K}，在无排斥下为 $\bar{\pi}$。通过将最大排除连续缩放至无排斥，可以实现介于这两个界限之间的每一个利润水平。

命题 3（容量约束下的需求保持）。对于每个 $\pi \in [\underline{\pi}_K, \bar{\pi}]$ 且满足 $\pi > 0$ 的情形，都存在一个需求保持型排除规则$\rho_{\pi,\, K}$ 使其在所有令垄断者利润为 π 的容量可行排除规则中最大化消费者剩余。

证明见附录 A.2。下面解释其构造。为了使最大利润低于 π，价格为 q 时的需求不能超过 π/q。因此，在 $q > 0$ 处所需的需求损失至少为

$$g_\pi(q) = [D(q) - \pi/q]_+,$$

其中 $g_\pi(0) = 0$。

现在固定一个价格 q，在该价格下要求产生需求损失 $g_\pi(q)$，并考察这对另一个价格 c下的需求损失意味着什么。如果 $c < q$，那么随着价格下降，需求损失不可能减少，因此$M(c) \ge g_\pi(q)$。如果 $c > q$，那么至多有 $K(q) - K(c)$ 个估值介于 q 和 c之间的消费者有资格被排除。因此

$$M(c) + K(q) - K(c) \ge g_\pi(q).$$

因此，每个价格 q 都会对每个价格 c下的需求损失施加一个下界。结合这两种情况，该下界为 $g_\pi(q) - [K(q) - K(c)]_+$。由于所有价格 q 所产生的要求必须同时成立，需求损失必须位于它们的逐点包络之上：

$$M(D, K, \pi)(c) = \max_{q \in [0, \bar{v}]} \{g_\pi(q) - [K(q) - K(c)]_+\}. \tag{3}$$

我们将参数 D， K， π 写出，以强调需求损失包络对这些原始参数的依赖关系。

关键结果是，这个包络本身是可行的：同一条排除规则可以在每个价格处实现它。该规则所诱导的需求为 $D_{\pi,\ K} = D - M(D,\ K,\ \pi)$。为什么这一构造也能在利润为 π 时使消费者剩余最大化？考虑任意一个容量可行的排除规则，其最大利润为 π，并令 p 为其最低的最优价格。由于构造出的规则具有需求保持性质，其在 p处的需求至少与之相同。因此，该规则在 p 处的利润至少为 π。但其最大利润恰好为 π，所以它在p 处的利润必须等于 π，而 p 在构造出的规则下也同样是最优价格。在同一价格下，构造出的规则在高于 p 的每个价格处的需求都至少与之相同，因此消费者剩余也至少与之相同。在其最低的最优价格处考察该规则，只会进一步提高消费者剩余。

现在我们回到容量约束垄断问题 $\mathrm{CM}(D,\ K,\ p)$，其中目标价格 p 是固定的。命题3 表明，我们可以通过选择适当的利润水平来求解该问题，从而诱导出 p。

推论 1 (固定价格下的最优排除)。 只要$\mathrm{CM}(D, K, p)$ 可行，在与 p 兼容的最高利润下，需求保持型排除规则即可$\mathrm{CM}(D, K, p)$。

附录 A.2.1证明了该推论，刻画了问题何时可行，并给出了最高可行利润的显式公式。因此，对于任意可行的目标价格，都可以利用需求保持包络构造最优排除规则。然而，仅求解固定价格问题还不足以解决我们所关注的具有中期福利保证的问题：我们还必须对可行的目标价格进行最优选择。

2.4.2 福利保证与中期帕累托效率

现在回到问题（1）。目标价格 p要具有可行性，必须满足两个条件。首先，对于几乎每一个 v，福利保证必须满足 $h(v) \leq (v-p)_+$；否则，即使拥有完全使用权，一些消费者也无法获得其保证的剩余。其次，给定由这些福利保证确定的排除容量 $K_{h,\,p}$ 问题 CM$(D,\ K_{h,\,p},\ p)$ 必须是可行的。令 $\mathcal{P}(h)$ 表示同时满足这两个条件的目标价格集合。

推论 2 （具有中期福利保证的最优匹配）。 当且仅当 $\mathcal{P}$（h）非空时，福利保证 h 才是可行的。只要其可行，就存在 $p^o \in \mathcal{P}$（h），使得 $\mathrm{CM}(D,K_{h,p^o},p^o)$ 的解在满足 h的条件下最大化总消费者剩余。

推论 2 将原问题化简为对可行目标价格的优化。对于每个目标价格 p，中期福利保证决定排除容量 $K_{h,\,p}$，而推论 1 则确定相容的最高垄断利润π_p。相应的需求保持匹配在该价格下使总消费者剩余最大化。因此，平台只需选择能带来最高消费者剩余的目标价格，而最优匹配则由需求保持构造确定。

前述刻画也使我们能够判断给定的匹配是否为中期帕累托有效。若不存在其他匹配能使其在中期帕累托意义上得到改进，则该匹配对消费者而言是中期帕累托有效的~。考虑任意匹配 ϕ，令 $\widetilde{p}$ 表~示其最低诱导垄断价格，并定义 $h^{\phi}(v) = u(v;\phi,\ \widetilde{p})$。要判断~ ϕ 是否中期帕累托有效，我们可以遍历所有其他匹配政策，考察是否存在某种政策能够使部分消费者受益而不损害任何人。以下结果表明，无须进行这种考察。

~推论3 (中期帕累托效率)。 **</style}匹配 对消费者而言是中期帕累托有效的，当且仅当对于每个 (**h^{ϕ})，$\mathrm{CM}(D,K_{h^{\tilde{\phi}},p},p)$~的解所产生的消费者剩余弱低于 $CS(\phi,\widetilde{p})$。

如果 CM$(D,K_{h^{\tilde{\phi}},p},p$ 的解在某个 $p \in \mathcal{P}(h^{\phi})$ 下产生的消费者剩余严格高于~基准，则它构成一项事前帕累托改进。否则，基准就是中期帕累托有效的。因此，我们无需搜索所有可能的匹配政策，只需将基准与每个可行目标价格所对应的需求保持匹配进行比较。

2.5 排斥的福利后果

排除可以增加总消费者剩余，命题 2 表明，排除甚至可以为消费者带来事前帕累托改进。然而，这些益处是以牺牲效率为代价的。平台通过限制特定消费者的使用权来降低垄断价格，这可能会阻止互利交易。在对数凹性的条件下，交易量的减少必然超过低价所带来的额外购买量。

命题4 (排斥的福利后果**)**。 假设估值密度f 具有对数凹性。完全匹配能使社会剩余和交易量最大化。此外，任何相较于完全匹配严格提高总消费者剩余的匹配，都会严格降低社会剩余和交易量。

这一结果可由诱导垄断价格处的需求上界推出。如果某种匹配 ϕ 诱导出价格 p_ϕ，垄断者不稍微提高价格的激励意味着 $D_\phi(p_\phi) \leq p_\phi f(p_\phi)$。在对数凹性条件下，$pf(p)$在低于完全匹配时垄断价格 p^M的估值支持集上严格递增。因此，只要排除诱导出更低的价格，交易量就仍严格低于 $D(p^M)$。诱导出更高价格的匹配也无法提高交易量。由于完全匹配服务于估值最高的消费者，它也能使社会剩余最大化。

因此，尽管排除可以通过降低价格使消费者受益，但在对数凹性条件下，它无法提高垄断市场的效率。正如我们将在双寡头分析中看到的，当平台只能将消费者与其较不偏好的产品进行匹配，而非简单地排除他们时，这一结论会发生变化。

3 双寡头

3.1 环境

现在考虑两家企业， $N = \{1, 2\}$，以零边际成本向总量为一的单位需求消费者供应差异化产品。每位消费者的估值为 $v = (v_1, v_2)$，其取自一个对称的、对数凹的分布 μ，该分布具有连续可微的密度函数 f，并且在一个具有正面积的紧致、凸、对称

支撑集 $V \subseteq \mathbb{R}^2_+$ 的内部为正。记 $\bar{v} = \max_{v \in V} \max_i v_i$。企业知道该分布，但不知道个体消费者的估值。

在选择价格之前，平台公开承诺采用一项可测的匹配规则

$$\phi : V \longrightarrow \Delta(2^N),$$

其中，$\phi(S \mid v)$表示向估值为 v的消费者展示恰好包含 S 中产品的概率。企业观察到匹配规则后，同时选择非负的统一价格。随后，消费者估值实现，平台观察到这些估值并执行匹配规则。消费者只能发现展示给自己的产品，并准确获知其价值。每位消费者从展示的产品中选择一种购买。消费者也可以选择什么都不买，并获得零收益。因此，$S = \varnothing$ 表示该消费者被排除在交易之外。完全匹配记为 ϕ^{full}，它向每位消费者展示两种产品。在价格$\mathbf{p} = (p_1, p_2)$下，总消费者剩余为

$$CS(\phi, \mathbf{p}) = \int_V \sum_{S \subseteq N} \phi(S \mid v) \max \left\{ 0, \max_{i \in S} (v_i - p_i) \right\} d\mu(v),$$

其中，省略了对 $S = \varnothing$ 取内层最大值。

我们将讨论范围限定在对称匹配和对称纯策略价格均衡上。令 σ 交换企业身份和估值坐标。若几乎处处有 $\phi(S \mid v) = \phi(\sigma(S) \mid \sigma(v))$，则匹配对称。给定匹配 ϕ，企业i以 q 定价、其竞争对手 j 以 r 定价时的需求为

$$\begin{aligned} D_i(q, r \mid \phi) = & \int_V \phi(\{i\} \mid v) \mathbf{1}\{v_i \geq q\} \, d\mu(v) \\ & + \int_V \phi(\{1,2\} \mid v) \mathbf{1}\{v_i - q \geq \max(0, v_j - r)\} \, d\mu(v). \end{aligned}$$

其利润为 $\Pi_i(q, \ r \mid \phi) = qD_i(q, \ r \mid \phi)$。若匹配 ϕ 支持 $(p, \ p)$，则该价格构成对称均衡，当且仅当

$$\Pi_i(p, p \mid \phi) \geq \Pi_i(q, p \mid \phi) \qquad \text{for every } q \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

令 p^* 表示完全匹配下最小的对称均衡价格，其存在性由对数凹性保证。对于每个 $p \geq 0$，令 $\mathcal{M}(p)$ 表示支持 $(p,\ p)$ 作为均衡的对称匹配。

3.2 错配可以优于完全匹配

在垄断情况下，平台可以通过排除消费者来降低价格，但在对数凹性条件下，这必然会减少社会剩余和交易量。竞争能否避免这一权衡？可以。平台不必排除消费者，而是可以只向其中一部分消费者展示他们较不喜欢的产品。这会改变企业顾客的构成，并可能降低价格上涨的吸引力，尽管这会降低部分消费者的匹配质量。

命题 5。 假设 $(p^*,\ p^*) \in$ 属于 V。[8] 对于每一个 $p < p^*$ 足够接近p^*的，存在一种无排除的对称匹配，使得$(p,\ p)$ 成为均衡；相较于完全匹配，该匹配为消费者带来事前帕累托改进，并严格提高社会剩余和交易量。

引言中的图3 阐释了这一直觉。通过对选定的消费者进行对称错配，平台在不改变任一企业目标价格下销售额的情况下，用对价格上涨更敏感的消费者替代对价格上涨不那么敏感的消费者。尽管这些消费者会被个别企业锁定，但他们在价格上涨后停止购买的可能性更高。这会降低向上价格偏离的吸引力，并使平台能够维持较低的均衡价格。

但是，价格下降能否补偿消费者因匹配不当而遭受的损失？假设均衡价格从 p^* 降至 $p = p^* - \varepsilon$，且被选中的消费者有 ρ 的概率匹配不当。若她的偏好差异为 d，则她在匹配质量上的预期损失为 ρd，而价格下降为她节省了 ε。因此，只要 $\rho d < \varepsilon$，她的境况就会更好。附录B.1 中的证明构造了一种满足这一条件、同时又能阻止所有单边价格偏离的匹配。这样，每种消费者类型的境况都至少不会变差，其中一些类型的境况会严格变好。

此外，每个错配的消费者都会继续以较低的价格购买。因此，错配在 p 处维持了交易，而价格下降还会带来额外的

[8]该条件排除了消费者估值有正下界、且消费者几乎同质的伯特兰竞争环境。在这类环境中，价格竞争已经会将完全匹配时的价格压低至接近零，因而消费者难以从进一步降价中获得更多收益。

消费者进入市场。因此，相较于完全匹配，交易量严格增加。最后，平台只会错配少量对两种产品估值相近的消费者。由此造成的匹配质量损失，相对于较低价格诱导额外交易所带来的社会剩余一阶增益，可以变得任意小。因此，社会剩余也会增加。

3.3 消费者最优匹配

命题 5 表明，错配可能优于完全匹配。但以消费者为导向的平台应如何选择错配或排除哪些消费者？我们通过先固定一个对称均衡价格 p 并刻画支持该价格的消费者最优匹配来处理这一问题。然后，我们再对均衡价格进行优化。

匹配 $\phi^* \in \mathcal{M}(p)$ 若在 $\phi \in \mathcal{M}(p)$ 上最大化 $CS(\phi,(p,p))$，则称为对称消费者最优支持匹配 (p,p)。

给定一个对称确定性匹配 ϕ，令 $V_i(\phi) = \{v : \phi(\{i\} \mid v) = 1\}$表示仅看到企业 i 的产品的消费者，并令 $K_i(q \mid \phi) = \int_{\tilde{V}_i(\phi)} \mathbf{1}\{v_i \geq q\}\, d\mu(v)$ 表示在 q 处这些消费者带来的需求。当其竞争对手收取 p 时，企业 i 的总需求为 $D_i(q,p \mid \phi)$，定义见第3.1节。

定理 2 (对称消费者最优匹配)。 对于每个 $0 < p < p^*$，都存在一个对称消费者最优匹配，支撑集为(p,p) ，可通过以下两个步骤构造。

1. 省略低估值产品，并按临界值错配。 从完全匹配开始。当且仅当 $v_i < p$时，产品 i 会从类型为-v 的消费者的考虑集中省略。存在一个临界值 τ^*：$[0, \bar{v} - p] \to [p, \bar{v}]$，使得当消费者满足 $v_i > v_j > p$ 时，只有在 $v_j < \tau^*(v_i - v_j)$ 的情况下才与企业 j 匹配；否则，她仍会同时考虑两家企业。将这种确定性匹配记为 ϕ。

2. 排除。 问题 $\mathrm{CM}(D_i(\cdot, p \mid \phi)\ K_i(\cdot \mid \phi)\ p)$ 是可行的。令 ρ^* 为一个解。对于 $i = 1,2$，以概率 $\rho^*(v_i)$排除每个 $v \in V_i(\phi)$ 。

消费者最优匹配也可以选择为确定性的。给定$v_i = x$，可以通过对另一项估值设定临界值，排除 $V_i(\phi)$中的任意所需比例的消费者。

定理2 大幅简化了平台的问题。任意对称匹配都会在每个估值对上，为四种考虑集指定相应的概率。相较之下，对于任意固定的 $p < p^*$，可以通过单个阈值函数构造对称消费者最优匹配，随后应用第 2 节提出的需求保持型排除规则。

临界值具有简单的经济学解释。对于偏好差异相同的消费者而言，错配会导致相同的匹配质量损失。但估值较低的消费者对价格上涨更加敏感。因此，在每条估值差相等的对角线上，平台会将估值较低的消费者错配，而估值较高的消费者仍可使用两种产品。另一个推论是，当两种产品的估值都高于 p 时，没有必要只向消费者展示其偏好产品。尽管这种分配可以在目标价格下不损害消费者剩余的情况下，帮助阻止向下价格偏离，但始终可以在不采用这种分配的情况下实现最优值。

第二步利用垄断分析。一旦确定阈值匹配，任何额外的排除都只适用于仅被展示一种产品的消费者。排除这些消费者会改变其所属企业的需求，但不会影响竞争对手的需求。因此，平台可以针对每家企业分别求解容量约束垄断问题，采用第 2 节所刻画的需求保持型排除规则。

证明定理 2。固定 $0 < p < p^*$。考虑原始问题的一个松弛版本，其中忽略向下偏离约束，其他部分保持不变。取该松弛问题的任意一个最优值。根据附录B.2，最优值存在。我们首先对其进行规范化。移除估值低于p的产品，并将对估值均高于 p的消费者的仅偏好分配改为全面考虑。这些变化在竞争对手也收取p时，使 p 处的需求保持不变，使消费者剩余保持在（p，p），并弱化向上偏离带来的需求。因此，所得匹配记为 ϕ^R，仍然是松弛问题的一个最优值。

引理2。 在 ϕ^R下，两个企业均不存在有利可图的向下偏离。

引理 2 证明背后的思路如下。我们证明，对数凹性限制了降价所带来的需求增量。因此，如果竞争对手也收取 p，则在 p处的需求高于某一特定水平时，降价不可能带来利润。随后我们证明，如果该需求低于这一水平，则必定有相当数量的消费者被排除。适当地重新纳入其中一部分消费者，可以在不违反向上激励约束的情况下增加消费者剩余，这与 ϕ^R的最优性相矛盾。[9]

该引理已在附录 B.2中得到证明。因此， ϕ^R 支持（p， p）作为一个均衡，从而是对称消费者最优支持匹配（p， p）。现在我们给出其两步表示。

我们首先建立步骤 1。其第一部分已由归一化得到：估值低于 p的产品被省略。归一化还表明，对于两种估值都高于 p的消费者，绝不会采用仅偏好匹配。因此，对于此类消费者，剩余的可能性包括全面考虑、仅选择较不偏好的产品，或排除。接下来需要在这些分配中建立临界值结构。

固定偏好差异 $d > 0$，并考虑估值为（$p+s+d$， $p+s$）的消费者，以及他们的镜像类型。在（p， p）下，全面考虑的消费者会购买其偏好产品，并获得 $s+d$ 的消费者剩余；而只看到其较不偏好的产品的消费者会购买该产品，并获得 s 的消费者剩余。被排除在外的消费者不会购买，因此消费者剩余为零。

假设一个较低的-s 组获得全面考虑，而一个条件概率质量相同的较高-s 组只获得较不偏好的产品。交换这两组的分配，以及它们镜像类型的分配。在（p， p）处的需求保持不变：无论采用哪种安排，每家企业都向一个偏好其产品的组，以及一个条件概率质量相同、偏好另一种产品的组销售。在（p， p）处的消费者剩余也保持不变：每次购买都贡献基础剩余 s，而

[9]如果还对松弛问题中的目标价格 $\hat{}$ 进行优化，那么还有一种颇具吸引力的替代论证。令 $\hat{}p$ 为一个最优解，并令 ϕ 为相应的最优匹配。如果在 $\hat{}p$处存在有利可图的降价，那么对 $\hat{}p$ 的最优响应将低于 $\hat{}p$；而对零价格的最优响应则严格为正。若最优响应随竞争对手的价格连续变化，那么同一匹配 ϕ 因此会在某个更低的价格 $r < \hat{}p$处产生对称均衡。较低的共同价格会提高 ϕ下的消费者剩余，这与 $\hat{}p$的最优性矛盾。然而，在任意匹配下，最优响应未必连续变化，也可能跳过对角线。附录 B.2中的直接论证避开了这一困难，并证明了对每个固定 p都成立的更强结论。

全面考虑会额外贡献 d；在交换前后，获得全面考虑的条件概率质量相同。

不过，这种交换放松了向上激励约束。给定竞争对手的价格为 p，消费者在全面考虑下的保留价格为 $p+d$，且与 s无关；而在仅匹配较不偏好产品的情况下，保留价格为 $p+s$。因此，对于相同条件概率质量的消费者，这种交换会降低保留价格，但降幅更大，因而向上偏离带来的需求弱减。由此，交换后的匹配仍是松弛问题的最优解。由于它仍满足归一化，引理2意味着它也支持（p，p）作为均衡。因此，它再次成为支持（p，p）的对称消费者最优匹配。

我们可以在全面考虑与排除之间进行同样的交换，并同时交换相应的镜像类型。唯一的区别是，这种交换如今会严格提高消费者剩余：全面考虑从较低的s组转移到条件概率质量相同的一组较高s 消费者。因此，在最优解中，沿着相同的偏好差异，全面考虑不能被分配到排除之下。

~这些交换产生了一种对称消费者最优匹配，记为 ϕ^R。对于每种偏好差异 d，全面考虑都分配给s的一个上尾。因此，在较低估值 $p+s$ 中存在一个临界值 $\tau^*(d)$：高于该临界值的消费者会得到全面考虑，而低于该临界值的消费者则会得到其较不偏好的产品或外部选项。

~ ~现在，我们从 ϕ^R构造定理步骤 1 中的匹配 ϕ 。当两个估值都高于 p时，将临界值以下所有分配外部选项的情况替换为仅分配较不偏好的产品。这样一来，该区域中的任何排除都可视为先在步骤 1 中分配较不偏好的产品，再在步骤 2 中排除该消费者。当恰有一个估值高于 p时，归一化后要么仅保留该估值高于 p 的产品，要么保留外部选项；将后者替换为仅分配该产品，同样将排除推迟到步骤 2。当两个估值都低于 p时，归一化~后消费者仍得到外部选项。因此， ϕ 恰好是定理步骤 1 中描述的确定性匹配。

~ ~现在证明步骤 2。根据构造， ϕ^R 是通过在 $V_i(\phi)$ 中排除~ ~部分消费者而从 ϕ 得到的，对于 $i=1$，2。

~考虑企业 i。在从 ϕ^R继承的排除政策下，当企业 j 收取 p时， p 对~企业 i 而言是最优的，因为 ϕ^R 支持（p， p）作为一个均衡。现在撤销对 V_j（ϕ）中所有消费者的排除，将外部选项替换为 $\{j\}$。这不会改变企业 i在任何价格下的需求，因为这些消费者从不考虑企业 i。因此， p对企业 i而言仍然是最优的。剩余的排除政策仅适用于 V_i（ϕ）中的消费者 ~ ~ ~ ~，这恰好符合 CM(D_i（·， $p \mid \phi$） K_i（· $\mid \phi$） p）所允许的情形。因此，这个垄断问题是可行的。

令 ρ^* 为一个解，并将其应用于两家企业的单品群体。排除~ ~（来自 V_i（ϕ））只影响企业 i 的需求，因此这两个排除问题彼此独立。~ ~因此，按照 ρ^* 排除 V_j（ϕ）中的消费者后， p 对企业 i 仍是最优的；对称地， p 对企业 j 仍是最优的。因此，(p， p) 仍是一个均衡。

最后，在所有可行的排除规则中， ρ^* 在垄断问题下使消费者剩余最大化。排除消费者 $v \in V_i$（ϕ）在垄断问题和双寡头问题下牺牲的消费者剩余相同，即 $v_i - p$。由于~从 ϕ^R 继承的排除规则是可行的，因此将其替换为两家企业都采用的 ρ^*，不会降低消费者剩余。由于 ϕ^R 已经是支持 (p， p) 的对称消费者最优匹配，由此得到的匹配也支持 (p， p)，且为对称消费者最优匹配。这就证明了步骤 2，并完成了证明。

□

最后，我们对目标均衡价格进行最优化。如果存在 $p^o \geq 0$ 使得 $\phi^o \in \mathcal{M}(p^o)$，并且一个匹配 ϕ^o 是对称消费者最优的，则

$$CS(\phi^o, (p^o, p^o)) \geq CS(\phi, (p, p))$$

对于每个 $p \geq 0$ 以及每个 $\phi \in \mathcal{M}(p)$，均成立。

推论 4。 如果 (p^*， p^*) $\in$ 属于 V，则存在一个对称消费者最优匹配，其构造方式如定理2所述。

通过标准的紧致性论证，可以证明对称的、使消费者收益最优的匹配 ϕ^o 及其对应的均衡价格 p^o存在。任何 $p^o \geq p^*$ 的消费者剩余都低于在 p^*处的完全匹配；而根据命题 5，完全匹配本身也不成立。 $p^o = 0$也不可能成立，因为任何价格为零的均衡都会使消费者剩余为零。因此$p^o \in (0, p^*)$，结论由定理 2得出。

3.4 社会剩余与交易量最大化

命题 5表明，与垄断不同，在双寡头市场中，错配可以提高社会剩余和交易量。这些也是仁慈的平台或监管者的重要目标：社会剩余衡量交易创造的总价值，而交易量衡量交易的次数。现在我们来探讨平台应如何设计匹配，以使其中任一目标达到最大化。

这两个目标对错配的反应不同。降低价格不会直接增加社会剩余，因为价格只是消费者与企业之间的转移。不过，降低价格可以促成更多有价值的交易，从而增加社会剩余；而错配会降低部分交易创造的价值。相比之下，交易量只取决于消费者是否购买，而不取决于他们购买哪些产品。

若存在 $p^S \geq 0$ 使得 $\phi^S \in \mathcal{M}(p^S)$，则匹配 ϕ^S 是对称社会最优的，且

$$SS(\phi^S, (p^S, p^S)) \geq SS(\phi, (p, p))$$

对每个 $p \geq 0$ 和 $\phi \in \mathcal{M}(p)$ 均成立。对称交易量最优匹配 ϕ^T 的定义类似，只需将社会剩余替换为交易量。

命题 6。 若 $(p^*, p^*) \in \operatorname{int} V$，则存在一个对称社会最优匹配和一个对称交易量最优匹配，二者均可通过定理 2. 中的两步构造得到

因此，尽管最优均衡价格和临界值可能不同，这种两步构造适用于全部三个目标。但是，排除额外消费者这第二步是否必不可少？排除可以削弱企业提高价格的激励，但也会阻止潜在的有价值交易。下述结果表明，在估值独立同分布且对数凹的条件下，无需额外排除即可使社会剩余和交易量达到最大。

对于交易量，我们可以得到更精确的刻画。如果一种匹配在价格 p 下省略所有估值低于 p 的产品，只向每位满足 $v_i > v_j > p$ 且 $v_i - v_j > v_j - p$ 的消费者展示企业 j 的产品，并向其他所有消费者展示估值高于 p 的全部产品，那么这种匹配就称为最大错配。我们用 $\phi_p^{\max}$ 表示这种匹配。

省略价值低于 p 的产品不会影响目标价格下的购买。正如引言中图3 所示的错配机制，

对称地错配消费者可以维持各企业在 p 时的销售额，同时用对价格上涨更敏感的消费者替换对价格上涨不那么敏感的消费者，从而降低价格向上偏离的吸引力。

定理 3（社会最优与贸易最优匹配）。 除第 *3.1* 节的假设外，进一步假设 v_1 和 v_2 独立同分布，且具有共同支撑集 $[0, \bar{v}]$。则：

（*a*）存在一种对称社会最优匹配，仅使用定理 *2* 的步骤 *1* 即可构造。

（*b*）存在一个均衡价格 p^T ，使得价格为p^T 时的最大错配是一种对称贸易最优匹配。

贸易最优结果源于以下事实：在给定价格下，错配能够保持交易量不变，同时削弱企业提高价格的激励。最大错配充分利用了这一效应，使平台能够维持较低的均衡价格并扩大交易，而不会因排除而牺牲交易。

在独立同分布对数凹性的条件下，我们证明，利用排除来诱导更低的价格无法进一步增加交易量。为确立这一结果，我们首先推导任意对称匹配和均衡价格下交易量的两个上界。第一个上界是在相同价格下完全匹配所产生的交易量：在固定价格下限制使用权不可能创造额外交易。第二个上界源于企业不提高价格的激励约束。这两个上界在唯一的价格 p^T 处相交。在 p^T以下，激励上界随价格上升；在 p^T以上，完全匹配上界随价格下降。因此，它们在 p^T 处的共同值构成所有对称均衡下交易量的上界。最后，价格为 p^T时的最大错配支持该价格作为均衡，并达到这一上界。

社会剩余最大化还需考虑另一项因素：匹配质量。尽管错配可能促使价格降低并扩大交易，但它也会使消费者只能匹配到较不偏好的产品，从而降低其购买所创造的价值。因此，与贸易最优匹配不同，社会最优匹配未必会采用最大错配。此外，排除似乎也可能是可取的，因为它能够抑制价格上涨，同时避免这些错配损失。然而，定理3表明，排除并非必要：排除虽能削弱企业的定价激励，但这一好处不足以弥补有价值交易的损失。

证明(a)部分的主要困难在于排除排除现象。排除可能是维持极低均衡价格所必需的；即使在价格较高时，排除也

可能比仅将消费者与其较不偏好的产品进行匹配成本更低。尽管如此，我们证明，可以选择一种不包含排除的社会最优匹配。挑战在于，恢复被排除的消费者会增加社会剩余和企业的均衡销量，但也会使向上价格偏离更具吸引力。为比较这些影响，我们考虑一个仅包含有限个向上价格偏离约束的松弛问题。其拉格朗日函数表明，只要激励约束乘子的加权和小于一，排除就是次优的。我们通过同时扰动均衡价格和匹配来建立这一界限：略微提高目标价格，同时将原有的分配转移给估值略高的消费者。这一调整限制了价格上涨所造成的交易损失。尽管由此得到的匹配未必满足激励约束，但拉格朗日函数会计入违反这些约束的情况。比较两个价格下的拉格朗日函数，即可得到所需的乘子界限，从而排除排除现象。

结合命题 4，定理 3揭示了垄断与双寡头之间的鲜明反差。在垄断情形下，完全匹配能使社会剩余和交易量都达到最大。在双寡头情形下，将消费者限制为选择其较不偏好的产品，可能通过加剧价格竞争来改善这两个目标。然而，消费者最优匹配可能还依赖于排除，而社会最优与贸易最优匹配则不需要排除。

无排除结论能否推广至相关估值，仍是一个开放问题。在第 3.1 节所述的对称联合对数凹分布下，两步刻画仍然成立。然而，对于社会剩余和交易量，我们都尚未找到证明来说明步骤 2 总能省略，也没有找到表明全局最优值处排除不可或缺的反例。

4 讨论与结论

竞争性边缘企业。 我们将企业数量限制为一家或两家，可以理解为将限制对象设定为拥有市场力量的一家或两家企业，而非市场中卖方的总数。假设许多边缘企业以相同的边际成本供应同一种产品，并且平台向每位消费者提供至少两家此类企业的使用权。于是，伯特兰竞争使边缘企业之间的定价维持在边际成本水平。对每位消费者而言，它们的产品实际上提供了一个外部选项，其收益等于边缘产品的价值减去边际成本（或者在消费者更倾向于不购买时为零，

）。因此，平台设计向消费者提供一家或两家额外的拥有市场力量的企业的使用权这一问题，可以利用我们的垄断或双寡头框架进行研究，其中估值均以该外部选项为基准。

结论。考虑一个了解消费者对不同产品的估值，并决定向他们展示哪些产品的平台。如果平台寻求增进消费者福利，那么向所有人展示所有产品，或至少展示他们最喜欢的产品，似乎是自然而然的选择。毕竟，展示所有产品似乎是强化竞争的最佳方式，因为任何企业都无法假定自己拥有被锁定的消费者。然而，分析表明，平台可以通过排除特定消费者，或只向他们展示其较不喜欢的产品，来提高总消费者剩余。这类限制能够诱使企业降低价格，而由此产生的价格下降足以弥补排除和错配造成的损失，甚至绰绰有余。

平台应如何选择排除哪些消费者或对哪些消费者进行错配？在垄断情形下，平台只能通过排除消费者来影响价格。我证明，在所有使垄断者获得相同利润的排除政策中，存在一种政策，使其诱导的需求在每个价格下都至少与任何其他规则诱导的需求一样大。这一需求保持政策在该利润水平下最大化消费者剩余，因此平台只需决定让垄断者保留多少利润。当排除仅限于部分消费者时，同样的分析仍然适用：广义的需求保持型排除政策再次是消费者最优的。

在存在两家竞争企业时，我考虑对称的对数凹估值分布，并将分析限定于对称匹配和对称纯策略价格均衡。消费者最优匹配将错配与排除结合起来，并使均衡价格低于完全匹配基准。它可以分两步构造。第一步，剔除估值低于均衡价格的产品。在估值均高于该价格的消费者中，沿每条估值差相等的对角线应用截断规则：估值较低的消费者只匹配到其较不偏好的产品，而估值较高的消费者仍可使用两种产品。第二步，进一步排除第一步后仅能使用一家企业产品的特定消费者。这种排除遵循为垄断情形提出的需求保持规则。

无论在垄断还是双寡头情形下，提高总消费者剩余都不一定要以牺牲任何消费者为代价。通过适当随机化排除或错配，平台可以实现相对于完全匹配的事前帕累托改进：每种消费者类型在给定其估值的条件下，其期望剩余都至少不变，且有正测度的类型严格受益。然而，对社会剩余和交易量的影响则截然不同。在对数凹条件下，垄断情形中通过排除提高消费者剩余，必然会同时降低社会剩余和交易量。相比之下，在存在竞争企业时，错配可以同时提高这三者。此外，在独立同分布的对数凹估值下，利用与消费者最优匹配相同的两步结构，可以使社会剩余和交易量都达到最大，但有一项重要简化：无需进行第二步排除。

附录

附录 A包含垄断证明。A.1 节A.1 通过排除实现消费者剩余和中期帕累托改进。A.2 节A.2 证明了容量约束下的需求保持构造。它还证明了定理1 ，将其作为没有容量约束时的特例。A.3 节A.3 将这一刻画应用于中期福利保证和帕累托效率。A.4 节A.4证明了在对数凹性条件下，完全匹配使社会剩余和交易量最大化。

附录 B 包含双寡头证明。B.1 节B.1 证明了无需排除的错配可以同时为消费者带来中期帕累托改进，并严格增加社会剩余和交易量。B.2 节B.2 确立了证明定理2中消费者最优匹配刻画的一个关键步骤：仅受向上偏离约束限制的最优匹配，也能排除有利可图的向下偏离。B.3 节B.3 将两步刻画扩展到社会剩余和交易量最大化。B.4 节B.4 证明了在估值独立同分布且对数凹的条件下，无需第二步的排除也能使社会剩余和交易量都达到最大，并将贸易最优匹配刻画为最大错配。附录末尾汇集了相关技术引理。

垄断

A.1 消费者剩余改进与帕累托改进

命题1的证明。固定一个足够小的 $\varepsilon > 0$。如图6所示，令 $p_\varepsilon = p^M - \varepsilon, m_\varepsilon = (\Pi^F)'(p_\varepsilon) > 0$，且 $\hat{\pi}_\varepsilon = \Pi^F(p_\varepsilon) - p_\varepsilon m_\varepsilon$。选择满足 $\Pi^F(c_\varepsilon) = \hat{\pi}_\varepsilon$ 的 $c_\varepsilon > p^M$，并排除 $[c_\varepsilon, c'_\varepsilon]$ 中的消费者，其中 $F(c'_\varepsilon) - F(c_\varepsilon) = m_\varepsilon$。由于 Π^F 的局部负曲率以及 f 为正，当 ε 足够小时，这些临界值存在，并收敛至 p^M。

我们证明，即使不存在全局凹性，这一构造仍然成立。选取 p^M 的一个邻域，使得 Π^F 在该邻域内严格凹。当 ε足够小时，临界值和 p_ε 都位于该邻域内。因此，第2.2节中的切线论证排除了该邻域内的所有偏离：对于低于 c_ε的价格，排除

恰好会剔除 m_ε 位顾客；而对于更高的价格，利润不会超过 $\Pi^F(c_\varepsilon) = \widehat{\pi}_\varepsilon$。在该邻域之外，连续性以及 p^M 的唯一性意味着，相较于 $\Pi^F(p^M)$，利润存在一个统一的严格差距。由于 $\widehat{\pi}_\varepsilon \to \Pi^F(p^M)$，当 ε足够小时，这些偏离也无利可图。因此， p_ε 是最优的。

最后，估值高于 p^M 的留存消费者获得 ε，而每个被排除的消费者最多损失 $c'_\varepsilon - p^M$。因此，

$$\begin{aligned} &CS(\phi_\varepsilon, p_\varepsilon) - CS(\phi^{\text{full}}, p^M) \\ &\quad \geq [D(p^M) - m_\varepsilon]\varepsilon - m_\varepsilon(c'_\varepsilon - p^M). \end{aligned}$$

由于 $m_\varepsilon = -(\Pi^F)''(p^M)\varepsilon + o(\varepsilon)$ 且 $c'_\varepsilon \to p^M$，第一项为 $D(p^M)\varepsilon + o(\varepsilon)$，而第二项为 $o(\varepsilon)$。因此，当ε充分小时，差值严格为正。在我们的最低最优价格约定下，垄断者选择不高于 p_ε 的价格，这只会增加消费者剩余。

□

命题 *2* 的证明。 固定充分小的 $\varepsilon > 0$。正如命题 1 的证明所确立的，目标价格 $p_\varepsilon = p^M - \varepsilon$ 可以通过排除一部分消费者来支持，其质量为

$$m_\varepsilon = (\Pi^F)'(p_\varepsilon) > 0$$

估值高于 $c_\varepsilon > p^M$ 的消费者，其中 $c_\varepsilon \to p^M$。定价论证仅取决于在 c_ε以上被排除的消费者总量。

选择一个固定的 $b \in (p^M, \bar{v})$，使其充分接近 p^M，从而 $f(v) \geq \kappa > 0$在 $[p^M, b]$上成立。对于充分小的 ε，我们有 $c_\varepsilon < b$。考虑排除概率

$$\rho_\varepsilon(v) = \begin{cases} \lambda_\varepsilon \dfrac{\varepsilon}{v - p_\varepsilon}, & v \in [c_\varepsilon, b], \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中， λ_ε 的选取使排除的消费者质量总和等于 m_ε。具体来说，令

$$A_\varepsilon = \int_{c_\varepsilon}^{b} \frac{\varepsilon}{v - p_\varepsilon}\, dF(v), \qquad \lambda_\varepsilon = \frac{m_\varepsilon}{A_\varepsilon}.$$

我们证明，当 ε 足够小时，$0 < \lambda_\varepsilon < 1$。由于 $f(v) \geq \kappa$ 在 $[c_\varepsilon, b]$ 上，

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \int_{c_\varepsilon}^{b} \frac{\varepsilon f(v)}{v - p_\varepsilon}\, dv \\ &\geq \kappa\varepsilon \int_{c_\varepsilon}^{b} \frac{dv}{v - p_\varepsilon} \\ &= \kappa\varepsilon \log \frac{b - p_\varepsilon}{c_\varepsilon - p_\varepsilon}. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon \downarrow 0$，对数会发散，因为 $c_\varepsilon \to p^M$ 且 $p_\varepsilon \to p^M$，而 $b > p^M$ 是固定的。同时，假设1 意味着

$$m_\varepsilon = -(\Pi^F)''(p^M)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

因此，$A_\varepsilon / m_\varepsilon \to \infty$，所以对于足够小的 ε，$0 < \lambda_\varepsilon < 1$。由于当 $v \in [c_\varepsilon, b]$ 时 $v - p_\varepsilon > \varepsilon$，我们也有 $0 < \rho_\varepsilon(v) < 1$ 在此区间内。

根据构造，$\int \rho_\varepsilon(v)\, dF(v) = m_\varepsilon$。此外，所有排除都发生在 c_ε之上。因此，命题 1证明中的相同定价论证表明，p_ε 是 $\phi_\varepsilon = 1 - \rho_\varepsilon$下的最优垄断价格。

接下来需要验证事前帕累托改进。对于每个 $v > p^M$，

$$\begin{aligned} u(v; \phi_\varepsilon, p_\varepsilon) &= (1 - \rho_\varepsilon(v))(v - p_\varepsilon) \\ &= v - p^M + \varepsilon - \rho_\varepsilon(v)(v - p_\varepsilon) \\ &\geq v - p^M + (1 - \lambda_\varepsilon)\varepsilon \\ &> u(v; \phi^{\text{full}}, p^M). \end{aligned}$$

具有 $v \in (p_\varepsilon,\ p^M]$ 的类型永远不会被排除，并且会因价格下降而严格获益。具有 $v \leq p_\varepsilon$ 的类型仍然获得零剩余。因此，每种消费者类型的境况都不会变差，且有正测度的类型境况严格改善。根据我们的最低最优价格约定，垄断者选择的价格弱低于 p_ε，这只会增加每位消费者的事前剩余。

□

A.2 容量约束下的需求保持

引理 *1* 的证明。首先假设排除规则 ρ 可行，并令 M 为其导致的需求损失。由于排除对象来自合格人群，$M(\bar{v}) = 0$，

并且对于 $0 \le a < b \le \bar{v}$,

$$0 \le M(a) - M(b) \le K(a) - K(b).$$

反之，假设 M 满足这些条件。由于 K 连续， M也连续。尾部 K 和 M 定义了有限测度 ν^e 和 λ。上增量界意味着 $\lambda \le \nu^e$，因此拉东–尼科迪姆导数 $\rho = d\lambda/d\nu^e$ 存在，并且几乎处处属于 $[0,1]$。于是， ρ 是一个可行的排除规则，并诱导出 M。 □

命题 *3* 的证明。 每个容量可行需求都介于 $D - K$ 和 D之间，因此其最大利润属于 $[\pi_K, \bar{\pi}]$。

固定 $\pi \in [\pi_K, \bar{\pi}]$，使得 $\pi > 0$，并令 $M = M(D, K, \pi)$ 为 (3) 中定义的需求损失包络。还需验证 M 是可行的。对于每个 q，令

$$\psi_q(c) = g_\pi(q) - [K(q) - K(c)]_+.$$

对于 $a < b$,

$$0 \le \psi_q(a) - \psi_q(b) \le K(a) - K(b).$$

对 q 逐点取最大值会保留这些共同的增量界，因此 M 满足 (2) 中的增量限制。此外， $\pi \ge \pi_K$ 意味着 $g_\pi(q) = [D(q) - \pi/q]_+ \le K(q)$ 对每个 $q \ge 0$都成立，而 $g_\pi(0) = 0$。由于 $K(\bar{v}) = 0$,

$$M(\bar{v}) = \max_q \{g_\pi(q) - K(q)\} = 0.$$

因此，引理 1表明 M 由一个容量可行的排除规则所诱导。

正文中的论证随后证明，该规则是需求保持的，并且在利润最大化为 π 的容量可行排除规则中，使消费者剩余最大。

□

定理 *1* 的证明 现在我们通过取 $K = D$ 来证明定理 1 。对于 $K = D$, $\pi_K = 0$, 因此该构造适用于每个 $\pi \in (0, \bar{\pi}]$。令 $\phi_\pi = 1 - \rho_{\pi,D}$，即可得到一种匹配，它达到逐点需求上界，并在利润为 π 时使消费者剩余最大化。在这种情况下，包络简化为

$$M(D, D, \pi)(c) = \max_{q \in [c, \bar{v}]} g_\pi(q),$$

因为 $D(q) \geq D(c)$ 且 $\pi/q \geq \pi/c$蕴含对于 $0 < q < c$， $g_\pi(q) - D(q) + D(c) \leq g_\pi(c)$，而 $q = 0$ 处的项非正。

为证明存在性，考虑满足以下条件的配对 (M, p)： M 是可行需求损失，且 $p \in [0, \bar{v}]$ 对于 $D - M$是最优的。这些配对构成一个非空紧集[10]，，且消费者剩余在该集合上连续。因此，消费者最优匹配存在。

消费者最优时所产生的垄断利润必定严格为正。否则，每个正价格下的需求都为零，消费者剩余也为零；而完全匹配会带来严格为正的消费者剩余。因此，前述构造也给出了需求保持的消费者最优匹配，从而证明定理 1。

□

A.2.1 目标价格问题

对于 $p = 0$，只有在最大排除消除了全部需求时，该问题才可行；此时最大排除是最优的，消费者剩余为零。下文假设 $p > 0$。

定义

$$\overline{\pi}_p := \min\left\{pD(p),\ \inf_{p<q\leq\bar{v}} \frac{pq}{q-p}[D(p) - D(q)]\right\}, \tag{4}$$

and

$$\underline{\pi}_p := \max\left\{\underline{\pi}_K,\ \sup_{0<q<p} \frac{pq}{p-q}[D(q) - D(p) - K(q) + K(p)]\right\}. \tag{5}$$

问题 CM(D， K， p) 可行，当且仅当 $\pi_p \leq \pi_p$。

可行性界和推论的证明 *1*。假设一个容量可行的排除规则导致需求损失 M，并使 p 以利润 π 达到最优。则 $\pi \leq pD(p)$。对于 $q > p$， $M(q) \leq M(p)$，因此价格激励约束意味着

$$q[D(q) - M(p)] \leq \pi.$$

[10]这里的技术难点在于，可测匹配的空间并非直接紧致。相反，可行的诱导需求曲线在一致收敛下构成一个紧集：它们的增量受连续的完全匹配需求曲线的增量所限制。每一条这样的曲线都可以由某种匹配实现。最优定价约束是闭的，而消费者剩余是连续的。

代入 $M(p) = D(p) - \pi/p$ 并整理可得

$$\pi \le \frac{pq}{q-p}[D(p) - D(q)].$$

因此 $\pi \le \bar{\pi}_p$。

最大排除给出 $\pi \ge \pi_K$。对于 $0 < q < p$，容量意味着 $M(q) \le M(p) + K(q) - K(p)$，因此价格激励约束意味着

$$q[D(q) - M(p) - K(q) + K(p)] \le \pi.$$

代入 $M(p)$ 并重新整理，得到

$$\pi \ge \frac{pq}{p-q}[D(q) - D(p) - K(q) + K(p)].$$

因此 $\pi \ge \pi_p$，必要性得证。

反过来，固定 $0 < \pi \in [\pi_p, \bar{\pi}_p]$，并取 $M = M(D, K, \pi)$。根据命题 3，M 是可行的，且利润上限为 π。记 $m = D(p) - \pi/p \ge 0$。利用上文定义的函数 ψ_q，

$$M(p) = \max_{q \in [0, \bar{v}]} \psi_q(p), \qquad \psi_p(p) = g_\pi(p) = m.$$

对于 $q > p$，π 的上界意味着 $D(q) - \pi/q \le m$。由于 $K(q) \le K(p)$ 且 $m \ge 0$，可得 $\psi_q(p) = g_\pi(q) \le m$。对于 $0 < q < p$，π 的下界意味着

$$D(q) - \pi/q - [K(q) - K(p)] \le m.$$

由于 $K(q) - K(p) \ge 0$ 且 $m \ge 0$，将 $D(q) - \pi/q$ 替换为其正部后，同样的界仍然成立。因此 $\psi_q(p) \le m$。最后，$\psi_0(p) = -[K(0) - K(p)]_+ \le 0 \le m$。因此 $M(p) = m$，所以

$$p[D(p) - M(p)] = \pi.$$

p 处的利润达到上限 π，且 p 是最优的。如果区间包含零，则 $\pi_K = 0$，因此 $D - K = 0$，而最大排除在 p 处取得零利润。这证明了充分性。

因此，最高可行利润为 π_p。如果该利润为正，则所构造的保持 p 的需求规则支持 π。包络关于 π 单调不增，正文中的逐点下界论证表明，其需求损失

不高于任何其他支持 p的容量可行排除规则所造成的需求损失，而这些规则的最大利润不会超过 π_p。因此，该规则在 p时使消费者剩余最大。如果 $\pi_p = 0$，则每个可行规则的销售额和消费者剩余均为零，最大排除是最优的。这就证明了推论1。

□

A.3 福利保证与中期帕累托效率

推论的证明 *2*。固定目标价格 p。只有当 $h(v) \leq (v-p)+$ 几乎处处成立时，才能在 p 满足中期福利保证。该条件成立时，这些保证等价于由 $k_{h,p}$ 确定的排除约束。因此，固定价格问题恰好是 CM$(D, K_{h,p}, p)$，当且仅当$p \in \mathcal{P}(h)$时该问题可行。

根据推论 1，对于每个这样的价格，利润为π_p 的需求保持型排除规则使消费者剩余最大化。因此，在 $\mathcal{P}(h)$ 上优化所得的消费者剩余，即可求解问题 (1)。

存在性可由定理 1 证明中相同的紧致性论证得出。唯一的区别是，排除容量 $K_{h,p}$ 现在取决于目标价格p，但它随 p 连续变化，因此相同的论证仍然适用。

□

~ ~推论的证明 *3*。令 $h^{\phi}(v) = u(v; \phi, \widetilde{p})$。基准匹配对~推论 2 中的问题可行，因此最优值至少为 $CS(\phi, \widetilde{p})$。

若该不等式为严格不等式，推论2 所刻画的需求保持匹配会弱化地提高几乎所有消费者类型的中期剩余，并严格~提高正测度类型的中期剩余。因此，它在中期帕累托意义上改善了 ϕ。

~ ~反之，任何对 ϕ 的事前帕累托改进都满足保证条件 h^{ϕ}，并严格增加总消费者剩余。因此，推论~ 2 中的最优值严格超过 CS（ϕ, $\widetilde{p}$）。因此，所述弱不等式恰好在~是 ϕ中期帕累托有效时成立。

□

A.4 完全匹配最大化社会剩余和交易量

命题4的证明。考虑任意匹配 ϕ，令 p_ϕ 表示其诱导的最优垄断价格。我们首先证明

$$D_\phi(p_\phi) \le D(p^M). \tag{6}$$

如果诱导的最大利润为零，则该匹配不会产生任何交易或消费者剩余。因此，我们可以将注意力限制在正利润匹配上。由于其需求在估值支持集下方保持不变，这种匹配满足 $p_\phi \ge \underline{v}$。

如果 $p^M = \underline{v}$，完全匹配服务于每位消费者，因此同时最大化社会剩余和交易量。由于没有有销量的匹配能够诱导出更低的最优价格，消费者剩余也不可能严格提高。下文假设 p^M 位于支撑集内部。

对于 $p_\phi < p^M$，垄断者无法通过将价格从 p_ϕ 提高到 $p_\phi + \varepsilon$ 来获利，因此

$$(p_\phi + \varepsilon) D_\phi(p_\phi + \varepsilon) \le p_\phi D_\phi(p_\phi).$$

重新整理并利用 $\phi(v) \le 1$,

$$\begin{aligned} \varepsilon D_\phi(p_\phi) &\le (p_\phi + \varepsilon)\big[D_\phi(p_\phi) - D_\phi(p_\phi + \varepsilon)\big] \\ &= (p_\phi + \varepsilon) \int_{p_\phi}^{p_\phi + \varepsilon} \phi(v)\, dF(v) \\ &\le (p_\phi + \varepsilon)[F(p_\phi + \varepsilon) - F(p_\phi)]. \end{aligned}$$

除以 ε 并令 $\varepsilon \downarrow 0$，得到

$$D_\phi(p_\phi) \le p_\phi f(p_\phi), \tag{7}$$

其中，$f(\underline{v})$表示其右极限。

令 $h = f/D$ 表示风险率。对数凹性意味着 h 非递减，而完全匹配一阶条件给出 $p^M h(p^M) = 1$。因此，对于支撑集内部的每个 $p < p^M$，都有 $ph(p) < 1$。由于 $f = hD$ 和 $D' = -hD$,

$$\frac{d}{dp}[pf(p)] = D(p)\big[h(p)(1 - ph(p)) + ph'(p)\big] > 0 \qquad \text{a.e. on } (\underline{v}, p^M).$$

由于 h 是非递减且局部绝对连续的，因此该导数几乎处处为正，所以 $pf(p)$ 严格递增。[11] 因此，

$$pf(p) < p^M f(p^M) = D(p^M) \qquad (\underline{v} \le p < p^M), \tag{8}$$

下端点通过取右极限纳入。结合式（7）和（8），任何诱导出正利润的匹配若诱导出 $p_\phi < p^M$，则满足

$$D_\phi(p_\phi) < D(p^M). \tag{9}$$

对于 $p_\phi \ge p^M$，我们则有

$$D_\phi(p_\phi) \le D(p_\phi) \le D(p^M).$$

因此，完全匹配使交易量最大化。由于它服务于估值最高的消费者，因此也使社会剩余最大化。如果交易量严格低于最大值，社会剩余的损失至少为 $p^M[D(p^M) - D_\phi(p_\phi)] > 0$。

最后，严格提高总消费者剩余的匹配必须诱导出$p_\phi < p^M$，因为在给定价格下，限制使用权无法提高消费者剩余，而完全匹配下的消费者剩余随价格上升而不增。根据式（9），这种匹配会严格减少交易量，因此也会降低社会剩余。

□

B 双寡头

B.1 错配可能优于完全匹配

命题 5 的证明。由于 $(p^*, p^*) \in$ 属于 V，取 $(p^*, p^*$ 的一个充分小邻域，并固定 $0 < m \le M < \infty$，使得 $m \le f(v) \le M$ 在该邻域内处处成立。

令 $D^F(q \mid p) = D_i(q, p \mid \phi^{\text{full}})$。将 f 在 V 之外扩展为零。回顾

$$\ell_p^F = \int_0^p f(p, y)\, dy + \int_p^{\bar{v}} f(t, t)\, dt.$$

[11] 对数凹性根据凹函数的一项标准性质，蕴含密度函数 f 局部绝对连续。由于 $D > 0$，风险率 $h = f/D$ 也局部绝对连续。

在所采用的假设下，$D^F(p \mid p) - p\ell_p^F$在 p^*处局部利普希茨连续。由于完全匹配一阶条件给出 $D^F(p^* \mid p^*) - p^*\ell_{p^*}^F = 0$，因此存在 $0 < L < \infty$，使得当 $p < p^*$ 充分接近 p^*时，$D^F(p \mid p) - p\ell_p^F \le L(p^* - p)$。

固定 $d_1 > 0$ 充分小，然后选择充分小的 $d_0 \in (0, d_1)$，使得

$$\frac{p^* m}{4} \log \frac{d_1}{d_0} > L. \tag{10}$$

选择充分小的 $\delta > 0$，使得 $p^* > 2\delta$ 和 $f \ge m$ 位于 $[p^* - 2\delta, p^*]^2$ 上。令 $a = m\delta p^*/2 > 0$，并固定 $s_0 \in (0, d_0)$，使得 $Ms_0(d_1 - d_0) < a$。对于 $p = p^* - \varepsilon$，考虑这些区域

$$R_p = \{(p + s + d, p + s) : 0 < s < s_0,\ d_0 < d < d_1\}$$

及其镜像。当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，这些区域包含在所选邻域内。将这些区域中的每位消费者仅以概率 $\rho_\varepsilon(s, d) = \varepsilon/(2d)$ 与其较不偏好的产品匹配，否则保留完全匹配。其余消费者均保持完全匹配。取 $\varepsilon < d_0$，使得这些概率属于 $[0, 1]$。将由此得到的无排斥对称匹配记为 ϕ_p。在目标价格下，每位仅与其较不偏好的产品匹配的消费者仍会购买，而对称性则维持各企业的销售额。

我们首先证明 ϕ_p 的支撑集为（p，p）。考虑向上偏离至 $p + x$，其中 $0 < x \le s_0$。由于错配使每家企业在 p 处的销售额保持不变，并使其在更高价格下的销售额不增，因此该偏离带来的利润增益不超过完全匹配下的利润增益。根据附录 B.2中的完全匹配需求损失界（11），

$$D^F(p \mid p) - D^F(p + x \mid p) \ge \frac{p\ell_p^F}{p + x} x,$$

完全匹配下的利润增益至多为 $x[D^F(p \mid p) - p\ell_p^F]$。因此，它至多为$L\varepsilon x$。价格上涨后，仅与企业 i匹配的消费者会在$s < x$时停止购买。因此，偏离需求的预期减少量至少为

$$\int_0^x \int_{d_0}^{d_1} \frac{\varepsilon}{2d} f(p + s + d, p + s)\, dd\, ds \ge \frac{m\varepsilon x}{2} \log \frac{d_1}{d_0}.$$

因此，偏离利润至少减少

$$\frac{pm\varepsilon x}{2}\log\frac{d_1}{d_0} > L\varepsilon x,$$

其中，严格不等式由式（10）对 $p > p^*/2$成立。因此，所有这类向上偏离都无利可图。

现在考虑 $q > p + s_0$。错配会使向上偏离所带来的需求弱减，同时保留在 p 处的需求，因此其偏离收益不高于完全匹配时的偏离收益。当 p 足够接近 p^* 时，$p + s_0 > p^*$，且针对 p 的完全匹配最佳响应低于 $p + s_0$。根据对数凹性，

$$\Pi_i(q, p \mid \phi^{\text{full}}) - \Pi_i(p, p \mid \phi^{\text{full}}) \le \Pi_i(p + s_0, p \mid \phi^{\text{full}}) - \Pi_i(p, p \mid \phi^{\text{full}}).$$

当 $p \uparrow p^*$ 时，右侧收敛于 $\Pi_i(p^* + s_0,\ p^* \mid \phi^{\text{full}}) - \Pi_i(p^*,\ p^* \mid \phi^{\text{full}}) < 0$，因为 p^* 是针对 p^* 的唯一完全匹配最佳响应。因此，当 p 足够接近 p^* 时，所有这类向上偏离都无利可图。

向下偏离也无利可图。根据对数凹性，在完全匹配下，没有向下偏离是有利可图的，因为针对 p 的完全匹配最佳响应高于 p。错配保留了在 p 处的需求，并使降价的吸引力弱减。因此，在 ϕ_p 下没有向下偏离是有利可图的。因此，ϕ_p 支持 $(p,\ p)$。

接下来比较福利。在价格为 p^* 时，估值为 $(p+s+d, p+s)$ 的一位入选消费者，在完全匹配下获得剩余 $s + d - \varepsilon$，因为 $\varepsilon < d_0 < d$。在价格为 p 时，采用 ϕ_p，她的期望剩余为

$$(1 - \rho_\varepsilon)(s + d) + \rho_\varepsilon s = s + d - \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，她获得了 $\varepsilon/2$。同样的计算也适用于镜像类型。其他所有人仍然完全匹配，并且从价格下降中弱受益。因此，ϕ_p在事前阶段帕累托优于完全匹配。

交易量严格增加：错配的消费者仍以 p 购买，而较低价格下的完全匹配服务了比 p^* 更多的消费者。为比较社会剩余，取 $0 < \varepsilon < \delta$。矩形中的类型

$$v_1 \in [p^* - \varepsilon, p^*], \qquad v_2 \in [p^* - 2\delta, p^* - \delta]$$

在 p^* 不进行交易，但以 $p = p^* - \varepsilon$ 购买产品 1，除去边界上测度为零的类型。他们的总量至少为 $m\delta\varepsilon$，且每个消费者创造的社会剩余至少为 $p^*/2$。将社会剩余记为 SS，于是可得

$$SS(\phi^{\text{full}}, (p, p)) - SS(\phi^{\text{full}}, (p^*, p^*)) \geq a\varepsilon.$$

错配所造成的社会剩余损失至多为

$$2\int_0^{s_0}\int_{d_0}^{d_1} \frac{\varepsilon}{2} f(p + s + d, p + s)\, dd\, ds \leq M\varepsilon s_0(d_1 - d_0).$$

因此，

$$SS(\phi_p, (p, p)) - SS(\phi^{\text{full}}, (p^*, p^*)) \geq \varepsilon\big[a - Ms_0(d_1 - d_0)\big] > 0,$$

命题得证。 □

B.2 无向下偏离

存在性。 可行集非空，因为为每个消费者分配空考虑集即可满足所有向上激励约束。该集合是紧的，并且消费者剩余在其上连续。因此，最优值存在。

引理 2的证明。 固定 $0 < p < p^*$ 以及松弛问题的一个归一化最优解 ϕ^R。令 $\ell = -\partial_q D^F(q \mid p)\big|_{q=p} \geq 0$ 表示在 (p, p) 处完全匹配需求的自身价格导数的相反数。

两个完全匹配界。 我们首先证明下文将用到的完全匹配需求的两个性质。对数凹性使完全匹配最佳响应 $b(r)$唯一且连续。由于 $b(0) > 0$且 p^* 是其最小不动点，$b(p) > p$；否则，连续性将意味着存在一个更早的不动点。对数凹性进而意味着，完全匹配下的利润在 p处弱递增。因此，一阶条件非负，这意味着

$$D^F(p \mid p) \geq p\ell.$$

将（LC.6）应用于对数凹的完全匹配需求，可得，对于 $q > p$，

$$D^F(q \mid p) \leq D^F(p \mid p) \exp\left[-\frac{\ell(q - p)}{D^F(p \mid p)}\right].$$

U对 $z \geq 0$ 使用 $1 - e^{-z} \geq z/(1+z)$，并结合 $D^F(p \mid p) \geq p\ell$，我们得到 ain

$$D^F(p \mid p) - D^F(q \mid p) \geq \frac{\ell(q-p)}{1 + \ell(q-p)/D^F(p \mid p)} \geq \frac{p\ell}{q}(q-p), \qquad q > p. \tag{11}$$

若 $\ell = 0$，则该界由单调性得出。若 $D^F(q \mid p) = 0$，则可直接由 $D^F(p \mid p) \geq p\ell$ 得出。因此，(11给出了完全匹配下向上偏离所导致需求损失的上界。

在 ϕ^R 下的分配。接下来，我们说明归一化对 ϕ^R的含义。若两种估值都低于 p，消费者将获得空集。若恰有一种估值高于 p，她将只获得该产品，或获得空集。若两种估值都高于 p，她将获得全面考虑、仅获得她较不偏好的产品，或获得空集；归一化已移除了仅偏好匹配。

我们还要证明仅分配较不偏好的产品具有一项额外性质。在 ϕ^R 下，几乎每个仅与其较不偏好的产品匹配的消费者都满足 $s < d$。否则，若 $s \geq d$，以全面考虑取代仅匹配较不偏好的产品，会在 (p, p) 处保持需求不变，使每一种向上偏离所带来的需求弱减，并增加消费者剩余，这与最优性矛盾。

只要满足 $D_i(p,\ p \mid \phi^R) \geq p\ell$，降价就无利可图。上述分配结构清楚地展现了降价的影响。除边界类型（其测度为零）外，所有考虑集非空的消费者在 $(p,\ p)$ 时都已经购买。被分配到空集的消费者不会因降价而被吸引，因为没有产品展示给她。因此，企业 i降价后唯一可能新增的顾客，是那些同时考虑两种产品、在 $(p,\ p)$ 时偏好企业 j，却因降价而转向企业 i 的消费者。

定义原始偏好差距密度

$$h_p(d) = \int_{\mathbb{R}} f(x, x+d)\mathbf{1}\{x \geq p,\ x+d \geq p\}\, dx,$$

其中，f在 V之外延拓为零。映射 $(x,\ d) \mapsto (x,\ x+d)$ 是仿射的，因此 f的对数凹性意味着 $f(x,\ x+d)$ 关于 $(x,\ d)$ 是对数凹的。约束 $x \geq p$和 $x+d \geq p$ 定义了一个凸集，因此施加这些约束仍保持对数凹性。随后对 x 进行积分，根据普雷科帕定理可知，h_p 是对数凹的。[12] f 的对称性给出 $h_p(d) = h_p(-d)$。因此，h_p 在零点处取得最大值。

[12]参见 普雷´科帕(1973年，定理 6）。

此外，

$$\ell = h_p(0) + \int_0^p f(p, y)\, dy \geq h_p(0).$$

因此，对于降价 $t \in (0,\ p)$，

$$D_i(p - t, p \mid \phi^R) - D_i(p, p \mid \phi^R) \leq \int_0^t h_p(d)\, dd \leq t\ell.$$

此次降价带来的利润增益至多为

$$\begin{aligned}(p - t)\big[D_i(p, p \mid \phi^R) + t\ell\big] - pD_i(p, p \mid \phi^R)\\ = t\big[p\ell - D_i(p, p \mid \phi^R)\big] - t^2\ell,\end{aligned}$$

只要 $D_i(p,\ p \mid \phi^R) \geq p\ell$，该值便非正。

最优性要求 $D_i(p, p \mid \phi^R) \geq p\ell$。为导出矛盾，假设$D_i(p, p \mid \phi^R) < p\ell$。在完全匹配下，被 ϕ^R 排除且原本会向企业 i购买的消费者质量为 $D^F(p \mid p) - D_i(p,\ p \mid \phi^R)$，该值至少为 $p\ell - D_i(p, p \mid \phi^R) > 0$。从这些消费者中选取一部分，并将其重新纳入全面考虑。令每家企业恢复纳入的消费者总质量为 m，其中 $0 < m < p\ell - D_i(p, p \mid \phi^R)$。我们根据消费者在完全匹配下的保留价格来选择消费者：先恢复保留价格较低者，直至恢复纳入的质量达到 m，并对两家企业对称地进行这一操作。无原子性使我们能够精确选取这一质量。令 c 表示由此得到的保留价格临界值，ϕ' 表示由此得到的匹配。于是$D_i(p, p \mid \phi') = D_i(p, p \mid \phi^R) + m < p\ell$。

我们声称，对于每个 $p < q \leq c$，

$$D_i(p, p \mid \phi') - D_i(q, p \mid \phi') \geq D^F(p \mid p) - D^F(q \mid p). \tag{12}$$

右侧是这样一群消费者的质量：在完全匹配下以 $(p,\ p)$ 从企业 i 购买，但当其价格上升至 q 时停止从 i 购买。我们证明，在 ϕ' 下，这部分消费者质量中的每一部分都会为企业 i 产生等量的需求损失。

考虑这样一位消费者。若她在 ϕ^R 下被排除，她在完全匹配下的保留价格低于 $q \leq c$，因此在 ϕ' 下，她又被纳入全面考虑。于是，她以 p 的价格从 i 购买，并以 q 的价格停止从 i 购买，对公式（12）左侧贡献相同的质量。

反之，假设她在 ϕ^R 下有非空的分配。若她对产品 i 的估值超过 p，归一化会将 $\{i\}$ 分配给她。她的保留价格与完全匹配下相同，因此在 q 处，她同样不再计入企业 i 的需求。如果两个估值都超过 p 且她得到全面考虑，则结论仍然成立。

最后，假设两项估值都高于 p，且她没有获得全面考虑。由于她在完全匹配下会从 i 购买，产品 i就是她偏好的产品。归一化排除了仅偏好匹配，因此她在 ϕ^R下的非空分配必定是 $\{j\}$，即她较不偏好的产品。因此，她本身并未为企业 i在 ϕ^R下的需求做出贡献。相反，考虑她的镜像类型。根据对称性，数量相同的镜像消费者被分配到 $\{i\}$。将原始类型写作$(p+s+d,\ p+s)$，其在完全匹配下对企业 i 的保留价格为 $p+d$，而被分配到 $\{i\}$ 的镜像消费者的保留价格为 $p+s$。我们已在上文证明 $s<d$。因此，如果原始消费者在完全匹配下因企业 i 将价格提高至 q而流失，那么数量相同、被分配到 $\{i\}$ 的镜像消费者也会在 ϕ'下流失。

因此，企业 i在完全匹配下从 p到 q 之间损失的每一单位需求，都对应着在 ϕ' 下同样损失的等量需求。这证明了（12）。

现在，我们将（12）与完全匹配需求损失界（11）结合起来。对于 $q\in(p,\ c]$，偏离至 q 所带来的利润增益为

$$
\begin{aligned}
&qD_i(q,p\mid\phi')-pD_i(p,p\mid\phi')\\
&\quad=(q-p)D_i(p,p\mid\phi')-q\big[D_i(p,p\mid\phi')-D_i(q,p\mid\phi')\big]\\
&\quad\le(q-p)D_i(p,p\mid\phi')-q\big[D^F(p\mid p)-D^F(q\mid p)\big] \qquad \text{by (12)}\\
&\quad\le(q-p)D_i(p,p\mid\phi')-p\ell(q-p) \qquad \text{by (11)}\\
&\quad=(q-p)\big[D_i(p,p\mid\phi')-p\ell\big]<0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

对于 $q>c$，恢复的消费者中没有人会在 q 时从企业 i 购买，因此 $D_i(q,\ p\mid\phi')=D_i(q,\ p\mid\phi^R)$。由于 ϕ^R 满足所有向上激励约束，而恢复使 $(p,\ p)$ 处的需求增加了 m，因此在 ϕ' 下，该偏离仍无利可图。

因此，ϕ' 对于松弛问题是可行的。除零测度边界外，恢复的消费者都获得正的消费者剩余，因此 ϕ' 产生的消费者剩余严格高于 ϕ^R，这与最优性矛盾。因此，$D_i(p,\ p\mid\phi^R)\ge p\ell$。根据上文的降价论证，任何一家企业都不存在有利可图的向下偏离。 □

B.3 社会剩余与交易量最优性的两步结构

定理 *2* 的两步扩展。 在第 3.1 节的假设下，固定 $0 < p < p^*$。对于社会剩余或交易量，我们证明， $\mathcal{M}(p)$ 上的最优值都可应用定理 2 的两个步骤。这里不要求独立性。

首先，仅在向上价格激励约束下最大化所选目标函数。当最大化交易量时，在所有交易量最大化点中，选择同时最大化社会剩余的方案。这一平局裁决排除了这样一类分配：在不改变交易量或违反向上激励约束的情况下，可以通过重新安排来增加社会剩余。附录 B.2中的存在性论证适用于这些连续线性目标函数。其归一化同样适用：省略估值低于 p 的产品，并将对两个估值均高于 p 的消费者的仅偏好分配改为全面考虑。两个目标函数均得以保持，向上需求也不会增加。保留的仅分配较不偏好的产品必须满足 $s < d$：如果 $s \geq d$，全面考虑会保持交易量不变，严格增加社会剩余，并使向上需求不会增加，因为其保留价格为 $p + d \leq p + s$。

附录 B.2 中的恢复论证仍然排除了向下偏离，但其最优性步骤必须采用新的目标函数。令 ϕ 为所得的归一化最优解，并令 $\ell = -\partial_q D^F(q \mid p)\big|_{q=p}$。由于 $D^F(p \mid p) \geq p\ell$，且对称性表明 $D^F(p \mid p) - D_i(p, p \mid \phi)$ 是每家企业被排除的可负担消费者质量，若 $D_i(p, p \mid \phi) < p\ell$，我们便可以对称地恢复每家企业 $0 < m < p\ell - D_i(p, p \mid \phi)$ 的被排除的可负担消费者质量，优先纳入全面考虑情形下保留价格最低的消费者，直至临界值 c。向恢复的消费者提供所有他们负担得起的产品，并将由此得到的匹配记为 ϕ'。因此 $D_i(p, p \mid \phi') = D_i(p, p \mid \phi) + m < p\ell$。对于 $p < q \leq c$，在 q 处流失的每位完全匹配顾客，要么已被恢复，要么已被展示所有可负担产品，要么对应于等量的镜像消费者；这些消费者只与其较不偏好的产品匹配，且其保留价格 $p + s$ 低于 $p+d$。因此，恢复后的策略所造成的需求损失至少为 $D^F(p \mid p) - D^F(q \mid p)$。方程（11）将其偏离利润增益限制在 $(q - p)[D_i(p, p \mid \phi') - p\ell] < 0$ 以内。对于 $q > c$，恢复的消费者不会增加偏离需求，而目标利润会增加。因此，恢复既保持向上可行性，又严格提高社会剩余和交易量，矛盾。故 $D_i(p, p \mid \phi) \geq p\ell$。联合对称性

与对数凹性给出与附录 B.2 中相同的降价界，

$$D_i(q, p \mid \phi) - D_i(p, p \mid \phi) \leq (p - q)\ell \qquad (0 \leq q < p),$$

这使得任何向下偏离都无利可图。在下文的重排之后，这一论证仍然适用。

在每个间隙处 d，都按照定理 2 的证明，交换相等的条件质量及其镜像类型。将全面考虑从较低的 s 移至较高的 s，并将仅分配较不偏好的产品的分配反向调整，可同时保持两个目标不变：交易的质量相同，承担错配损失的质量也相同 d。向上需求弱减，因为全面考虑下的保留价格 $p + d$ 与 s无关，而仅匹配至较不偏好的产品时的保留价格 $p + s$ 随 s增加。在较低的 s处交换全面考虑与较高的 s 处的排除，可保持交易量不变、严格提高社会剩余，并使向上需求保持不变。社会最优性或社会剩余平局裁决会排除后一种反向排列。因此，同样的条件重排会在每个 d处将全面考虑分配给 s的上尾，并设置一个可测截断值；低于该截断值的消费者仅匹配至其较不偏好的产品，或被排除。

暂时将临界值以下每位被排除的消费者重新分配给她较不偏好的单品，并将每位被排除的唯一可负担消费者重新分配给该产品。这就得到了~确定性第一步匹配 ϕ；继承的排除即为步骤 2。它们确保 CM($D_i(\cdot,\ p \mid \phi)$ $K_i(\cdot \mid \phi)$ p)~ ~的可行性，因为从一家企业的单品群体中排除消费者，绝不会影响另一家企业的需求。按分配产品价值 x 对排除进行条件平均，可保留每项需求及两个目标。

最后，推论 1 中的容量可行排除规则能够最大化全部三个目标。在给定 $p > 0$ 的情况下，最高的可行目标利润会带来最高的目标销量。更进一步，该推论中的包络在所有支持 p的容量可行排除规则中，逐点最小化需求损失 M ，包括目标利润较低的规则。排除单品消费者会使每家企业损失数量 $M(p)$，并损失社会价值

$$\int_p^{\bar{v}} x\,[-dM(x)] = pM(p) + \int_p^{\bar{v}} M(q)\,dq.$$

因此，它使两种损失以及消费者剩余损失 $\int_p^{\bar{v}} M(q)\ dq$ 均达到最小；等价地，$SS = CS + pQ$ 在目标价格处。如果最高可行利润为零，激励相容性就会迫使所有正价格下的需求均为零，因此最大程度的排-

除会产生相同的零数量和社会剩余，与原推论中的情况一样。对两个单元素群体分别独立且对称地应用排除规则；另一项估值中的条件临界值可确定性地实现其排除比例。

全局结果可由推论 4 的相同论证得出，并利用命题5排除价格不低于 p^*的最优价格。 □

B.4 独立同分布情形

在本小节中，估值独立同分布，具有共同的边际分布G，并且在 $[0, \bar{v}]$ 上具有连续可微的对数凹密度 g，该密度在 $(0, \bar{v})$ 上为正。记 $S = 1 - G$，并在 $(0, \bar{v})$ 上定义 $m = S/g$。 m 的端点值按单侧极限理解，其中 $m(\bar{v}) = 0$，且 $1/m(0) = g(0)$，其中 $1/(+\infty) = 0$。下文的导数公式适用于内部点；端点处的不等式则由单侧极限得到。

B.4.1 社会最优匹配

定理 *3(a)* 的证明。 由对称性，在本证明和附录B.4.3中，我们始终讨论企业1的需求。

步骤 1：将注意力限制在相关价格上。命题5 在 p^*处建立了一个社会剩余严格高于完全匹配的对称均衡。任何匹配 ϕ 和共同价格 p 若要优于这一基准，必须满足

$$p < p^*, \qquad D_1(p, p \mid \phi) > D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}).$$

事实上，在任意固定价格下，完全匹配都能使社会剩余最大化，因此，含有$p \geq p^*$的结果不可能优于基准。此外，在 p^* 下进行完全匹配，会服务于偏好估值最高的消费者。交易数量至多相同的分配，因此无法产生更高的社会剩余。这些比较仅取决于最终的分配，因此也适用于下文的有限松弛问题。

接下来，我们将改善型均衡的价格下界限定为严格大于零。附录B.4.2证明了每个对称均衡都满足

$$D_1(p, p \mid \phi) \leq B(p), \qquad B(p) = p\left[g(p) + \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv\right].$$

令 $\underline{p}$ 为方程 $B(p) = D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})$ 的最小正解。这样的解存在，因为 $B(0) = 0$，且 B 连续。方程 (LC.9) 给出 $B(p^*) - D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) = p^* g(p^*) S(p^*) > 0$。根据第一个交点的定义，对于 $0 \leq p \leq \underline{p}$，$B(p) \leq D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})$。因此，这种价格下不存在能够优于基准的真实对称均衡。由此，我们可以将价格搜索范围限制在 $[\underline{p}, \bar{v}]$，而不排除任何可能最优的真实均衡。

步骤 2：有限向上偏离松弛。令 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset (0, \bar{v})$ 为有限集合，且它们的并集在 $(0, \bar{v})$ 中稠密。对于每个 n，仅受向上偏离约束限制，联合优化目标价格 $p \in [\underline{p}, \bar{v}]$ 和对称匹配 ϕ，以最大化社会剩余

$$(p + x) D_1(p + x, p \mid \phi) \leq p D_1(p, p \mid \phi), \qquad x \in X_n.$$

与定理 2的证明中一样，我们可以省略价值低于 $\underline{p}$ 的产品，并在两种产品均可负担时，将仅偏好分配替换为全面考虑。这些改变不会影响目标价格下的需求和社会剩余，并会弱化向上偏离带来的需求。因此，我们可以将注意力限于以下匹配：恰有一种产品可负担时，分配可负担产品或外部选项；两种产品均可负担时，则分配全面考虑、较不偏好的产品或外部选项。允许在这些分配之间进行随机化。无法负担任何一种产品的消费者会选择不购买。

附录中的紧致性论证B.2 证明每个有限松弛问题都存在最优解。设（p_n，ϕ_n）是第 n个松弛问题的最优价格和对称匹配。命题5 给出了同一个严格改进的均衡，且该均衡对每个有限松弛问题都可行。因此，每个有限最优解都严格优于完全匹配基准。根据步骤 1 中的配置比较，

$$\underline{p} \leq p_n < p^*, \qquad D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) > D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}).$$

步骤 3–5 证明，每个有限最优解都可以在不排除负担得起价格的消费者的情况下选取。随后，步骤 6 得到一个极限，该极限支持真正的对称均衡，并实现全局社会剩余最优。

步骤 3：拉格朗日乘子与无排斥条件。固定 n和一个最优对（p_n， ϕ_n）。用 $X_n = \{x_1, \ldots, x_J\}$和 $q_j = p_n + x_j$表示经过测试的偏离价格。在固定 p_n时，社会剩余和有限激励约束关于匹配概率是线性的。可达目标值和约束值的集合是紧且凸的。通过为一组正测度的消费者提供服务，可以获得一个严格可行匹配；这些消费者唯一可负担的估值高于 p_n 但低于最小的测试偏离价格。这些消费者以 p_n 购买，但不会以任何 q_j购买，因此每个约束都严格松弛。有限维分离因此给出非负乘子 λ_j^n。

写出 $\lambda^n = (\lambda_1^n, \ldots\ldots, \lambda_J^n)$。对于试验价格 p和匹配 ϕ，定义拉格朗日 n

$$L(p, \phi, \lambda^n) = \frac{SS(\phi, (p, p))}{2} + \sum_j \lambda_j^n \left[pD_1(p, p \mid \phi) - (p + x_j) D_1(p + x_j, p \mid \phi) \right].$$

最优匹配 ϕ_n 在归一化匹配上最大化 $L(p_n, \phi, \lambda^n)$，且不施加激励约束。对于唯一可负担产品的价值为 $v \geq p_n$的消费者，提供该产品所得的拉格朗日得分为

$$h_n(v) = v + p_n \sum_j \lambda_j^n - \sum_{q_j \leq v} q_j \lambda_j^n.$$

定义 $\kappa_n = \sum_j \lambda_j^n \dfrac{q_j - p_n}{q_j}$。该得分满足 $h_n(v) \geq v(1 - \kappa_n)$。事实上，当$q_j \leq v$时，我们有 $p_n - q_j \geq -v(q_j - p_n)/q_j$，而包含 $q_j > v$ 的项贡献$p_n \lambda_j^n \geq 0$。

同样的论证表明，当两种产品都负担得起时，只展示较不偏好的产品会产生严格为正的拉格朗日得分，只要 $\kappa_n < 1$。由于排除的得分为零， $\kappa_n < 1$ 排除了对负担得起的消费者的排除。我们利用目标价格 p_n的最优性证明这一不等式。

步骤 4：提高目标价格。由于 (p_n, ϕ_n) 是联合最优的，如果新组合可行，那么提高目标价格并改变匹配就无法增加社会剩余

。我们考虑略高的价格 $p_n + h$，并通过将每种原消费者类型的分配概率复制给估值更高的类型来构造匹配。这种构造限制了价格上涨造成的交易损失。新的匹配不必满足 $p_n + h$ 处的激励约束，因此我们改为比较两个价格下采用相同乘数的拉格朗日函数。

附录开头回顾的递增风险率性质 B.4.3 表明m 是非递增的。对于 $0 < h < \bar{v} - p_n$，令 $\theta_h = S(p_n + h)/S(p_n)$，并在整个估值区间上定义 Φ_h 如下：

$$\begin{cases} G(\Phi_h(v)) = \dfrac{G(p_n + h)}{G(p_n)} G(v), & 0 \le v < p_n, \\ S(\Phi_h(v)) = \theta_h S(v), & p_n \le v \le \bar{v}. \end{cases}$$

两个分支均严格递增，并在 $\Phi_h(p_n) = p_n + h$ 处相交。因此，Φ_h 连续，且将 $[0, p_n)$ 映射到 $[0, p_n + h)$，将 $[p_n, \bar{v}]$ 映射到 $[p_n + h, \bar{v}]$。

对于 $p_n \le v < \bar{v}$，对 h 求上分支的导数可得

$$\frac{\partial \Phi_h(v)}{\partial h} = \frac{m(\Phi_h(v))}{m(p_n + h)} \in [0, 1].$$

因此，$0 \le \Phi_h(v) - v \le h$。上分支还会弱化可负担估值之间的差异。事实上，对其定义恒等式关于 v 求导可得 $\partial_v \Phi_h(v) = m(\Phi_h(v))/m(v) \le 1$，因为 $\Phi_h(v) \ge v$ 且 m 非递增。利用连续性将结果延伸至端点，可得

$$0 \le \Phi_h(v) - v \le h \quad (v \ge p_n), \qquad \Phi_h(a) - \Phi_h(b) \le a - b \quad (a > b \ge p_n).$$

对于每个原始类型 $v = (v_1, v_2)$，通过 $v_i' = \Phi_h(v_i)$ 构造 $v' = (v_1', v_2')$。定义较高价格下的复制匹配为 $\phi_{n,h}(S \mid v') = \phi_n(S \mid v)$，对每个考察集合 S 均如此。这些变换保持产品的可负担性不变；归一化则在两种产品都不可负担时分配空集。因此，每种类型 v 的相同分配概率都会复制到其变换后的类型v'。复制匹配具有对称性并经过归一化，但不一定满足 $p_n + h$处的有限激励约束。

对于这个固定的 n，令 $V(p)$ 表示在目标价格 p 下有限松弛问题中 $SS/2$ 的最大值。令 $\lambda_h^n = (\lambda_{j,h}^n)_{j=1}^J$ 为 $p_n + h$ 处的最优有限乘子，其中

测试偏离价格为 $q_j + h$。由于 p_n 是联合最优的，

$$L(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda_h^n) \le V(p_n + h) \le V(p_n) \le L(p_n, \phi_n, \lambda_h^n). \tag{S.12}$$

第一个不等式由有限对偶性得出： $V(p_n + h)$ 是所有归一化匹配（包括$\phi_{n,\,h}$）在最优乘子处的拉格朗日函数的最大值。第二个不等式由价格最优性得出。第三个不等式则是因为 ϕ_n 在 p_n处满足有限激励约束，因此非负乘子会为其目标值 $V(p_n)$ 添加非负项。因此

$$L(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda_h^n) - L(p_n, \phi_n, \lambda_h^n) \le 0. \tag{S.13}$$

步骤 5：从价格最优性到无排斥。 现在我们利用（S.13）来证明$\kappa_n < 1$。难点在于，我们对最优匹配 ϕ_n 或个体乘子 λ_j^n知之甚少。下面的引理将拉格朗日函数的比较转化为一个不等式，大幅减少了我们对这些未知对象的依赖。定义

$$\Gamma(p) = \sup_{q>p} \frac{q}{q-p}[qS(q) - pS(p)], \qquad p \in [\underline{p}, p^*).$$

引理 I.1（价格扰动不等式）。 存在一组最优乘子 λ^n，使得它们在 p_n 处满足

$$\begin{aligned}&(\kappa_n - 1)\big[m(p_n)D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - \Gamma(p_n)\big] \\ &\quad \le \Gamma(p_n) - m(p_n)D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) + p^*G(p^*)S(p^*) - \int_{p_n}^{p^*} vg(v)\,dv.\end{aligned} \tag{I.1}$$

该引理计算了提高目标价格所产生的极限影响。其证明对涉及未知匹配 ϕ_n 的项进行界定，并利用互补松弛性将个体乘子 λ_j^n 汇总为单一数量 κ_n。由此得到的不等式仅通过匹配在 p_n处的总需求来体现匹配。我们在附录 B.4.3 中给出相关计算，以便读者无需了解技术细节也能读懂后续论证。

虽然我们无法准确知道这一需求，但步骤 2 证明它高于完全匹配基准。因此，若 $\kappa_n \ge 1$，我们可以用基准需求替换未知需求

在（I.1）左侧，从而得到一个仅涉及 κ_n、分布和 p_n的必要不等式。我们对 p_n也知之甚少，但步骤 2 保证了 $p_n \in [p, p^*)$。以下分布不等式足以在整个区间内排除 $\kappa_n \geq 1$。

引理 S.1（分布不等式）。 在独立同分布对数凹性下，对每个 $p \in [p, p^*)$,

$$\Gamma(p) < m(p) D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) + \min\left\{0, \int_p^{p^*} v g(v)\, dv - p^* G(p^*) S(p^*)\right\}. \tag{I.2}$$

证明见附录B.4.3，位于 引理 S.1 的证明。

在 引理 S.1 处应用 $p = p_n$，会使（I.1）的右侧严格为负。该引理还意味着 $\Gamma(p_n) < m(p_n) D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})$。结合步骤 2 中的需求比较，可得

$$m(p_n) D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - \Gamma(p_n) > 0.$$

（$\kappa_n - 1$ 在（I.1）左侧的系数严格为正，而右侧严格为负。因此 $\kappa_n < 1$。根据步骤 3，每个拥有可负担产品的消费者都有一个拉格朗日得分严格为正的购买分配，而排除的得分为零。因此 ϕ_n 不会排除任何负担得起的消费者。

步骤 6：从有限松弛问题过渡到真实均衡。 考虑步骤 2 中定义的最优解序列（p_n, ϕ_n），其中向上偏离被限制在嵌套的有限集合 X_n 内，这些集合的并集在 $(0, \bar{v})$ 中稠密。根据步骤 5，每个 ϕ_n 都可以在不排除负担得起的消费者的情况下选取。我们证明，这些解的一个极限支持一个真正的对称均衡，并达到全局社会剩余最优。

取极限。 由于 $p_n \in [p, \bar{v}]$，我们可以取一个子序列，使得 $p_n \to \hat{p}$。匹配概率的弱-*紧致性使我们能够进一步取子序列，使得 ϕ_n 收敛到一个对称匹配 ϕ。由于估值分布具有连续密度，且购买边界的概率为零，相关的需求和社会剩余积分均收敛。特别地，

$$\begin{aligned} SS(\phi_n, (p_n, p_n)) &\longrightarrow SS(\phi, (\hat{p}, \hat{p})), \\ D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) &\longrightarrow D_1(\hat{p}, \hat{p} \mid \phi). \end{aligned} \tag{S.37}$$

极限结果严格优于完全匹配基准。事实上，命题 5给出了一个固定的真实均衡，其社会剩余超过基准，差额为 $\delta > 0$。该均衡对每个有限松弛问题都可行，因此每个有限最优解所实现的剩余至少与之相同。由（S.37）可知，这一正向改进在极限中仍然成立。因此，步骤 1 中的配置比较意味着 $\hat{p} < p^*$。

由于 ϕ_n 不排除任何负担得起的消费者，因此它服务于对至少一个产品的估值高于 p_n 的每位消费者。由对称性，$D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) = [1 - G(p_n)^2]/2$。取极限得到

$$D_1(\hat{p}, \hat{p} \mid \phi) = \frac{1 - G(\hat{p})^2}{2}. \tag{S.38}$$

在步骤 2 的归一化下，这是价格为 $\hat{p}$ 时可达到的最大对称需求。因此，极限匹配同样不排除任何负担得起的消费者。

向上偏离。 固定 $x \in \bigcup_n X_n$。由于集合 X_n 是嵌套的，对于所有充分大的 n，

$$(p_n + x) D_1(p_n + x, p_n \mid \phi_n) \leq p_n D_1(p_n, p_n \mid \phi_n).$$

令其趋于极限，得到

$$(\hat{p} + x) D_1(\hat{p} + x, \hat{p} \mid \phi) \leq \hat{p} D_1(\hat{p}, \hat{p} \mid \phi). \tag{S.39}$$

偏离利润关于偏离价格的连续性，加上 $\bigcup_n X_n$ 的稠密性，将（S.39）扩展到每个向上偏离。高于估值支持集的价格不会产生需求。

向下偏离。 由于极限匹配经过归一化且不排除任何负担得起的消费者，与定理 3(b) 的证明中相同的论证表明，任何向下偏离都不会带来利润。结合向上偏离约束，这证明了 $(\hat{p}, \hat{p})$ 是在 ϕ 下的对称纯策略均衡。

全局最优性。 令 $V_n = SS(\phi_n, (p_n, p_n))$ 表示第 n 个有限松弛问题中的最大社会剩余。由于约束是嵌套的，

$$V_1 \geq V_2 \geq \cdots. \tag{S.40}$$

根据步骤 1，所有优于完全匹配基准的真正的对称均衡，其价格都在 $[\underline{p}, \bar{v}]$ 中，并且对每个有限松弛问题都是可行的。均衡

在此范围之外的均衡无法优于该基准，而每个有限最优解都严格超过该基准。因此，如果 V^* 表示真正的对称均衡中社会剩余的上确界，

$$V_n \geq V^* \qquad \text{for every } n. \tag{S.41}$$

根据（S.37），

$$SS(\phi, (\hat{p}, \hat{p})) = \lim_{n\to\infty} V_n \geq V^*.$$

极限配对是真正的对称均衡，因此反向不等式也成立。于是

$$SS(\phi, (\hat{p}, \hat{p})) = V^*. \tag{S.42}$$

因此，存在一个全局社会剩余最优的对称均衡，且不排除负担得起的消费者。应用命题 6证明中的对称临界值重排会保留这一无排除性质，因此也可以选择一个具有定理2所述步骤 1 截止结构的最优值。这就证明了定理3(a)。□

B.4.2 贸易最优匹配

定理 *3(b)* 的证明。

步骤 1：普适上界。固定一个任意的、以共同价格 p 为支撑且允许排除的对称匹配 ϕ。可负担性和对称性意味着

$$D_i(p, p \mid \phi) \leq \frac{1 - G(p)^2}{2}. \tag{14}$$

当企业 i 将价格从 p 提高到 $p + \varepsilon$时，一阶需求损失可分为三种互斥情形。

(i) 在 p时，只有企业 i 负担得起。流失的质量至多为 $\varepsilon g(p)G(p) + o(\varepsilon)$。

(ii) 两家企业在 p 处都可负担，但消费者只看到企业 i。这包括仅偏好分配。损失的消费者数量至多为 $\varepsilon g(p)[1 - G(p)] + o(\varepsilon)$。

(iii) 两家企业都可负担，且消费者会考虑两家企业。最初偏好企业 i 的消费者只有在 $v_i - v_j < \varepsilon$ 时才会流失。这类消费者的数量为

$$\int_p^{\bar{v}} g(v_j) \int_{v_j}^{\min\{v_j+\varepsilon,\bar{v}\}} g(v_i)\, dv_i\, dv_j = \varepsilon \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv + o(\varepsilon).$$

因此，

$$D_i(p,p \mid \phi) - D_i(p+\varepsilon,p \mid \phi) \le \varepsilon \left[g(p) + \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv \right] + o(\varepsilon). \tag{15}$$

均衡激励约束为

$$(p+\varepsilon) D_i(p+\varepsilon,p \mid \phi) \le p D_i(p,p \mid \phi).$$

重新整理该约束并应用（15）可得

$$\begin{aligned} \varepsilon D_i(p,p \mid \phi) &\le (p+\varepsilon)\big[D_i(p,p \mid \phi) - D_i(p+\varepsilon,p \mid \phi)\big] \\ &\le (p+\varepsilon) \left\{ \varepsilon \left[g(p) + \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv \right] + o(\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

除以 ε 并令 $\varepsilon \downarrow 0$，我们得到

$$D_i(p,p \mid \phi) \le B(p), \tag{16}$$

其中

$$B(p) := p \left[g(p) + \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv \right]. \tag{17}$$

步骤 2：交易数量阈值。

引理3(　　交易数量阈值引理）。 存在唯一的 $p^T \in (0,\ p^*)$ 满足方程

$$\frac{1-G(p^T)^2}{2} = B(p^T).$$

此外，对于 $0 \le p \le p^T$，B 严格递增。

引理*3*的证明。在此证明中，记

$$A(p) = \frac{1-G(p)^2}{2}, \qquad C(p) = g(p) + \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv, \qquad B(p) = pC(p).$$

我们首先证明存在性。当取零时，$B(0) = 0 < A(0) = 1/2$。方程（LC.9）结合 $A(p^*) = D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})$，得到

$$B(p^*) - A(p^*) = p^* g(p^*) S(p^*) > 0.$$

因此，根据连续性，在 $(0, p^*)$ 内存在一个交点。

接下来，我们直接证明唯一性。下面证明

$$C'(p) \ge -\frac{C(p)^2}{A(p)}, \qquad 0 \le p < \bar{v}. \tag{18}$$

在每个交点 $B(p) = A(p)$ 处，我们有 $p = A(p)/C(p)$，因此

$$\begin{aligned}\big[B(p) - A(p)\big]' &= C(p) + \frac{A(p)}{C(p)} C'(p) + g(p)G(p) \\ &\ge g(p)G(p) > 0.\end{aligned}$$

因此，每个交点都是从下向上穿过的，所以交点唯一。在交点之前，B（p）$< A$（p），且（18）推出

$$B'(p) = C(p) + pC'(p) \ge C(p)\left[1 - \frac{B(p)}{A(p)}\right] > 0.$$

这证明了直到 p^T 的严格单调性。

它仍然 需要证明（18）。设 S（p） $=1-G$（p）。方程（LC.3）和（LC.4）给出

$$g'(p) \geq -\frac{g(p)^2}{S(p)}, \qquad \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv \geq \frac{g(p)S(p)}{2}.$$

定义 $s = S(p)$。那么

$$C(p) \geq g(p)\left(1+\frac{s}{2}\right), \qquad A(p) = s\left(1-\frac{s}{2}\right),$$

因此

$$\frac{C(p)^2}{A(p)} \geq \frac{g(p)^2(1+s/2)^2}{s(1-s/2)} \geq \frac{g(p)^2(1+s)}{s}.$$

由此,

$$C'(p) = g'(p) - g(p)^2 \geq -\frac{g(p)^2(1+s)}{s} \geq -\frac{C(p)^2}{A(p)},$$

如所需。 □

令 Q 表示任意对称均衡（p， p）下的交易量和匹配ϕ。若 $p < p^T$， （16）和引理 3 给出

$$Q = 2D_i(p, p \mid \phi) \leq 2B(p) \leq 2B(p^T) = 1 - G(p^T)^2.$$

若 $p \geq p^T$，可负担性界限（14）则给出

$$Q \leq 1 - G(p)^2 \leq 1 - G(p^T)^2.$$

因此， $1 - G(p^T)^2$ 是交易量的普适上界。

步骤 3：通过最大错配实现。 在共同价格 p下，最大错配保留所有可负担交易，因此

$$D_i(p, p \mid \phi_p^{\max}) = \frac{1-G(p)^2}{2}. \tag{19}$$

对于单方面价格 $q \geq p$，需求为

$$D_i(q, p \mid \phi_p^{\max}) = G(p)[1-G(q)] + \int_q^{\bar{v}} g(v)[1-G(v+q-p)]\, dv. \tag{20}$$

第一项是仅有企业 i 在目标价格下对其而言价格可承受的消费者所产生的需求。[13] 此处及下文中，$G(x) = 1$对于 $x \geq \bar{v}$；偏离 $q \geq \bar{v}$ 会使需求为零。在 20 处从右侧对式（$q = p$）求导，得

$$\begin{aligned}\partial_q D_i(q, p \mid \phi_p^{\max})\big|_{q=p+} &= -g(p)G(p) - g(p)[1 - G(p)] - \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv \\ &= -g(p) - \int_p^{\bar{v}} g(v)^2\, dv.\end{aligned}$$

在 $p = p^T$ 处，因此阈值的定义等式给出一阶条件

$$\begin{aligned}&D_i(p^T, p^T \mid \phi_{p^T}^{\max}) + p^T\, \partial_q D_i(q, p^T \mid \phi_{p^T}^{\max})\big|_{q=p^T+} \\ &\quad = \frac{1 - G(p^T)^2}{2} - p^T \left[g(p^T) + \int_{p^T}^{\bar{v}} g(v)^2\, dv \right] = 0.\end{aligned}$$

我们首先排除向下价格偏离。附录 B.2 证明了对 p^T 的唯一完全匹配最佳响应高于 p^T，因为 $p^T < p^*$，且由于对数凹性，完全匹配利润在达到该最佳响应之前一直递增。相较于完全匹配，最大错配在目标价格下保持销售额不变，并且在单边向下调价后使需求弱下降。因此，对于 $0 \leq q < p^T$，

$$\begin{aligned}qD_i(q, p^T \mid \phi_{p^T}^{\max}) &\leq qD_i(q, p^T \mid \phi^{\text{full}}) \\ &\leq p^T D_i(p^T, p^T \mid \phi^{\text{full}}) \\ &= p^T D_i(p^T, p^T \mid \phi_{p^T}^{\max}).\end{aligned}$$

接下来需要排除全局向上偏离。（20）中的两项分别关于 q是对数凹的。第一项 $G(p)[1-G(q)]$, 根据Bagnoli 和 Bergstrom (2005年，定理 3）的生存函数结果可知是对数凹的。第二项根据 Pr´ekopa 定理（Pr´ekopa，1973年，定理 6），对联合对数凹函数积分可知是对数凹的

$$g(v)[1 - G(v + q - p)]\mathbf{1}\{v \geq q\}$$

[13]第二项可通过考察镜像类型（$p+s+d$，$p+s$）和（$p+s$，$p+s+d$）得到。若$s < d$，最大错配仅将两位消费者分别匹配至其较不偏好的产品，并且企业i 当且仅当 $s \geq q - p$ 时留住其分配到的消费者。若 $s \geq d$，两种产品均被展示，并且企业 i 当且仅当 $d \geq q - p$ 时留住其顾客。因此，留存等价于 $\min\{s, d\} \geq q - p$。将较低估值写为 $b = p + s$，将较高估值写为 $a = b + d$，这等价于 $b \geq q$ 和 $a - b \geq q - p$。所得有序积分为 $\int_q^{\bar{v}} g(b) \int_{b+q-p}^{\bar{v}} g(a)\, da\, db$，无需乘以 2，因为每一对镜像类型为企业 i 带来一位顾客。

在 v 上，其中密度在其支撑集之外扩展为零。

对于 $0 < p < \bar{v}$，直接定义

$$\omega = \frac{2G(p)}{1+G(p)}, \qquad t = \frac{pg(p)}{1-G(p)}, \qquad k = 2t + \frac{2p\int_p^{\bar{v}} g(v)^2\,dv}{[1-G(p)]^2}, \qquad z = \frac{q}{p}.$$

当 $q = p$时，两个需求组成部分在总需求中的权重分别为 ω 和 $1-\omega$，对数导数分别为 $-t/p$ 和 $-k/p$。分别对每个组成部分应用（LC.6）可得

$$\frac{qD_i(q,p \mid \phi_p^{\max})}{pD_i(p,p \mid \phi_p^{\max})} \le z\left[\omega e^{-t(z-1)} + (1-\omega)e^{-k(z-1)}\right]. \tag{21}$$

当 $p = p^T$时，有 $k \ge 2t$。方程（LC.2）还给出

$$t = \frac{pg(p)}{1-G(p)} \ge -\log[1-G(p)] = \log\frac{2-\omega}{2(1-\omega)}.$$

最后，一阶条件给出

$$\omega t + (1-\omega)k = 1.$$

因此，证明归结为确立以下技术引理。

引理 4 （加权平均指数不等式）。设 $\omega \in$ （0，1），并假设

$$t \ge \log\frac{2-\omega}{2(1-\omega)}, \qquad k \ge 2t, \qquad \omega t + (1-\omega)k \ge 1.$$

那么，对于每个 $z \ge 1$,

$$\omega e^{-t(z-1)} + (1-\omega)e^{-k(z-1)} \le \frac{1}{z}.$$

证明见附录B.4.3。

将引理 4 应用于 (21) 中的 $p = p^T$ 表明，每一种向上偏离 $q > p^T$ 都无利可图。结合向下偏离论证，这证明 $\phi_{p^T}^{\max}$ 支持 (p^T，p^T) 作为一个均衡。根据 (19)，其交易量为 $1-G(p^T)^2,$，达到步骤 2 中的普适上界。因此，$\phi_{p^T}^{\max}$ 是对称交易最优的。

□

B.4.3 技术引理

我们采用标准的递增风险率性质： S 是对数凹的，且 g/S 是非递减的，因此 m 是非递增的（Bagnoli 和 Bergstrom，2005年，定理 3 和推论 2）。特别地， v/m (v) 在 $[0, \bar{v})$ 上严格递增。

我们首先证明两个预备结果，供下文的技术证明使用。引理 B.1 汇总了由对数凹性推出的不等式，而引理 B.2 则从完全匹配均衡中推导出基准界。

引理 B.1 （对数凹分布的界）。 生存函数界。 对于每个$0 \leq a < b < \bar{v}$,

$$e^{-(b-a)/m(b)} \leq \frac{S(b)}{S(a)} \leq e^{-(b-a)/m(a)}. \tag{LC.1}$$

特别地,

$$S(p) \geq e^{-p/m(p)}. \tag{LC.2}$$

密度及平方密度界。对于每个 $v < \bar{v}$,

$$g'(v) \geq -\frac{g(v)^2}{S(v)}, \tag{LC.3}$$

and

$$\int_v^{\bar{v}} g(t)^2\, dt \geq \frac{g(v)S(v)}{2}. \tag{LC.4}$$

密度比较 （Boyd 和 Vandenberghe，2004年，第 3.1.1 和 3.1.3 节）。对于 $0 \leq a < b < \bar{v}$,

$$g(v) \geq \min\{g(a), g(b)\}, \qquad a \leq v \leq b. \tag{LC.5}$$

此外，如果 $g(b) < g(a)$，那么 g 在 $[b, \bar{v}]$上单调不增。
指数切线界与弦线界 (Boyd 和 Vandenberghe，2004年，第 3.1.3 节和第 3.5.1 节）。更一般地，如果 H 在某个区间上为正且对数凹，那么在每个可微点处 a,

$$H(x) \leq H(a) \exp\left[(x-a)\frac{H'(a)}{H(a)}\right]. \tag{LC.6}$$

对于该区间内的每个 $a < x < b$,

$$H(x) \geq H(a)^{(b-x)/(b-a)} H(b)^{(x-a)/(b-a)}. \tag{LC.7}$$

证明。递增风险率性质给出 $(\log S)'(v) = -1/m(v)$。在 a 和 b之间积分，由于 $m(a) \geq m(v) \geq m(b)$,

$$-\frac{b-a}{m(b)} \leq \log \frac{S(b)}{S(a)} \leq -\frac{b-a}{m(a)}.$$

两边取指数得（LC.1）。令 $a = 0$，利用 S（0） $= 1$，可得（LC.2）。

对 $m = S/g$ 求导得

$$m'(v) = -1 - \frac{S(v)g'(v)}{g(v)^2} \leq 0,$$

这意味着（LC.3）。此外，由于风险率 g/S 是非递减的,

$$\begin{aligned}\int_v^{\bar{v}} g(t)^2\,dt &= \int_v^{\bar{v}} \frac{g(t)}{S(t)} S(t)g(t)\,dt \\ &\geq \frac{g(v)}{S(v)} \int_v^{\bar{v}} S(t)g(t)\,dt \\ &= \frac{g(v)S(v)}{2}.\end{aligned}$$

这证明了（LC.4）。

□

引理 B.2（完全匹配双寡头基准）。完全匹配基准满足

$$p^* \leq m(p^*). \tag{LC.8}$$

此外,

$$B(p^*) - D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) = p^* g(p^*) S(p^*) > 0. \tag{LC.9}$$

证明。 在完全匹配均衡下，需求为 $S(p^*)[1 - S(p^*)/2]$，一阶条件为

$$D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) = p^* \left[g(p^*)G(p^*) + \int_{p^*}^{\bar{v}} g(v)^2\,dv \right].$$

应用（LC.4），

$$\begin{aligned} & S(p^*)\left(1-\frac{S(p^*)}{2}\right) \\ & \quad \geq p^* g(p^*)\left[G(p^*)+\frac{S(p^*)}{2}\right] \\ & \quad = p^* g(p^*)\left(1-\frac{S(p^*)}{2}\right). \end{aligned}$$

由于公因子为正，$S(p^*) \geq p^* g(p^*)$，从而证明了 (LC.8)。最后，从 $B(p^*)$ 的定义中减去完全匹配一阶条件，得到 (LC.9)。

□

引理I.1的证明

固定 n。回想一下，步骤 4 构造了复制匹配 $\phi_{n,\,h}$ 在 $p_n + h$处，其最优乘子为 λ_h^n。我们使用价格最优性不等式 (S.13)，比较两个价格下的拉格朗日函数。

写作 $L = L_U + L_B$，其中 L_U 是恰好有一种可负担产品的消费者所作的贡献，L_B 是两种产品都可负担的消费者所作的贡献。根据归一化，没有可负担产品的消费者贡献为零。写作 $d\nu = g(v_1)g(v_2)\,dv_1 dv_2$。对有序类型积分时，我们使用 $v_2 < v_1$，并利用对称性计入其镜像。

恰有一种可负担产品的消费者。在原目标价格 p_n下，这些消费者有 $v_2 < p_n \leq v_1$。只有产品 1 是可负担的，因此他们的拉格朗日函数贡献为

$$\begin{aligned} L_U(p_n, \phi_n, \lambda_h^n) = \int_{v_2 < p_n \leq v_1} & \phi_n(\{1\} \mid v) \\ & \times \underbrace{\left[v_1 + p_n \sum_j \lambda_{j,h}^n - \sum_j q_j \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{v_1 \geq q_j\}\right]}_{(14a)} d\nu. \end{aligned} \tag{L.1}$$

在较高的目标价格下，相应的群体有 $v_2' < p_n + h \le v_1'$，其拉格朗日函数贡献为

$$
\begin{aligned}
L_U(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda_h^n) = \int_{v_2' < p_n + h \le v_1'} & \phi_{n,h}(\{1\} \mid v') \\
& \times \left[v_1' + (p_n + h) \sum_j \lambda_{j,h}^n - \sum_j (q_j + h) \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{v_1' \ge q_j + h\} \right] \\
& \times g(v_1') g(v_2')\, dv_1' dv_2'.
\end{aligned}
$$

我们用原始估值表示这个积分。根据构造，$v_1' = \Phi_h(v_1)$、$v_2' = \Phi_h(v_2)$，以及

$$
\begin{aligned}
\phi_{n,h}(\{1\} \mid v') &= \phi_n(\{1\} \mid v), \\
g(v_1')\, dv_1' &= \theta_h g(v_1)\, dv_1, \\
g(v_2')\, dv_2' &= \frac{G(p_n + h)}{G(p_n)} g(v_2)\, dv_2.
\end{aligned}
$$

对 Φ_h 的两个分支求导即可得到密度恒等式。因此，该变换将这个群体的联合密度缩放为 $\theta_h G(p_n + h)/G(p_n)$，同时保持其匹配概率不变。代入后得到

$$
\begin{aligned}
L_U(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda_h^n) = \theta_h \frac{G(p_n + h)}{G(p_n)} \int_{v_2 < p_n \le v_1} & \phi_n(\{1\} \mid v) \\
& \times \underbrace{\left[\begin{array}{l} \Phi_h(v_1) + (p_n + h) \sum_j \lambda_{j,h}^n \\ \quad - \sum_j (q_j + h) \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{\Phi_h(v_1) \ge q_j + h\} \end{array} \right]}_{\text{(15a)}} d\nu.
\end{aligned} \tag{L.2}
$$

我们比较（L.1）和（L.2）中的括号项。这里 $v_1 \ge p_n$，因此步骤 **4** 中关于上分支的界适用。若 $\Phi_h(v_1) \ge q_j + h$，则 $v_1 + h \ge \Phi_h(v_1) \ge q_j + h$，因此 $v_1 \ge q_j$。所以

$$
\mathbf{1}\{\Phi_h(v_1) \ge q_j + h\} \le \mathbf{1}\{v_1 \ge q_j\}.
$$

在偏离转换为 $q_j + h$ 后进行购买的消费者，因此也会在原始偏离为 q_j 后进行购买。结合 $\lambda_{j,\,h}^n \ge 0$，这

得出

$$\begin{aligned}(15\mathrm{a})-(14\mathrm{a}) \geq \Phi_h(v_1)-v_1 \\ + h\sum_j \lambda_{j,h}^n\big[1-\mathbf{1}\{v_1\geq q_j\}\big].\end{aligned} \tag{L.3}$$

将 (L.3) 应用于 (L.1) 与 (L.2) 之差，得到

$$\begin{aligned}&\frac{L_U(p_n,\phi_n,\lambda_h^n)-L_U(p_n+h,\phi_{n,h},\lambda_h^n)}{h} \\ &\quad\leq \frac{1-\theta_h G(p_n+h)/G(p_n)}{h} L_U(p_n,\phi_n,\lambda_h^n) \\ &\qquad -\theta_h\frac{G(p_n+h)}{G(p_n)}\int_{v_2<p_n\leq v_1}\phi_n(\{1\}\mid v) \\ &\qquad\qquad \times\left[\frac{\Phi_h(v_1)-v_1}{h}+\sum_j\lambda_{j,h}^n\big(1-\mathbf{1}\{v_1\geq q_j\}\big)\right]d\nu.\end{aligned} \tag{L.4}$$

第一项源于密度乘子的变化；其余积分记录了两个拉格朗日得分之间的差异。

由于 $h\downarrow 0$，步骤 4 中的恒等式给出

$$\begin{aligned}\theta_h\frac{G(p_n+h)}{G(p_n)} &\longrightarrow 1,\\ \frac{1-\theta_h G(p_n+h)/G(p_n)}{h} &\longrightarrow \frac{1}{m(p_n)}-\frac{g(p_n)}{G(p_n)},\\ \frac{\Phi_h(v)-v}{h} &\longrightarrow \frac{m(v)}{m(p_n)} \qquad (v\geq p_n).\end{aligned}$$

最优乘子也取决于 h。然而，对于固定的 n，步骤 3 中的严格可行性构造在目标价格充分接近时仍保持一致严格。因此，它给出了最优乘子 λ_h^n的界。我们可以取一个序列 $h\downarrow 0$，使得沿该序列 $\lambda_h^n\to\lambda^n$；由连续性和有限对偶性可知，λ^n 在 p_n 处是最优的。我们选择引理 I.1中的乘子为此极限。此后的所有极限均沿该序列取得。

在 (L.4) 中取上极限，得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\downarrow 0}\frac{L_U(p_n,\phi_n,\lambda_h^n)-L_U(p_n+h,\phi_{n,h},\lambda_h^n)}{h}\\
&\quad\le\left[\frac{1}{m(p_n)}-\frac{g(p_n)}{G(p_n)}\right]L_U(p_n,\phi_n,\lambda^n)\\
&\qquad-\frac{1}{m(p_n)}\int_{v_2<p_n\le v_1}\phi_n(\{1\}\mid v)m(v_1)\,d\nu\\
&\qquad-\sum_j\lambda_j^n\int_{v_2<p_n\le v_1}\phi_n(\{1\}\mid v)\big[1-\mathbf{1}\{v_1\ge q_j\}\big]d\nu.
\end{aligned}\tag{L.5}$$

至此，我们得到了恰好有一种产品可负担的消费者的界限。接下来，我们考虑两种产品都可负担的消费者，此时估值变换也会影响偏好差异。

两种产品均对消费者可负担。在 p_n 考虑 $p_n\le v_2<v_1$。在归一化匹配下，消费者获得全面考虑、仅获得较不偏好的产品，或选择外部选项。在全面考虑下，她以共同价格购买偏好产品，并且仅当 $v_1-v_2\ge x_j$ 时，在发生大小为x_j 的向上偏离后仍继续选择该产品。在仅分配较不偏好的产品的情况下，仅当 $v_2\ge q_j$ 时，在其被分配的企业将价格提高至 q_j 后，她仍继续购买。计入镜像类型后，贡献为

$$\begin{aligned}
L_B(p_n,\phi_n,\lambda_h^n)=\int_{p_n\le v_2<v_1}\Bigg\{&\phi_n(\{1,2\}\mid v)\\
&\times\underbrace{\begin{bmatrix}v_1+p_n\sum_j\lambda_{j,h}^n\\ \quad-\sum_j q_j\lambda_{j,h}^n\mathbf{1}\{v_1-v_2\ge x_j\}\end{bmatrix}}_{\text{(19a)}}\\
&+\phi_n(\{2\}\mid v)\underbrace{\begin{bmatrix}v_2+p_n\sum_j\lambda_{j,h}^n\\ \quad-\sum_j q_j\lambda_{j,h}^n\mathbf{1}\{v_2\ge q_j\}\end{bmatrix}}_{\text{(19b)}}\Bigg\}d\nu.
\end{aligned}\tag{L.6}$$

在更高的目标价格 $p_n + h$ 下，相应的贡献为

$$
\begin{aligned}
&L_B(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda_h^n) \\
&= \int_{p_n+h \le v_2' < v_1'} \left\{ \phi_{n,h}(\{1,2\} \mid v') \begin{bmatrix} v_1' + (p_n + h) \sum_j \lambda_{j,h}^n \\ - \sum_j (q_j + h) \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{v_1' - v_2' \ge x_j\} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \phi_{n,h}(\{2\} \mid v') \begin{bmatrix} v_2' + (p_n + h) \sum_j \lambda_{j,h}^n \\ - \sum_j (q_j + h) \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{v_2' \ge q_j + h\} \end{bmatrix} \right\} \\
&\qquad \times g(v_1') g(v_2') \, dv_1' dv_2'.
\end{aligned}
$$

这里，两个估值都经过 Φ_h的上分支变换，因此 $v_i' = \Phi_h(v_i)$和

$$
\begin{aligned}
\phi_{n,h}(\{1,2\} \mid v') &= \phi_n(\{1,2\} \mid v), \\
\phi_{n,h}(\{2\} \mid v') &= \phi_n(\{2\} \mid v), \\
g(v_i') \, dv_i' &= \theta_h g(v_i) \, dv_i.
\end{aligned}
$$

与单一可负担群体不同，两个坐标贡献了相同的因子 θ_h。因此，进行变量替换可得

$$
\begin{aligned}
&L_B(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda_h^n) \\
&= \theta_h^2 \int_{p_n \le v_2 < v_1} \left\{ \phi_n(\{1,2\} \mid v) \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_h(v_1) + (p_n + h) \sum_j \lambda_{j,h}^n \\ - \sum_j (q_j + h) \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{\Phi_h(v_1) - \Phi_h(v_2) \ge x_j\} \end{bmatrix}}_{\text{(20a)}} \right. \\
&\quad \left. + \phi_n(\{2\} \mid v) \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_h(v_2) + (p_n + h) \sum_j \lambda_{j,h}^n \\ - \sum_j (q_j + h) \lambda_{j,h}^n \mathbf{1}\{\Phi_h(v_2) \ge q_j + h\} \end{bmatrix}}_{\text{(20b)}} \right\} d\nu.
\end{aligned}
\tag{L.7}
$$

我们比较（L.6）和（L.7）中的括号项。由于 $p_n \le v_2 < v_1$，两个估值都位于上分支。步骤 4 中关于其收缩和位移界的条件意味着

$$\mathbf{1}\{\Phi_h(v_1) - \Phi_h(v_2) \ge x_j\} \le \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \ge x_j\},$$
$$\mathbf{1}\{\Phi_h(v_2) \ge q_j + h\} \le \mathbf{1}\{v_2 \ge q_j\}.$$

第一个不等式控制全面考虑下的购买：较不偏好的产品在两个目标价格下都负担得起，并且 Φ_h 弱化了偏好差异。第二个不等式控制仅匹配较不偏好产品时的购买，因为分配值最多增加 h。因此，无论采用哪种分配，变换都不会在经检验的向上偏离后产生新的购买。利用这些不等式以及 $\lambda^n_{j,\,h} \ge 0$ 可得

$$\begin{aligned}
&\text{(20a)} - \text{(19a)} \ge \Phi_h(v_1) - v_1 + h \sum_j \lambda^n_{j,h}\big[1 - \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \ge x_j\}\big], \\
&\text{(20b)} - \text{(19b)} \ge \Phi_h(v_2) - v_2 + h \sum_j \lambda^n_{j,h}\big[1 - \mathbf{1}\{v_2 \ge q_j\}\big].
\end{aligned} \tag{L.8}$$

将 (L.8) 应用于 (L.6) 与 (L.7) 的差，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{L_B(p_n, \phi_n, \lambda^n_h) - L_B(p_n + h, \phi_{n,h}, \lambda^n_h)}{h} \\
&\quad \le \frac{1 - \theta_h^2}{h} L_B(p_n, \phi_n, \lambda^n_h) \\
&\qquad - \theta_h^2 \int_{p_n \le v_2 < v_1} \left\{ \phi_n(\{1,2\} \mid v) \left[\frac{\Phi_h(v_1) - v_1}{h} + \sum_j \lambda^n_{j,h}(1 - \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \ge x_j\}) \right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \phi_n(\{2\} \mid v) \left[\frac{\Phi_h(v_2) - v_2}{h} + \sum_j \lambda^n_{j,h}(1 - \mathbf{1}\{v_2 \ge q_j\}) \right] \right\} d\nu.
\end{aligned} \tag{L.9}$$

由于 $\theta_h^2 \to 1$、$(1-\theta_h^2)/h \to 2/m(p_n)$，以及 $(\Phi_h(v)-v)/h \to m(v)/m(p_n)$ 对 $v \geq p_n$ 成立，沿相同的乘数子序列取上极限，得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\downarrow 0} \frac{L_B(p_n,\phi_n,\lambda_h^n) - L_B(p_n+h,\phi_{n,h},\lambda_h^n)}{h} \\
&\leq \frac{2}{m(p_n)} L_B(p_n,\phi_n,\lambda^n) \\
&\quad - \frac{1}{m(p_n)} \int_{p_n \leq v_2 < v_1} \big[\phi_n(\{1,2\} \mid v) m(v_1) + \phi_n(\{2\} \mid v) m(v_2)\big] d\nu \\
&\quad - \sum_j \lambda_j^n \int_{p_n \leq v_2 < v_1} \Big[\phi_n(\{1,2\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \geq x_j\}) \\
&\qquad\qquad + \phi_n(\{2\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_2 \geq q_j\})\Big] d\nu.
\end{aligned} \tag{L.10}$$

这就完成了对两个群体的分别界定。

合并两项贡献。由于 $L = L_U + L_B$，价格最优性不等式（S.13）给出

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \frac{L_U(p_n,\phi_n,\lambda_h^n) - L_U(p_n+h,\phi_{n,h},\lambda_h^n)}{h} \\
&+ \frac{L_B(p_n,\phi_n,\lambda_h^n) - L_B(p_n+h,\phi_{n,h},\lambda_h^n)}{h}.
\end{aligned}$$

对于所有充分小的 $h > 0$，该和均非负。沿着共同的乘数子序列应用两个上界（L.5）和（L.10），可得

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \left[\frac{1}{m(p_n)} - \frac{g(p_n)}{G(p_n)}\right] L_U(p_n,\phi_n,\lambda^n) + \frac{2}{m(p_n)} L_B(p_n,\phi_n,\lambda^n) \\
&- \frac{1}{m(p_n)} \int_{v_2 < p_n \leq v_1} \phi_n(\{1\} \mid v) m(v_1)\, d\nu \\
&- \frac{1}{m(p_n)} \int_{p_n \leq v_2 < v_1} \big[\phi_n(\{1,2\} \mid v) m(v_1) + \phi_n(\{2\} \mid v) m(v_2)\big] d\nu \\
&- \sum_j \lambda_j^n \int_{v_2 < p_n \leq v_1} \phi_n(\{1\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_1 \geq q_j\})\, d\nu \\
&- \sum_j \lambda_j^n \int_{p_n \leq v_2 < v_1} \Big[\phi_n(\{1,2\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \geq x_j\}) \\
&\qquad\qquad + \phi_n(\{2\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_2 \geq q_j\})\Big] d\nu.
\end{aligned} \tag{L.11}$$

最后两项可表示为经检验的向上偏离后造成的需求损失。在归一化匹配下，目标需求为

$$
\begin{aligned}
D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) = & \int_{v_2 < p_n \le v_1} \phi_n(\{1\} \mid v)\, d\nu \\
& + \int_{p_n \le v_2 < v_1} [\phi_n(\{1,2\} \mid v) + \phi_n(\{2\} \mid v)] d\nu,
\end{aligned}
$$

而企业**1**将价格提高至 $q_j = p_n + x_j$ 后的需求为

$$
\begin{aligned}
D_1(q_j, p_n \mid \phi_n) = & \int_{v_2 < p_n \le v_1} \phi_n(\{1\} \mid v) \mathbf{1}\{v_1 \ge q_j\}\, d\nu \\
& + \int_{p_n \le v_2 < v_1} \Big[\phi_n(\{1,2\} \mid v) \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \ge x_j\} \\
& \qquad + \phi_n(\{2\} \mid v) \mathbf{1}\{v_2 \ge q_j\} \Big] d\nu.
\end{aligned}
$$

相减得

$$
\begin{aligned}
& D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - D_1(q_j, p_n \mid \phi_n) \\
& \quad = \int_{v_2 < p_n \le v_1} \phi_n(\{1\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_1 \ge q_j\}) d\nu \\
& \qquad + \int_{p_n \le v_2 < v_1} \Big[\phi_n(\{1,2\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_1 - v_2 \ge x_j\}) \\
& \qquad\qquad + \phi_n(\{2\} \mid v)(1 - \mathbf{1}\{v_2 \ge q_j\}) \Big] d\nu.
\end{aligned}
$$

因此，（L.11）的最后两项等于 $-\sum_j \lambda_j^n[D_1(p_n,\ p_n \mid \phi_n) - D_1(q_j,\ p_n \mid \phi_n)]$。代入可得

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \underbrace{\left[\frac{1}{m(p_n)} - \frac{g(p_n)}{G(p_n)}\right] L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n) + \frac{2}{m(p_n)} L_B(p_n, \phi_n, \lambda^n)}_{\text{(25a)}} \\
& \underbrace{- \frac{1}{m(p_n)} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{v_2 < p_n \leq v_1} \phi_n(\{1\} \mid v) m(v_1)\, d\nu \\ \displaystyle + \int_{p_n \leq v_2 < v_1} [\phi_n(\{1,2\} \mid v) m(v_1) + \phi_n(\{2\} \mid v) m(v_2)] d\nu \end{array} \right\}}_{\text{(25b)}} \\
& \underbrace{- \sum_j \lambda_j^n \left[D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - D_1(q_j, p_n \mid \phi_n) \right]}_{\text{(25c)}}.
\end{aligned}
\tag{L.12}
$$

我们利用最优性和互补松弛简化（25a）和（25c）。由于 ϕ_n和 λ^n 是在 p_n处的原问题和对偶问题的最优解，有限对偶性给出

$$
L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n) + L_B(p_n, \phi_n, \lambda^n) = \frac{SS(\phi_n, (p_n, p_n))}{2}.
$$

因此，利用 $m(p_n)g(p_n) = 1 - G(p_n)$,

$$
\begin{aligned}
\text{(25a)} &= \frac{2}{m(p_n)} [L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n) + L_B(p_n, \phi_n, \lambda^n)] \\
&\quad - \left[\frac{1}{m(p_n)} + \frac{g(p_n)}{G(p_n)}\right] L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n) \\
&= \frac{SS(\phi_n, (p_n, p_n))}{m(p_n)} - \frac{L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n)}{m(p_n) G(p_n)}.
\end{aligned}
\tag{L.13}
$$

互补松弛还意味着，对每个 j,

$$
\lambda_j^n \left[p_n D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - q_j D_1(q_j, p_n \mid \phi_n) \right] = 0.
$$

因此，只要 $\lambda_j^n > 0$，相应的向上偏离约束就会取等号。因此

$$\begin{aligned}(25c) &= \sum_j \lambda_j^n \left[D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - D_1(q_j, p_n \mid \phi_n)\right] \\ &= D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) \sum_j \lambda_j^n \left(1 - \frac{p_n}{q_j}\right) \\ &= \kappa_n D_1(p_n, p_n \mid \phi_n).\end{aligned} \tag{L.14}$$

所有个体偏离乘数现在都只通过 κ_n 进入该项。将（L.13）–（L.14）代入（L.12），并乘以 m（p_n），可得

$$\begin{aligned}&SS(\phi_n, (p_n, p_n)) - \int_{v_2 < p_n \le v_1} \phi_n(\{1\} \mid v) m(v_1)\, d\nu \\ &- \int_{p_n \le v_2 < v_1} [\phi_n(\{1,2\} \mid v) m(v_1) + \phi_n(\{2\} \mid v) m(v_2)] d\nu \\ &\underbrace{- m(p_n) D_1(p_n, p_n \mid \phi_n)}_{\text{(28a)}} \\ &\qquad \ge \underbrace{\frac{L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n)}{G(p_n)}}_{\text{(28b)}} + (\kappa_n - 1) m(p_n) D_1(p_n, p_n \mid \phi_n).\end{aligned} \tag{L.15}$$

接下来需要对（28a）给出上界，并对（28b）给出下界。这些界消去了详细的匹配概率，只留下 p_n 处的总需求。

对 （L.15） 两侧进行界定。在归一化匹配下，社会剩余为

$$\begin{aligned}SS(\phi_n, (p_n, p_n)) = 2 &\int_{v_2 < p_n \le v_1} \phi_n(\{1\} \mid v) v_1\, d\nu \\ &+ 2 \int_{p_n \le v_2 < v_1} [\phi_n(\{1,2\} \mid v) v_1 + \phi_n(\{2\} \mid v) v_2] d\nu.\end{aligned} \tag{L.16}$$

代入（L.16）以及相应的目标需求表达式到（28a）中，可得

$$\begin{aligned}(28a) = &\int_{v_2 < p_n \le v_1} \phi_n(\{1\} \mid v)[2v_1 - m(v_1) - m(p_n)] d\nu \\ &+ \int_{p_n \le v_2 < v_1} \Big\{ \phi_n(\{1,2\} \mid v)[2v_1 - m(v_1) - m(p_n)] \\ &\qquad + \phi_n(\{2\} \mid v)[2v_2 - m(v_2) - m(p_n)] \Big\} d\nu.\end{aligned}$$

虽然我们不知道哪些消费者与哪些产品相匹配，但递增风险率性质使我们能够在不依赖其具体分配的情况下，为该表达式给出界限。计算分几步进行：

$$
\begin{aligned}
(28a) &\leq \int_{v_2<p_n\leq v_1} \phi_n(\{1\}\mid v)[2v_1 - m(v_1) - m(p_n)]d\nu \\
&\quad + \int_{p_n\leq v_2<v_1} [\phi_n(\{1,2\}\mid v) + \phi_n(\{2\}\mid v)][2v_1 - m(v_1) - m(p_n)]d\nu \\
&= [2p^* - m(p^*) - m(p_n)]D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) \\
&\quad + \int_{v_2<p_n\leq v_1} \phi_n(\{1\}\mid v)[2(v_1 - p^*) - m(v_1) + m(p^*)]d\nu \\
&\quad + \int_{p_n\leq v_2<v_1} [\phi_n(\{1,2\}\mid v) + \phi_n(\{2\}\mid v)] \\
&\qquad\qquad \times [2(v_1 - p^*) - m(v_1) + m(p^*)]d\nu \\
&\leq [2p^* - m(p^*) - m(p_n)]D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) \\
&\quad + \int_{\substack{v_2<v_1\\ v_1\geq p^*}} [2(v_1 - p^*) - m(v_1) + m(p^*)]d\nu \\
&= [2p^* - m(p^*) - m(p_n)]D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) \qquad \text{(L.17)} \\
&\quad + \int_{p^*}^{\bar v} [2(v - p^*) - m(v) + m(p^*)]g(v)G(v)\,dv \\
&= [2p^* - m(p^*) - m(p_n)][D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})] \\
&\quad + \int_{p^*}^{\bar v} [2v - m(v) - m(p_n)]g(v)G(v)\,dv \\
&\leq \int_{p^*}^{\bar v} [2v - m(v) - m(p_n)]g(v)G(v)\,dv \\
&= \int_{p^*}^{\bar v} [2vg(v)G(v) - S(v)G(v)]\,dv - m(p_n)D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) \\
&= \int_{p^*}^{\bar v} vg(v)\,dv - [vG(v)S(v)]_{p^*}^{\bar v} - m(p_n)D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) \\
&= \int_{p^*}^{\bar v} vg(v)\,dv + p^*G(p^*)S(p^*) - m(p_n)D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}).
\end{aligned}
$$

我们说明这一连串步骤的依据。由于 m 根据递增风险率性质单调不增， $2v - m(v)$ 单调递增。因此，将购买的较不受偏好的价值 v_2 替换为更高的价值 v_1 ，便得到第一个不等式。接下来，将基准系数 $2p^* - m(p^*) - m(p_n)$ 分开。残差函数 $2(v_1 - p^*) - m(v_1) + m(p^*)$ 在 p^* 以下为负，在其上方为非负。舍去负的贡献，并将购买概率上界估为 1，便得到下一个不等式。

对 v_2 积分，得到 $g(v)G(v)$。在完全匹配下，企业1向 p^* 以上价值较高的消费者销售，因此其需求为 $\int_{p^*}^{\bar{v}} g(v)G(v)\,dv$。根据 (LC.8) 和递增风险率性质，$p^* \le m(p^*) \le m(p_n)$，因为 $p_n < p^*$。因此， $2p^* - m(p^*) - m(p_n) \le 0$。结合步骤 2 中的 $D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) > D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})$，这就说明可以舍去基准需求差。

最后，利用 $S(v) = 1 - G(v)$ 和 $m(v)g(v) = S(v)$，最后几行由

$$\frac{d}{dv}[vG(v)S(v)] = G(v)S(v) + vg(v)[1 - 2G(v)]$$

以及 $S(\bar{v}) = 0$ 得出。

对于 (28b) 的下界，写作 $M(p) = \int_p^{\bar{v}} vg(v)\,dv$。回顾引理 I.1 之前的定义 I.1。由 (LC.8) 和递增风险率性质可知， $p_n < p^* \le m(p^*) \le m(p_n)$。因此，垄断收益函数在 p_n处具有正导数。因此 $\Gamma(p_n) > 0$，且将上确界限制在 $p_n < q \le \bar{v}$ 内不会改变其值。

回顾步骤 3， $h_n(v) = v + p_n \sum_j \lambda_j^n - \sum_j q_j \lambda_j^n \mathbf{1}\{v \ge q_j\}$。最优匹配逐点最大化拉格朗日函数，因此，恰有一种可负担产品的消费者所贡献的值，等于其购买得分的正部。因此，

$$\begin{aligned}
(28b) &= \frac{L_U(p_n, \phi_n, \lambda^n)}{G(p_n)} \\
&= \int_{p_n}^{\bar{v}} [h_n(v)]_+ g(v)\,dv \\
&\ge \int_{p_n}^{\bar{v}} h_n(v) g(v)\,dv \\
&= M(p_n) + \sum_j \lambda_j^n [p_n S(p_n) - q_j S(q_j)] \\
&\ge M(p_n) - \Gamma(p_n) \sum_j \lambda_j^n \frac{q_j - p_n}{q_j} \\
&= M(p_n) - \kappa_n \Gamma(p_n).
\end{aligned} \tag{L.18}$$

第一个不等式用到了 $[h_n(v)]_+ \geq h_n(v)$。第二个不等式根据$\Gamma(p_n)$的定义得出，该定义意味着

$$q_j S(q_j) - p_n S(p_n) \leq \Gamma(p_n) \frac{q_j - p_n}{q_j}.$$

这将个体乘子替换为 κ_n。将式（L.17）中的上界与式（L.18）中的下界代入式（L.15），得到

$$\begin{aligned} &\int_{p^*}^{\bar{v}} v g(v)\, dv + p^* G(p^*) S(p^*) - m(p_n) D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) \\ &\quad \geq M(p_n) - \kappa_n \Gamma(p_n) + (\kappa_n - 1) m(p_n) D_1(p_n, p_n \mid \phi_n). \end{aligned}$$

由于 $M(p_n) - \int_{p^*}^{\bar{v}} v g(v)\ dv = \int_{p_n}^{p^*} v g(v)\ dv$，整理可得

$$\begin{aligned} &(\kappa_n - 1)[m(p_n) D_1(p_n, p_n \mid \phi_n) - \Gamma(p_n)] \\ &\quad \leq \Gamma(p_n) - m(p_n) D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) + p^* G(p^*) S(p^*) - \int_{p_n}^{p^*} v g(v)\, dv. \end{aligned}$$

这正是式（I.1），从而证明了引理 I.1。 □

引理的证明S.1

沿用手稿中的假设： g 是在 $[0, \bar{v}]$上连续可微的对数凹密度，在 $(0, \bar{v})$ 上为正； G 是其分布函数； $S = 1 - G$；并且$m(v) = S(v)/g(v)$。基准 p^* 是完全匹配双寡头价格。回顾

$$\Gamma(p) = \sup_{q > p} \frac{q}{q - p}[qS(q) - pS(p)], \qquad B(v) = v\left[g(v) + \int_v^{\bar{v}} g(w)^2\, \mathrm{d}w\right],$$

其中， $S(q)$在支撑集之外 $= 0$ ，且价格下限满足 $B(p) = D_1(p^*, \underline{p}^* \mid \phi^{\text{full}})$。

将两个比较标准化固定 $p \in [\underline{p}, p^*)$。引理要求 $\Gamma(p)$ 小于两个量：基准项 $m(p) D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})$，以及该项加上积分调整 $\int_p^{p^*} v g(v)\, \mathrm{d}v - p^* G(p^*) S(p^*)$。

写出

$$r = \frac{p}{m(p)}, \qquad \gamma = \frac{\Gamma(p)}{S(p) m(p)},$$

并定义两个标准化基准

$$D = \frac{D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}})}{S(p)}, \qquad C = \frac{m(p)D_1(p^*, p^* \mid \phi^{\text{full}}) + \int_p^{p^*} vg(v)\,\mathrm{d}v - p^*G(p^*)S(p^*)}{S(p)m(p)}.$$

这里，利用 (LC.8) 和 m 的单调性，可得 $0 < r < 1$ by $p < p^* \le m(p^*) \le m(p)$，且$S(p)m(p) > 0$。由于 $(qS(q))'|_{q=p} = S(p)(1-r) > 0$，附近的向上偏离具有正收益。价格 $q \ge \bar{v}$ 的需求为零且收益为负，因此定义 $\Gamma(p)$ 的上确界等价于将范围限制在 $p < q \le \bar{v}$。

将所需的两个不等式同时除以 $S(p)m(p)$ 后，我们的目标变为

$$\gamma < \min\{D, C\}. \tag{S.1.1}$$

只需证明

$$\begin{aligned} &\gamma \le 1/4 < \min\{D, C\}, \quad 0 < r \le 1/6, \\ &\gamma \le Q(r) < \min\{D, C\}, \quad 1/6 \le r < 1, \end{aligned} \tag{S.1.2}$$

其中 $Q(r) = 1/e - 21r/100$。

在整个证明中，记 $u = p^*/m(p)$ 和 $y = S(p^*)/S(p)$。

A部分证明 $D > 1/4$ 对于 $0 < r \le 1/6$ 以及 $D > Q(r)$ 对于 $1/6 \le r < 1$。B部分证明 $\gamma \le 1/4$ 以及 $\gamma \le Q(r)$，C部分证明 $C > 1/4$ 以及 $C > Q(r)$，分别适用于这些范围。这些界推出 (S.1.2)。

A. 界定未调整基准 我们首先给出一些稍后会用到的结果。

命题 *A.1*。令 $\alpha(r) = e^{r-1} - e^{2r-2}/2$。我们有

$$0 < r < u \le 1, \quad 0 < S(p) < 1, \quad 0 < y < 1, \tag{S.1.3}$$

$$S(p) \ge e^{-r}, \qquad y \ge e^{r/u-1} \ge e^{r-1}. \tag{S.1.4}$$

此外，α 在 $[0,1]$ 上是非递减的。

命题 *A.1* 的证明。由于 $0 < p < p^* \le m(p^*) \le m(p)$，我们有 $0 < r < u \le 1$；密度为正可得其他范围。方程（LC.2）给出 $S(p) \ge e^{-r}$，

而（LC.1）给出

$$y \geq \exp\left(-\frac{p^* - p}{m(p^*)}\right) \geq \exp\left(-\frac{p^* - p}{p^*}\right) = e^{r/u-1}.$$

由于 $u \leq 1$，因此该值至少为 e^{r-1}。

最后，

$$\alpha'(r) = e^{r-1}(1 - e^{r-1}) \in [0, 1/4] \qquad (0 \leq r \leq 1),$$

因此 α 是非递减的。

断言 *A.2.* 我们有 $D \geq \alpha(r)$，并且

$$\begin{aligned} D &> 1/4, \quad 0 < r \leq 1/6, \\ D &> Q(r), \quad 1/6 \leq r < 1. \end{aligned}$$

*Pro*断言 *A.2* 的证明。 使用引理中的完全匹配需求公式B.2 ，

$$D = y(1 - S(p)y/2) \geq y - y^2/2 \geq \alpha(r).$$

第一个不等式使用了 $S(p) \leq 1$。第二个不等式成立，是因为 $y - y^2/2$ 在 $[0, 1]$上递增。

对于 $0 < r \leq 1/6$, $D \geq \alpha(r) \geq \alpha(0) > 1/4$。

对于 $1/6 \leq r < 1$, α 的单调性给出 $D \geq \alpha(1/6) > 1/3$, 而 $Q(r) \leq Q(1/6) < 1/3$。

B. 界定偏离收益

命题 *B.1.* 对于所有 $0 < r < 1$,

$$\gamma \leq Q(r). \tag{S.1.5}$$

命题 *B.1* 的证明。对于向上偏离 $p < q < \bar{v}$, 记 $x = (q - p)/m(p) > 0$以及 $T = S(q)/S(p)$。由（LC.1）, $T \leq e^{-x}$。取上确界之前的归一化偏离收益为

$$\gamma(r, x, T) = \frac{r + x}{x}[(r + x)T - r] = xT + (2T - 1)r - \frac{(1 - T)r^2}{x}. \tag{S.1.6}$$

它关于 T 单调递增，因为 $\partial\gamma(r,\ x,\ T)/\partial T = (r+x)^2/x > 0$。因此 $\gamma \le \sup_{x>0}\gamma(r,\ x,\ e^{-x})$。令 $c = 21/100$ 和 $\lambda = \log(2/(1-c))$。展开后，

$$\gamma(r,x,e^{-x}) + cr = -\frac{1-e^{-x}}{x}r^2 + (2e^{-x} - (1-c))r + xe^{-x}. \tag{S.1.7}$$

若 $x \ge \lambda$，则涉及 $r \ge 0$ 的两项均非正，因此（S.1.7）至多为 $xe^{-x} \le 1/e$。

若 $0 < x \le \lambda$，该表达式是关于 r 的凹二次函数，因此其在所有实数 r 上的最大值为

$$\begin{aligned}\gamma(r,x,e^{-x}) + cr &\le xe^{-x} + \frac{x(2e^{-x} - (1-c))^2}{4(1-e^{-x})} \\ &= \frac{(1-c)^2 x}{4} + \frac{(1+c)^2}{4}\frac{x}{e^x - 1} =: f(x).\end{aligned}$$

由于 $x/(e^x-1)$ 在 $x > 0$ 上是凸函数，且在零点处连续延拓取值为 1，f 在 $[0,\lambda]$ 上的最大值必在端点处取得。[14] 在 λ 处，（S.1.7）中的线性系数为零，因此 $f(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} \le 1/e$。在零点处，$f(0) = (1+c)^2/4 < 1/e$。因此，对每个 $x > 0$，$\gamma(r,x,e^{-x}) + cr \le 1/e$。取上确界即可证明（S.1.5）。

命题 *B.2.* 若 $0 < r \le 1/6$，则 $\gamma \le 1/4$。

命题 *B.2* 的证明。 对于 $0 \le v \le \bar{v}$，记 $I(v) = \int_v^{\bar{v}} g(w)^2 \mathrm{d}w$。步骤 1 证明 $I(p) \ge S(p)g(p)$；随后步骤 2 使用该不等式证明 $\gamma \le 1/4$。

步骤 1。 我们首先证明

$$I(p) \ge S(p)g(p). \tag{S.1.8}$$

根据定义，$B(v) = v[g(v) + I(v)]$ 以及 $B(p) = D_1(p^*,\ p^* \mid \phi^{\text{full}})$。求导并使用（LC.3）可得

$$\begin{aligned}B'(v) &= g(v) + I(v) + vg'(v) - vg(v)^2 \\ &\ge g(v)\left[1 - \frac{v}{m(v)}(1 + S(v))\right] + I(v).\end{aligned}$$

函数 $v/m(v)$ 单调不减，因此对于 $v \in [p,\bar{p}]$，有 $v/m(v) \le r \le 1/6$。由于 $S(v) \le 1$ 且 $I(v) > 0$，所示导数为正。因此

[14] 对于 $x > 0$，$x/(e^x-1)$ 的二阶导数的符号与 $(x-2)e^x + x + 2$ 相同。该表达式及其一阶导数在零点均为零，而其二阶导数为 $xe^x \ge 0$。根据 $(e^x-1)/x \to 1$，可在零点处延拓。

$B(p) \geq B(\underline{p}) = D_1(p^*,\ p^* \mid \phi^{\text{full}})$。将此不等式除以 $S(p)$，并利用 $p/S(p) = r/g(p)$，可得

$$D = \frac{B(\underline{p})}{S(p)} \leq \frac{B(p)}{S(p)} = r\left(1 + \frac{I(p)}{g(p)}\right).$$

命题 A.1 中的导数界意味着 $\alpha(r) - 2r$ 是递减的。由于 $\alpha(1/6) > 1/3$，可知 $\alpha(r) > 2r$ 对 $0 \leq r \leq 1/6$成立。结合断言 A.2 可得

$$2r < \alpha(r) \leq D \leq r\left(1 + \frac{I(p)}{g(p)}\right).$$

由于 $r > 0$，我们得出 $I(p)/g(p) > 1 \geq S(p)$，这意味着（S.1.8）。

步骤 2。如果（S.1.8）成立，那么 $\gamma \leq 1/4$。

令 $\xi = S^{-1}$ 且 $J(w) = g(\xi(w))$ 对于 $0 \leq w \leq 1$成立。对于 $0 < w < 1$，求导得到

$$\xi'(w) = -\frac{1}{J(w)}, \qquad J'(w) = -(\log g)'(\xi(w)).$$

由于 ξ和 $(\log g)'$ 均为非递增函数，它们的复合函数 $(\log g)' \circ \xi$ 是非递减的。因此，J' 在 $(0,\ 1)$ 上非递增，所以 J在该区间上是凹函数；根据连续性，它在 $[0, 1]$上也是凹函数。这里没有用到 g的二阶导数。[15] 代入 $w = S(v)$ 也可得

$$I(p) = \int_0^{S(p)} J(w)\,\mathrm{d}w, \qquad J(S(p)) = g(p).$$

对 $[0, S(p)]$, 应用詹森不等式，再结合S.1.8，可得

$$J(S(p)/2) \geq \frac{1}{S(p)} \int_0^{S(p)} J(w)\,\mathrm{d}w \geq J(S(p)).$$

连接 $S(p)/2$ 和 $S(p)$ 处估值的弦至少为 $J(S(p))$。利用 $J(0) \geq 0$，连接 0 和 $S(p)/2$ 的弦至少为 $2wJ(S(p))/S(p)$。因此，由凹性可得

$$J(w) \geq \begin{cases} 2wJ(S(p))/S(p), & 0 \leq w \leq S(p)/2, \\ J(S(p)), & S(p)/2 \leq w \leq S(p). \end{cases} \tag{S.1.9}$$

[15]分位数凹性是标准结论：参见 S. G. Bobkov，对数凹分布中半空间的极值性质，《概率年刊》24（1996年），35–48，第 A.1(a)、(c) 命题，第45–46页；作者托管的已发表论文。上述简短验证涵盖了当前假设；接下来的能量论证将在本文中证明。

这些轮廓下界通过其归一化增量给出了偏离价格的上界，可将其代入归一化收益 $\gamma(r,\ x,\ T)$。

对于 $p < q < \bar{v}$，记 $x = (q-p)/m(p)$ 和 $T = S(q)/S(p) \in (0,1)$。由于 $m(p)J(S(p)) = S(p)$，对（S.1.9）进行倒数积分可得

$$x = \frac{1}{m(p)} \int_{S(p)T}^{S(p)} \frac{\mathrm{d}w}{J(w)} \le \begin{cases} 1-T, & T \ge 1/2, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1}{2T}, & T \le 1/2. \end{cases} \tag{S.1.10}$$

对于第二分支，从 $S(p)/2$ 到 $S(p)$ 的部分至多贡献 $1/2$，而从 $S(p)T$ 到 $S(p)/2$ 的部分至多贡献 $m^{1}(p) \int_{S}^{S(p)/[2wJ(S(p))]} \mathrm{d}w = \frac{1}{2}\log(1/(2T))$.

对于固定的 $r \ge 0$ 和 $0 < T < 1$，归一化收益（S.1.6）满足

$$\frac{\partial \gamma(r,x,T)}{\partial x} = T + \frac{(1-T)r^2}{x^2} > 0.$$

若 $T \ge 1/2$,

$$\gamma(r,x,T) \le \gamma(r,1-T,T) = (r+1-T)(T-r) \le \frac{1}{4},$$

其中两个因子的和为一。

若 $0 < T \le 1/2$，涉及 r 的两个项在（S.1.6）中均非正。因此，（S.1.10）中的第二个界给出

$$\gamma(r,x,T) \le xT \le \frac{T}{2}\left(1 + \log\frac{1}{2T}\right) \le \frac{1}{4}.$$

对于最后一个不等式，$T[1+\log(1/(2T))]/2$ 在 $(0,1/2]$ 上的导数为 $\frac{1}{2}\log(1/(2T)) \ge 0$，并在 $T = 1/2$ 处等于 $1/4$。对向上偏离取上确界，即可证明该命题。

C. 界定两个范围内的调整后的基准 r 我们先在命题 C.1 中证明一个有用的结果，然后在命题 C.2 中利用该结果证明 $C > 1/4$ 适用于 $0 < r \le 1/6$，而 $C > Q(r)$ 适用于 $1/6 \le r < 1$。

命题 *C.1*。我们有

$$C \ge r(1-\sqrt{y}) + u\sqrt{y} + (1-2u)(y - S(p)y^2/2), \tag{S.1.11}$$

以及 $y > 9/25$ 和 $S(p) > 5/6 - r/2$。

命题 *C.1* 的证明。分部积分得

$$\int_p^{p^*} vg(v)\,\mathrm{d}v = pS(p) - p^*S(p^*) + \int_p^{p^*} S(v)\,\mathrm{d}v.$$

由于 $G(p^*) = 1 - S(p)y$，将此恒等式代入 C，得

$$\begin{aligned} C &= y(1 - S(p)y/2) + r - uy + \frac{1}{S(p)m(p)} \int_p^{p^*} S(v)\,\mathrm{d}v - uy(1 - S(p)y) \\ &= r + \frac{1}{S(p)m(p)} \int_p^{p^*} S(v)\,\mathrm{d}v + (1-2u)y(1 - S(p)y/2). \end{aligned}$$

的对数凹性 S 和（LC.7）给出 $S\left(p + \left(p^* - p\right)\tau\right)/S\left(p\right) \geq y^\tau$ 对于 $0 \leq \tau \leq 1$。代入 $v = p + \left(p^* - p\right)\tau$，得到

$$\frac{1}{S(p)m(p)} \int_p^{p^*} S(v)\,\mathrm{d}v = (u-r) \int_0^1 \frac{S(p + (p^* - p)\tau)}{S(p)}\,\mathrm{d}\tau \geq (u-r) \int_0^1 y^\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

P对 τ和 $1-\tau$进行平均，并应用算术几何平均不等式 ，

$$\int_0^1 y^\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^\tau + y^{1-\tau})\,\mathrm{d}\tau \geq \sqrt{y}.$$

代入此界即可证明（S.1.11）。由（S.1.4），$y \geq e^{r/u-1} > 1/e > 9/25$。此外，$e^{-r}$ 在 $2/3$ 处的切线不等式给出

$$S(p) \geq e^{-r} \geq e^{-2/3}(5/3 - r) > \frac{5}{6} - \frac{r}{2}, \tag{S.1.12}$$

其中 $e^{-2/3} > 1/2$ 和 $5/3 - r > 0$。

命题 *C.2.* 我们有

$$\begin{aligned} C &> 1/4, \quad 0 < r \leq 1/6, \\ C &> Q(r), \quad 1/6 \leq r < 1. \end{aligned}$$

证明 命题 *C.2*。对于 $1/6 \leq r < 1$，只需证明 $C \geq 11/30 - r/5$，因为 e

$$\frac{11}{30} - \frac{r}{5} - Q(r) = \frac{11}{30} - \frac{1}{e} + \frac{r}{100} \geq \frac{221}{600} - \frac{1}{e} > 0.$$

对于 $u \le 1/2$，由于 $S(p) \le 1$ 且 $1-2u \ge 0$，(S.1.11) 得到

$$C \ge (1-2u)[r(1-\sqrt{y}) + y - y^2/2] + 2u[r(1-\sqrt{y}) + \sqrt{y}/2].$$

情形 1：$u \le 1/2$ 和 $0 < r \le 1/6$。命题 A.1–A.2 以及 $r(1-\sqrt{y}) \ge 0$ 给出

$$r(1-\sqrt{y}) + y - y^2/2 \ge \alpha(r) \ge \alpha(0) > \frac{1}{4}, \qquad r(1-\sqrt{y}) + \sqrt{y}/2 > \frac{1}{4}.$$

第二个界利用了命题 C.1 中的 $y > 9/25$。它们的凸组合严格高于 $1/4$。

情形 2：$u \le 1/2$ 和 $1/6 \le r < 1$。我们有 $r/u \ge 1/3$。因此 $y \ge e^{r/u-1} \ge e^{-2/3} > 1/2$。$y - y^2/2$ 在 $[0,1]$ 上的单调性给出 $r(1-\sqrt{y}) + y - y^2/2 > 3/8$。此外，

$$r(1-\sqrt{y}) + \sqrt{y}/2 \ge \frac{1}{6}(1-\sqrt{y}) + \frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{y}}{3} > \frac{11}{30}.$$

因此，两个表达式都超过 $11/30 - r/5$，而它们的凸组合证明了该情形下的界。

对于 $u \ge 1/2$，定义

$$F(r,y) = r + (1-r)\sqrt{y} - y + \left(\frac{5}{12} - \frac{r}{4}\right) y^2.$$

对于每个 $0 < r < 1$，命题 C.1 给出 $S(p) > 5/6 - r/2$。由于 (S.1.11) $1-2u \le 0$，可得

$$C \ge (2-2u)[r(1-\sqrt{y}) + \sqrt{y}/2] + (2u-1)F(r,y). \tag{S.1.13}$$

这些权重均为非负数，且总和为一。

情形 3：$u \ge 1/2$ 和 $1/6 \le r < 1$。与情形 2 一样，$r(1-\sqrt{y}) + \sqrt{y}/2 \ge 1/6 + \sqrt{y}/3 > 11/30$。

为界定 F，我们验证其三个 r 端点，包括 $r = 0$，以便用于情形 4。对于 $1/4 \le y \le 1$，

$$\begin{aligned} 24[F(1/6,y) - 1/3] &= 9y^2 - 24y + 20\sqrt{y} - 4 \\ &= \left[3(1-\sqrt{y})^2 + (2\sqrt{y}-1)^2\right]^2 \\ &\quad + 20(2\sqrt{y}-1)(1-\sqrt{y})^3 > 0. \end{aligned} \tag{S.1.14}$$

这两项在 $[1/4,1]$ 上均非负，并且平方项严格为正，因为 $1-\sqrt{y}$ 和 $2\sqrt{y}-1$ 不可能同时为零。因此

$$\begin{aligned} F(1/6,y) &> \frac{1}{3}, \\ F(0,y) = F(1/6,y) - \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{y}}{6} + \frac{y^2}{24} &> \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{S.1.15}$$

对于第二次比较，使用 $y \geq 1/4$。在另一个端点，

$$F(1,y) = 1 - y + \frac{1}{6}y^2 \geq \frac{1}{6},$$

因为其导数 $-1+y/3$ 在 $[0,1]$，上非正，且其在 1 处的值为 $1/6$。

由于 F 是关于 r 的仿射函数，对于 $1/6 \leq r \leq 1$，

$$\begin{aligned} F(r,y) &= \frac{6(1-r)}{5}F(1/6,y) + \frac{6r-1}{5}F(1,y) \\ &\geq \frac{6(1-r)}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6r-1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{30} - \frac{r}{5}. \end{aligned}$$

实际的 $y > 9/25$ 属于 $[1/4,1]$，因此这些界适用。将它们与（S.1.13）结合，即可证明此情形下的界。

情形 *4*：$u \geq 1/2$ 且 $0 < r \leq 1/6$。对于 $0 \leq r \leq 1/6$，仿射插值与（S.1.15）给出

$$F(r,y) = (1-6r)F(0,y) + 6rF(1/6,y) > \frac{1}{4}.$$

两个端点处的值都严格大于 $1/4$。此外，$r(1-\sqrt{y}) + \bar{}\sqrt{y}/2 \bar{>} 1/4$ 由 $y > 9/25$给出。代入（S.1.13）即可证明此情形下的界。

这些界证明了（S.1.2），从而证得（S.1.1）。两边乘以 $S(p)m(p) > 0$，即可得到引理 S.1 中的严格不等式。 □

加权平均指数不等式

引理 4（加权平均指数不等式）。设 $\omega \in (0,1)$，并假设 e

$$t \geq \log\frac{2-\omega}{2(1-\omega)}, \qquad k \geq 2t, \qquad \omega t + (1-\omega)k \geq 1.$$

那么，对于每个 $z \geq 1$,

$$\omega e^{-t(z-1)} + (1-\omega)e^{-k(z-1)} \leq \frac{1}{z}.$$

引理4的证明。等号在 $z = 1$处成立，因此固定 $z > 1$。固定 t时，左侧表达式随 k 增大而减小。因此，我们可以取最小的可取值,

$$k = \max\left\{2t, \frac{1-\omega t}{1-\omega}\right\}.$$

沿着分支 $k = 2t$，该表达式随 t 增大而减小。沿着另一分支，其关于 t 的导数为

$$-\omega(z-1)\left[e^{-t(z-1)} - e^{-k(z-1)}\right] \leq 0.$$

两条分支在交点处相等。因此，只需在以下情形下证明该结果

$$t = \log\frac{2-\omega}{2(1-\omega)}, \qquad k = \max\left\{2t, \frac{1-\omega t}{1-\omega}\right\}. \tag{22}$$

首先，我们说明如何由一个较简单的不等式推出所需的指数界。积分可得

$$e^{-(z-1)t} = 1 - (z-1)t + (z-1)^2 \int_0^\infty e^{-(z-1)u}(t-u)_+ \, du,$$

将 t 换成 k 后，同一恒等式仍成立。取它们的加权平均可得

$$\begin{aligned} &\omega e^{-t(z-1)} + (1-\omega)e^{-k(z-1)} \\ &\quad = 1 - (z-1)[\omega t + (1-\omega)k] \\ &\qquad + (z-1)^2 \int_0^\infty e^{-(z-1)u}\left[\omega(t-u)_+ + (1-\omega)(k-u)_+\right] du. \end{aligned} \tag{23}$$

假设我们可以确立

$$\omega t + (1-\omega)k = 1 \tag{24}$$

and

$$\omega(t-u)_+ + (1-\omega)(k-u)_+ \leq e^{-u} \qquad \text{for every } u \geq 0. \tag{25}$$

将这些代入（23）后，我们得到

$$\begin{aligned}\omega e^{-t(z-1)} + (1-\omega)e^{-k(z-1)} &\le 1 - (z-1) + (z-1)^2 \int_0^\infty e^{-zu}\, du \\ &= 1 - (z-1) + \frac{(z-1)^2}{z} = \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

因此，(24) 和 (25) 足以得到所需结果。

接下来，我们证明 (25) 可由一个更简单的条件推出。若 $0 \le u \le t$，则 (24) 给出

$$\omega(t-u) + (1-\omega)(k-u) = 1 - u \le e^{-u}.$$

若 $u \ge k$，则 (25) 的左侧为零。最后，对于 $t < u < k$，考虑差值

$$(1-\omega)(k-u) - e^{-u}.$$

它关于 u 的导数为 $-(1-\omega) + e^{-u}$，二阶导数为 $-e^{-u} < 0$。其全局最大值在 $u = -\log(1-\omega)$ 处取得，且最大值为

$$(1-\omega)[k + \log(1-\omega) - 1].$$

因此，只要25) 成立

$$k + \log(1-\omega) \le 1. \tag{26}$$

因此，我们将证明简化为验证以下两个性质

$$\omega t + (1-\omega)k = 1, \qquad k + \log(1-\omega) \le 1.$$

我们在（22）中的两种情形下对它们进行验证。

情形 *1*： $k = 2t$。这里

$$\omega t + (1-\omega)k = (2-\omega)t \ge 1.$$

按比例降低两种风险率，直到其加权平均等于一。这只会增大指数表达式。所得风险率为

$$t = \frac{1}{2-\omega}, \qquad k = \frac{2}{2-\omega}.$$

根据构造，均值为一条件成立，并且

$$-\log(1-\omega) \geq \omega \geq \frac{\omega}{2-\omega}$$

意味着

$$k + \log(1-\omega) = \frac{2}{2-\omega} + \log(1-\omega) \leq 1.$$

因此，约化速率满足这两个充分条件，从而证明了此情形下的结论。

情形 *2:* $k = (1-\omega t)/(1-\omega) > 2t$. 加权均值恰好为一。将 k 和 t 代入 (22) 中的表达式，可得

$$\begin{aligned} & k + \log(1-\omega) \leq 1 \\ \iff \quad & \frac{1-\omega t}{1-\omega} + \log(1-\omega) \leq 1 \\ \iff \quad & \omega t - (1-\omega)\log(1-\omega) - \omega \geq 0 \\ \iff \quad & \omega \log \frac{2-\omega}{2} - \log(1-\omega) - \omega \geq 0. \end{aligned}$$

将最后一个左端记为 $\psi(\omega)$。直接求导可得

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \qquad \psi''(\omega) = \frac{\omega(\omega^2 - 5\omega + 5)}{(1-\omega)^2(2-\omega)^2} \geq 0, \qquad 0 < \omega < 1.$$

因此 $\psi'(\omega) \geq 0$ 且 $\psi(\omega) \geq 0$。这证明了（26）。因此，本例中这两个充分条件也都成立，证明完毕。 □

参考文献

Ali, S. Nageeb、Greg Lewis 和 Shoshana Vasserman。2023年。《自愿披露与个性化定价》。 经济研究评论 90 (2):538–571。Armstrong, Mark 和 John Vickers。2022年。《竞争互动模式》。 《计量经济学》 90 (1):153–191。Armstrong, Mark 和 Jidong Zhou。2022年。《消费者信息与竞争的局限》。 《美国经济评论》112 (2):534–577。Bagnoli, Mark 和 Ted Bergstrom。2005年。《对数凹概率及其应用》。 《经济理论》 26 (2):445–469。Bergemann, Dirk、Benjamin Brooks 和 Stephen Morris。2015年。《价格歧视的局限》。 《美国经济评论》105 (3):921–957。Boyd, Stephen 和 Lieven Vandenberghe。2004年。 《凸优化》。剑桥大学出版社。Condorelli, Daniele 和 Bal´azs Szentes。2020年。《敲竹杠问题中的信息设计》。 《政治经济学杂志》128 (2):681–709。———。2026年。《买方最优平台设计》。 《兰德经济学杂志》57 (2):285–299。Dinerstein, Michael、Liran Einav、Jonathan Levin 和 Neel Sundaresan。2018年。《互联网商务中的消费者价格搜索与平台设计》。 《美国经济评论》108 (7):1820–1859。Elliott, Matthew、Andrea Galeotti、Andrew Koh 和 Wenhao Li。2026年。《通过信息进行市场细分》。 经济研究评论 在线优先发表，rdag067。Haghpanah, Nima 和 Ron Siegel。2023年。《多产品市场的帕累托改进型细分》。 《政治经济学杂志》131 (6):1546–1575。Ichihashi, Shota 和 Alex Smolin。2026年。《算法推荐与策略性定价》。网址 https://arxiv.org/abs/2309.12122v5。工作论文。Pr´ekopa, Andr´as。1973年。《对数凹测度与函数》。 《数学学报》 34:335–343。Roesler, Anne-Katrin 和 Bal´azs Szentes。2017年。《买方最优学习与垄断定价》。 《美国经济评论》107 (7):2072–2080。